2010/06/06

FFT を利用した、パワースペクトル密度計算の為のメモ

鷲見哲也

１．　はじめに

FFT を利用してスペクトルを求める利用について、関連する事柄をメモを書く。特に、

・エクセルなどの FFT を利用した結果の解釈や変換

・FFT の結果の単位とその変換

についてのメモ、と思ってほしい。

内容の正確性については保証しない。書店に行けば適切な本があるので、そちらを見て勉強していただきたい。

このメモでの要点は以下のとおりである。

・エクセルでの FFT の結果は、時間間隔を無視している。本当の時間に対するフーリエ変換に直す必要がある。さらにパワースペクトル密度への変換時も注意が必要。

・入力信号や変動の単位を[L]、時間の単位を[T]とすると、パワースペクトル密度の縦軸は、[L^2T]となり、時間を秒=s、周波数を Hz=s^{-1} とする場合、[L^2s]=[L^2Hz^{-1}]が縦軸の単位となる。

・[L^2]がエネルギー上の物理的な単位例えば仕事率[W]に変換できるとき、例えば[L]=[V]（電圧）で、抵抗 R[Ω]がかかっているときには、[V^2]を R[Ω]で割ると、仕事率[W]となるとき、変換して仕事率の周波数スペクトルとして変換できる。

目　　次

２．　フーリエ変換について

実数の値を持つ信号 $x(t)$の複素フーリエ変換 $X(f)$は、次の式で表される。

$$X(f) = \int_0^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-i2\pi ft}dt \tag{2.1}$$

ここに、t[T]は時刻、f[T^{-1}]は周波数である。信号の単位を長さ[L]とすると、フーリエ変換の単位は[LT]である。<u>他の信号の時は，信号の振幅の単位をこの L に置き換えればよい．</u>

さて、このフーリエ変換は何を意味するか。信号 $x(t)$と、周波数 f の信号との積分であるが、信号がある周波数 f に関する波の成分をいくら持っているのか、という情報を含んでいる。しかし、時間的に積分したものであるから、振幅[L]だけの情報ではない。

また、信号が定常的である場合、$t\rightarrow\infty$まで積分すると、フーリエ変換は発散する。実際には有限の時間の信号しか解析しない。

そこで、解析する時間を「十分に長い T」とし、積分を t:[0~T]の間ですることとしよう。

いま、信号 $x(t)$が振幅 c[L]を持ち，フーリエ変換しようとしている周波数と同じ周波数 f を持つ、<u>単純な三角関数</u>であるとしよう。余弦関数からの位相差をθとする。このとき、

$$x(t) = \mathrm{c}\cos(2\pi ft-\theta)\ dt = \frac{c}{2}\left\{e^{i(2\pi ft-\theta)} + e^{-i(2\pi ft-\theta)}\right\} \tag{2.2}$$

とする。

これは、単純な三角関数を sin と cos を用いて

$$x(t)=a\cos(2\pi ft)+ b\sin(2\pi ft) \tag{2.3}$$

と表したときの、

$$x(t)= \sqrt{a^2+b^2}\cos\left(2\pi ft-\theta\right)$$

$$= c\cos\left(2\pi ft-\theta\right),\quad \tan\theta = \frac{b}{a},\quad c=\sqrt{a^2+b^2} \tag{2.4}$$

にあたる。以後は、便宜的に式(2.2)を用いて表していくが、sin, cos の関数の和を元としているときは、上式の関係があることを意識して進めてゆく。

有限区間 T での複素フーリエ変換は、次のように表せる．

$$X(f) = \int_0^T \frac{c}{2}\left\{e^{i(2\pi ft-\theta)} + e^{-i(2\pi ft-\theta)}\right\} e^{-i2\pi f}\,dt \tag{2.5}$$

$$= \frac{c}{2}\int_0^T \left\{e^{-i\theta} + e^{i\theta}e^{-i4\pi ft}\right\} dt$$

$$X(f)= \frac{c}{2}\left(Te^{-i\theta} - \frac{e^{i\theta}}{4\pi fi}\left(e^{-i4\pi fT}-1\right)\right) \cong \frac{cT}{2}e^{-i\theta} \qquad f\neq 0$$

$$X(f=0) = cT \qquad f=0 \tag{2.6}$$

f=0 の時の値は，定数の成分（周期＝∞）である．

$f \neq 0$の式(2.3)は複素数となる。式中の近似式、

$$X(f) \cong \frac{cT}{2} e^{-i\theta} \qquad f \neq 0 \qquad (2.7)$$

が成立するのは、

・Tが十分長く、$T \gg \frac{1}{4\pi f}$である

または

・$2fT$が整数である　（このときは近似ではなく、等式となる）

という条件である。ここでは、後者の条件を満足するよう、周波数 f の波の、積分期間 T の間の波数 k=fT が整数であると仮定する。周波数 f の周期 1/f は T に整数個、常に含まれる。このとき、フーリエ変換の絶対値は、$X(f)$の共役数$X^*(f) = \frac{cT}{2} e^{i\theta}$として、

$$|X(f)| = \sqrt{X(f)X^*(f)}$$

であるから、次のようになる。

$$|X(f)| = \frac{1}{2} cT \qquad f \neq 0 \qquad (2.8)$$

$$|X(f = 0)| = cT \qquad f = 0 \qquad (2.9)$$

有限区間 T のフーリエ級数展開において周波数 f=k/T (k=0,1,2,⋯N)の成分の振幅 c を求めるには、その周波数のフーリエ変換の絶対値$|X(f)|$を T/2 (f=0 の定数項では T)で割ればよい。位相差θは、$X(f)$の偏角 argument にマイナスをかければよい。これが、離散フーリエ級数展開との関係である。

$$c = \frac{2|X(f)|}{T} \qquad f \neq 0 \qquad (2.10)$$

$$c = \frac{|X(f)|}{T} \qquad f = 0 \qquad (2.11)$$

$$\theta = -\arg X(f) \qquad f \neq 0 \qquad (2.12)$$

では、周波数 f の波の成分が式(2.2)であるとしたら、これの二乗を期間 T で積分したら、いくらになるだろうか。これを、「周波数 f に関するエネルギー」と呼ぶことにする。

$$\Phi_0(f) = \int_0^T \left[\frac{c}{2}\left\{e^{i(2\pi ft-\theta)} + e^{-i(2\pi ft-\theta)}\right\}\right]^2 dt$$

$$= \frac{c^2}{4}\int_0^T \left\{1 + e^{2i(2\pi ft-\theta)} + e^{-2i(2\pi ft-\theta)}\right\} dt$$

$$= \frac{c^2}{4}\int_0^T \{1 + 2\cos(2\pi ft - \theta)\} dt$$

$$= \frac{c^2}{4}(\mathrm{T} + 2\sin(2\pi\mathrm{fT} - \theta) - \sin(-\theta))$$

$$\Phi_0(f) \cong \frac{c^2 T}{4} \qquad f \neq 0 \qquad (2.13)$$

$$\Phi_0(f = 0) = c^2 T \qquad f = 0 \qquad (2.14)$$

近似が成立するのは、上記と同じである。（これらは、スペクトル「密度」ではない。）
そして、これらを時間 T の平均値として表したものを、「パワー」と呼ぶ。

$$P_0(f) = \frac{c^2}{4} \qquad f \neq 0 \qquad (2.15)$$

$$P_0(f = 0) = c^2 \qquad f \neq 0 \qquad (2.16)$$

（これらも、スペクトル「密度」ではない。）

さて、実際の信号（変動）には、様々な周波数の成分が含まれており、周波数 f を持つ成分を、c_f $\cos(2\pi ft\text{-}\theta_f)$とする。このとき c_f と θ_fは、周波数 f に対する値である。以降 c、θ はそれぞれ、c_f と θ_fであるとし、f の関数であるという表示を省略する。

３． スペクトルとして捉える・・・「パワー」「エネルギー」そして「密度」について

得られたフーリエ変換の結果をスペクトルとしての意味としてどう解釈するか。

信号（や波など）には様々な周波数の波の成分が含まれているが、それぞれの周波数成分がどの程度の強さで含まれるのか、というものを示すものがスペクトルの意味である。周波数に対して、その強さがどう分布しているのかを見るものだ。

そこで、ここから４つのスペクトルの定義について扱っていこう。

・パワースペクトル

・パワースペクトル密度

・エネルギースペクトル

・エネルギースペクトル密度

さて、自分が使っている「スペクトル」の定義は上記の４つのどれにあたるであろうか。

（1）「パワー」と「エネルギー」

電圧や変位、信号強度などの定常的な変動を解析するときにスペクトルという場合には、「パワースペクトル密度」を指すことが多い。この「パワー」の意味は、電気分野では電力としての意味を持たせる解説がなされている。

力学的な意味での「パワー」（仕事率）は通常、「エネルギー（仕事）」を時間当たりで捉えたものである。しかし、フーリエ変換を通して見るときのスペクトル解析では、力学的エネルギー（単位 J）を直接表すとは限らない。その点に注意が必要である。

信号のスペクトル解析におけるエネルギーやパワーは、力学的なエネルギーやパワーと比例関係にある場合も多い。よって、力学的な意味に置き換える場合には、これらの関係と、両者を結び付ける係数を知っておく必要がある。これについては、後で述べる。

ここでは、力学的エネルギーと結び付かない信号の解析でも「エネルギー」を用いることにする。スペクトル解析においては、「エネルギー」とは信号強度（変位）の二乗の時間積分値を指し、「パワー」とはその時間的な平均値を表す。そして、パワーは信号や変位が定常的な場合にのみ求められる。もう少し細かく見て行こう。

信号や波の強さ（変位の自乗値）を、所定の時間を観測した時間積分値（エネルギー）で見るのか、単位時間当たりの値に変換したもの（パワー）で見るのか、ということが問題になる。それは、扱う信号・波動の性質と問題によって異なるだろう。

・衝撃の信号など、信号や波動が単発的なもので、パワーの積分量（エネルギーの総量）が問題になる場合では、「エネルギー」が扱われる。

・継続的に続く定常的な信号・波動の成分を問題にする場合には、単位時間当たりで考える「パワー」を問題とする。
（積分の時間を延ばすと、積分値はどんどん大きくなってしまう。積分値であるエネルギーを時間当たりで評価し＝パワーとして表す方が意味がある。）

さて、これらを式で考えてみる。フーリエ変換は信号や変動を式(2.1)のように、無限時間まで積分して得るものだが、ここでは上記のように有限時間 T での積分を考える。

信号や変動の単位を[L]としよう。
（信号や変動 $x(t)$の、縦軸の単位である。実際には電圧 Volt など。）
時間の単位を[T]とする。
（積分時間の T とは異なる。実際には s=秒、など）

周波数 f に対応するフーリエ変換の値から、周波数 f を持つ波の成分（例えば式(2.2)のような波）についてみると、

「エネルギー」は、式(2.13)から、その周波数成分を時間 T 内に積分したものに比例する。
「パワー」は、式(2.14)から、その振幅 c の大きさの二乗に比例する。

よって、単位については、
「エネルギー」の単位は式(2.13)(2.14)から、　「L^2×時間（T の単位）」となる。
「パワー」の単位は、式(2.15)(2.16)から　「L^2」となる。

つまり、エネルギースペクトルやパワースペクトルは、有限区間のフーリエ変換の結果を使うと、$f \neq 0$の条件では、

・エネルギースペクトル（離散）:「振幅自乗比例×時間」　（単位：[L^2T]）

$$\Phi_0(f) = \frac{1}{4}c^2T = \frac{|X(f)|^2}{T} \qquad f \neq 0 \qquad (3.1)$$

・パワースペクトル　（離散）:「振幅自乗比例」　（単位：[L^2]）

$$P_0(f) = \frac{1}{4}c^2 = \frac{|X(f)|^2}{T^2} \qquad f \neq 0 \qquad (3.2)$$

となる。(単位Lは、適宜信号の振幅の単位に置き換える。)　これらはフーリエ変換$X(f)$から求めた、その周波数fに対応する「パワー」と「エネルギー」である。これらは、「スペクトル<u>密度</u>」ではないことに注意しなければならない。

（２）周波数当たりのスペクトル＝「スペクトル密度」としての扱い。

周波数は連続的な量である。つまり、何Hz（$=s^{-1}$）から何Hzまでの周波数を持つ、その間の周波数fを連続的に変化させ、そのときどきの周波数fで、フーリエ変換を利用してスペクトルを求めることができる。ではfの上限と下限はいくらでも取れるのだろうか。

まず、最大のfの値はどうだろうか。観測データがアナログで、いくらでも細かい時間変化を追えるものであれば、大きな周波数fに対する変換もできる。しかし、実際にはそれには限界があり、データのサンプリング間隔ΔTが決まっているのがふつうである。あるいは不等間隔の観測データかもしれないが、ここでは、周波数を等間隔に置き換えたものを扱うことにする。　観測期間Tとサンプリング長ΔTとの関係を、データ個数Nと結び付けると、

$$T = N \cdot \Delta T \tag{3.3}$$

である。このように時間的に離散な信号＝時間的にデジタルなデータを扱うとき、最も短い波長を持つ、時間的にデジタルな「波」は、1個づつが交互に凹凸するような、$2\Delta T$の周期を持つ波形である。よって、式(2.4)のように周波数を刻むとすると、最大の周波数は、$f_{\max} = \frac{1}{2\Delta T} = \frac{N}{2T}$である。

一方、f=0を除く最小のfの値はどうだろうか。最も小さい周波数、つまり最も長い周期を観測できるのは、観測時間Tが周期となる波である。つまり、$f_{\min} = \Delta f = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta T}$である。

ここで波数kを導入しよう。観測期間Tの間に、何個の波が含まれるのかを考える。周波数fと波数kとの関係は、

$$f = \frac{k}{T} = \frac{k}{N\Delta T} \tag{3.4}$$

である。最小値$f_{\min}$、最大値$f_{\max}$との関係からみると、波数はk=1～N/2の範囲をとる。よって、データ数Nを偶数にとり、周波数の刻みを$\Delta f = \frac{1}{T}$とし、$f_{\min} = \frac{1}{T}$、最大値$f_{\max} = \frac{N}{2T}$で等間隔にスペクトルを計算すると、スペクトルの周波数fに対する分布が描ける。

さて、このとき、フーリエ変換によって得た、周波数fの波の、「エネルギー」と「パワー」は、先に示したように、$\frac{|X(f)|^2}{T} = \frac{c^2 T}{4}$ と $\frac{|X(f)|^2}{T^2} = \frac{c^2}{4}$ で表される。　周波数fのデータが、どれくらい周波数帯毎に代表しているのかというと、周波数の間隔$\Delta f = \frac{1}{T}$毎を代表している。よって、パワーについて、スペクトル密度分布の図において横軸である周波数を意識すると、<u>「周波数」当たりの密度</u>として求めるには、パワースペクトルの値を周波数の間隔$\Delta f = \frac{1}{T}$

で割れば、よい。エネルギー密度もエネルギースペクトルを同じように割ることで求められる。

・エネルギースペクトル密度：　（単位：[L²T²]）

$$\Phi(f) = \Phi_0(f)/\Delta f \qquad (3.5)$$

・パワースペクトル密度　　：　（単位：[L² T]）

$$P(f) = P_0(f)/\Delta f \qquad (3.6)$$

$\Delta f = \frac{1}{T}$により、Tで表した場合、

・エネルギースペクトル密度　　（周波数を$\Delta f = \frac{1}{T}$で離散化した場合）：　（単位：[L²T²]）

$$\Phi(f) = \frac{1}{4}c^2T^2 = |X(f)|^2 \qquad f \neq 0 \qquad (3.7)$$

$$\Phi(f=0) = c^2T^2 = |X(f)|^2 \qquad f = 0$$

・パワースペクトル密度　　　　（周波数を$\Delta f = \frac{1}{T}$で離散化した場合）：　（単位：[L² T]）

$$P(f) = \frac{1}{4}c^2T = \frac{|X(f)|^2}{T} \qquad f \neq 0 \qquad (3.8)$$

$$P(f=0) = c^2T = \frac{|X(f)|^2}{T} \qquad f = 0$$

単位は、[L]に適宜信号の変動・信号（振幅）の単位を入れること。

これらの単位について、これらの密度は「周波数当たりの密度」であることをわかりやすくする場合、例えば周波数の単位[Hz]=[s^{-1}]を使って記す場合、

・エネルギースペクトル密度の単位　　：[L^2 T^2]= [L^2 s^2] = [L^2 s Hz^{-1}] = [L^2 s /Hz]

・パワースペクトル密度の単位　　　　：[L^2 T]= [L^2 s] = [L^2 Hz^{-1}] = [L^2 /Hz]

のようにも書きかえられる。

「スペクトル解析」（日野幹雄）などに示している式(3.8)はパワースペクトル密度の意味である。また、式(3.8)は式の上でエネルギースペクトルの式(3.1)と同じになるが、意味が異なることに注意が必要だ。

さてこれらのスペクトル密度は、周波数に対する密度関数である。よって、このスペクトル密度を、周波数にわたって積分したときには、積分時間内のエネルギーや、積分時間内平均のパワーそのものとなる。

エネルギースペクトル密度の周波数積分値＝エネルギーとなる。（単位[L^2T]）

$$E = \int_0^\infty \Phi(f)df = \int_0^\infty x(t)^2 dt \qquad (3.9)$$

有限な積分期間 T では、その間のエネルギーに一致する。（単位[L^2T]）

$$E \approx \sum_{k=0}^{N} \Phi(k\Delta f)\Delta f \approx \int_0^T x(t)^2 dt \tag{3.10}$$

同様に、パワースペクトル密度の周波数積分値＝パワーとなる。（単位[L^2]）

$$Power = \int_0^\infty P(f)df = \frac{1}{T}\int_0^\infty x(t)^2 dt \tag{3.11}$$

$$Power \approx \sum_{k=0}^{N} P(k\Delta f)\Delta f \approx \frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2 dt \tag{3.12}$$

（３）　力学的なエネルギーやパワー（仕事率）への変換

先に述べたように、スペクトル解析におけるエネルギーやパワーのスペクトルの単位は、必ずしも、力学的なエネルギー（たとえば、単位は J）や、力学的なパワー（J/s=W ワット）を直接表したものではない。しかし、観測している信号などが力学的な意味を持つ場合、何らかの形で変換できることが多いだろうし、そうすべき場面もある。

そういう変換が可能なのは、信号の変位 $x(t)$について、その自乗と力学的な物理量との関係が分かっている場合である。

例えば、振幅の 2 乗にその係数をかけてエネルギー時間率（パワー、仕事率）に直せば、力学的なパワーの単位を持ったスペクトルに変換できる、と言うケースである。観測値と仕事率の間に、

観測値の自乗 x^2　×　係数　＝　力学的な仕事率（パワー）

という関係があるとして、変換を行う場合である。エネルギースペクトル密度で単位[L^2T]、パワースペクトル密度で単位[L^2T]を持つから、それぞれに上記の変換係数をかけて単位を変換すれば、力学的な仕事率やエネルギーの周波数スペクトルに直せる。

例えば、パワースペクトル密度の縦軸を、力学的な仕事率（パワー）のスペクトル密度の縦軸に直すには、

スペクトルの値に、係数を掛けて値を計算したうえで、単位を、 [観測値の二乗の単位]　→　[力学的な仕事率の単位]　に差し替える。

観測値 x の単位を[L]とし、係数 K[WL^{-2}]を介して仕事率 P_F[W]に変換できるとしよう。

$$P_F[\mathrm{W}] = x^2[L^2] \times K[\mathrm{W\,L^{-2}}] \tag{3.13}$$

このとき、計測値で得られたパワースペクトル密度 $P(f)=\frac{|X(f)|^2}{T}$の単位は[L^2Hz^{-1}]であるから、

それに係数 K を掛けることで、仕事率のスペクトル密度 $P_{FD}(f)$ [W Hz^{-1}]を得る。

$$P_{FD}(f)[\mathrm{W\,Hz^{-1}}] = P\,(f)[L^2\mathrm{Hz^{-1}}] \times K[\mathrm{W\,L^{-2}}] \quad (3.14)$$

例）　消費電力の場合

　ある区間の電圧 $x(t)$[単位 V]を計測し、その間の抵抗 R[単位 Ω]だけがかかっているとする。このときの、時々刻々の消費電力 P_F[W]は次式で表せる。つまり電圧の二乗と電力が比例している。上記の係数 K は K=1/R にあたる。

$$P_F[\mathrm{W}] = \frac{x^2[V^2]}{R[\Omega]} \quad (3.15)$$

観測値の周波数 f に対するパワースペクトル密度が、$P\,(f) = \frac{|X(f)|^2}{T}$（単位[V^2 Hz^{-1}]）として得られたとしよう。すると、電力の周波数特性としてのスペクトル密度 $P_{FD}(f)$ [W Hz^{-1}]は次式のように得られる。

$$P_{FD}(f)[\mathrm{W\,Hz^{-1}}] = \frac{P\,(f)[\mathrm{V^2Hz^{-1}}]}{R[\Omega]} \quad (3.16)$$

これが周波数に対する消費電力の密度関数である。これを積分したものは、消費全力全体に等しい。

　ある時間 T 内の消費エネルギーの周波数成分についても、エネルギースペクトル密度から同様に変換できる。

4. FFT のツールから、パワースペクトル密度を求める。

Excel のフーリエ変換ツールを利用して、パワースペクトル密度を求める方法を考える。

こうしたツールは、FFT（高速フーリエ変換）を用いている。その制約として、

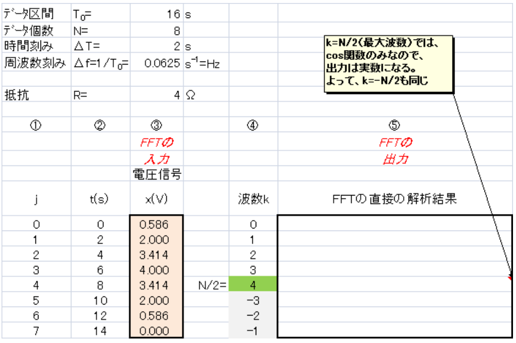
・データは２の整数乗個（2,4,8,16,,,）を用意すること

・エクセルでは最大データ数は 4096 個=2^{16} 個

となっている。

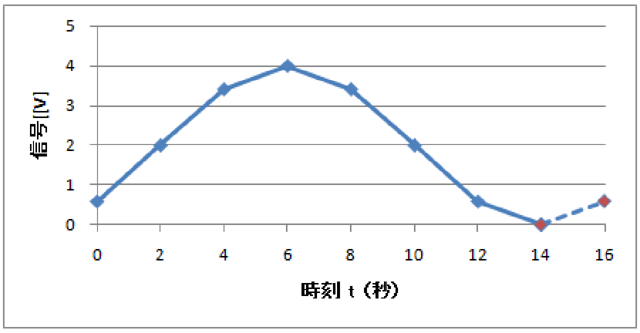
ここでは、エクセルでの FFT を利用した例を扱う。
FFT の利用開始の方法は、エクセルのバージョンで異なる。「フーリエ解析」でヘルプ検索し、使えるようにしていただきたい。ここでは EXCEL2007 を用いた例を示す。

次のようなデータ（C 列まで）を用意したとしよう。

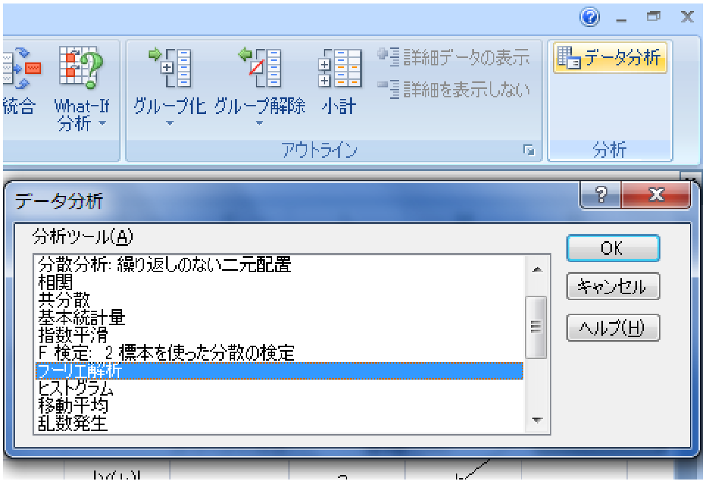


ﾃﾞｰﾀ区間	T_0=	16	s		
ﾃﾞｰﾀ個数	N=	8			
時間刻み	ΔT=	2	s		
周波数刻み	Δf=1/T_0=	0.0625	s^{-1}=Hz		
抵抗	R=	4	Ω		
①	②	③		④	⑤
		FFTの入力			FFTの出力
		電圧信号			
j	t(s)	x(V)		波数k	FFTの直接の解析結果
0	0	0.586		0	
1	2	2.000		1	
2	4	3.414		2	
3	6	4.000		3	
4	8	3.414	N/2=	4	
5	10	2.000		−3	
6	12	0.586		−2	
7	14	0.000		−1	

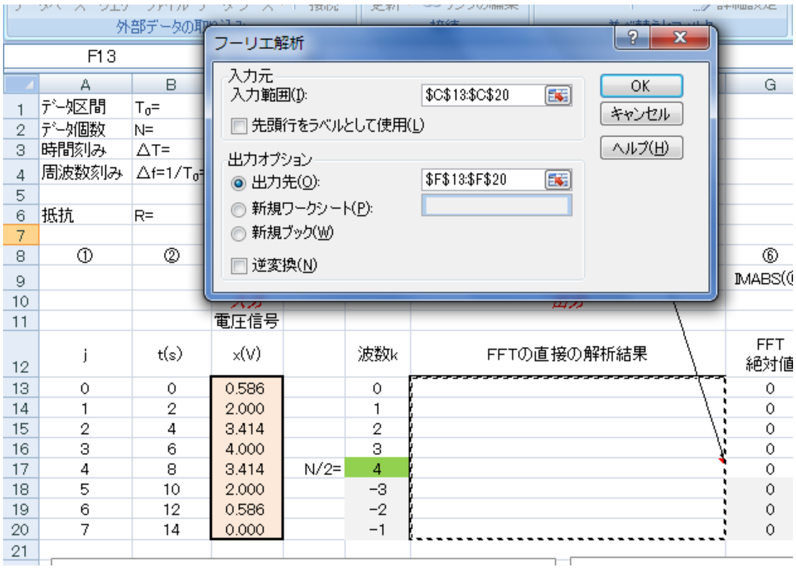
k=N/2(最大波数)では、cos関数のみなので、出力は実数になる。よって、k=−N/2も同じ



フーリエ解析を利用する。(EXCEL2007 では「データ」「データ分析」「フーリエ解析」から)

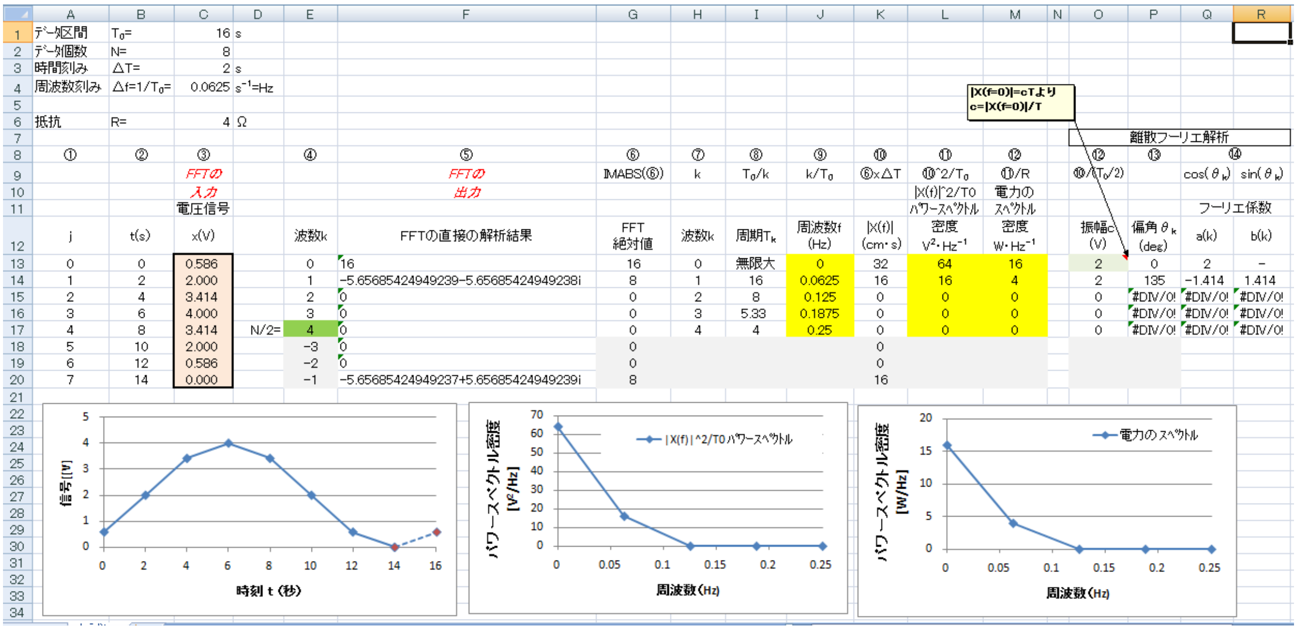


解析対象のデータと、出力先を指定する。ここでは、入力データはピンクのデータ部分（N=8 個）、出力先は同じシートの太枠部を指定した。



上図の出力先に FFT の結果が出力される。

計算結果を整理する。直接計算されるパワースペクトルは、L 列（⑪）である。



さて、この計算を整理して見る。

⑤列の出力結果は、

・１行目（13 行目）は、周波数 0、つまり一定値の成分の値。

・２行目(14 行目)から $N/2+1$ 行目(17 行目)までは、

$k=1$～$N/2$ のフーリエ変換 $X(f=k/T)$の結果（$f>0$）

・$N/2+2$ 行目（18 行目）から N 行目（20 行目）までは、

$k=-(N/2-1)$～-1 のフーリエ変換 $X(f=k/T)$の結果（$f<0$）

である。入力のデータ($x(t)$)が実数の場合、$X(-f)=X^*(-f)$は同じ、つまり共役となる。また、$k=N/2$については、偶関数しか抽出できないことから、実数の結果しか得られないため、共役である $k=-N/2$ も同じ結果となることもあり、FFT の結果には分離して現れない。よって、絶対値を求める上では、f=0〜+N/2 の解析で十分である。よって、上記では 13 行目から 17 行目までのみを使う。

ところで、このツールでは、時間情報を入力していない。つまり、データの羅列だけを入力し、計算している。これが意味するのは、時刻を、データの番号 $j=0,1,2,\cdots N-1$ として扱っているということである。よって、時間の単位の変換が必要である。ツールでの仮想の時間を t'とし、$t'=j=0,1,2,\cdots N-1$ のデータで解析している。$\Delta t'=1$ である。しかし実際の時間間隔は$\Delta T=2$ 秒であるから、それらの比は$\Delta T=2$ 秒である。式(2.8)(2.9)から、ツールによるフーリエ解析の結果$|X(f)|$の時間単位を修正するには、ΔT を掛けれてやればよい。上図の⑥列は複素フーリエ変換の結果を絶対値をとったものであるが、これは単位変換前であるから、これに倍数を掛ければ正しい$|X(f)|$（⑩列）を得られる。

式(3.8)の定義どおり、パワースペクトルは⑪列のように求められる。このときの周波数は$f=k/T$ で求められるから横軸に f を、縦軸にパワースペクトルをグラフに描けば、スペクトル分布が描ける。（真ん中の図）

このパワーは電圧の 2 乗[V^2]をとっているが、抵抗で割れば、⑫のように電力＝パワー[単位：W=VA=V^2/Ω]となる。これが、電力で見たときの周波数スペクトル分布となり、エネルギー消費がどの周波数帯にどれだけ分配されているのか、という意味を持つ。（右の図）

データ数が 2 の整数乗ではない場合について：

データの数 N_0 を超える最も小さい「2 の整数乗」を N とし、不足するデータに 0 を入れて、同様に処理する。すべての処理で、$T=N\Delta T$ として、周波数などを処理する。

５．おわりに

このメモの内容の正確性については保証しない。記述の誤りもあるかもしれないが、了承いただきたい。また、この説明を書籍等にするつもりはないので、関係の問い合わせも控えて戴きたい。

また、図を用いた解説が殆どないので、時間のあるときに追加したいと思います。

■補遺：三角関数と FFT の関係についてのメモ

(a)余弦変換・正弦変換と複素フーリエ変換との関係

複素フーリエ変換は、複素数として出力される。オイラーの公式

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \tag{a2.1}$$

を適用すると、式(2.1)は

$$X(f) = \int_0^\infty x(t)\cos 2\pi ft\, dt - i\int_0^\infty x(t)\sin 2\pi ft\, dt \tag{a2.2}$$

のように、余弦変換と正弦変換の複素和となる。

さて、周波数 *f>0* をある間隔*Δf* ごとに変化させてフーリエ変換の値の集合を得たとする。

$$f = k \cdot \Delta f \qquad \{k = -N/2, \cdots -1,0,1,2, \cdots N/2\} \tag{a2.3}$$

f と-*f* を計算するのは、高速フーリエ変換 FFT を想定している。

信号 $x(t)$が複素数の変動の場合において位相と振幅の情報を得るには、一つの周波数に対して 2 つの複素数の情報が必要である。しかし信号 $x(t)$が実数である場合には、$X(f)$と $X(-f)$は互いに共役となり、一方の複素数の情報があれば、位相、振幅の両方の情報が得られる。

$$X(-f) = \int_0^\infty x(t)\cos 2\pi ft\, dt + i\int_0^\infty x(t)\sin 2\pi ft\, dt = X^*(f) \tag{a2.5}$$

周波数$|f|$に対する余弦変換を $C(|f|)$、正弦変換を $S(|f|)$とすると、式(a2.2)より、

$$X(f) = C(|f|) - i\,S(|f|) \tag{a2.6}$$

$$X(-f) = C(|f|) + i\,S(|f|) \tag{a2.7}$$

であるから、実数のみで表現される余弦変換と正弦変換は、複素フーリエ変換からそれぞれ求められる。

$$C(|f|) = \frac{X(f)+X(-f)}{2} \tag{a2.8}$$

$$S(|f|) = \frac{X(-f)-X(f)}{2i} \tag{a2.9}$$

するとフーリエ変換の大きさ｜$X(f)|$はこれらの平方和の根で表せるから、

$$\sqrt{C(|f|)^2+S(|f|)^2} = \sqrt{X(f)X(-f)} = \sqrt{X(f)X^*(f)} = |X(f)| \tag{a2.10}$$

となり、実数の信号の場合、*f* は正の側のみ解析し、$X(f)$の共役数 $X^*(f)$との積の平方根をとればよい。このとき、$X(f)$の実数成分$C(|f|)$と虚数成分$S(|f|)$の 2 乗和の平方根$\sqrt{C(|f|)^2+S(|f|)^2}$をとれば得られる。(エクセルの場合は、IMABS という関数で得られる。)

(b)個別の三角関数を持つ波形に対するフーリエ変換について考えてみる。

例えば、信号が振幅 *a*[L]を持ち，周波数 *f* を持つ単純な三角関数で、$x(t)=a\cos(2\pi ft)$であるとすると、1/*f* に対して十分に長い有限区間 *T* でのフーリエ変換は、倍角の公式などを使って、次のように表せる.

$$X(f) = C(|f|) = \int_0^T a \cos^2 2\pi f t \, dt \tag{2.11}$$

$$= a\int_0^T \frac{1}{2}\{1 + \cos 4\pi f t\}\, dt \;=\; = \frac{a}{2}\left(T + \frac{1}{4\pi f}\sin 4\pi f t\right) \cong \frac{aT}{2} \qquad f \neq 0$$

$$= aT \qquad f = 0$$

f=0 の時の値は，定数の成分（周期＝∞）である．

同じように、信号が振幅 b[L]を持つ正弦関数、$x(t)=b\sin(2\pi ft)$であったとすると、そのフーリエ変換は次式となる．

$$X(f) = -i\, S(|f|) = -i\int_0^T b \sin^2 2\pi f t \; d \tag{2.12}$$

$$= -ib\int_0^{\mathrm{T}} \frac{1}{2}\{1 - \cos 4\pi f t\}\, dt\text{=} \; = -i\frac{b}{2}\left(T - \frac{1}{4\pi f}\sin 4\pi f t\right) \cong -i\frac{bT}{2} \qquad f \neq 0$$

$$= 0 \qquad f = 0$$