《数学软件》上机实践第四次作业

姓名：林安赐　　　　班级：数学2019-2　　　　学号：1910730212

一、矩阵

1、已知4阶魔方矩阵A

```
A=magic(4)
```

```
A = 4×4
    16     2     3    13
     5    11    10     8
     9     7     6    12
     4    14    15     1
```

写出实现下列要求的Matlab命令：

1）用二元下标读取11

```
A(2,2)
```

```
ans = 11
```

2）用一元下标读取6

```
A(11)
```

```
ans = 6
```

3）读取3所在的列

```
A(:,3)
```

```
ans = 4×1
     3
    10
     6
    15
```

4）读取1所在的行

```
A(4,:)
```

```
ans = 1×4
     4    14    15     1
```

5）读取矩阵 $\begin{bmatrix} 11 & 10 & 8 \\ 14 & 15 & 1 \end{bmatrix}$

```
A([2,4],2:4)
```

```
ans = 2×3
    11    10     8
    14    15     1
```

6）用一元下标读取矩阵中间两列（请注意读取后保持为两列，需要用reshape改变形状）

```
B=A([2,3,6,7,10,11,14,15]);
reshape(B,4,2)
```

```
ans = 4×2
     5    10
     9     6
    11     8
     7    12
```

2、已知4阶帕斯卡矩阵A

```
A=pascal(4)
```

```
A = 4×4
     1     1     1     1
     1     2     3     4
     1     3     6    10
     1     4    10    20
```

写出实现下列要求的Matlab命令，每个命令都以前一个命令的结果作为输入：

1）将矩阵A的第三行改为[4,3,2,1]，得到矩阵B

```
A(3,:)=[4,3,2,1]
```

```
A = 4×4
     1     1     1     1
     1     2     3     4
     4     3     2     1
     1     4    10    20
```

2）删除矩阵B的第二列，得到矩阵C

```
C=A(:,[1,3,4])
```

```
C = 4×3
     1     1     1
     1     3     4
     4     2     1
     1    10    20
```

3）在矩阵C的最下面增加一行[5,6,7]，得到矩阵D

```
C(5,:)=[5,6,7]
```

```
C = 5×3
     1     1     1
     1     3     4
```

```
     4     2     1
     1    10    20
     5     6     7
```

3、已知矩阵两个随机矩阵A和B（随机矩阵每次运行结果不同）

```
A=randi(9,2,3)
```

```
A = 2×3
     8     2     6
     9     9     1
```

```
B=randi(9,3,2)
```

```
B = 3×2
     3     9
     5     2
     9     9
```

写出生成如下矩阵的Matlab，其中O表示全0方阵，E表示全1方阵

1）$C = [A', B]$

```
C=[A',B]
```

```
C = 3×4
     8     9     3     9
     2     9     5     2
     6     1     9     9
```

2）$D = \begin{bmatrix} A \\ B' \end{bmatrix}$

```
D=[A;B']
```

```
D = 4×3
     8     2     6
     9     9     1
     3     5     9
     9     2     9
```

3）$F = \begin{bmatrix} A & O \\ E & B \end{bmatrix}$

```
F=[A,zeros(2,2);ones(3,3),B]
```

```
F = 5×5
     8     2     6     0     0
     9     9     1     0     0
     1     1     1     3     9
     1     1     1     5     2
     1     1     1     9     9
```

4、已知随机方阵阵A，

```
A=randi(9,3,3)
```

```
A = 3×3
     9     2     8
     5     4     9
     8     9     6
```

写出下列Matlab命令

1）$B = 2A^3$

```
B=2*(A^3)
```

```
B = 3×3
        5978        3888        5900
        5616        3744        5678
        6926        4766        6720
```

2）$C = \{a_{ij}^2\}_{i,j=1}^n$

```
C=A.^2
```

```
C = 3×3
    81     4    64
    25    16    81
    64    81    36
```

3）$D = A(B - C)$

```
D=A*(B-C)
```

```
D = 3×3
      119151       79892      117190
      113607       76497      111724
      138667       92734      137165
```

4）求D的秩

```
rank(D)
```

```
ans = 3
```

5）求$A + 5E$的行列式（E为单位矩阵）

```
det(A+5.*eye(3))
```

```
ans = 70
```

5、已知矩阵

```
A=randi(9,4,4)
```

```
A = 4×4
     2     4     3     9
     2     6     5     5
     5     3     7     2
     9     7     9     2
```

按要求写出Matlab命令

1）求矩阵的特征多项式p

```
p=poly(A)
```

```
p = 1×5
    1.0000  -17.0000  -74.0000  456.0000 -676.0000
```

2）求矩阵的特征值D和特征向量V

```
[V,D]=eig(A)
```

```
V = 4×4 complex
   0.4908 + 0.0000i   0.6635 + 0.0000i  -0.3784 + 0.3467i  -0.3784 - 0.3467i
   0.4487 + 0.0000i   0.2414 + 0.0000i  -0.3300 - 0.4614i  -0.3300 + 0.4614i
   0.3995 + 0.0000i  -0.1962 + 0.0000i   0.6160 + 0.0000i   0.6160 + 0.0000i
   0.6311 + 0.0000i  -0.6805 + 0.0000i  -0.1002 + 0.1593i  -0.1002 - 0.1593i
D = 4×4 complex
  19.6721 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i  -6.6630 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   1.9954 + 1.0843i   0.0000 + 0.0000i
   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   1.9954 - 1.0843i
```

3）计算矩阵A所有特征值的和与它的迹的差

```
sum(D)-trace(A)
```

```
ans = 1×4 complex
   2.6721 + 0.0000i -23.6630 + 0.0000i -15.0046 + 1.0843i -15.0046 - 1.0843i
```

4）求矩阵A的特征值绝对值得最大值a

```
a=max(abs(D))
```

```
a = 1×4
   19.6721    6.6630    2.2710    2.2710
```

5）计算矩阵 $A+(a+1)E$ 的逆

```
inv(A+(a+1)*eye(4))
```

```
ans = 4×4
```

```
    0.6446   -1.1296   -0.9824    1.2543
    0.0980   -0.0926   -0.5845    0.5015
   -1.4853    2.4444    2.6339   -3.0116
   -0.4436    0.9259    1.0247   -1.2550
```

二、稀疏矩阵

1、用两种方法构造稀疏矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 4 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

1）先构造一般矩阵B

```
B=[0,1,2,0,0;0,0,0,0,3;0,4,0,0,5]
```

```
B = 3×5
     0     1     2     0     0
     0     0     0     0     3
     0     4     0     0     5
```

2）将一般矩阵转化为稀疏矩阵A

```
A=sparse(B)
```

```
A = 
   (1,2)        1
   (3,2)        4
   (1,3)        2
   (2,5)        3
   (3,5)        5
```

3）构造稀疏矩阵行标号数组I

```
I=[1,1,2,3,3]
```

```
I = 1×5
     1     1     2     3     3
```

4）构造稀疏矩阵列标号数组J

```
J=[2,2,5,2,5]
```

```
J = 1×5
     2     2     5     2     5
```

5）构造稀疏矩阵数值数组V

```
V=[1,2,3,4,5]
```

```
V = 1×5
```

```
     1     2     3     4     5
```

6）用I，J，V构造稀疏矩阵A

```
A=sparse(I,J,V,3,5)
```

```
A =
   (1,2)        3
   (3,2)        4
   (2,5)        3
   (3,5)        5
```

2、按照要求写出下列Matlab语句，不允许使用将一般矩阵转化成稀疏矩阵的方法

1）创建一个4阶稀疏矩阵A，其反对角线上的数值为魔方矩阵对应位置的数值

```
A=sparse(1:4,1:4,diag(magic(4)))
```

```
A =
   (1,1)       16
   (2,2)       11
   (3,3)        6
   (4,4)        1
```

2）利用命令randi生成一个5行4列的矩阵B，其元素值在1~9之间，然后将其小于7的数值修改为0

```
B=randi(9,5,4)
```

```
B = 5×4
     2     9     4     2
     6     5     5     4
     3     7     7     1
     9     9     8     5
     2     3     1     4
```

```
B(B<7)=0
```

```
B = 5×4
     0     9     0     0
     0     0     0     0
     0     7     7     0
     9     9     8     0
     0     0     0     0
```

3）查看矩阵B中非零项的个数

```
nnz(sparse(B))
```

```
ans = 6
```

4）求矩阵B非零项的值v及行i和列j的数组

```
[i,j,v]=find(sparse(B))
```

```
i = 6×1
     4
     1
     3
     4
     3
     4
j = 6×1
     1
     2
     2
     2
     3
     3
v = 6×1
     9
     9
     7
     9
     7
     8
```

三、线性方程组的解法

1、首先按如下方法构造一个代数方程组，

1）构造一个5阶的随机方阵A，其元素值在1~9之间

```
A=randi(9,5,5)
```

```
A = 5×5
     5     7     4     5     1
     7     6     6     5     1
     7     4     7     9     1
     8     1     1     8     8
     3     8     2     7     9
```

2）构造一个全1的5维列向量y，然后令$b = Ay$，后面的程序求解方程$Ax = b$，这个方程的解应该是全1的列向量

```
y=ones(5,1)
```

```
y = 5×1
     1
     1
     1
     1
     1
```

```
b=A*y
```

```
b = 5×1
    22
    25
    28
    26
    29
```

3）利用命令linsolve求解方程 $Ax = b$

```
linsolve(A,b)
```

```
ans = 5×1
     1
     1
     1
     1
     1
```

4）利用矩阵求逆求解方程 $Ax = b$

```
inv(A)*b
```

```
ans = 5×1
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
```

5）利用命令₩求解方程 $Ax = b$

```
A\b
```

```
ans = 5×1
     1
     1
     1
     1
     1
```

6）利用命令mrdivide求解方程 $xA' = b'$

```
mrdivide(b',A')
```

```
ans = 1×5
    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000    1.0000
```

2、按照第1题的方法重新构造一个6阶的代数方程组 $Ax = b$，然后完成下面的步骤：

1）首先研究下三角方程的求解方法，考虑下三角方程 $Lx = b$，其中

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

求解方程的方法可以写成如下公式：

$$\begin{cases} x_1 = b_1/l_{11} \\ x_i = \left(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}x_k\right)/l_{ii}, \quad i = 2, \cdots, n \end{cases}$$

取L为矩阵A的下三角部分，y为全1列向量，b=Ly. 写一段代码验证上面的方法，即求解下三角方程$Lx = b$

```
A=randi(9,6,6);
y=ones(6,1);
L=tril(A);
b=L*y;
linsolve(L,b)
```

```
ans = 6×1
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
    1.0000
```

```
C=zeros(6,1);
C(1)=b(1)/L(1,1);
for i=2:6
    s=0;
    for k=1:i-1
        s=s+L(i,k)*C(i-1);
    end
    C(i)=(b(i)-s)/L(i,i);
end
C
```

```
C = 6×1
     1
     1
     1
     1
     1
     1
```

2）类似的方法可以求解下三角矩阵$Ux = b$，其中

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

求解方程的方法可以写成如下公式：

$$\begin{cases} x_n = b_n / u_{nn} \\ x_i = \left(b_i - \sum_{k=i+1}^{n} u_{ik} x_k \right) / u_{ii}, \quad i = n-1, \cdots, 1 \end{cases}$$

取U为矩阵A的上三角部分，y为全1列向量，b=Uy. 写一段代码验证上面的方法，即求解下三角方程$Ux = b$

```
U=triu(A);
b=U*y;
linsolve(U,b)
```

```
ans = 6×1
     1
     1
     1
     1
     1
     1
```

```
C=zeros(6,1);
C(6)=b(6)/U(6,6);
for i=5:-1:1
    s=0;
    for k=i+1:6
        s=s+U(i,k)*C(k);
    end
    C(i)=(b(i)-s)/U(i,i);
end
C
```

```
C = 6×1
     1
     1
     1
     1
     1
     1
```

3）利用LU分解求解代数方程组$Ax = b$，首先做LU分解，然后求解方程组。即依顺序完成下面步骤$A = LU$，$Ly = b$，$Ux = y$，求解后面两个方程不能直接使用Matlab的命令，要使用前面完成的Matlab代码。

```
[L,U,P]=lu(A);
C=zeros(6,1);
C(1)=b(1)/L(1,1);
for i=2:6
    s=0;
    for k=1:i-1
        s=s+L(i,k)*C(i-1);
    end
    C(i)=(b(i)-s)/L(i,i);
end
C
```

```
C = 6×1
```

```
    34.0000
    11.0000
     7.3750
     7.5788
    -5.6462
    14.3473
```

```
C=zeros(6,1);
C(6)=b(6)/U(6,6);
for i=5:-1:1
    s=0;
    for k=i+1:6
        s=s+U(i,k)*C(k);
    end
    C(i)=(b(i)-s)/U(i,i);
end
C
```

```
C = 6×1
     0.2975
     3.7780
     1.9969
     1.7058
    -0.9158
     0.2246
```

4）利用QR分解求解代数方程组 $Ax = b$，首先做QR分解，然后求解方程组。即依顺序完成下面步骤 $A = QR,\ Rx = Q'b$，求解方程不能直接使用Matlab的命令。

```
[Q,R,P]=qr(A);
C=R\(Q\b)
```

```
C = 6×1
   265.3444
   492.1772
  -729.6835
   407.2678
  -334.9924
  -263.2469
```

3、下面研究矩阵的Cholesky分解和迭代法，首先构造一个正定对称矩阵，然后构造方程组进行求解

1）构造一个严格下三角矩阵L

```
A=randi(9,3,3);
L=tril(A)-diag(diag(A))
```

```
L = 3×3
     0     0     0
     6     0     0
     9     8     0
```

2）令B=L+L'

```
B=L+L'
```

```
B = 3×3
     0     6     9
     6     0     8
     9     8     0
```

3）求矩阵B每一行数值的和，得到向量b

```
b=sum(B,2)
```

```
b = 3×1
    15
    14
    17
```

4）一般主对角占优的矩阵是正定矩阵，所以将向量b的每一行元素加1，转化为对角矩阵后和B相加，得到矩阵A

```
A=B+diag(b+1)
```

```
A = 3×3
    16     6     9
     6    15     8
     9     8    18
```

5）构造$b = Ay$，其中y为全1列向量

```
y=ones(3,1)
```

```
y = 3×1
     1
     1
     1
```

6）利用Cholesky分解求解方程$Ax = b$

```
R=chol(A);
x=R\(R'\b)
```

```
x = 3×1
    0.4819
    0.4789
    0.4906
```

7）代数方程组的迭代方法会有收敛条件，一般主对角占优的矩阵对于Jacobi和Gauss-Seidel迭代都是收敛的，编写代码用Jacobi迭代求解方程$Ax = b$，当两次迭代的误差1模小于10^{-6}时停止迭代，输出迭代次数和解

```
X0=[0,0,0]';
D=diag(diag(A));
L=(-1).*(tril(A)-D);
U=(-1).*(triu(A)-D);
B=inv(D)*(L+U);
```

```
f=inv(D)*b;
X=B*X0+f;
i=0;
while abs(norm(X)-norm(X0))>10.^(-6)
    X0=X;
    X=B*X+f;
    i=i+1;
end
X
```

```
X = 3×1
    0.4819
    0.4789
    0.4906
```

```
i
```

```
i = 227
```

8）编写代码用Gauss-Seidel迭代求解方程 $Ax = b$ ，，当两次迭代的误差无穷模小于 10^{-6} 时停止迭代，输出迭代次数和解

```
X0=[0,0,0]';
D=diag(diag(A));
L=(-1).*(tril(A)-D);
U=(-1).*(triu(A)-D);
B=inv(D-L)*U;
f=inv(D-L)*b;
X=B*X0+f;
i=0;
while abs(norm(X)-norm(X0))>10.^(-6)
    X0=X;
    X=B*X+f;
    i=i+1;
end
X
```

```
X = 3×1
    0.4819
    0.4789
    0.4906
```

```
i
```

```
i = 12
```

4、利用初等变换求解方程组，首先构造一个5阶方阵A，令 $b = Ay$ ，其中y为全1的列向量，去掉矩阵A和向量b的第2行和第4行，求解方程的通解。

```
A=randi(9,5,5);
y=ones(5,1);
b=A*y;
```

```
A=A([1,3,5],:);
b=b([1,3,5],:);
rref(A)
```

```
ans = 3×5
     1          0          0
     0          1          0
     0          0          1
```

求解完成后应该将得到的解写成数学的形式，可以采用如下四种方法之一：

1）请自行研究Matlab实时编辑器中的方程菜单，此菜单会在选择“插入—>方程”（或按Ctrl+Shift+E）后显示。也可以采用Latex的公式输入方法（或按Ctrl+Alt+G）；

2）可以在Word的公式编辑器中输入，截图插入下面；

3）如果不会输入公式，请手写拍照插图；

4）在下面敲足够多的回车，留出空白，打印作业后加入手写公式。

得到方程的通解如下：

$$X_1+\frac{31}{15}X_4+\frac{53}{30}X_5=0$$

$$X_2-\frac{11}{15}X_4-\frac{14}{15}X_5=0$$

$$X_3-\frac{9}{10}X_4+\frac{3}{20}X_5=0$$

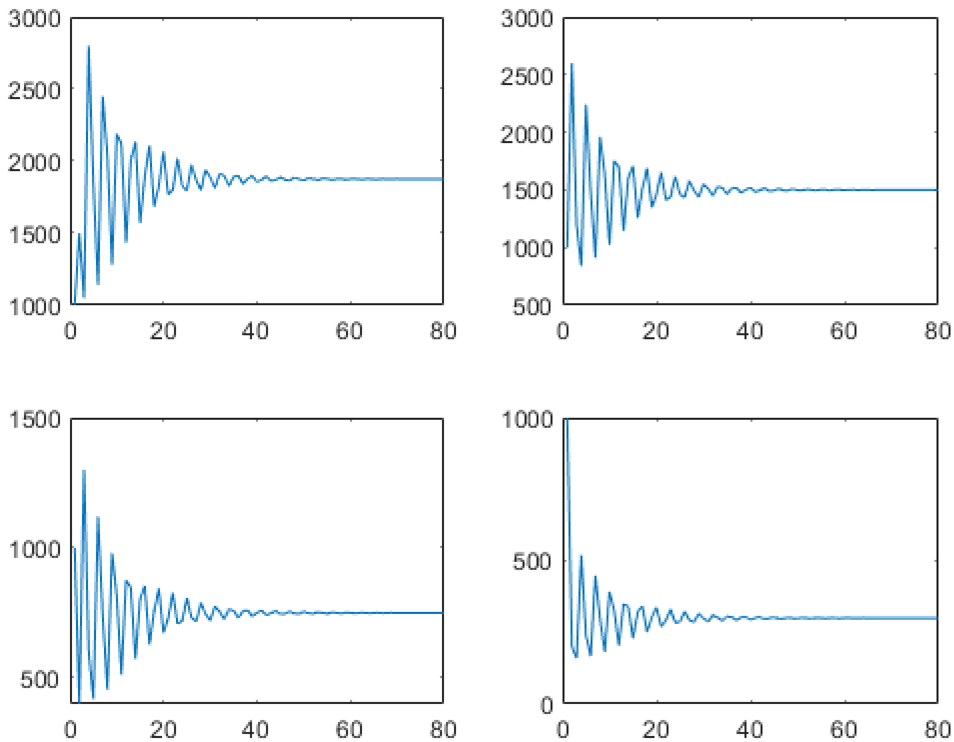
【需要强调的是，想参加数学建模竞赛最好能提前学习数学公式的输入方法，不要使用后两种方法（生成作业请删掉【】中的文字）】

5、假设某一物种的寿命为4年，将其分为0~1，1~2，2~3，3~4四个年龄段，其中后两个年龄段可以繁殖，繁殖率分别是b_3，b_4，每个年龄段到下一年的存活率为s_1，s_2，s_3，

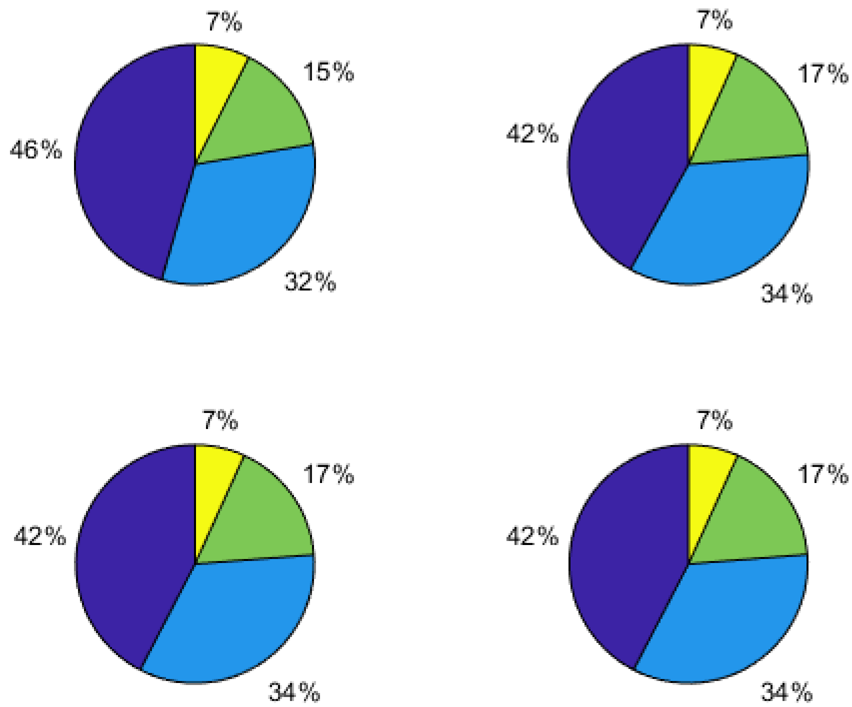
1）取$b_3=2, b_4=1.25, s_1=0.8, s_2=0.5, s_3=0.4$，假设初始时物种每个年龄段的数量是1000只，计算80年中物种数量的变化，要求：i)在一幅图中绘制4个子图，分别是四个年龄段80年中数量的变化曲线；ii)在一副图中绘制4个子图，分别是第0年，第20年，第40年和第80年不同年龄段所占比例的饼图。（图形的图例、标题等自定义，下同）

```
b3=2;
b4=1.25;
s1=0.8;
s2=0.5;
s3=0.4;
X0=[1000,1000,1000,1000]';
A=[0,0,b3,b4;s1,0,0,0;0,s2,0,0;0,0,s3,0];
X=A*X0;
C=zeros(80,4);
C(1,:)=X0;
for i=2:80
    X=A*X;
    C(i,:)=X;
```

```
end
figure(1)
for i=1:4
    subplot(2,2,i);
    x=1:80;
    plot(x,C(:,i))
end
```




```
figure(2)
for i=1:4
    subplot(2,2,i);
    pie(C(i*20,:))
end
```



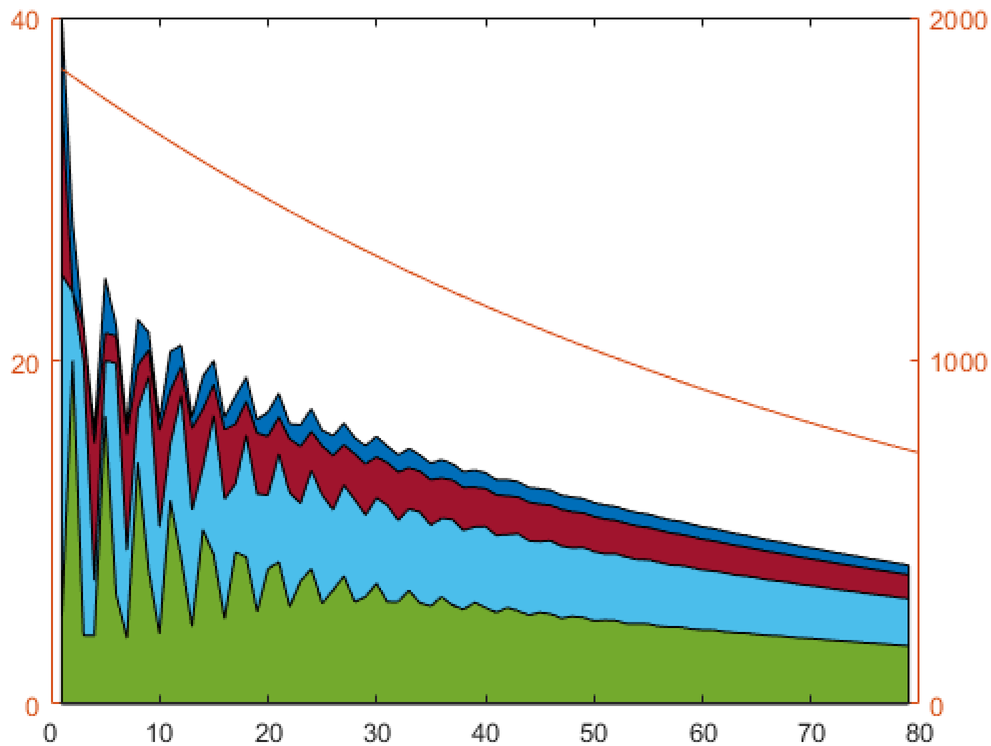
2）取$b_3=2, b_4=1, s_1=0.8, s_2=0.5, s_3=0.4$，假设初始时物种共有1750只，按年龄分布为725，600，300，125只，问大约多少年之后第四个年龄段的数量会少于40只。

```
b3=2;
b4=1;
s1=0.8;
s2=0.5;
s3=0.4;
X0=[725,600,300,125]';
A=[0,0,b3,b4;s1,0,0,0;0,s2,0,0;0,0,s3,0];
X=A*X0;
C=zeros(1000,4);
C(1,:)=X0;
i=1;
while C(i,4)>40
    i=i+1;
    X=A*X;
    C(i,:)=X;
end
i
```

```
i = 87
```

请记录每年种群的变换数量，并绘制面积图描述四个种群的变换。实际上种群数量变化由增长矩阵的特大特征值绝对，设其为λ，将函数$f(n)=1750\lambda^{n-1}+100$（$n$表示年）叠加绘制到面积图上，观察种群数量变化是否与最大特征值有关

```
figure(3)
D=C(2:80,:);
E=C(1:79,:);
B=E-D;
area(B)
hold on
[V,D]=eig(A);
lam=max(max(D));
x=1:80;
t=1750.*lam.^(x-1)+100;
x1=0;
y1=0;
plotyy(x1,y1,x,t)
```



3）考虑一个繁殖力很强的物种，取$b_3=6,b_4=3,s_1=0.8,s_2=0.4,s_3=0.2$，假设初始时只有第一年龄段10只，计算20年后各个年龄段的数量。

```
b3=6;
b4=3;
s1=0.8;
s2=0.4;
s3=0.2;
```

```
X0=[10,0,0,0]';
A=[0,0,b3,b4;s1,0,0,0;0,s2,0,0;0,0,s3,0];
X=A*X0;
C=zeros(20,4);
C(1,:)=X0;
for i=2:60
    X=A*X;
    C(i,:)=X;
end
C(20,:)
```

```
ans = 1×4
   75.1474  240.5676  161.1437    1.6699
```

如果不加以控制，计算从第21年开始40年后每个种群的数量，并用条形图，绘制每隔10年种群的数量情况。由于数量变化较大，请将数量取常用对数后绘制条状图。同样，可以将增长率的常用对数为斜率的值线绘制到条状图中进行对比。

```
figure(4)
plot(log10(C(20:60,:)))
legend('第一','第二','第三','第四','location','best')
```