Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

.

Башаева Лина Айндиевна

Системы (-1,0,1)-векторов

Выпускная квалификационная работа
образовательной программы бакалавриата «Математика»

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор
Райгородский Андрей Михайлович

Соруководитель от факультета:
доктор физико-математических наук,
профессор
Колесников Александр Викторович

Москва 2021

Содержание

Аннотация

В данной работе рассматривается задача экстремальной комбинаторики о максимальном числе векторов специального вида с запрещенными скалярными произведениями. Это важная задача на стыке теории кодирования, комбинаторной геометрии, теории Рамсея и др. В работе предлагаются идеи новых конструкций с большой мощностью, а также применение вероятностного метода в комбинаторике в отношении данной задачи.

1 Введение

В данной работе исследуется число независимости дистанционного графа G_{2k}, $k \in \mathbb{N}$. Напомним, что дистанционным графом называют такой граф, вершины которого являются векторами из $\mathbb{R}_n$, а ребра проведены между вершинами, находящимися на заданном расстоянии. Числом независимости графа называют максимальную мощность подмножества его вершин, попарно не соединенных ребрами.

Граф G_{2k} – это дистанционный граф, вершинами которого служат такие вектора $2k$-мерного пространства, что их координаты принимают значения из множества $\{-1, 0, 1\}$, причем количество ненулевых координат равно в точности k. Ребра же проведены между теми вершинами, скалярное произведение которых равно нулю, что эквивалентно условию запрета на расстояние $\sqrt{2k}$. Строгое определение следующее:

$$G_{2k} = (V_{2k}, E_{2k}) :$$
$$V_{2k} = \big\{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{2k}) : x_i \in \{-1, 0, 1\}, |\{i : x_i = \pm 1\}| = |\{i : x_i = 0\}| = k\big\},$$
$$E_n = \big\{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\} : \mathbf{x},\mathbf{y} \in V_n, \langle\ \mathbf{x},\ \mathbf{y}\ \rangle = a, a \in \mathbb{N}\big\}.$$

Данный граф играет исключительно важную роль во многих проблемах комбинаторики (см.[2],[4]), в частности в отыскании хроматического числа пространства $\chi(\mathbb{R}_n)$ - минимального числа цветов, в которое можно покрасить все точки пространства $\mathbb{R}_n$, так что никакие две, находящиеся на заданном расстоянии , не будут покрашены в один цвет. Разумеется, оно не зависит от того, какое расстояние мы зафиксируем. Для $n \geq 2$ точное значение этой величины до сих пор неизвестно. Хроматическое число графа - это минимальное число цветов, которое требуется для такой раскраски его вершин, что любые две, соединенные ребром, будут разноцветными. Ясно, что $\chi(G_{2k}) \leq \chi(\mathbb{R}_{2k})$. Существует тривиальная оценка, связывающая хроматическое число любого графа G и его число независимости: $\chi(G) \geq \frac{|V|}{\alpha(G)}$, где $|V|$ – мощность множества вершин графа.

До сих пор вопрос об отыскании числа независимости рассматриваемого нами графа G_{2k} для $k \geq 5$ остается открытым, имеются лишь верхние и нижние оценки. При чётных k оценка снизу принадлежит В.Ф. Москве, который получил её в своей дипломной работе (см. [3]), предъявив соответствующую конструкцию. Она будет описана далее. При нечётных k эта оценка является максимумом из двух величин — величины оценки Москвы и величины 2^{2k-1}. Последняя величина была найдена В. К. Любимовым (см. [4]) в слегка ином виде.

Нами была предпринята попытка улучшить нижнюю оценку числа независимости G_{2k}, предъявив явную конструкцию, как это было сделано ранее. Далее будут рассмотрены конструкции, которые мы получили, и оценки, которые они дают, а также вероятностный метод в комбинаторике в отношении данной проблемы. К сожалению, новые оценки получить с помощью наших конструкций не удалось, однако, после исследования данной проблемы у нас появилось предположение, что конструкция Москвы не улучшаема. Доказательство данного факта достаточно сложно, верхние оценки числа независимости G_{2k} на порядки выше.

2 Конструкция Москвы

Пусть $m \in \{1, ..., k-1\}$. Это параметр, по которому будет браться максимум. Разобьём множество координатных позиций на части с мощностями $2m+1$ и $2k-2m-1$. Для каждого $i \in \{1, \ldots, m+1\}$ рассмотрим все векторы, у которых в первой части ровно $m+i$ ненулевых координат, а во второй, соответственно, ровно $k-m-i$ ненулевых координат. При этом введём ограничение на количество отрицательных координат в каждой части: если в первой части их A а во второй — B, то должно быть выполнено соотношение $i-2A-B \geq 1$. Оценив с помощью этого соотношения доли единиц и минус единиц в первых частях векторов, можно убедиться, что оно гарантирует нижнюю оценку единицей для скалярного произведения любых двух векторов из конструкции. Добавим в конструкцию все векторы, полученные из уже построенных домножением на 1. Ясно, что ортогональных пар не возникнет.

Таким образом, мощность оптимальной конструкции равна

$$2 \max_m \sum_{i=1}^{m+1} C_{2m+1}^{m+i} C_{2k-2m-1}^{k-m-i} \sum_{B=0}^{i-1} C_{k-m-i}^{B} \sum_{A=0}^{[\frac{i-B}{2}]} C_{2k+1}^{A}.$$

Заметим, что данная конструкция является **двухчастной** в том смысле, что множество координатных позиций разбивается на две части.

3 Трёхчастная конструкция 1

В данном разделе мы опишем одну из наших конструкций.

Всюду в дальнейшем под словами "скаляное произведение в i-ой части"мы подразумеванием ограничение скалярного произведения на i-ое фиксированное подпространство рассматриваемого $2k$-мерного пространства для удобства и краткости.

Рассмотрим три случая, в зависимости от остатка деления k на 3:

1. $2k = 6m$.

Разделим множество координатных позиций на три равные части размера $2m$. Для всех $1 \leq i, j, k \leq 3$ добавим в наше множество все векторы, имеющие не менее $3m - 2[\frac{2m-1}{3}]$ ненулевых координат в i-ой части, и не более $[\frac{2m-1}{3}]$ ненулевых координат в j-ой и в k-ой части. Назовем такие вектора векторами i-ого подмножества. Это определение корректно, так как $3m - 2[\frac{2m-1}{3}] > \frac{5m}{3} > [\frac{2m-1}{3}]$. Введем некоторые ограничения на количество положительных и отрицательных координат в каждой части: если вектор i-ого подмножества имеет A положительных координат в i-ой части, i_B ненулевых и B отрицательных координат в j-ой части, i_C ненулевых и C отрицательных координат в k-ой части, то должно быть выполнено: $2(A+B) \leq m - \frac{3}{2} i_C - \frac{1}{2}$

$2(A+C) \leq m - \frac{3}{2} i_B - \frac{1}{2}$.

Докажем, что среди полученных векторов не будет ортогональных пар. Пусть вектор v_1 принадлежит 1-ому подмножеству и имеет j^1 отрицательных координат и A_1 положительных координат в 1-ой части, i_B^1, B_1 положительных и отрицательных координат, соответственно, во 2-ой части, i_C^1,C_1 положительных и отрицательных координат, соответственно, 3-ей части. Вектор v_2 имеет j^2 отрицательных и A_2 положительных координат во 2-ой части, i_B^2,B_2 положительных и отрицательных координат, соответственно, в 1-ой части, и i_C^2,C_2 положительных и отрицательных координат, соответственно, в 3-ей части. Временно заменим все положительные координаты вектора v_1 в 1-ой части отрицательными, а отрицательные координаты во 2-ой и 3-ей частях - положительными. Аналогично поступим с вектором v_2, временно заменив все положительные координаты во 2-ой части отрицательными, а отрицательные координаты во 1-ой и 3-ей частях - положительными. Тогда вектор v_1 имеет лишь отрицательные координаты в 1-ой части, а во 2-ой и 3-ей - лишь положительные. Вектор v_2 имеет отрицательные координаты во 2-ой части, а в оставшихся двух - положительные. Тогда скалярное произведение в 1-ой части данных двух векторов будет не больше $-(j^1 + i_B^2 - 2m)$, во второй - не больше $-(j^2 + i_B^1 - 2m)$, а в третьей оно не больше $min(i_C^1, i_C^2) \leq \frac{1}{2}(i_C^1 + i_C^2)$. Восстановим теперь положительные и отрицательные координаты векторов – скалярное произведение в первой части увеличится не более чем на $2A_1 + 2B_2$ (так как $A_1 + B_2$ положительных слагаемых в скалярном произведении может появиться вемсто тех слагаемых, которые до этого были равны -1), во второй - не более чем на $2A_2 + 2B_1$, а в третьей части оно увеличится не может. Итого, получим оценку сверху на скалярное произведение:

$$
\begin{aligned}
&-(j^1 + i_B^2 - 2m - 2A_1 - 2B_2) - (j^2 + i_B^1 - 2m - 2B_1 - 2A_2) + \frac{1}{2}(i_C^1 + i_C^2) = \\
&4m - \underbrace{(j^1 + i_B^1)}_{=3m - i_C^1} - \underbrace{(j^2 + i_B^2)}_{=3m - i_C^2} + (2A_1 + 2B_1) + (2A_2 + 2B_2) + \frac{1}{2}(i_C^1 + i_C^2) \leq \\
&\leq i_C^1 + i_C^2 - 2m + m - \frac{3}{2}i_C^1 - \frac{1}{2} + m - \frac{3}{2}i_C^2 - \frac{1}{2} = -1,
\end{aligned}
$$

то есть произвольные два вектора из 1-ого и 2-ого множества неортогональны. Для векторов из 1-ого и 3-его, 2-ого и 3-его все вычисления будут точно такими же, поэтому мы их опускаем. Проверим, что любые два вектора из одного подмножества не являются ортогональными. Пусть вектора v и w имеют j_1, A_1 и j_2, A_2 отрицательных и положительных координат, соответственно, в первой части, i_B^1, B_1 и i_B^2, B_2 положительных и отрицательных координат, соответственно, во 2-ой части, $i_{1,1}$ и $i_{2,2}$ положительных и отрицательных координат, соответственно, во 3-ей части. Скалярное произведение в первой части оценивается снизу числом $j_1 + j_2 - 2m - 2A_1 - 2A_2$, во второй оно не меньше $-B_1 - B_2$, а в третей – не меньше $-C_1 - C_2$. Поэтому оценка снизу для скалярного произведения векторов v и w выглядит следующим образом: $j_1 + j_2 - 2A_1 - 2A_2 - 2m - B_1 - B_2 - C_1 - C_2 \geq 1$. Последнее неравенство выполнено, если $j - 2A - m - B - C = (3m - i_B - i_C) - m - (A + B) - (A + C) \geq \frac{1}{2}$. Проверим, что это так. Оценим сверху числа $(A + B)$ и $(A + C)$ числами $\frac{m - \frac{3}{2}i_C - 1}{2}$ и $\frac{m - \frac{3}{2}i_B - 1}{2}$, соответственно, из полученных выше ограничений. Тогда

$$
\begin{aligned}
&(3m - i_B - i_C) - m - (A + B) - (A + C) \geq \\
&2m - i_B - i_C - \frac{m}{2} + \frac{3}{4}i_C + \frac{1}{2} - \frac{m}{2} + \frac{3}{4}i_B + \frac{1}{2} = \\
&= m - \frac{i_B + i_C}{4} + 1 \geq \\
&\left(\frac{i_B + i_C}{4} \leq \frac{2[\frac{2m-1}{3}]}{4} \leq \frac{1}{2}\frac{2m}{3} = \frac{m}{3}\right) \\
&\geq \frac{2m}{3} + 1 \geq \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Последнее неравенство верно, поэтому ортогональных векторов из одного подмножества нет, так как для векторов 2-ого и 3-его подмножеств все вычисления будут такими же.

В нашем множестве также нет противоположных векторов, так как вектор i-ого подмножества имеет в i-ой части отрицательных координат больше, чем положительных, а вектора из разных подмножеств, очевидно, не могут быть противоположными.

Поэтому при добавлении к нему всех противоположных векторов, мощность множества увеличится вдвое, а ортогональных пар не появится.

Таким образом, что мощность конструкции для $2k = 6m$ равна:

$$2 * 3 \sum_{j=3m-2[\frac{2m-1}{3}]}^{2m} C_{2m}^{j} \sum_{i=3m-j-[\frac{2m-1}{3}]}^{[\frac{2m-1}{3}]} C_{2m}^{i} C_{2m}^{3m-i-j}$$
$$\sum_{A=0}^{[\frac{2m-3max(i,3m-i-j)-1}{4}]} C_j^A \sum_{B=0}^{[\frac{2m-3(3m-i-j)-1}{4}]-A} C_i^B \sum_{C=0}^{[\frac{2m-3i-1}{4}]-A} C_{3m+1-i-j}^{C}.$$

n	Известные оценки	Трехчастная конструкция
120	3.6191340875953334e+40	4.4622731246702465e+27
126	4.6574692777576615e+42	1.258673867910362e+28
132	6.006871423951133e+44	2.3677895488370556e+30
138	7.762760154988898e+46	1.1877220940326539e+32
144	1.005033418861549e+49	4.4363051141856554e+32
150	1.303398377610353e+51	7.482721177335732e+34
156	1.6929708519732821e+53	3.26130213491464e+36
162	2.202150800316737e+55	1.5765159054080243e+37
168	2.8683026227382617e+57	2.3798343439280795e+39
174	3.740614660238797e+59	9.1924874651291e+40

2. $2k = 6m+2$. В данном случае мы делим множество координатных позиций три части следующих размеров: первая и вторая имеют размер $2m+1$, а третья – размер $2m$. Добавим в наше множество все векторы, имеющие не менее $3m+1-[\frac{2m-1}{3}]-[\frac{2m}{3}]$ ненулевых координат в 1-ой части, не более $[\frac{2m}{3}]$ ненулевых координат во 2-ой части и не более $[\frac{2m-1}{3}]$ ненулевых координат в 3-ей части. Назовем их векторами 1-ого подмножества. Определение корректно, так как $3m+1-[\frac{2m-1}{3}]-[\frac{2m}{3}] > \frac{5m}{3} > [\frac{2m}{3}] + [\frac{2m-1}{3}]$. Ограничения на количество положительных и отрицательных координат в каждой части будут выглядеть следующим образом: если вектор 1-ого подмножества имеет A положительных координат в 1-ой части, i_B ненулевых и B отрицательных координат во 2-ой части, i_C ненулевых и C отрицательных координат в 3-ей части, то должно быть выполнено:

$2(A+B) \leq m - \frac{3}{2}i_C - \frac{1}{2}$

$2(A+C) \leq m - \frac{3}{2}i_B$.

Вектора 2-ого подмножества определяются аналогично. Вектора 3-его подмножества определяются следующим образом: в 3-ей части они имеют не менее $3m+1-2[\frac{2m}{3}]$ ненулевых координат, а в каждой из 2-ой и 1-ой – не более $[\frac{2m}{3}]$. Ограничения на положительные и отрицательные координаты векторов данного подмножетсва выглядят так:

$2(A+B,C) \leq m - \frac{3}{2}i_{C,B}$.

Проверка того, что при никакие два произвольно выбранных вектора из полученного множества не будут ортогональными аналогична той, что была проделана в предыдущем случае, поэтому мы ее опускаем.

Итого, для $2k = 6m + 2$ мощность конструкции равна:

$$2 * (2 \sum_{j=3m+1-[\frac{2m}{3}]-[\frac{2m-1}{3}]}^{2m+1} C_{2m+1}^{j} \sum_{i=3m+1-j-[\frac{2m-1}{3}]}^{[\frac{2m}{3}]} C_{2m+1}^{i} C_{2m}^{3m+1-i-j} *$$
$$\sum_{A=0}^{[\frac{2m-3max(i,3m+1-i-j)-1}{4}]} C_j^A \sum_{B=0}^{[\frac{2m-3(3m+1-i-j)-1}{4}]-A} C_i^B \sum_{C=0}^{[\frac{2m-3i}{4}]-A} C_{3m+1-i-j}^{C}) +$$
$$+ \sum_{j=3m+1-2[\frac{2m}{3}]}^{2m} C_{2m}^{j} \sum_{i=3m+1-j-[\frac{2m}{3}]}^{[\frac{2m}{3}]} C_{2m+1}^{i} C_{2m+1}^{3m+1-i-j} *$$
$$\sum_{A=0}^{[\frac{2m-3max(i,3m+1-i-j)}{4}]} C_j^A \sum_{B=0}^{[\frac{2m-3(3m+1-i-j)}{4}]-A} C_i^B \sum_{C=0}^{[\frac{2m-3i}{4}]-A} C_{3m-i-j}^{C}).$$

n	Известные оценки	Трехчастная конструкция
122	1.8311110849119307e+41	1.0486811302281383e+28
128	2.357974075379656e+43	9.86426410683126e+28
134	3.042927407439574e+45	3.086481506520891e+30
140	3.934522523112606e+47	3.0524611770619345e+32
146	5.096476342367167e+49	2.782429459737002e+33
152	6.612468085593889e+51	1.0339271724920217e+35
158	8.592468580581944e+53	9.053471794837507e+36
164	1.118109560263405e+56	8.128339134702272e+37
170	1.456864882251258e+58	3.4881867728655494e+39
176	1.9005690142982536e+60	2.7261174687731953e+41

3. $2k = 6m+4$. Мы опускаем вывод всех ограничений для векторов, которые будут добавлены в наше множество в этом случае, и проверку на отстутствие ортогональных пар, так как они принципиально не отличаются от выкладок в предыдущих двух случаях. Заметим лишь, что в данном случае мы разбиваем множество координатных позиций три части размеров $2m + 1, 2m + 1$ и $2m + 2$.

Для $n = 6m + 4$ мощность конструкции равна:

$$2 * (2 \sum_{j=3m+2-[\frac{2m+1}{3}]-[\frac{2m}{3}]}^{2m+1} C_{2m+1}^{j} \sum_{i=3m+2-j-[\frac{2m+1}{3}]}^{[\frac{2m}{3}]} C_{2m+1}^{i} C_{2m+2}^{3m+2-i-j} *$$
$$\sum_{A=0}^{[\frac{2m-3max(i,3m+2-i-j)}{4}]} C_j^A \sum_{B=0}^{[\frac{2m-3(3m+2-i-j)+1}{4}]-A} C_i^B \sum_{C=0}^{[\frac{2m-3i}{4}]-A} C_{3m+1-i-j}^{C}) +$$
$$+ \sum_{j=3m+2-2[\frac{2m}{3}]}^{2m+2} C_{2m+2}^{j} \sum_{i=3m+2-j-[\frac{2m}{3}]}^{[\frac{2m}{3}]} C_{2m+1}^{i} C_{2m+1}^{3m+1-i-j} *$$
$$\sum_{A=0}^{[\frac{2m-3max(i,3m+1-i-j)}{4}]} C_j^A \sum_{B=0}^{[\frac{2m-3(3m+2-i-j)}{4}]-A} C_i^B \sum_{C=0}^{[\frac{2m-3i}{4}]-A} C_{3m+2-i-j}^{C}).$$

n	Известные оценки	Трехчастная конструкция
122	1.8311110849119307e+41	1.0486811302281383e+28
128	2.357974075379656e+43	9.86426410683126e+28
134	3.042927407439574e+45	3.086481506520891e+30
140	3.934522523112606e+47	3.0524611770619345e+32
146	5.096476342367167e+49	2.782429459737002e+33
152	6.612468085593889e+51	1.0339271724920217e+35
158	8.592468580581944e+53	9.053471794837507e+36
164	1.118109560263405e+56	8.128339134702272e+37
170	1.456864882251258e+58	3.4881867728655494e+39
176	1.9005690142982536e+60	2.7261174687731953e+41

Отметим, что данная конструкция отличается от конструкци В.Ф.Москвы тем, что в ней можно выбрать три вектора, попарное скалярное произведение которых отрицательно. В конструкции Москвы такой выбор осуществить нельзя.

4 Трёхчастная конструкция 2

Данная конструкция является своего рода модификацией конструкции В.Ф.Москвы.

Пусть, как и раньше, $2k$ – размерность пространства, в котором выбираются вектора. Разделим множество координатных позиций на три части, такие что первая часть имеет размер d, а вторая – размер $2m + 1$, а третья – размер $2k - d - 2k - 1$. Добавим в наше множество все вектора, имеющие j ненулевых координат в первой части, $0 \leq j \leq d$, $m + 1 + i$ ненулевых координат во второй части, $0 \leq i \leq m + 1$, и $k - j - m - 1 - i$ – в третьей части. В первой части количество отрицательных координат каждого вектора произвольное. Если во второй части их A, а в третей B, то должно быть выполнено $i - \frac{j}{2} - 2A - B \geq 0$.

Проверим, что скалярное произведение любых двух векторов из данного множества будет положительным.

Выберем произвольные два вектора v_1 и v_2. Пусть векторы $v_{1,2}$ имеют $j_{1,2}$ и $i_{1,2}$ ненулевых координат в 1-ой и 2-ой части, соответственно, $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$ отрицательных координат во 2-ой и 3-ей частях, соответственно. Скалярное произведение в первой части оценивается снизу числом $-\frac{j_1+j_2}{2} \leq -min(j_1, j_2)$. Во второй части оно не меньше $i_1 + i_2 + 1 - 2A_1 - 2A_2$ (мы оценили его снизу, временно заменив все координаты на положительные в данной части. При добавлении отрицательных координат оно уменьшится не более чем на $2A_1 + 2A_2$). В третьей части скалярное произведение мы оцениваем снизу числом $-B_1 - B_2$.

Тогда должно быть выполнено:

$-\frac{j_1+j_2}{2} + i_1 + i_2 + 1 - 2A_1 - 2A_2 - B_1 - B_2 \geq 1$

Нетрудно увидеть, что последнее неравенство верно при ограничениях, указанных в предыдущем параграфе.

Итого, мощность данного множества равна:

$$2 \sum_{j=0}^{d} C_d^j * 2^j \sum_{i=0}^{m} C_{2m+1}^{m+1+i} C_{2k-d-2m-1}^{k-j-m-1-i} \sum_{A=0}^{[\frac{i-\frac{j}{2}}{2}]} C_{m+1+i}^{A} \sum_{B=0}^{i-\frac{j}{2}-2A} C_{k-j-m-1-i}^{B}.$$

Проверив, каковы оптимальные параметры m и d для большого количества размерностей $n = 2k$, мы получили, что во всех случаях максимум достигался при $d = 0$, при котором данная конструкция становится конструкцией Москвы.

Ниже приведено, как уменьшается нижняя оценка независимого множества с ростом d для n=28, взятого в качестве примера:

d	Оптимальное m	Мощность множества
0	4	160466400
1	4	117403632
2	4	95046864
3	4	82294248
4	4	73332549
5	4	65574700
6	4	58199583
7	4	51180096
8	4	44695772
9	4	38836296
10	4	33512220
11	4	28499004
12	4	23550213
13	4	18525276
14	4	13486663

5 Вероятностный метод

Вероятностный метод в комбинаторике оказывается очень мощным для решения некоторых задач. Мы также попробовали применить его для отыскания числа независимости G_{2k}.

Нам потребуется симметричная форма локальной леммы Ловаса:

Лемма 1. *Пусть $A_1, \dots, A_m$ – события к некотором вероятностной пространстве, пусть $\forall i P(A_i) \leq p, p \in (0,1)$. Пусть A_i зависит от не более, чем d событий A_j. Тогда, если $ep(d+1) < 1$, то $P(\cap_{i=1}^m P(\overline{A_i}) > 0$.*

Рассмотрим вероятностное пространство, в котором множество элементарных исходов - это множество всех вершин v графа G_{2k}. Каждая вершина выбирается случайно с вероятностью $\frac{1}{|V_{G_{2k}}|} = \frac{1}{C_{2k}^k * 2^k}$, где $|V_{G_{2k}}|$ - мощность множества вершин графа. Введем случайные величины ξ_i, $1 \leq i \leq N$, равные вектору (вершине), выбранному на i-ом шаге, а также события A_{ij}, где $i < j$, состоящие в том, что скалярное произведение ξ_i и ξ_j равно нулю. Найдем максимальное число $N = N_0$, при котором $P(\cap_{1 \leq i < j \leq N}^m \overline{A_{ij}}) > 0$. Если эта вероятность положительна, то это означает, что случайно выбранная совокупность N_0 вершин графа G_{2k} будет независимым множеством, то есть никакие два вектора из N_0 случайно выбранных не будут ортогональными. А это, в свою очередь, означает, что среди всех N_0-элементных множеств вершин рассматриваемого графа существует независимое, ведь в противном случае вероятность того, что никакое из событий A_{ij} не произойдет, равнялась бы нулю, из чего можно сделать вывод, что число независимости графа G_{2k} никак не меньше N_0.

Для каждого вектора v существует ровно $\sum_{m=0}^{[\frac{k}{2}]} C_k^{2m} C_{2m}^m * C_k^{k-2m} 2^{k-2m}$ векторов из графа G_{2k}, ортогональных v: любой вектор w, ортогональный вектору v, пересекается с ним по четному числу ненулевых координат, причем ровно половина из них у векторов w и v совпадает, а другая половина отличается по знаку. Поэтому вероятность события A_{ij} равна:

$$P(A_{ij}) = P(\langle \xi_i, \xi_j \rangle = 0) = \sum_{v \in G_{2k}} P(\langle v, \xi_j \rangle = 0 | \xi_i = v) P(\xi_i = v) =$$

$$= C_{2k}^k 2^k * \frac{\sum_{m=0}^{[\frac{k}{2}]} C_k^{2m} C_{2m}^m * C_k^{k-2m} 2^{k-2m}}{C_{2k}^k 2^k - 1} * \frac{1}{C_{2k}^k * 2^k} = \frac{\sum_{m=0}^{[\frac{k}{2}]} C_k^{2m} C_{2m}^m * C_k^{k-2m} 2^{k-2m}}{C_{2k}^k 2^k - 1}.$$

Событие A_{ij} зависит от событий $A_{li}, 1 \leq l < i$, и $A_{ig}, i < g \leq N, g \neq j$, а также от событий $A_{lj}, 1 \leq l < j, l \neq i$, и $A_{lg}, j < g \leq N$. Их количество равно в точности $2N-4$.

Применим лемму. В нашем случае число d из леммы равно $2N-4$, а вероятность событий p равна $\frac{\sum_{m=0}^{[\frac{k}{2}]} C_k^{2m} C_{2m}^m * C_k^{k-2m} 2^{k-2m}}{C_{2k}^k 2^k - 1}$.

Вероятность того, что никакое из событий A_{ij} не произойдет, положительна при $ep(d+1) = ep*(2N-3) < 1$, что выполнено при любом N, меньшем $\frac{1+3ep}{2ep}$. Значит, Отсюда следует, что число независимости графа G_{2k} не меньше:

$$\alpha(G_{2k}) \geq [\frac{1 + 3e * \frac{\sum_{m=0}^{[\frac{k}{2}]} C_k^{2m} C_{2m}^m * C_k^{k-2m} 2^{k-2m}}{C_{2k}^k 2^k - 1}}{2e * \frac{\sum_{m=0}^{[\frac{k}{2}]} C_k^{2m} C_{2m}^m * C_k^{k-2m} 2^{k-2m}}{C_{2k}^k 2^k - 1}}] - 1.$$

К сожалению, вероятностный метод в данном случае не дал хороших результатов ввиду большого числа d - максимального количества событий, от которых может зависеть событие A_{ij}. Если бы d было достаточно мало по сравнению с N, то данный метод мог бы дать хорошие результаты.

Список литературы

[1] А. В. Бобу, А. Е. Куприянов, А. М. Райгородский, “Асимптотическое исследование максимального числа ребер в однородном гиперграфе с одним запрещенным пересечением”, Матем. Матем., 207: 5 (2016), 652–677

[2] А.М. Райгородский, А.А. Харламова, "О системах (-1,0,1) -векторов с запретами на значения попарных скалярных произведений Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 2013, том 29, 130-146

[3] В. Ф. Москва, А. М. Райгородский, “Новые нижние оценки чисел независимости дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$”, Матем. Примечания, 89: 2 (2011), 307-308

[4] А. Е. Гутерман, В. К. Любимов, А. М. Райгородский, С. А. Усачев, О числах независимости дистанционных графов с вершинами в $\{-1, 0, 1\}^n$, Матем. заметки, 2009, том 86, выпуск 5, 794–796

[5] Д. Ильинский, А. Райгородский и А. Скопенков, Независимость и доказательтсва существования в комбинаторике [Электронный ресурс]. URL: https://arxiv.org/pdf/1411.3171.pdf