

УДК 519.683

ОБ ОДНОМ СЕМЕЙСТВЕ КВАЗИМОНОТОННЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА АППРОКСИМАЦИИ

© 2016 г. *В.А. Гущин*

Институт автоматизации проектирования РАН
Московский физико-технический институт
gushchin@icad.org.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 14-01-00428, 15-51-50023), программ фундаментальных исследований Президиума РАН и Отделения математических наук РАН.

На примере простейшего модельного линейного уравнения переноса проводится построение семейства гибридных монотонных разностных схем. С помощью анализа дифференциального приближения показано, что результирующее семейство имеет второй порядок аппроксимации по пространственной переменной, обладает минимальной схемной диссипацией, дисперсией и монотонно. Показано, что область работоспособности опорных (базовых) схем (модифицированные схемы с центральными и ориентированными разностями) представляет непустое множество. Указан локальный критерий переключения между базовыми схемами, основанный на знаке произведения скорости переноса, первой и второй производных несомой функции в рассматриваемой точке исследуемой области. В рамках исследованных схем указана оптимальная пара базовых схем, обладающая перечисленными выше свойствами и максимально приближенная к схеме третьего порядка аппроксимации. На примере решения задачи Коши приводится графическое сравнение результатов расчетов, полученных с использованием известных схем первого, второго и третьего порядков аппроксимации.

Ключевые слова: разностные схемы, монотонность разностных схем, гибридные разностные схемы, критерий переключения.

ON A ONE FAMILY OF QUASIMONOTONE FINITE-DIFFERENCE SCHEMES OF THE SECOND ORDER OF APPROXIMATION

Valentin A. Gushchin

Institute for Computer Aided Design of the Russian Academy of Sciences
Moscow Institute of Physics and Technology

Using a simple model of a linear transport equation a family of hybrid monotone finite difference schemes has been constructed. By the analysis of the differential approximation it was shown that the resulting family has a second-order approximation in the spatial variable, has minimal scheme viscosity and dispersion and monotonous. It is shown that the region of operability of the base schemes (Modified Central Difference Schemes (MCDS) and Modified Upwind Difference

Schemes (MUDS)) is a non-empty set. The local criterion for switching between the base schemes is based on the sign of the product of the velocity, the first and second differences of the transferred functions at the considered point. On the solution of the Cauchy problem provides a graphical comparison of the calculation results obtained using the known schemes of the first, second and third order approximation.

Key words: finite difference schemes, monotonicity of finite difference schemes, hybrid finite difference schemes, criterion for switching.

1. Введение

При решении ряда задач возникает необходимость построения методов, конечно-разностные схемы которых обладают определенными свойствами. К таким задачам следует отнести течения с ударными волнами (в случае сжимаемой жидкости), течения со свободной поверхностью или границами раздела жидкостей с различными свойствами, течения неоднородной или стратифицированной (по температуре, солености или плотности) жидкостей, где возникают внутренние волны, и, вообще, задачи, где возникают области с большими градиентами исследуемых функций. Такими свойствами являются высокий порядок аппроксимации (или точность), минимальная схемная диссипация и дисперсия, а также свойство монотонности. Согласно определению, введенному С.К. Годуновым [1], схема называется монотонной, если она переводит монотонный на данном временном слое профиль в монотонный же на следующем слое. Такие схемы в литературе иногда называют схемами с положительной аппроксимацией или мажорантными. Существуют различные критерии монотонности разностных схем (схемы с положительными коэффициентами [2], критерий ограниченности решения, TVD-условия [3]) и способы монотонизации (регуляризации) разрывных численных решений (введение искусственной вязкости [4,5], сглаживание высокочастотных осцилляций [6,7]). Связь между различными критериями подробно обсуждается в [8,9]. Известно, что построение однородных (в смысле порядка аппроксимации, шаблона) схем, удовлетворяющих перечисленным выше требованиям, либо затруднительно, либо вообще невозможно. Так теорема Годунова гласит, что построение в рамках линейных (или однородных) разностных схем монотонной схемы выше первого порядка аппроксимации невозможно. Тем самым вычислители для обеспечения вышеупомянутых свойств вынуждены идти различными путями [10]: либо применять схемы с выделением разрывов (что характерно для газовой динамики и в данном сообщении не рассматривается), либо применять методы сквозного счета. В последнем случае могут возникать нефизические осцилляции, которые могут исказить решение и должны быть устранены. Для этого используют либо различного рода искусственные добавки (например, искусственную вязкость), либо ограничители *minmod*. Другой путь – разработка гибридных (иногда их называют неоднородными или нелинейными) разностных схем, когда в различных точках расчетной сетки используют различные по свойствам схемы (порядок аппроксимации, шаблон и т.п.). Первая гибридная разностная схема для линейного уравнения переноса была предложена Р.П. Федоренко [11], где также было определено правило переключения между базовыми схемами. В данной работе нам хотелось бы обратить внимание на ранее предложенную гибридную схему [12, 13], которая основана на комбинации модифицированных схем с ориентированными и центральными разностями, обладающую вторым порядком аппрокси-

мации, минимальной схемой диссипацией и дисперсией, и являющуюся монотонной. Несмотря на то что данная схема продемонстрировала свою работоспособность при решении широкого круга задач [12-16], ее применимость пока ограничена из-за отсутствия достаточного обоснования ее свойств. Обоснование будет приведено в данном сообщении.

2. Построение конечно-разностной схемы

Построение конечно-разностной схемы рассмотрим на примере одномерного модельного линейного уравнения переноса:

$$f_t + u f_x = 0, \quad (1)$$

где f – искомая функция, $u = \text{const}$.

Введем равномерную по пространству конечно-разностную сетку $\Omega = \{x_i = i h, h > 0, i = 0, 1, \dots\}$ и шаг по времени τ : $t_n = n\tau$, где n – номер временного слоя. Определим на Ω сеточную функцию f_i^n , совпадающую в узлах с искомой функцией f .

Рассмотрим двухпараметрическое семейство разностных схем

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\tau} + u \frac{\tilde{f}_{i+1/2}^n - \tilde{f}_{i-1/2}^n}{h} = 0, \quad (2)$$

$$\text{где } \tilde{f}_{i+1/2}^n = \alpha \begin{pmatrix} f_{i-1}^n \\ f_{i+2}^n \end{pmatrix} + (1 - \alpha - \beta) \begin{pmatrix} f_i^n \\ f_{i+1}^n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} f_{i+1}^n \\ f_i^n \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} u \geq 0, \\ u < 0, \end{matrix} \quad (3)$$

$$\tilde{f}_{i-1/2}^n = \alpha \begin{pmatrix} f_{i-2}^n \\ f_{i+1}^n \end{pmatrix} + (1 - \alpha - \beta) \begin{pmatrix} f_{i-1}^n \\ f_i^n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} f_i^n \\ f_{i-1}^n \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} u \geq 0, \\ u < 0. \end{matrix}$$

Это семейство включает в себя ряд широко распространенных схем. При $\alpha = 0$, $\beta = 0$ из (2), (3) получаем классическую схему Годунова первого порядка точности по пространственным переменным, при $\alpha = 0$, $\beta = 0.5$ – схему с центральными разностями второго порядка точности, а при $\alpha = -0.5$, $\beta = 0$ – схему с ориентированными разностями второго порядка точности.

Для оценки свойств приведенного выше двухпараметрического семейства разностных схем (2), (3) выпишем дифференциальное приближение, которое получается путем разложения сеточных функций, входящих в (2), (3), по формуле Тейлора в окрестности точки (i, n) , то есть

$$f_i^{n+1} = f_i^n + \tau (f_t)_i^n + \frac{\tau^2}{2!} (f_{tt})_i^n + \frac{\tau^3}{3!} (f_{ttt})_i^n + \frac{\tau^4}{4!} (f_{tttt})_i^n + O(\tau^5), \quad (4)$$

$$f_{i \pm k}^n = f_i^n \pm kh (f_x)_i^n + \frac{k^2 h^2}{2!} (f_{xx})_i^n \pm \frac{k^3 h^3}{3!} (f_{xxx})_i^n + \frac{k^4 h^4}{4!} (f_{xxxx})_i^n + O(h^5). \quad (5)$$

С учетом уравнения (1) имеем

$$f_t = -u f_x, \quad f_{tt} = -u f_{xt} = -u(-u f_x)_x = u^2 f_{xx}, \quad f_{ttt} = -u^3 f_{xxx}, \quad f_{tttt} = u^4 f_{xxxx}. \quad (6)$$

Подставляя (3) в (2), с учетом (4)-(6) получаем дифференциальное приближение для нашей конечно-разностной схемы:

$$\begin{aligned} f_t + u f_x = & \left[|u| h (\alpha - \beta + 0.5) - 0.5 \tau u^2 \right] f_{xx} + \operatorname{sign} u \cdot \frac{|u|}{6} \left[\tau^2 u^2 - h^2 (1 + 6\alpha) \right] f_{xxx} + \\ & + \left[\frac{|u| h^3}{12} (0.5 + 7\alpha - \beta) - \frac{u^4 \tau^3}{24} \right] f_{xxxx} + O(\tau^4, h^4) \end{aligned} \quad (7)$$

или, вводя обозначение для числа Куранта $C = |u| \tau / h$,

$$\begin{aligned} f_t + u f_x = & \frac{Ch^2}{2\tau} [1 + 2(\alpha - \beta) - C] f_{xx} + \frac{Ch^3}{3! \tau} \operatorname{sign} u [C^2 - 6\alpha - 1] f_{xxx} + \\ & + \frac{Ch^4}{4! \tau} [1 + 14\alpha - 2\beta - C^3] f_{xxxx} + O(\tau^4, h^4). \end{aligned} \quad (8)$$

Из (7), (8) очевидно, что для рассматриваемого двухпараметрического семейства все схемы второго порядка точности $O(\tau^2, h^2)$ с нулевой схемной вязкостью (коэффициентом $v_{cx} = [1 + 2(\alpha - \beta) - C] \cdot (Ch^2) / (2\tau)$ при второй производной) в пространстве параметров (α, β) должны лежать на прямой

$$\alpha = \beta - \frac{1 - C}{2}. \quad (9)$$

Учитывая, что для явных схем $0 \leq C \leq 1$, получаем, что все возможные схемы второго порядка с $v_{cx} = 0$ лежат в полосе между прямыми $l_0 = \{(\alpha, \beta): \alpha = \beta - 0.5\}$ и $l_1 = \{(\alpha, \beta): \alpha = \beta\}$ (рис.1).

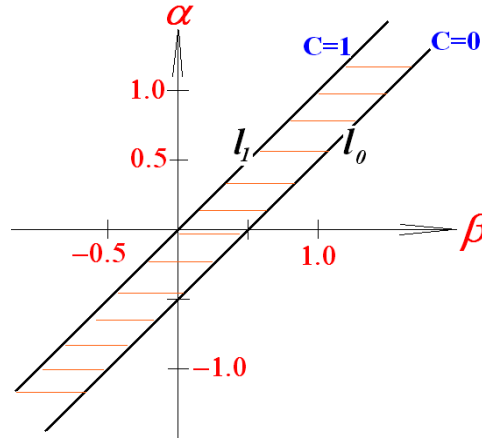


Рис.1. Заштрихованная область показывает все возможные схемы второго порядка с нулевой схемной вязкостью.

3. Монотонная схема

В соответствии с определением монотонности, введенным Годуновым С.К., схема называется монотонной, если из условия

$$\Delta f_{i+1}^n \equiv f_{i+1}^n - f_i^n \geq 0 \quad (\Delta f_{i+1}^n < 0) \text{ для любого } i \text{ следует, что}$$

$$\Delta f_{i+1}^{n+1} \geq 0 \quad (\Delta f_{i+1}^{n+1} < 0) \text{ для любого } i.$$

Тогда из (2), (3) получаем

$$\Delta f_{i+1}^{n+1} = \Delta f_{i+1}^n - C \cdot \text{sign } u \left(\Delta \tilde{f}_{i+3/2}^n - \Delta \tilde{f}_{i+1/2}^n \right) = \Delta f_{i+1}^n - C \cdot \text{sign } u. \quad (10)$$

$$\cdot \left\{ \alpha \left(\frac{\Delta f_i^n}{\Delta f_{i+3}^n} \right) + (1-\alpha-\beta) \left(\frac{\Delta f_{i+1}^n}{\Delta f_{i+2}^n} \right) + \beta \left(\frac{\Delta f_{i+2}^n}{\Delta f_{i+1}^n} \right) - \alpha \left(\frac{\Delta f_{i-1}^n}{\Delta f_{i+2}^n} \right) - (1-\alpha-\beta) \left(\frac{\Delta f_i^n}{\Delta f_{i+1}^n} \right) - \beta \left(\frac{\Delta f_{i+1}^n}{\Delta f_i^n} \right) \right\}.$$

Здесь и далее имеется в виду, что верхний член в двухэтажной скобке относится к случаю $u \geq 0$, а нижний – к $u < 0$. Чтобы не загромождать запись, опустим индекс n в правой части уравнения (10) и сгруппируем члены при коэффициентах α и β :

$$\begin{aligned} \Delta f_{i+1}^{n+1} = \Delta f_{i+1}^n - C \cdot \text{sign } u & \left\{ \alpha \left[\left(\frac{\Delta f_i}{\Delta f_{i+3}} \right) - \left(\frac{\Delta f_{i+1}}{\Delta f_{i+2}} \right) - \left(\frac{\Delta f_{i-1}}{\Delta f_{i+2}} \right) + \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta f_{i+1}} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \beta \left[\left(\frac{\Delta f_{i+2}}{\Delta f_{i+1}} \right) - \left(\frac{\Delta f_{i+1}}{\Delta f_{i+2}} \right) - \left(\frac{\Delta f_{i+1}}{\Delta f_i} \right) + \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta f_{i+1}} \right) \right] + \left(\frac{\Delta f_{i+1}}{\Delta f_{i+2}} \right) - \left(\frac{\Delta f_i}{\Delta f_{i+1}} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Пусть для определенности $u \geq 0$, тогда из (11) получим

$$\begin{aligned} \Delta f_{i+1}^{n+1} = \Delta f_{i+1}^n - C \{ & \alpha [\Delta f_i - \Delta f_{i+1} - \Delta f_{i-1} + \Delta f_i] + \\ & + \beta [\Delta f_{i+2} - \Delta f_{i+1} - \Delta f_{i+1} + \Delta f_i] + \Delta f_{i+1} - \Delta f_i \}, \end{aligned} \quad (12)$$

а с учетом (9) из (12) имеем

$$\begin{aligned} \Delta f_{i+1}^{n+1} = \Delta f_{i+1}^n - C \{ & (\beta - (1-C)/2) [-\Delta f_{i+1} + 2\Delta f_i - \Delta f_{i-1}] + \\ & + \beta [\Delta f_{i+2} - 2\Delta f_{i+1} + \Delta f_i] + \Delta f_{i+1} - \Delta f_i \} = -C\beta \Delta f_{i+2} + \\ & + \left[3C\beta - \frac{C(1-C)}{2} + 1 - C \right] \Delta f_{i+1} + [-3C\beta + C(1-C) + C] \Delta f_i + \left[C\beta - \frac{C(1-C)}{2} \right] \Delta f_{i-1} = \\ & = -C\beta \Delta^2 f_{i+2} + \left[2C\beta - \frac{C(3-C)}{2} + 1 \right] \Delta f_{i+1} + \left[-2C\beta + \frac{C(3-C)}{2} \right] \Delta f_i - \left[C\beta - \frac{C(1-C)}{2} \right] \Delta^2 f_i. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $\Delta^2 f_i^n \equiv \Delta f_i^n - \Delta f_{i-1}^n$.

Пусть $\Delta f_i^n \geq 0$ для любого i , тогда для того, чтобы $\Delta f_i^{n+1} \geq 0$, потребуем, чтобы каждое слагаемое в (13) было неотрицательным. Пусть в (13) $\Delta^2 f_{i+2} \geq 0$ и $\Delta^2 f_i \geq 0$, тогда $\Delta f_{i+1}^{n+1} \geq 0$ при выполнении неравенств

$$\begin{cases} \beta \leq 0 \\ 2C\beta - C(3-C)/2 + 1 \geq 0 \\ -2C\beta + C(3-C)/2 \geq 0 \\ C\beta - C(1-C)/2 \leq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \beta \leq 0 \\ \beta \geq (3-C)/4 - 1/(2C) \\ \beta \leq (3-C)/4 \\ \beta \leq (1-C)/2 \end{cases}, \text{ то есть при} \quad (3-C)/4 - 1/(2C) \leq \beta \leq 0. \quad (14)$$

Пусть теперь в (13) $\Delta^2 f_{i+2} < 0$ и $\Delta^2 f_i < 0$, тогда $\Delta f_{i+1}^{n+1} \geq 0$ при

$$\begin{cases} \beta \geq 0 \\ 2C\beta - C(3-C)/2 + 1 \geq 0 \\ -2C\beta + C(3-C)/2 \geq 0 \\ C\beta - C(1-C)/2 \geq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \beta \geq 0 \\ \beta \geq (3-C)/4 - 1/(2C) \\ \beta \leq (3-C)/4 \\ \beta \geq (1-C)/2 \end{cases}, \text{ то есть при} \quad (1-C)/2 \leq \beta \leq (3-C)/4. \quad (15)$$

Аналогично легко проверить, что при $u \geq 0$ из $\Delta f_i^n < 0$ следует $\Delta f_i^{n+1} < 0$ и при $\Delta^2 f_{i+2} \geq 0$, $\Delta^2 f_i \geq 0$ выполняется неравенство (15), а при $\Delta^2 f_{i+2} < 0$, $\Delta^2 f_i < 0$ – неравенство (14). В случае $u < 0$ аналогично можно убедиться в выполнении неравенств (14) и (15) при соответствующих знаках Δf и $\Delta^2 f$.

Таким образом, на прямой l (рис.2), где расположены схемы второго порядка точности с нулевой схемной вязкостью, можно выделить два отрезка монотонности:

$$\text{AB:} \quad (1-C)/2 \leq \beta \leq (3-C)/4; \quad 0 \leq \alpha \leq (1+C)/4,$$

назовем эти схемы модифицированными схемами с центральными разностями (МСЦР),

$$\text{и DE:} \quad (3-C)/4 - 1/(2C) \leq \beta \leq 0; \quad (1+C)/4 - 1/(2C) \leq \alpha \leq -(1-C)/2,$$

назовем эти схемы модифицированными схемами с ориентированными разностями (МСОР).

Учитывая, что предполагается построение гибридной схемы, основанной на комбинации МСЦР и МСОР, надо быть уверенным в том, что области монотонности данных схем имеют ненулевое пересечение, и определить критерий переключения с одного типа схем на другой.

В силу (13) (с учетом $u \geq 0$)

$$\Delta f_{i+1}^{n+1} = -C\beta \Delta f_{i+2} + \left[3C\beta - \frac{C(1-C)}{2} + 1 - C \right] \Delta f_{i+1} + [-3C\beta + C(1-C) + C] \Delta f_i +$$

$$+ \left[C\beta - \frac{C(1-C)}{2} \right] \Delta f_{i-1} = k_1 \Delta f_{i+2} + k_2 \Delta f_{i+1} + k_3 \Delta f_i + k_4 \Delta f_{i-1}, \quad (16)$$

где $k_1 = -C\beta$, $k_2 = 3C\beta - \frac{C(1-C)}{2} + 1 - C$, $k_3 = -3C\beta + C(1-C) + C$, $k_4 = C\beta - \frac{C(1-C)}{2}$.

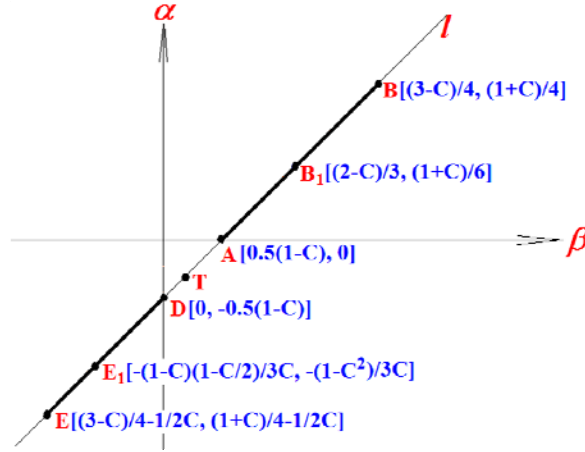


Рис.2. Расположение четырех групп конечно-разностных схем второго порядка точности (отрезки AB_1 , B_1B , DE_1 и EE_1) и единственной схемы третьего порядка точности (точка T) с нулевой схемной вязкостью при фиксированном C .

Для МСЦР – отрезок AB , т.е. при выполнении неравенств $(1-C)/2 \leq \beta \leq (3-C)/4$ и $\Delta f \geq 0$ – определим в равенстве (16) знаки слагаемых

$$k_1 = -C\beta \leq 0, \quad k_2 = 3C\beta + (1-C) \left(1 - \frac{C}{2} \right) \geq 0, \quad k_4 = C \left(\beta - \frac{(1-C)}{2} \right) \geq 0,$$

коэффициент $k_3 = C(2 - C - 3\beta)$ на этом отрезке меняет знак:

при $(1-C)/2 \leq \beta \leq (2-C)/3$ $k_3 \geq 0$, а при $(2-C)/3 \leq \beta \leq (3-C)/4$ $k_3 < 0$.

Для МСОР – отрезок DE , т.е. при выполнении неравенств $(3-C)/4 - 1/(2C) \leq \beta \leq 0$, получаем

$$k_1 \geq 0, \quad k_3 \geq 0, \quad k_4 \leq 0,$$

а $k_2 = 3C\beta + (1-C)(1-C/2)$ – меняет знак при $\beta = -(1-C)(1-C/2)/(3C)$.

$$\text{При } (3-C)/4 - 1/(2C) \leq \beta \leq -(1-C)(1-C/2)/(3C) \quad k_2 < 0,$$

а при $-(1-C)(1-C/2)/(3C) \leq \beta \leq 0$ $k_2 \geq 0$.

Таким образом, на отрезках AB и DE прямой l появились дополнительные точки B_1 и E_1 (рис.2).

Опуская громоздкие выкладки, можно показать, что области монотонности схем из отрезков B_1B и EE_1 не пересекаются.

Покажем далее, что области монотонности схем из отрезков AB_1 и E_1D имеют ненулевое пересечение и определим критерий переключения между схемами.

Для схем из отрезка AB_1 ($(1-C)/2 \leq \beta \leq (2-C)/3$, $0 \leq \alpha \leq (1+C)/6$) из (16) с учетом $k_3 \geq 0$, $k_4 \geq 0$ и $\Delta f \geq 0$ потребуем неотрицательности суммы первых двух слагаемых, т.е.

$$-C\beta \Delta f_{i+2} + \left[3C\beta + (1-C) \left(1 - \frac{C}{2} \right) \right] \Delta f_{i+1} \geq 0$$

или

$$\frac{\Delta f_{i+2}}{\Delta f_{i+1}} \leq \frac{3C\beta + (1-C) \cdot (1-C/2)}{C\beta} = 3 + \frac{(1/C-1) \cdot (1-C/2)}{\beta} = \sigma(C, \beta).$$

Для схем из отрезка E_1D ($-(1-C)(1-C/2)/(3C) \leq \beta \leq 0$, $-(1-C^2)/(3C) \leq \alpha \leq -(1-C)/2$) из (16) с учетом $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$ и $\Delta f \geq 0$ следует, что необходимо потребовать выполнения неравенства

$$[-3C\beta + C(1-C) + C] \Delta f_i + \left[C\beta - \frac{C(1-C)}{2} \right] \Delta f_{i-1} \geq 0$$

или

$$\frac{\Delta f_i}{\Delta f_{i-1}} \geq \frac{C\beta - (1-C)C/2}{3C\beta - C(1-C) - C} = \frac{2\beta + C - 1}{2(3\beta + C - 2)} = \eta(C, \beta).$$

При выполнении условий

$$\eta(C, \beta) \leq \frac{\Delta f_{i+1}}{\Delta f_i} \leq \sigma(C, \beta) \quad (17)$$

(так можно сдвинуть индекс, поскольку (16) справедливо для любого i), где

$$3 \leq \sigma(C, \beta) = 3 + \frac{(1-C)(2-C)}{2C\beta} < +\infty \quad (\beta \in AB_1),$$

$$0 \leq \eta(C, \beta) = \frac{1}{3} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{1+C}{3\beta + C - 2} \right] \leq \frac{1}{3} \quad (\beta \in E_1D),$$

монотонны обе группы схем с соответствующими параметрами (α, β) .

На рис.3 представлена область G , ограничиваемая кривыми $\sigma_{B_1}(C)$ и $\eta_{E_1}(C)$, в которой отношение $\Delta f_{i+1} / \Delta f_i$ удовлетворяет неравенству (17). Здесь

$$\sigma_A(C) = \sigma(C, (1-C)/2) = 2 + 2/C, \quad \sigma_{B_1}(C) = \sigma(C, (2-C)/3) = 3 + 3(1-C)/(2C),$$

$$\eta_{E_1}(C) = \eta(C, -(1-C)(1-C/2)/(3C)) = (1 - C/(2-C))/3, \quad \eta_D(C) = \eta(C, 0) = 0.5(1-C)/(2-C).$$

Таким образом, выбирая отношение $\Delta f_{i+1} / \Delta f_i$ из области G , можно быть уверенным в выполнении условий монотонности как схем из отрезка AB_1 (МСЦР), так и схем из отрезка E_1D (МСОР). В качестве условия переключения естественно выбрать

$$\frac{\Delta f_{i+1}}{\Delta f_i} = \delta \in G.$$

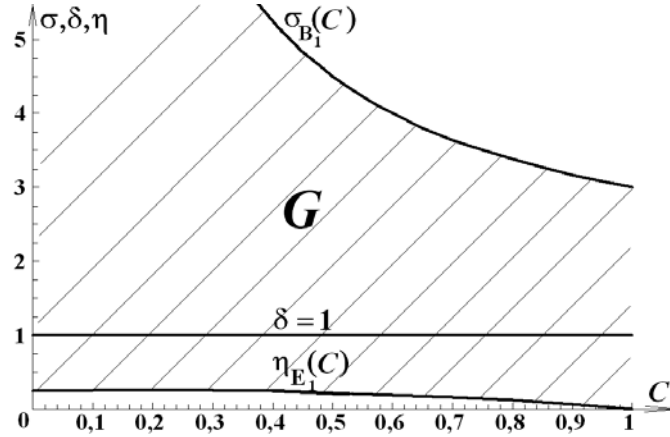


Рис.3. Область G пересечения областей монотонности модифицированных схем с центральными и ориентированными разностями.

При выборе значения $\delta = 1$ условие (17) будет выполняться при любом числе Куранта $C \in [0, 1]$. Это соответствует $\Delta f_{i+1} = \Delta f_i$ или $\Delta^2 f_{i+1} = 0$, т.е. точке перегиба профиля искомой функции. Отсюда становится понятным смысл выбора в качестве критерия переключения знака произведения $(u \cdot \Delta f \cdot \Delta^2 f)$.

При $(u \cdot \Delta f \cdot \Delta^2 f) \leq 0$ используется МСЦР из отрезка AB_1 , а при $(u \cdot \Delta f \cdot \Delta^2 f) > 0$ – МСОР из отрезка E_1D . Показано, что области монотонности указанных схем имеют ненулевое пересечение.

Построенная таким образом гибридная схема с базовыми схемами из отрезков AB_1 и E_1D имеет второй порядок точности, обладает нулевой схемной вязкостью и монотонна.

Заметим, что при

$$\alpha = \frac{1}{6}(C^2 - 1)$$

и β из условия (9) из дифференциального приближения (8) очевидно получение единственной схемы третьего порядка точности (точка T на рис.2), обладающей минимальной дисперсией, однако не являющейся монотонной. Из всех гибридных схем рассматриваемого семейства (второго порядка точности), обладающих нулевой схемной вязкостью и монотонных, только каждая из пары схем, соответствующих точкам A и D , обладает минимальной схемной диссипацией и максимально приближена к схеме третьего порядка точности. Именно эти схемы были выбраны в качестве опорных схем в разработанном методе расщепления [12, 13].

Заметим также, что проведенный анализ относится к простейшему линейному модельному уравнению переноса в отсутствие вязкости. В случае наличия вязкости схема будет иметь первый порядок точности по времени. Для квазилинейных и нелинейных уравнений, к каковым относятся и уравнения Навье-Стокса, такой анализ применим лишь условно, однако, как показал опыт расчетов нестационарных пространственных задач, такой выбор опорных (базисных) схем доказал свою эффективность.

4. Результаты тестовых расчетов

На примере решения задачи Коши для одномерного модельного уравнения переноса

$$f_t + u f_x = 0, \quad u = \text{const} = 1,$$

$$f(x, 0) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}; \quad f(0, t) = 1, \quad f(+\infty, t) = 0 \quad \text{при любом } t;$$

проведем сравнение с результатами, полученными с использованием различных схем.

Схема I – монотонная схема первого порядка точности как по времени, так и по пространственной переменной $O(\tau, h)$ (Годунов С.К.):

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad f_i^{n+1} = f_i - C(f_i - f_{i-1}).$$

Схема II – схема Мак-Кормака $O(\tau^2, h^2)$:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0.5(1 - C), \quad f_i^{n+1} = f_i - 0.5 \cdot C(f_{i+1} - f_{i-1}) + 0.5 \cdot C^2(f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}).$$

Схема III – схема Холодова А.С. $O(\tau^2, h^3)$ – максимально приближенная к монотонной:

$$\alpha = -0.25(1 - C), \quad \beta = 0.25(1 - C),$$

$$f_i^{n+1} = f_i - C(f_i - f_{i-1}) - 0.25 \cdot C(1 - C)(f_{i+1} - f_i - f_{i-1} + f_{i-2}).$$

Схема IV – схема третьего порядка точности $O(\tau^3, h^3)$:

$$\alpha = (C^2 - 1)/6, \quad \beta = (1 - C)(2 - C)/6,$$

$$f_i^{n+1} = f_i - C(f_i - f_{i-1}) - \frac{C}{6}(2 - C)(1 - C)f_{i+1} + \frac{C}{2}(1 - C)^2 f_i + \\ + \frac{C^2}{2}(1 - C)f_{i-1} + \frac{C}{6}(C^2 - 1)f_{i-2}.$$

Схема V – гибридная схема второго порядка точности $O(\tau^2, h^2)$ с нулевой схемой вязкостью и монотонная; т.е. в (2), (3):

$$\text{при } (u \cdot \Delta f \cdot \Delta^2 f) \leq 0 \text{ выбирается МСЦР: } \alpha = 0, \beta = 0.5(1 - C),$$

$$f_i^{n+1} = -0.5 \cdot C(1-C)f_{i+1} + (1-C^2)f_i + 0.5 \cdot C(1+C)f_{i-1}, \quad u \geq 0,$$

$$f_i^{n+1} = -0.5 \cdot C(1+C)f_{i+1} + (1+C^2)f_i + 0.5 \cdot C(1-C)f_{i-1}, \quad u < 0,$$

а при $(u \cdot \Delta f \cdot \Delta^2 f) > 0$ выбирается МСОР: $\alpha = -0.5(1-C)$, $\beta = 0$,

$$f_i^{n+1} = (1 - 0.5 \cdot C(3-C))f_i + C(2-C)f_{i-1} - 0.5 \cdot C(1-C)f_{i-2}, \quad u \geq 0,$$

$$f_i^{n+1} = (1 + 0.5 \cdot C(3-C))f_i - C(2-C)f_{i+1} + 0.5 \cdot C(1-C)f_{i+2}, \quad u < 0.$$

На рис.4–7, где представлены решения задачи при $t = 10$ и 15 : $C = u \tau / h = 0.75$ и 0.95 , $h = 0.001$. На рис.4, 5: $C = 0.75$, $t = 10$ и $t = 15$ соответственно. На рис.6, 7: $C = 0.95$, $t = 10$ и $t = 15$ соответственно. Чем больше число Куранта, тем численное решение ближе к точному решению. Видно, что схема первого порядка (I) обладает слишком сильной диссипацией. На решении, полученном по схеме (II), существенно сказывается отсутствие монотонности. Схемы (III) и (IV) имеют малую диссипацию, однако также не являются монотонными. Как показывают расчеты, схема (V) из построенного семейства, оставаясь монотонной, по диссипативным свойствам сопоставима со схемами второго и третьего порядков точности.

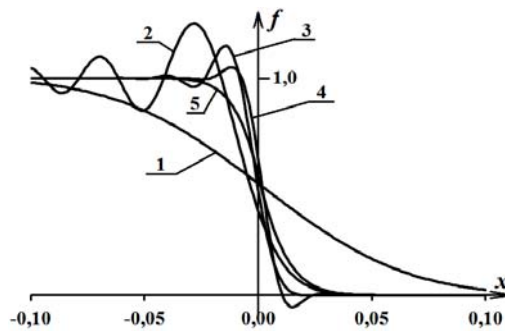


Рис.4. Решения задачи Коши при $u = 1$, $h = 0.001$, $C = 0.75$, $t = 10.0$: 1 – схема I; 2 – схема II; 3 – схема III; 4 – схема IV; 5 – схема V.

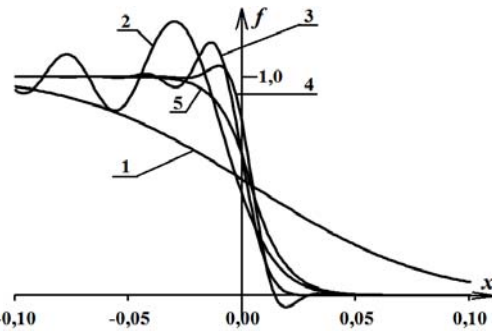


Рис.5. Решения задачи Коши при $u = 1$, $h = 0.001$, $C = 0.75$, $t = 15.0$: 1 – схема I; 2 – схема II; 3 – схема III; 4 – схема IV; 5 – схема V.

5. Заключение

Разработана гибридная разностная схема, основанная на комбинации модифицированных схем с центральными и ориентированными разностями (МСЦР и МСОР) – базовые схемы. Показано, что базовые схемы имеют второй порядок аппроксимации, нулевую схемную вязкость и монотонны при определенных условиях и максимально приближены к схеме третьего порядка. Области монотонности базовых схем имеют непустое пересечение, т.е. вся исследуемая область покрывается областями работоспособности одной из них.

Указан локальный критерий переключения между базовыми схемами, основанный на знаке произведения скорости переноса, первой и второй производных несомой функ-

ции в рассматриваемой точке исследуемой области. На примере решения одномерной задачи Коши проведено сравнение с некоторыми известными схемами первого, второго и третьего порядков аппроксимации. Аналогичный подход был использован по каждому из направлений и успешно реализован при решении нестационарных пространственных задач [12-16].

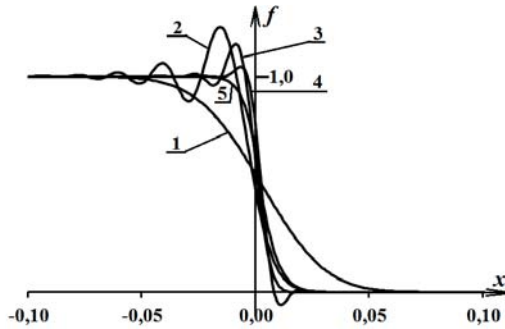


Рис.6. Решения задачи Коши при $u = 1$, $h = 0.001$, $C = 0.95$, $t = 10.0$: 1 – схема I; 2 – схема II; 3 – схема III; 4 – схема IV; 5 – схема V.

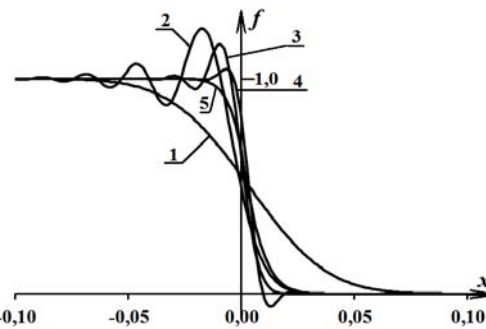


Рис.7. Решения задачи Коши при $u = 1$, $h = 0.001$, $C = 0.95$, $t = 15.0$: 1 – схема I; 2 – схема II; 3 – схема III; 4 – схема IV; 5 – схема V.

В заключение автор благодарит сотрудников ИАП РАН, студентов МФТИ (ГУ) и Международного института информационных технологий (г. Пуна, Индия), принимавших участие в данной работе на разных этапах, а также академика РАН О.М. Белоцерковского за постоянное внимание к этой работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.К. Годунов. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики // Матем. сб., 1959, т.47 (89), № 3, с.271-306;
S.K. Godunov. Raznostnyi metod chislennoogo rascheta razryvnykh reshenii gidrodinamiki // Matem. sb., 1959, t.47 (89), № 3, s.271-306.
2. K.O. Friedrichs. Symmetric hyperbolic linear differential equations // Communications on Pure and Appl. Math., 1954, v.7, №2, p.345-392.
3. A. Harten. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // J.Comput. Phys., 1987, v.49, №2, p.357-393.
4. von J. Neumann, R.D. Richtmyer. A method for numerical calculations of hydrodynamic shocks // J. Appl. Phys., 1950, v.21, №1, p.232-237.
5. А.А. Самарский. О регуляризации разностных схем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1967, т.7, № 1, с.62-93;
англ. пер.: A.A. Samarskii. Regularization of difference schemes // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1967, v.7, № 1, p.79-120.
6. Л.А. Чудов. Некоторые применения разностных методов в механике жидкостей и газа. – Москва: Инст. проблем механики АН СССР, 1967, Диссертация ... докт. физ.-мат. наук;
L.A. Chudov. Nekotorye primeneniia raznostnykh metodov v mekhanike zhidkosti i gaza. – Moskva: Inst. problem mekhaniki AN SSSR, 1967, Dissertatsiia ... dokt. fiz.-mat. nauk.
7. В.П. Колган. Применение операторов сглаживания в разностных схемах высокого порядка точности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1978, т.18, № 5, с.1340-1345;

- англ. пер.: *V.P. Kolgan*. The use of smoothing operators in difference schemes of a high order of accuracy // *USSR Comput. Mathematics and Mathematical Physics*, 1978, v.18, № 5, p.267–273.
8. *K. Sakai, T. Kanno, I. Kimura, H. Hishida*. Mathematical foundation of numerical calculations for linear and non-linear advection-diffusion equations // *CFD Journal*, 2006, v.14(4), №47, p.420-435.
 9. *А.С. Холодов, Я.А. Холодов*. О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2006, т.46, № 9, с.1638-1667;
англ. пер.: *A.S. Kholodov, Ya.A. Kholodov*. Monotonicity criteria for difference schemes designed for hyperbolic equations // *Comput. Mathem. and Mathem. Physics*, 2006, v.46, № 9, p.1560–1588.
 10. *А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ю. Семенов*. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. - М.: Наука, 2001, 608с.;
A.G. Kulikovskii, N.V. Pogorelov, A.Iu. Semenov. Matematicheskie voprosy chislennogo resheniia giperbolicheskikh sistem uravnenii. - М.: Nauka, 2001, 608s.
 11. *Р.П. Федоренко*. Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1962, т.2, № 6, с.1122–1128;
англ. пер.: *R.P. Fedorenko*. The application of difference schemes of high accuracy to the numerical solution of hyperbolic equations // *USSR Comput. Mathem. and Mathem. Physics*, 1963, v.2, № 6, p.1355–1365.
 12. *О.М. Белоцерковский, В.А. Гуцин, В.Н. Коншин*. Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1987, т.27, № 4, с.594-609;
англ. пер.: *O.M. Belotserkovskii, V.A. Gushchin, V.N. Konshin*. The splitting method for investigating flows of a stratified liquid with a free surface // *USSR Comput. Mathematics and Mathematical Physics*, 1987, v.27, № 2, p.181–191.
 13. *V.A. Gushchin, V.N. Konshin*. Computational aspects of the splitting method for incompressible flow with a free surface // *J. of Computers and Fluids*, 1992, v.21, № 3, p.345-353.
 14. *V.A. Gushchin, A.V. Kostomarov, P.V. Matyushin, E.R. Pavlyukova*. Direct Numerical Simulation of the Transitional Separated Fluid Flows Around a Sphere and a Circular Cylinder // *J. of Wind Engineering & Industrial Aerodynamics*, 2002, v.90, № 4-5, p.341-358.
 15. *В.А. Гуцин, П.В. Матюшин*. Механизмы формирования вихрей в следе за сферой при $200 < Re < 380$ // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*, 2006, № 5, с.135-151;
англ. пер.: *V.A. Gushchin, P.V. Matyushin*. Vortex formation mechanisms in the wake behind a sphere for $200 < Re < 380$ // *Fluid Dynamics*, 2006, v.41, № 5, p.795-809.
 16. *В.А. Гуцин, П.В. Матюшин*. Математическое моделирование и визуализация трансформации вихревой структуры течения около сферы при увеличении степени стратификации жидкости // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2011, т.51, № 2, с.268–281;
англ. пер.: *V.A. Gushchin, P.V. Matyushin*. Numerical Simulation and Visualization of Vortical Structure Transformation in the Flow past a Sphere at an Increasing Degree of Stratification // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2011, v.51, № 2, p.251–263.

Поступила в редакцию 29.06.2015.