Modélisation et Pricing de produits structurés

M2 Ingénierie Economique et Financière
Parcours Quantitatif - 272

ALAOUI Emma
KHARDIR Imen
LIN Cécile
MOLINARO Matéo
MONTARIOL Enzo

Table des matières

1 Mode d'utilisation

Voici le lien github où le projet a été publié : Repository github

1.1 Démarrage de l'interface

— Lancer l'interface avec la commande "streamlit run app.py" ou "python -m streamlit run app.py"

2 Obligation à taux fixe

2.1 Prix d'une obligation à coupon

Le prix P d'une obligation à coupon est donné par la formule :

$$P = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{C}{D(i/nb_{\text{coupon}})} + \frac{C+F}{D(T)}$$

où :

— F : valeur nominale (*face value*),

— T : échéance en années,

— nb_{coupon} : nombre de paiements de coupon par an,

— $N = nb_{\text{coupon}} \times T$: nombre total de paiements,

— $C = \text{coupon} \times \frac{F}{nb_{\text{coupon}}}$: montant de chaque paiement périodique,

— $D(t)$: facteur d'actualisation pour une échéance t (par exemple $D(t) = \frac{1}{(1+r)^t}$ pour un taux constant r).

2.2 Prix d'une obligation Zéro Coupon

Pour une obligation zéro coupon, il n'existe qu'un unique paiement à l'échéance. Ainsi, le prix est simplement :

$$P_{ZC} = F \times D(T)$$

2.3 Sensibilité d'une obligation

La **duration de Macaulay** d'une obligation à coupon se définit comme la moyenne pondérée par la valeur actualisée de chaque paiement :

$$D = \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{N} t_i \, CF_i$$

où CF_i est le cash flow à l'instant t_i (coupon ou principal) et P le prix de l'obligation.

2.4 Duration d'une obligation à coupon

Pour une obligation zéro coupon, il n'y a qu'un seul cash flow à l'échéance. La duration de Macaulay est alors simplement :

$$D_{ZC} = T$$

C'est-à-dire l'échéance en années.

3 Swaps

Le prix P_{swap} d'un swap vanille est calculé comme la différence entre la valeur actuelle nette (VAN) des flux de la jambe réceptrice et de la jambe payante. Cette approche se traduit par la formule suivante :

$$P_{\text{swap}} = \sum_{i=1}^{N} \left(\text{CF}_{\text{receiving},i} - \text{CF}_{\text{paying},i}\right),$$

où :

— N est le nombre total de dates de paiement,

— $\text{CF}_{\text{receiving},i} = \text{Notionel} \times \text{TotalReceivingRate} \times \alpha_i \times DF_i$ est le cash flow actualisé de la jambe réceptrice,

— $\text{CF}_{\text{paying},i} = \text{Notional} \times \text{TotalPayingRate} \times \alpha_i \times DF_i$ est le cash flow actualisé de la jambe payante,

— α_i est le facteur d'accrual pour la date de paiement i,

— $DF_i = \frac{1}{1+r\times\left(\sum_{j=1}^{i}\alpha_j\right)}$ est le facteur d'actualisation, avec r représentant le taux récepteur.

4 Modèle de taux

Définition du modèle

Nous avons choisi le modèle de Vasicek pour pouvoir intégrer un taux stochastique lors du pricing des différents produits. On rappelle la formule différentielle du modèle de Vasicek ci-dessous qui est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

$$dr_t = a(b - r_t)\,dt + \sigma\,dW_t$$

— r_t est le taux d'intérêt au temps t

— $a > 0$ est la vitesse de réversion à la moyenne

— b est le niveau moyen de long terme

— σ est la volatilité

— dW_t est un mouvement brownien standard

Procédure de simulation

On utilise la discrétisation d'Euler-Maryama pour simuler le modèle :

$$r_{t+\Delta t} = r_t + a(b - r_t)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Procédure d'estimation

Pour estimer le modèle, on peut utiliser la méthode des moindres carrés ordinaires (OLS) comme suit :

En réarrangeant, on peut écrire :

$$\Delta r_t = r_{t+\Delta t} - r_t = ab\Delta t - ar_t\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_t$$

ce qui est de la forme :

$$\Delta r_t = \alpha + \beta r_t + \varepsilon_t$$

avec :

$$\alpha = ab\Delta t, \quad \beta = -a\Delta t$$

La procédure d'estimation par moindres carrés ordinaires (OLS) est la suivante :

1. Calculer les variations $\Delta r_t = r_{t+\Delta t} - r_t$ pour tout t.
2. Régresser Δr_t sur r_t en incluant une constante.
3. Estimer les coefficients $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$.
4. En déduire les paramètres du modèle :

$$\hat{a} = -\frac{\hat{\beta}}{\Delta t} \quad , \quad \hat{b} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{a}\Delta t}$$

5. Estimer la volatilité à partir des résidus de la régression :

$$\hat{\sigma} = \frac{\text{écart-type des résidus}}{\sqrt{\Delta t}}$$

5 Modelè de volatilité

5.1 Le modèle d'Heston

Le modèle de pricing repose sur le modèle stochastique d'Heston. Ce modèle a été choisi plutôt que le modèle de Black Scholes pour modéliser les variations de volatilité du sous-jacent. Il permet notamment de reproduire certains faits stylisés tels que les skews et smiles de volatilité, observés dans les prix d'options. Nous utiliserons dans un premier temps **la formule analytique**, puis **la méthode de Monte Carlo** en se basant sur la méthode de discrétisation de Milstein pour une meilleure précision dans les simulations générées.

En 1993, Heston a proposé le modèle suivant :

$$\begin{cases} dS_t & = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^S \\ dV_t & = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t} dW_t^V \\ d\langle W^S, W^V \rangle_t & = \rho dt \end{cases} \tag{1}$$

Après validation du pricing à l'aide des deux méthodes, nous procéderons à une analyse approfondie des paramètres du modèle. On analysera donc les paramètres suivants : κ la vitesse de retour à la moyenne, θ la variance long terme, σ la volatilité de la volatilité et ρ la corrélation entre le mouvement brownien du prix et celui de la variance.

5.1.1 Formule fermée pour le modèle de Black scholes

La classe `BlackScholesPricer` calcule le prix d'une option via le modèle de Black-Scholes. La volatilité est définie comme $\sigma = \sqrt{V_0}$ et les paramètres d_1 et d_2 sont calculés de la manière suivante :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Le prix du call est obtenu par

$$\text{Call} = S_0\, N(d_1) - K\, e^{-rT}\, N(d_2),$$

avec la parité put-call utilisée pour le prix du put.

La fonction `NormalCDF` implémente une approximation numérique de la fonction de répartition d'une loi normale. Pour $x < 0$, la symétrie de la loi est exploitée ($N(-x) = 1 - N(x)$). Pour $x \geq 0$, l'approximation de Abramowitz et Stegun est utilisée pour un calcul rapide.

5.1.2 Formule analytique

La classe `SemiAnalyticalPricer` calcule le prix d'une option en utilisant la fonction caractéristique décrite par Heston. La méthode `CharacteristicFunction` construit cette fonction en combinant les paramètres du modèle.

La fonction `Integrand` calcule l'expression intégrande utilisée dans l'intégration numérique pour obtenir le prix de l'option. Elle combine la fonction caractéristique décalée par i et le terme associé au strike, le tout normalisé par un dénominateur impliquant ϕ et $K^{i\phi}$. Le calcul final du prix de l'option est obtenu en intégrant numériquement cette fonction sur l'intervalle $[0, \text{maxPhi}]$ à l'aide d'une quadrature simple. La formule de prix combine alors une partie déterministe $\frac{S_0 - Ke^{-rT}}{2}$ avec le terme intégral.

— **Formule de la Fonction Caractéristique :**

$$\varphi(\phi) = e^{i\phi rT} S_0^{i\phi} \left(\frac{1 - ge^{dT}}{1 - g}\right)^{-\frac{2\theta\kappa}{\sigma^2}} e^{\frac{\theta\kappa T}{\sigma^2}(b - i\rho\sigma\phi + d) + \frac{V_0}{\sigma^2}(b - i\rho\sigma\phi + d)\left(\frac{1-e^{dT}}{1-ge^{dT}}\right)} \tag{2}$$

— **Intégrale pour le Pricing :**

$$I(\phi) = \frac{e^{rT}\varphi(\phi - i) - K\varphi(\phi)}{i\phi K^{i\phi}} \tag{3}$$

— **Prix de l'Option :**

$$P = \frac{S_0 - Ke^{-rT}}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left(\int_0^\infty I(\phi)d\phi\right) \tag{4}$$

5.1.3 Simulation Monte Carlo

La classe `MonteCarloPricer` simule des trajectoires du sous-jacent et de la volatilité pour évaluer le prix d'une option. Pour chaque chemin, deux trajectoires antithétiques sont générées afin de réduire la variance, améliorant ainsi la précision de l'estimation.

À chaque pas, la volatilité est recalculée (en veillant à rester positive via) et le sous-jacent évolue selon une dynamique du modèle d'Heston, discrétisé par la méthode de Milstein.

La méthode `RandomNumberGenerator.GenerateCorrelatedNormals` permet de générer deux variables normales corrélées par le coefficient ρ, grâce à la transformation de Box-Muller.

Le prix final est obtenu en actualisant la moyenne des payoffs sur l'ensemble des chemins simulés. Des fonctions complémentaires permettent également de calculer les dérivées de premier ordre et d'analyser la sensibilité aux variations de paramètres.

— **Discrétisation du processus de variance :**

$$V_{t+dt} = V_t + \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t}dW_2\sqrt{dt} + \frac{1}{4}\sigma^2 dt(dW_2^2 - 1) \tag{5}$$

— **Discrétisation du prix :**

$$S_{t+dt} = S_t \exp\left[(r - \frac{V_t}{2})dt + \sqrt{V_t}dW_1\sqrt{dt}\right] \tag{6}$$

— **Prix de l'Option :**

$$P = e^{-rT} \cdot \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \text{Payoff}(path_i) \tag{7}$$

6 Option

6.1 Option Vanille

6.1.1 Caractéristiques

Une option est caractérisée par les paramètres suivant :

— **Sous-jacent** : actif sur lequel porte l'option S_t

— **Prix d'exercice (strike)** : prix de la transaction K

— **Échéance (maturité)** : date d'expiration T

— **Prime** : coût de l'option

— **Type** : exercice Européen, Américain, Bermudéen, Asiatique, etc.

6.1.2 Call

Une option d'achat, aussi appelé un *call* donne le droit à son détenteur d'acheter une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future donnée et à un prix convenu, le *strike* K contre le versement initial d'une prime.

Objectif : Couverture sur une hausse de prix du sous-jacent.

$$\text{Payoff Long Call} = \max(S_T - K, 0)$$

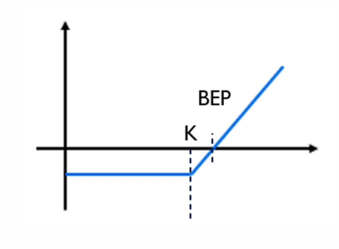


Figure 1: Payoff Long Call

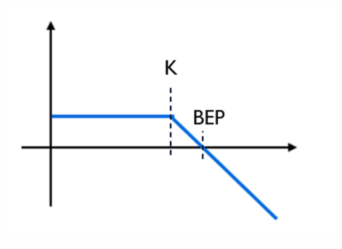


Figure 2: Payoff Short Call

6.1.3 Put

Une option de vente, aussi appelé un *put* donne le droit à son détenteur de vendre une certaine quantité d'un actif sous-jacent à une date future donnée et à un prix convenu, le *strike* K contre le versement initial d'une prime.

Objectif : Couverture sur une baisse de prix du sous-jacent.

$$\text{Payoff Long Put} = \max(K - S_T, 0)$$

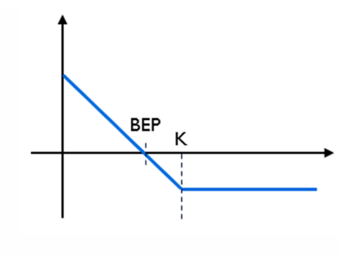


Figure 3: Payoff Long Put

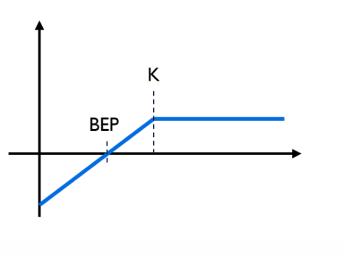


Figure 4 : Payoff Short Put

6.1.4 Moneyness

Position	Call	Put
In the Money (ITM)	si $S_T > K$	si $S_T < K$
At the Money (ATM)	$S_T = K$	$S_T = K$
Out of the Money (OTM)	si $S_T < K$	si $S_T > K$

6.1.5 Récapitulatif des positions Acheteur / Vendeur

Position	Call	Put	Risque
Acheteur	Droit d'acheter	Droit de vendre	Perte = prime
Vendeur	Obligation de vendre	Obligation d'acheter	Risque potentiellement élevé

Ces options vanilles sont utilisables dans divers stratégies.

6.2 Option binaire

Les options digitales (ou binaires) ont des payoffs discontinus, similaire à une fonction indicatrice. Dans ce projet, on va répliquer l'option binaire à l'aide d'options vanilles, notamment d'un call spread avec des prix d'exercice proches.

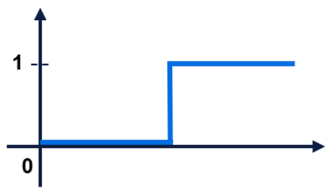


Figure 1: digicall

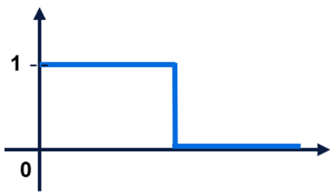


Figure 2: digiput

6.3 Option à barrière

Les options à barrière sont des options dont le paiement est subordonné au franchissement d'un seuil, appelé "barrière".

6.3.1 Call Up & In

Un call Up & In est un call qui n'est activé que si le sous jacent est au-dessus de la barrière. Lorsque le call Up & In s'active, il paye 1 pour 1 avec le sous-jacent (comme pour un call classique), en dessous de la barrière le call Up & In ne paye rien.

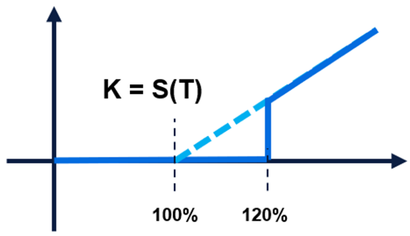


Figure 1: Payoff Up&In Call
K =100% knock-in barrier = 120%

6.3.2 Call Up & Out

Un call Up & Out est un call qui est désactivé si le sous jacent est au-dessus de la barrière. Tant que le call Up & Out est en dessous de la barrière, il paye 1 pour 1 avec le sous-jacent (comme pour un call classique), au-delà le call Up & Out ne paye rien.

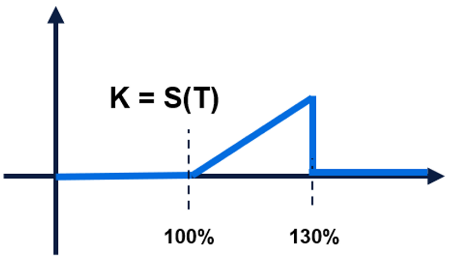


Figure 3 : Payoff Up&Out Call
K =100% knock-in barrier = 130%

6.3.3 Put Down & In

Un PDI est un put qui n'est activé que si le sous-jacent est en-dessous de la barrière. Lorsque le PDI (strike=100%) s'active, il paye 1 pour 1 avec le sous-jacent (comme pour un put classique), au dessus le PDI ne paye rien.

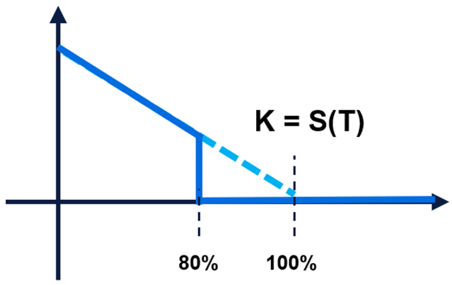


Figure 2: Payoff Down&In Put
K =100% knock-in barrier = 80%

6.3.4 Put Down & Out

Un put Down & Out est un put qui est désactivé si le sous jacent est en-dessous de la barrière. Tant que le put Down & Out est au-dessus de la barrière, il paye 1 pour 1 avec le sous-jacent (comme pour un put classique), au-delà le put Down & Out ne paye rien.

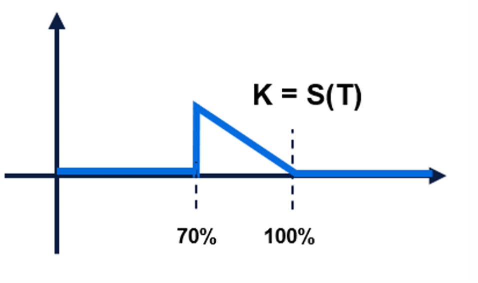


Figure 4: Payoff Down&Out Put
K =100% knock-in barrier = 70%

6.4 Sensibilité - Grecque

6.4.1 Delta

Le Delta mesure la sensibilité du prix de l'option à la variation dans le prix du sous-jacent.

$$\Delta = \frac{\text{Prix}_{S+\varepsilon} - \text{Prix}_{S-\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

où $\text{Prix}_{S+\varepsilon}$ et $\text{Prix}_{S-\varepsilon}$ représentent le prix de l'option avec une petite variation ε dans le prix du sous-jacent S.

6.4.2 Gamma

Le Gamma mesure la sensibilité du Delta aux changements dans le prix du sous-jacent. Cela représente la convexité du prix de l'option, soit la dérivée seconde par rapport au prix du sous-jacent.

$$\Gamma = \frac{\text{Prix}_{S+\varepsilon} - 2\text{Prix}_S + \text{Prix}_{S-\varepsilon}}{\varepsilon^2}$$

où Prix_S est le prix de l'option sans variation.

6.4.3 Vega

Le Vega évalue la sensibilité du prix de l'option à la variation de la volatilité du sous-jacent.

$$\text{Vega} = \frac{\text{Prix}_{\sigma+\varepsilon} - \text{Prix}_{\sigma-\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

où $\text{Prix}_{\sigma+\varepsilon}$ et $\text{Prix}_{\sigma-\varepsilon}$ sont les prix de l'option avec une petite variation ε de la volatilité σ.

6.4.4 Rho

Le Rho mesure la sensibilité du prix de l'option à une variation du taux d'intérêt.

$$\text{Rho} = \frac{\text{Prix}_{r+\varepsilon} - \text{Prix}_{r-\varepsilon}}{2\varepsilon}$$

en supposant une petite variation ε dans le taux d'intérêt r.

6.4.5 Theta

Le Theta indique la sensibilité du prix de l'option au passage du temps, ou la dépréciation temporelle.

$$\Theta = \frac{\text{Prix}_{T+1\text{ jour}} - \text{Prix}_T}{\text{un jour en années}}$$

où $\text{Prix}_{T+1\text{ jour}}$ est le prix de l'option un jour plus tard, et Prix_T est le prix actuel de l'option.

7 Stratégies optionnelles

7.1 Call Spread

Un *Bull Call Spread* est une stratégie où l'on achète un call à un prix d'exercice K_1, et on vend simultanément un call à un prix d'exercice K_2, avec $K_1 < K_2$ et la même date d'échéance.

Objectif : Couverture d'une hausse modérée du sous-jacent tout en réduisant le coût.

Payoff :

— Gain max $= K_2 - K_1 -$ prime nette

— Perte max $=$ prime nette payée

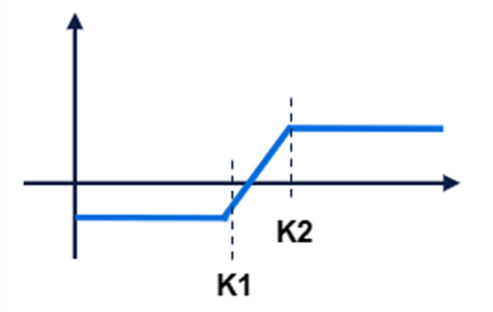


Figure 1: Payoff Long Call Spread

7.2 Put Spread

Un *Bull Put Spread* consiste à acheter un put avec un strike K_2, et vendre un put avec un strike K_1 avec $K_1 < K_2$ et même échéance.

Objectif : Couverture d'une baisse modérée du sous-jacent tout en réduisant le coût.

Payoff :

— Gain max $= K_2 - K_1 -$ prime nette

— Perte max $=$ prime nette payée

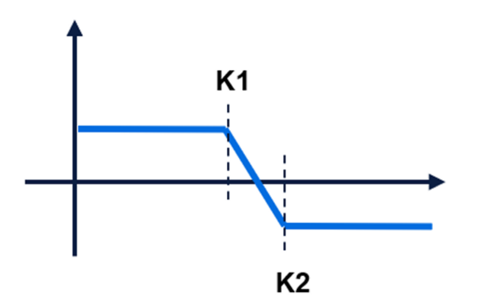


Figure 2: Payoff Long Put Spread

7.3 Straddle

Un *Straddle* consiste en l'achat simultané d'un call et d'un put avec le même strike K et la même échéance.

Objectif : Profiter d'un volatilité forte du prix du sous-jacent dans un sens ou dans l'autre.

Payoff :

— Gain max $=$ illimité (si forte volatilité)

— Perte max $=$ prime Call $+$ prime Put

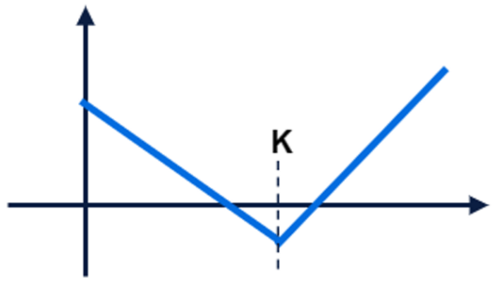


Figure 3: Payoff Long Sraddle

7.4 Strangle

Un *Strangle* consiste en l'achat d'un call à un strike K_2 et d'un put avec un strike K_1 avec $K_1 < K_2$.
Objectif : Profiter d'une forte volatilité avec un coût moindre qu'un straddle.
Payoff :

— Gain max = illimité (si forte volatilité)

— Perte max = prime Call + prime Put

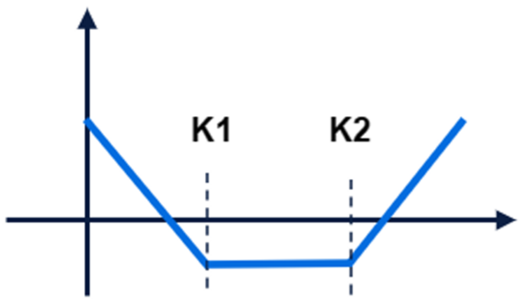


Figure 4 : Payoff Long Strangle

7.5 Butterfly

Le *Butterfly Spread* est une stratégie qui combine trois options calls.
Avec des calls :

— Achat 1 Call Strike K_1 (le plus bas)

— Vente 2 Calls Strike K_2 (strike central)

— Achat 1 Call Strike K_3 (le plus élevé)

Objectif : Profiter d'une faible volatilité du sous-jacent.

$$\text{Payoff à écheance} = \begin{cases} 0 & \text{si } S_T \leq K_1 \\ S_T - K_1 & \text{si } K_1 < S_T \leq K_2 \\ K_3 - S_T & \text{si } K_2 < S_T \leq K_3 \\ 0 & \text{si } S_T > K_3 \end{cases}$$

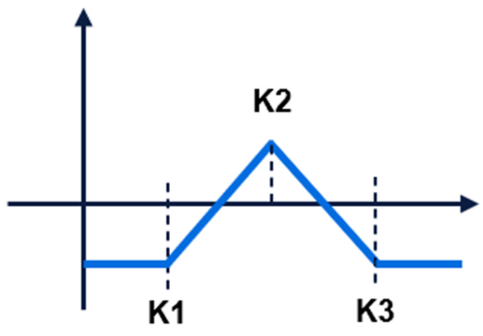


Figure 5 : Payoff Long Butterfly

7.6 Collar

Cette stratégie de couverture consiste à :

— Posséder l'actif sous-jacent

— Acheter un put pour se protéger

— Vendre un call pour financer le put

Objectif : Couverture contre une baisse du prix du sous-jacent.
Payoff :

— Gain max = Strike Call − prix d'achat

— Perte max = prix d'achat − Strike Put

7.7 Résumé

Stratégie	**Objectif de position**	**Gain Max**	**Perte Max**
Call Spread	Hausse modérée	Limité	Limité
Put Spread	Baisse modérée	Limité	Limité
Straddle	Forte volatilité	Illimité	Coût des primes
Strangle	Volatilité à moindre coût	Illimité	Coût des primes
Butterfly	Faible volatilité	Limité	Coût des primes
Collar	Couverture	Limité	Limité

8 Produits Structurés

8.1 Reverse Convertible

Construction possible avec des options :

— Short un put down & in

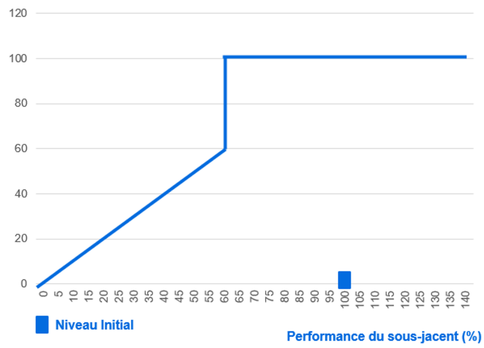


Figure 3: Payoff Reverse Convertible

8.2 Twin-Win

Construction possible avec des options :

— Long put

— Long call

— Short trois put

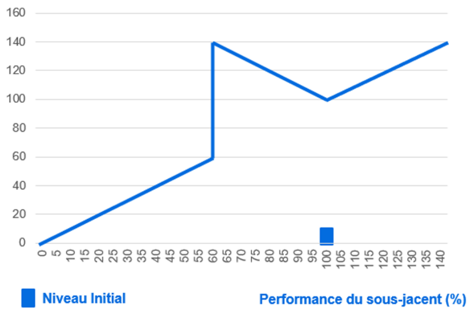


Figure 4: Payoff Twin-Win

8.3 Autocall - Athena

Un produit structuré Athena est un type de produit d'investissement financier. Ce produit structuré à capital combine plusieurs éléments financiers :

— Zéro Coupon

— Digit

— Put Down & In

Cycle de vie :

— On investit un capital pour une durée définie.

— A chaque période d'observation : on regarde le niveau du sous-jacent.

  — Si le sous-jacent est au-dessus de son niveau initial alors il y a remboursement par anticipation.

  — Sinon, le produit continue jusqu'à la prochaine date d'observation.

— À l'échéance finale
  — Si l'indice est au-dessus d'un certain seuil fixé, on récupère le capital et un rendement.
  — Sinon, il y a perte en capital, selon la baisse du sous-jacent.

Remarque :

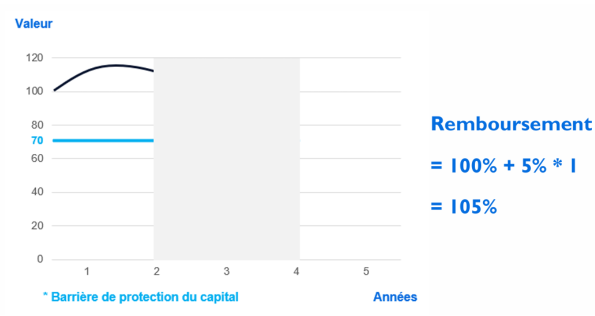
— Effet mémoire : si le produit n'a pas remboursé par anticipation, les gains sont reportés, donc il n'y a pas de perte de rendement.
— Risque : Pas de capital garanti si le sous-jacent chute fortement.
— Barrière :
  — Si la barrière de protection augmente alors il y a moins de protection donc le produit est moins cher.
  — Si la barrière de protection baisse alors probabilité de toucher les coupons augmente, donc le produit est plus cher.

8.3.1 Exemple

— Produit Athena sur le CAC 40
— Maturité : 4 ans
— Coupon : 5%
— Sous-jacent : CAC40
— Barrière de capital : 70%
— Observation annuelle
— Remboursement anticipé si le sous-jacent est au-dessus de son niveau initial

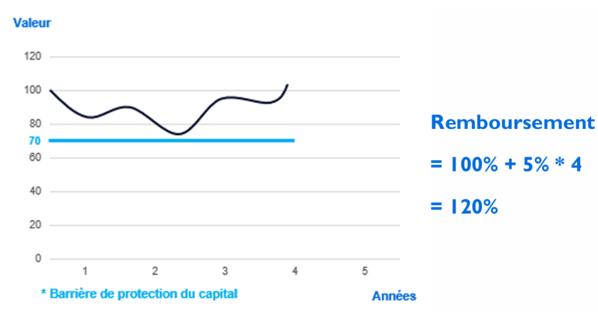
Scénario 1

En année 1, l'action clôture au-dessus de son niveau initial.



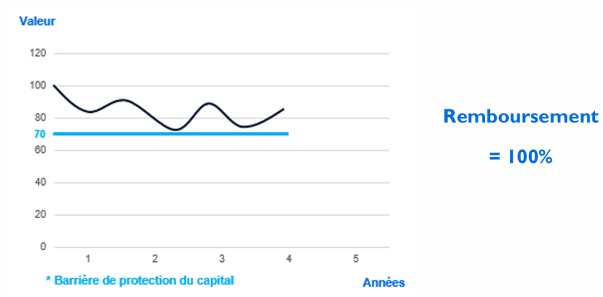
Scénario 2

En année 4, l'action clôture au-dessus de son niveau initial.



Scénario 3

En année 4, l'action clôture en-dessous de son niveau initial mais au-dessus de la barrière de protection du capital.



Scénario 4

En année 4, l'action clôture en-dessous de la barrière de protection du capital.