医用画像処理学（3）

基本概念（3）

（教科書pp. 38-69)

有村秀孝

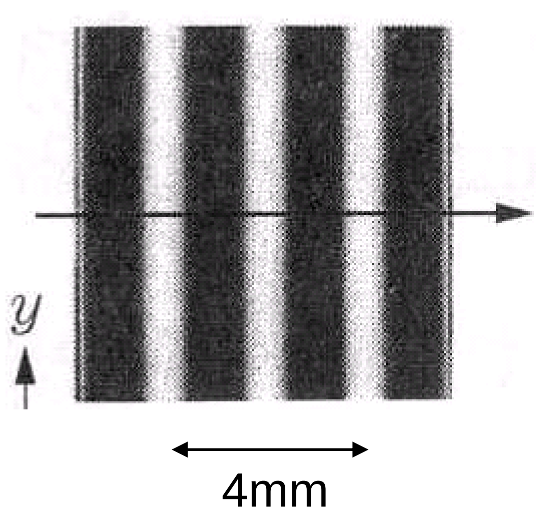
空間周波数での処理

- フーリエ変換を行うことによって、空間周波数領域の画像を求める。
- 空間周波数成分を調べる。画質評価など。
- 空間周波数領域での処理。ローパスフィルタ、ハイパスフィルタなど。

空間周波数

単位長さ当たりの正弦波の濃淡変化の繰り返し回数。

単位はmm^{-1}。cycles/mmを使う場合もあるが、SI単位系にcyclesは無い。



空間周波数＝
2/4mm = 0.5 mm^{-1}

フーリエ変換

フーリエ変換：絶対可積分の任意の関数（非周期でもOK）に対して、それぞれの（連続）周波数に対する振幅を求めることができる。実空間の関数から周波数空間の関数に変換。

フーリエ変換 $$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$$

フーリエ逆変換：フーリエ級数展開の拡張。任意の関数は、単純な波

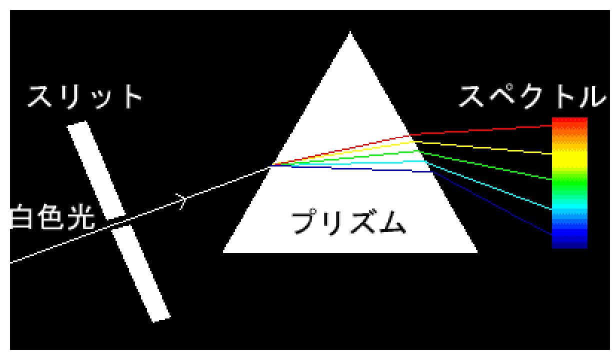
exp(iωx)=cos(ωx)+isin(ωx)で表現できる。周波数空間の関数を実空間の関数に逆変換できる。

フーリエ逆変換 $$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

DFT(離散フーリエ変換)：実際にフーリエ変換をコンピュータで計算するときに用いる。サンプリングしたディジタル信号に適用する。周期関数を仮定。したがって、フーリエ変換後も周期関数となる。DFTの高速な計算アルゴリズムはFFT(fast Fourier transform)。

DFT $$F_k=\sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

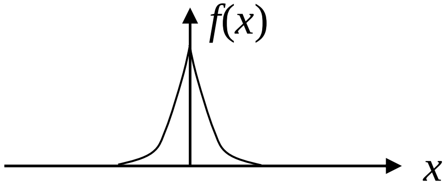
逆DFT $$f_n=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i\frac{2\pi}{N}kn}$$

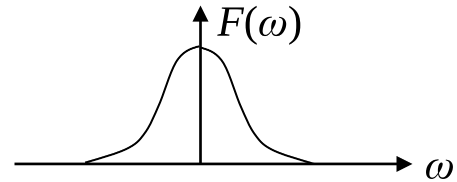


任意の関数　フーリエ変換　周波数ごとに分解される

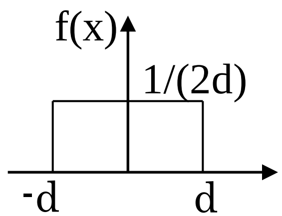
フーリエ変換の例

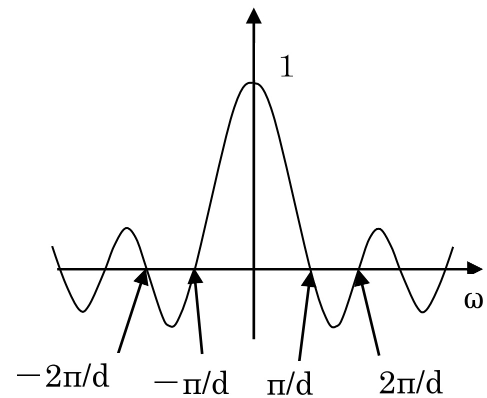
$$f(x)=e^{-a|x|} \quad \xleftrightarrow{FT} \quad F(\omega)=\frac{2a}{a^2+\omega^2}$$



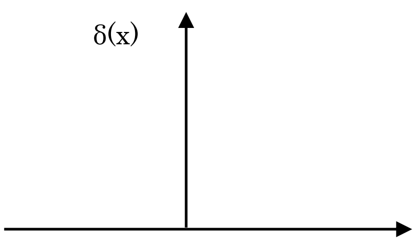


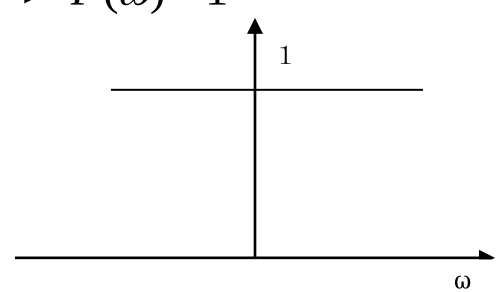
$$f(x)=\frac{1}{2d} \quad (|x|<d) \quad \xleftrightarrow{FT} \quad F(\omega)=\frac{\sin(\omega d)}{\omega d}=\sin c(\omega d)$$





$$f(x)=\delta(x) \quad \xleftrightarrow{FT} \quad F(\omega)=1$$





２次元フーリエ変換

$$G(\mu,\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)e^{-i2\pi(\mu x+\nu y)}dxdy$$

$$g(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G(\mu,\nu)e^{i2\pi(\mu x+\nu y)}d\mu d\nu$$

μ, v：空間座標x, y方向の空間周波数

G(μ, v)：画像g(x,y)のフーリエ変換

M×Nの画像のDFT (discrete Fourier transform)は周期関数になる。

空間周波数での処理

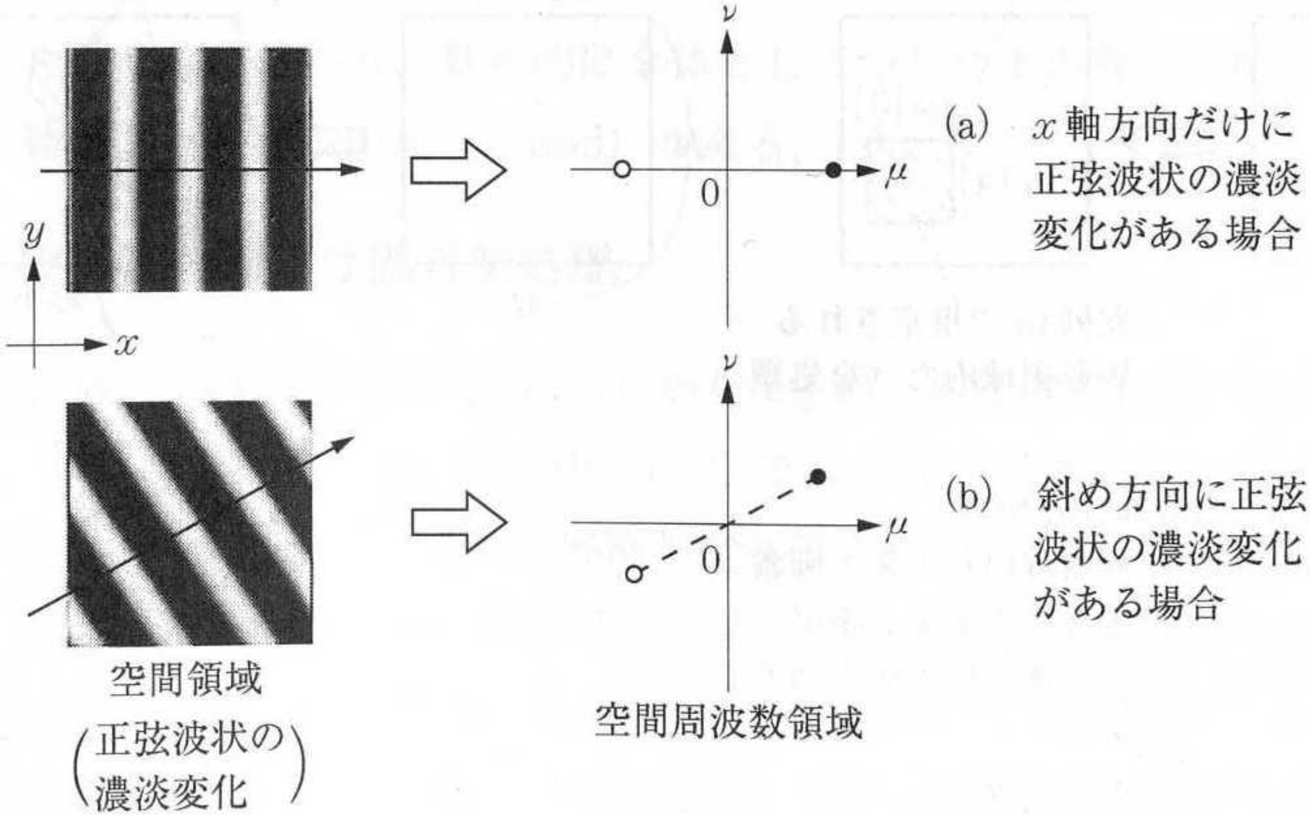
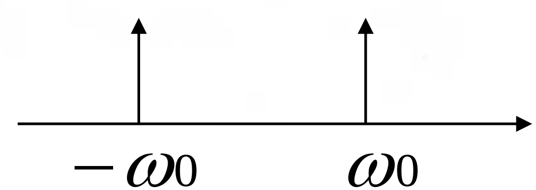
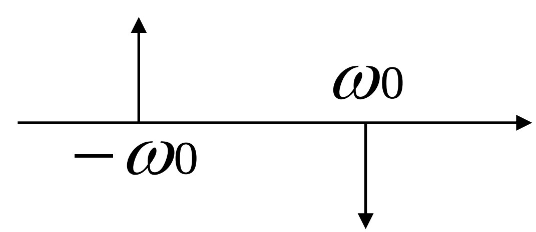


図 2・29 空間周波数

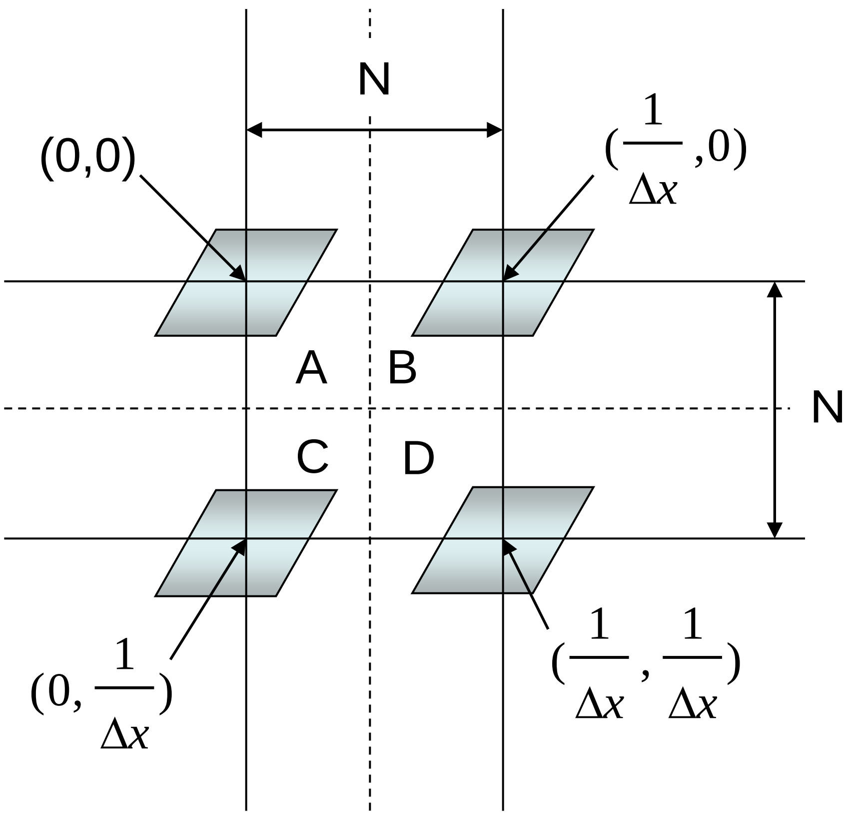
$$F[\cos(\omega_0 t)] = \pi\delta(\omega+\omega_0) + \pi\delta(\omega-\omega_0)$$



$$F[\sin(\omega_0 t)] = i\pi\delta(\omega+\omega_0) - \pi\delta(\omega-\omega_0)$$



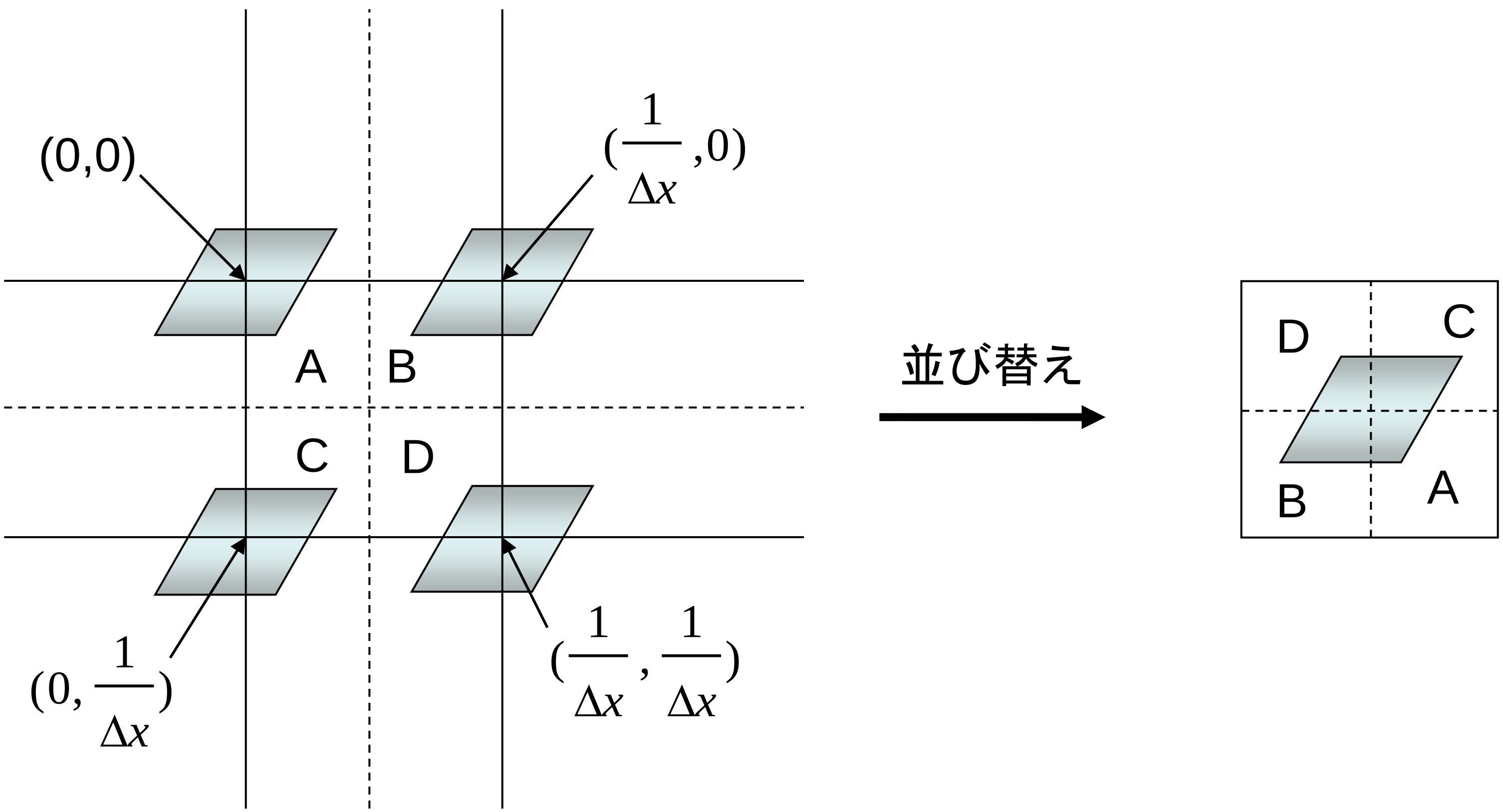
DFTによる空間周波数空間における性質



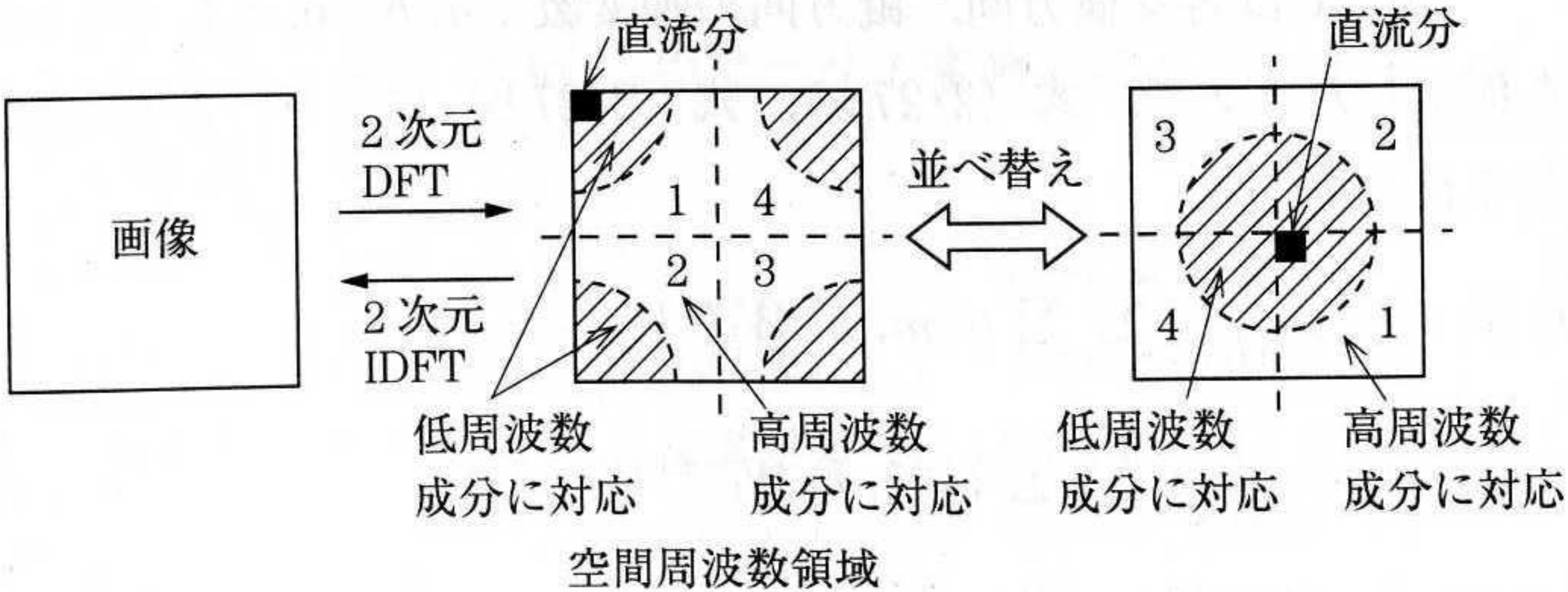
ある画像（N×N）の画像のフーリエ変換画像は同じ座標系で、N×Nとなる。したがって、対応する空間周波数を別に計算する必要がある。(N-1, N-1)は(1/Δx, 1/Δx)。

Δxはサンプリング間隔であり、ピクセルサイズ。

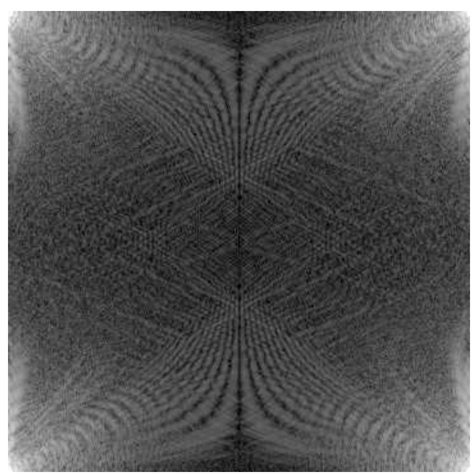
DFTによる空間周波数空間における性質



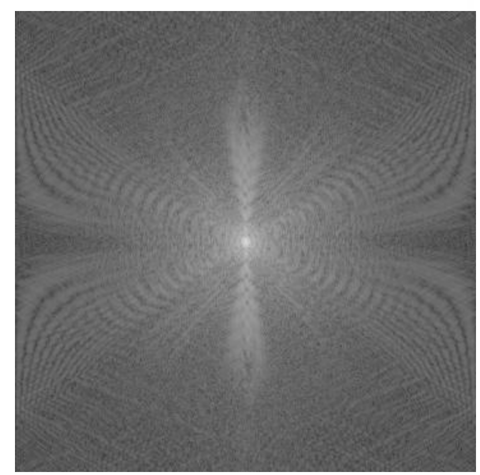
空間周波数成分の並べ替え



元画像

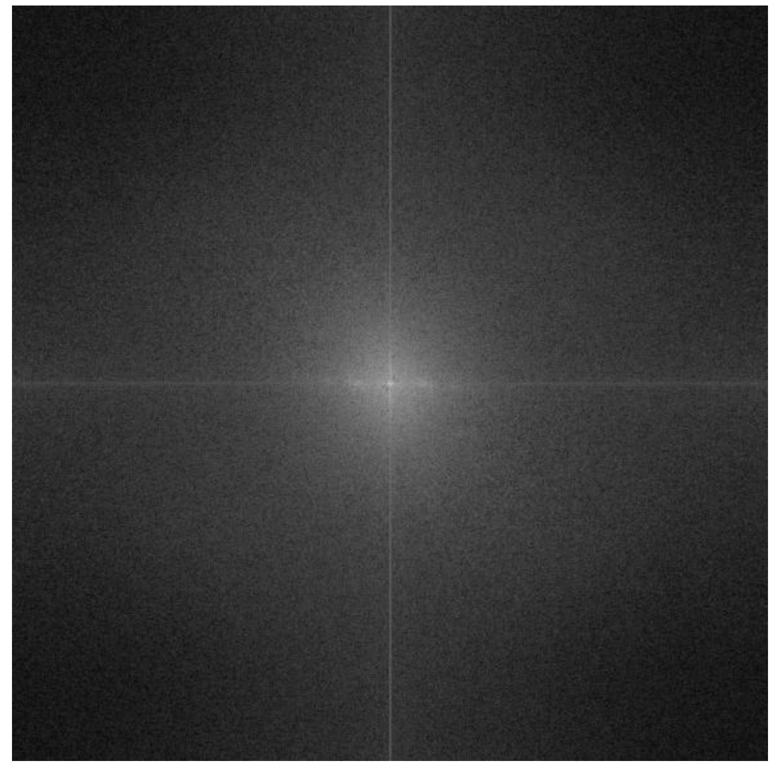


並べ替え前



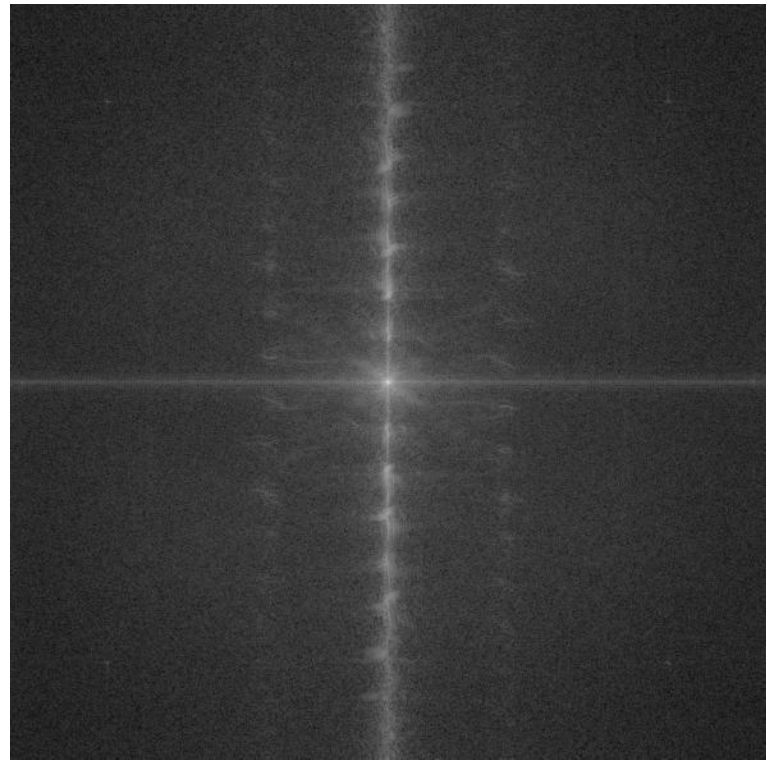
並べ替え後

画像のフーリエ変換の例



画像のフーリエ変換の例

昭和元年（1926年） 初めてテレビにカタカナの「イ」の文字を映し出した。（NHK放送博物館）



周期的な波があることを示している。

例題：画像のサイズは256×256の画像をフーリエ変換し、パワースペクトルを求めることを考えます。

（１）この画像のサンプリング間隔（ピクセルサイズ）を1 (mm)とすると、ナイキスト（空間）周波数＊(mm^{-1})はいくらですか。

（２）また、最低空間周波数はいくらですか。

答：＊ナイキスト周波数は有効な周波数範囲の最高周波数。

（１）1/(2Δ x) =1.0/(2x1.0) = 0.5 (mm^{-1})

（２）FOVの１辺=1mm x 256 ピクセル = 256 mm

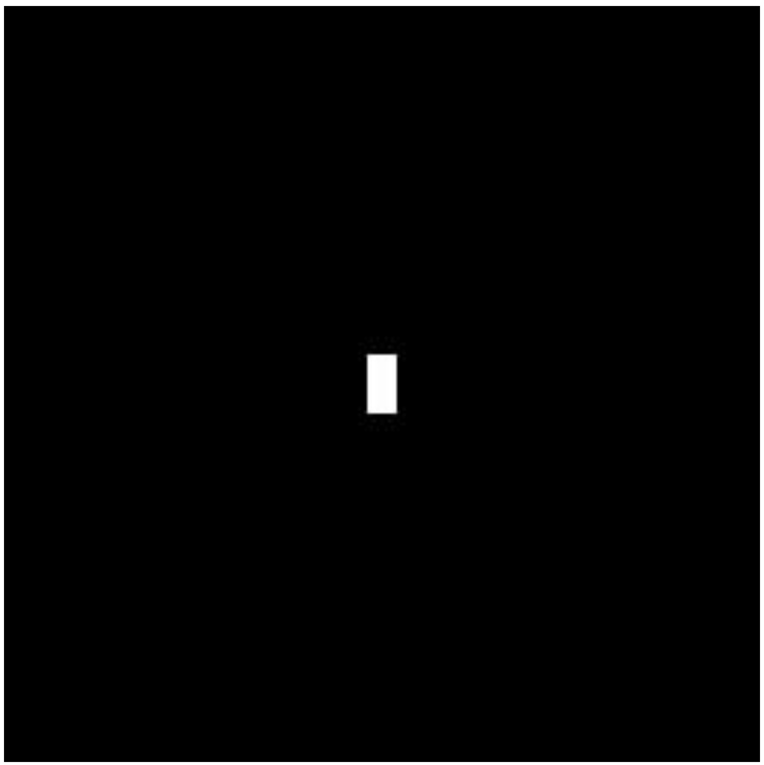
この長さが測定できる最大の周期となる。したがって、最低の周波数はこの逆数であるから、以下のようになる。

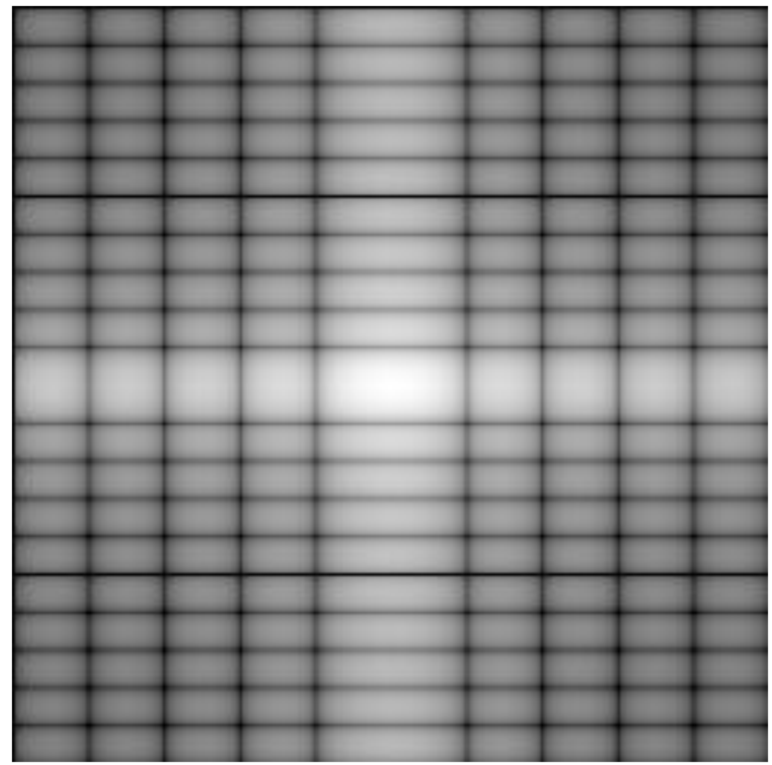
1/256 = 3.9 x 10^{-3} mm^{-1}

関連問題：大人の頭部を256mm×256mmのFOVで、MR画像を撮像する場合を考える。出力されたMR画像のサイズが256×256の場合、ピクセルサイズはいくらですか。また、最低2mmの直径の血管を対象に撮像する場合、サンプリング定理＊＊に従っていると言えるかどうかか考察しなさい。

＊＊サンプリング定理：ある信号の最高周波数がUまたはU以下に制限されているとき、１／（2U）より小さいサンプリング間隔でサンプリングすると、その信号のすべての情報が保存される。

(3)以下の左の画像をフーリエ変換し、パワースペクトルを求め、並べ替えを行うと、右の画像になります。画像のサイズは256×256で、長方形の白四角は、画像中心に配置してあり、横×高さ＝10×20ピクセルです。右の画像の横方向と縦方向の黒い縞（値がゼロになる）の間隔は、それぞれ何ピクセルですか。ただし、ピクセルサイズは1 mmとする。



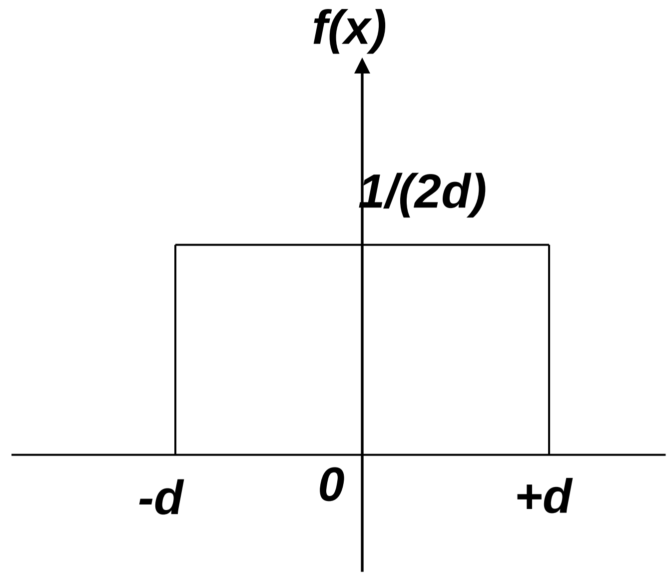


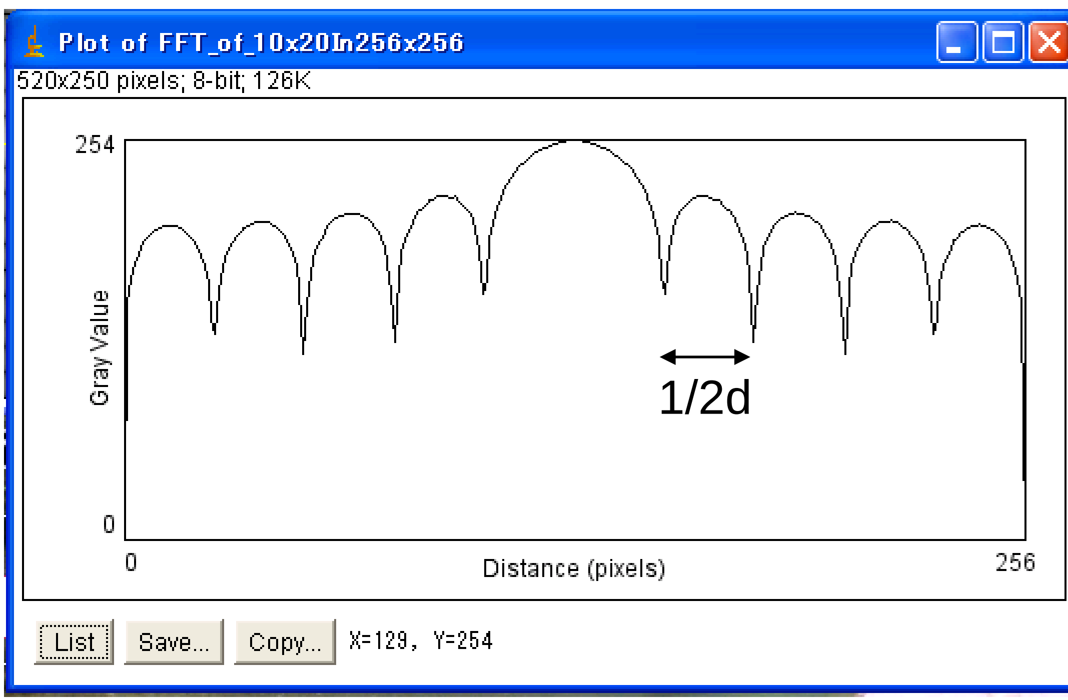
関連問題：左の元画像が円形の場合フーリエ変換の画像はどのようになりますか。

$$f(x) = \frac{1}{2d} \qquad (|x| < d)$$

$$f(x) = 0 \qquad (|x| > d)$$

$$F(f) = \frac{\sin(2\pi f d)}{2\pi f d}$$



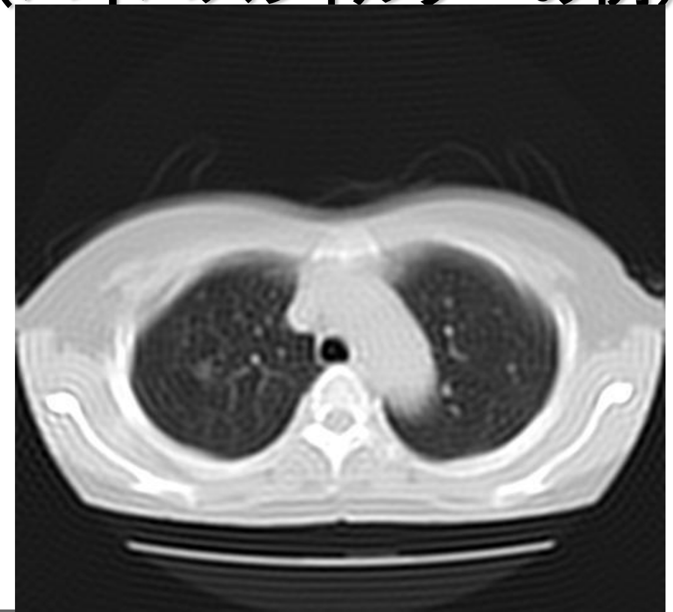


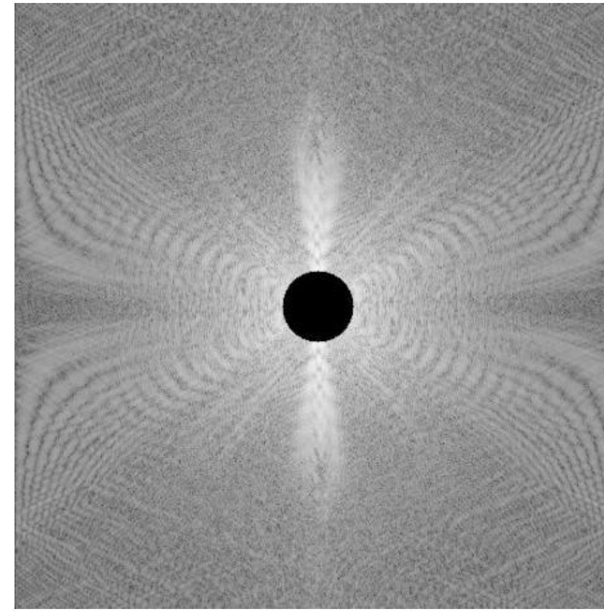
X方向の縞の間隔：

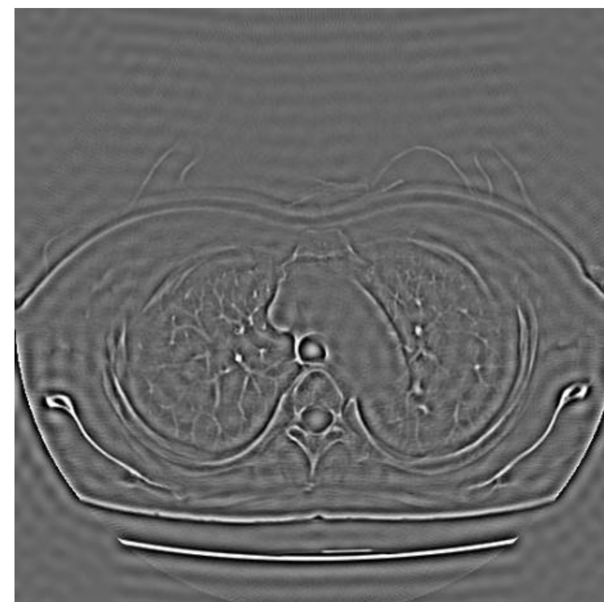
d=5であるので、1/(2x5*1) (mm^{-1})の周波数間隔で縞ができる。1ピクセル当たりの周波数は1/256 (mm^{-1})であるので、(1/10)/(1/256)=256/10=25.6~26ピクセル

Y方向の縞の間隔：
(1/20)/(1/256)=256/20=12.8 ~ 13

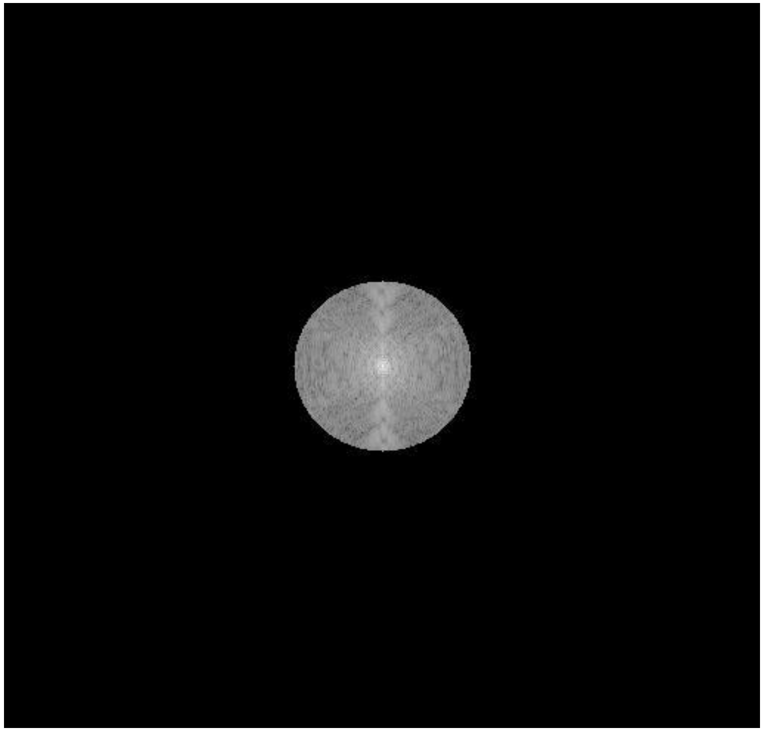
周波数処理（ハイパスフィルターの例）

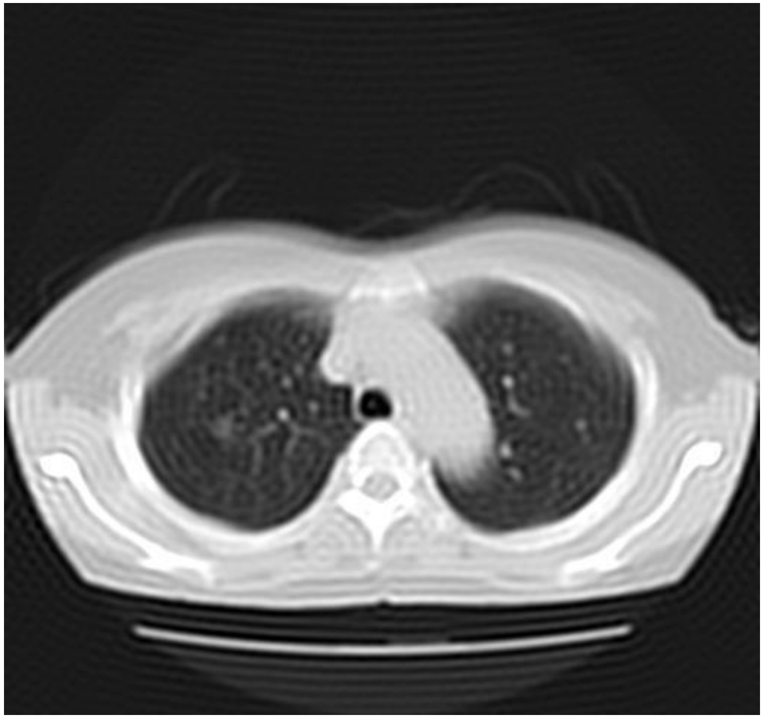




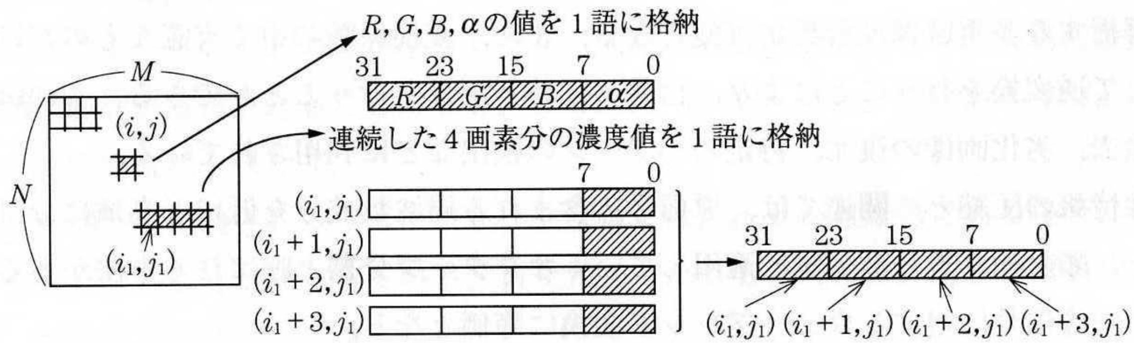


周波数処理（ローパスフィルターの例）

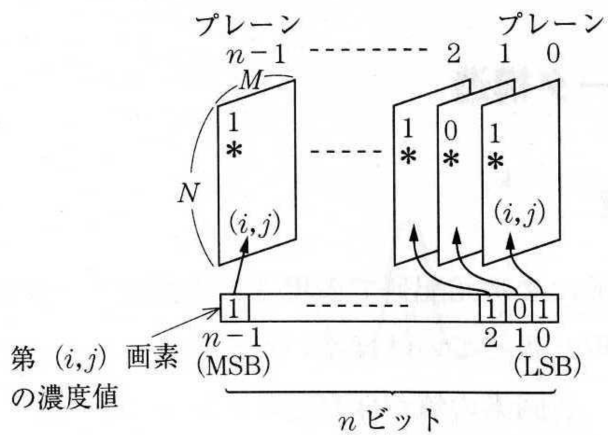




カラー画像



(a) 詰込み方式（8ビット/画素，32ビット/語の場合）



(b) ビット・プレーン方式

図 2・37 詰込み方式とビット・プレーン方式

画像データの一次元配列

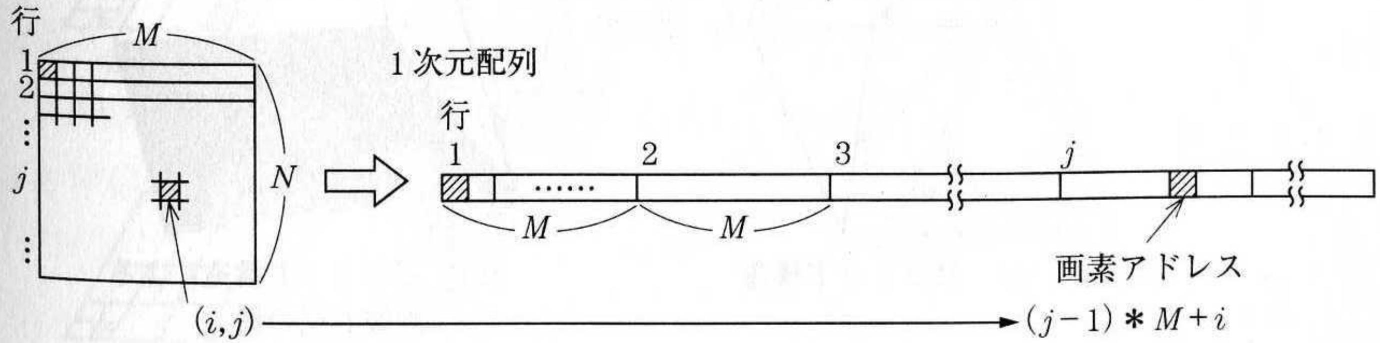


図 2・38　画像データ（2次元配列）の1次元配列への格納

諧調変換

$$x_{out} = \frac{b-a}{d-c}(x_{in} - c) + a$$

$(c \leqq x_{in} \leqq d)$

$x_{out} = a \ (x_{in} < c)$

$x_{out} = b \ (d < x_{in})$

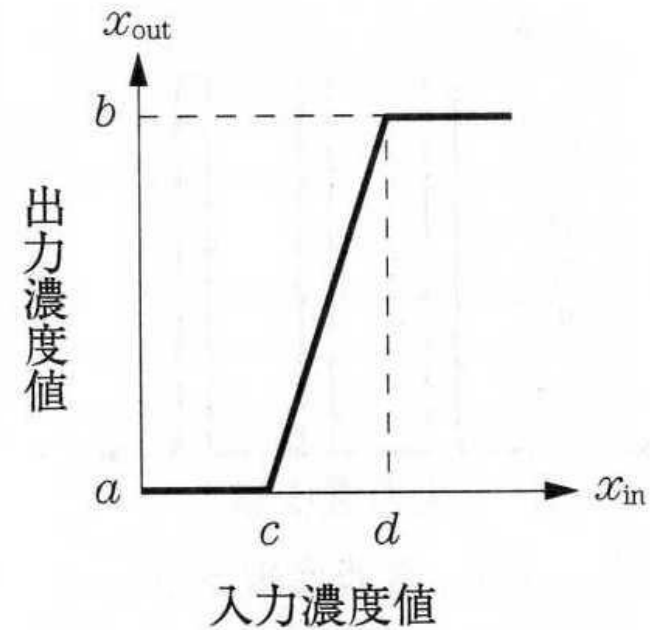
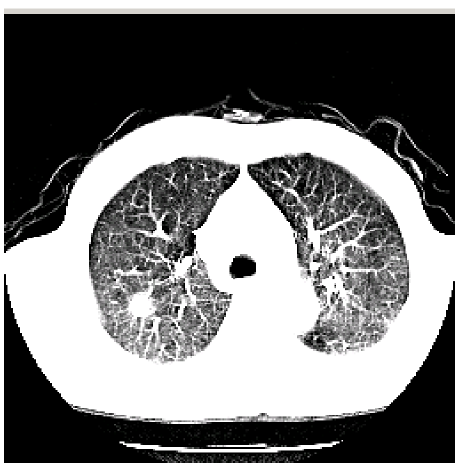


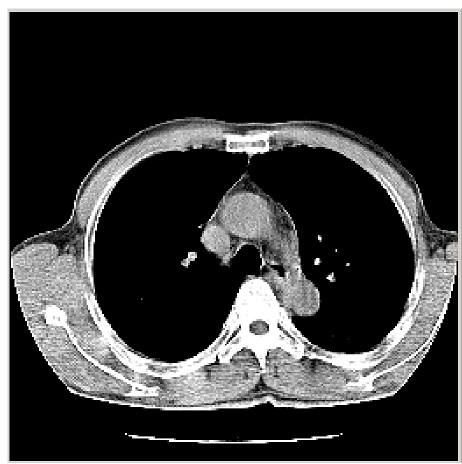
図 4•1 式（4・1）の濃度変換曲線

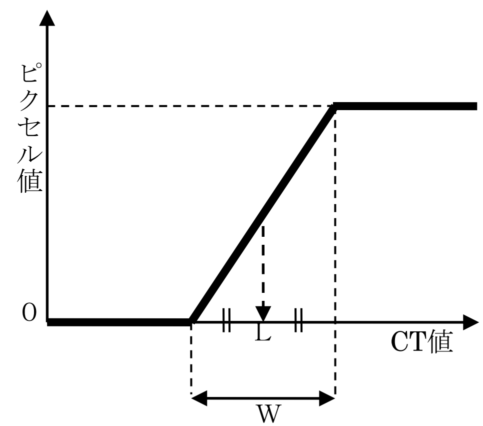
問題：－1000から1000までの値をとるCT画像（画像サイズは512×512）は1ピクセル当たり最低何ビット必要ですか。その画像を8ビットの画像に変換する諧調変換の式を求めなさい。変換後の画像のバイト数はいくらですか。

例題１：CT画像でウィンドウレベルを使って、観察したい組織を見やすいように階調変換します。そこで、ウィンドウレベルLとウィンドウ幅Wを使って、８ビットのピクセル値の画像に階調変換する式を作ってください。

例題２：また、一般的な肺野のCT画像のヒストグラムを描いて、どのようにして目的の組織（例えば、骨＋筋肉＋脂肪を見る。または肺野＋血管を見る）を階調変換するかを、図を使って説明しなさい。

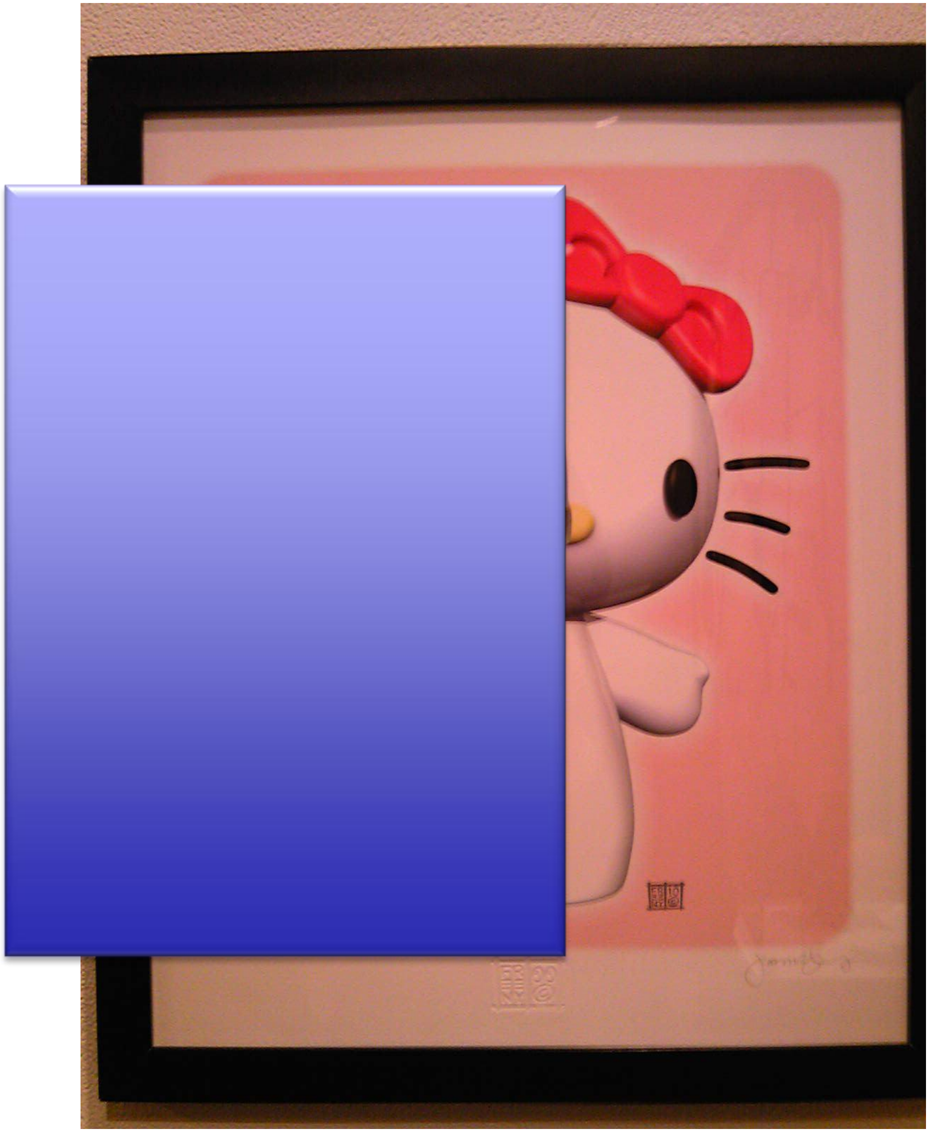






$$P_{ct} = \frac{255}{w}\{CT_{value} - (L - \frac{w}{2})\}$$

リアルなキティちゃん



MUSCULOSKELETAL
SKELETON AND JOINT
frontal bone
maxilla
clavicle
humerus
femoral
OUR BODY