西北大学学报(自然科学版)
2011年6月,第41卷第3期,Jun.,2011,Vol.41,No.3
Journal of Northwest University (Natural Science Edition)
JNWU

从求根公式到预解式

赵增逊

(西北大学 数学与科学史研究中心,陕西 西安 710127)

摘要:目的 研究代数方程求解的历史,寻找代数方程求解内涵变更的关键点。**方法** 采用原始文献考证和代数方程求解历史纵向比较的方法。**结果** Lagrange(1736—1813)用置换的思想进行代数方程求解是代数方程求解史中第一个转折点,它开辟了代数方程求解的新纪元,促进了代数方程求解的最终胜利,并引导了近代代数学的开始。**结论** Lagrange用置换的思想进行代数方程求解使数学家们从单纯的寻求代数技巧进行求解转变为寻找一种一般的、通用的解方程方法,并从繁重的数学计算中解脱出来,这种方法彻底改变了代数方程求解的内涵:从寻找求根公式到寻找预解式,并进行一系列的程序。

关 键 词:Lagrange(1736—1813);代数方程求解;内涵改变

中图分类号:N09 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-274X(2011)03-0548-05

From the root formula to the resolvent

ZHAO Zeng-xun

(Center for History of Mathematics and Sciences, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract: **Aim** To study the history of solving algebraic equations and to find main points of the changing content of solving algebraic equations. **Methods** Methods of original article researching and comparing the history of solving algebraic equations vertically. **Results** Lagrange applies the permutation theory to solve algebraic equations, which is the 1st turning point in the history of solving algebraic equations and also opens up a new era. Lagrange's Permutation Theory promoted the ultimate success of solving algebraic equations and guided the beginning of modern algebra. **Conclusion** This made the algebraists begin seeking a general, universal method to solve the algebraic equations instead of simply finding out an algebraic technique, which also made them free from toilsome calculating. This new method totally changes the content of solving algebraic equations: from searching for the root formula to finding a resolvent, and following the procedure.

Key words: Lagrange; solving algebraic equation; changing the content

虽然代数方程求解历史悠久,但在这条历史长河中的闪光点却不多,Lagrange(1736—1813)毫无疑问是第一个创造转折的人。之前无数的代数学家花费巨大精力去寻找各种特殊技巧进行代数方程求解[1],而Lagrange的出场改变了这种局面。他使数学家们开始尝试寻找一种统一的、一般的方法进行代数方程求解,所以Lagrange的工作彻底改变了代数方程求解的内涵[2]。本文正是基于此详细地论述了这种转折的过程及其历史意义。

1 已知的解二、三、四次方程的方法——寻找求根公式

1545年,Cardano(1501—1576)《大法》的出版使一元代数方程的求解暂告一段落[3],至此,一元一次、二次、三次、四次方程都已获解。所谓的方程

收稿日期:2010-11-06
基金项目:国家自然科学基金资助项目(11001217);西北大学研究生自主创新基金资助项目(10YZZ05)
作者简介:赵增逊,男,河南唐河人,从事代数学及代数学史研究。

可解指的是能得到方程的求根公式,即原方程系数的一个表达式,若原方程系数已知,则方程可解,用式子表示为 $(x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n) = f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,此处 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为原方程的系数。

如对于一元二次方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的根为:

$$x_1 = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-a-\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

一元三次方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 的根为:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c}{2}+\sqrt{\frac{\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)^2}{4}+\frac{\left(b-\frac{a^2}{3}\right)^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c}{2}-\sqrt{\frac{\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)^2}{4}+\frac{\left(b-\frac{a^2}{3}\right)^3}{27}}}$$

$$x_2 = \alpha\sqrt[3]{-\frac{\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c}{2}+\sqrt{\frac{\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)^2}{4}+\frac{\left(b-\frac{a^2}{3}\right)^3}{27}}}+\beta\sqrt[3]{-\frac{\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c}{2}-\sqrt{\frac{\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)^2}{4}+\frac{\left(b-\frac{a^2}{3}\right)^3}{27}}}$$

$$x_3 = \beta\sqrt[3]{-\frac{\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c}{2}+\sqrt{\frac{\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)^2}{4}+\frac{\left(b-\frac{a^2}{3}\right)^3}{27}}}+\alpha\sqrt[3]{-\frac{\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c}{2}-\sqrt{\frac{\left(\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c\right)^2}{4}+\frac{\left(b-\frac{a^2}{3}\right)^3}{27}}}$$

其中 $\alpha = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}, \beta = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$。

于是,Tschirnhaus(1651—1708),Euler(1707—1783),Bezout(1730—1783)等数学家继续朝五次及五次以上的方程求解努力[4],他们试图找到五次及五次以上方程的求根公式。但是,他们都失败了,即未能找到原方程系数的表达式来表示方程的根。

2 Lagrange 改变了解方程的内涵:从寻找求根公式到寻找预解式

Lagrange 仔细阅读并分析了 Cardano, Ferrari, Tschirnhaus, Bezut, Euler(1522—1565)等人关于代数方程求解的著作[5]。Lagrange 意识到也许并不能找到原方程系数的表达式来表示原五次及五次以上方程的根,即不能找到五次及五次以上方程的求根公式,但并不意味着五次及五次以上的方程不可解(Lagrange 并不确定知道五次及五次以上方程没有一般代数解),也许可以用其他的方法来解方程。由此,Lagrange 转换了思路,开辟了一元代数方程求解的新纪元——用置换的思想进行代数方程求解[6-7],提出了预解式的概念。

1770—1771 年,Lagrange 发表了一篇 217 页的文章 Réflexions sur la Résolution Algébrique des Equations[8];在这篇文章中 Lagrange 提出辅助方程的思想:解一元三次方程需要预解二次辅助方程,解一元四次方程需要预解三次辅助方程;一般情况下,要解 n 次方程需要预解 r 次辅助方程,故辅助方程的次数 r 是关键的,因为只有 $r<n$ 原方程才可解;而 r 则是由一个根的表达式——预解式在原方程根下置换出不同值的个数决定。所以,关键是找到合适的预解式,只要有了预解式,很容易得到它在原方程根下置换出不同值的个数,则辅助方程就确定了(一般情况下,辅助方程的系数为原方程系数的有理函数[9]),解答了辅助方程,就能解答原方程。如图 1 所示。

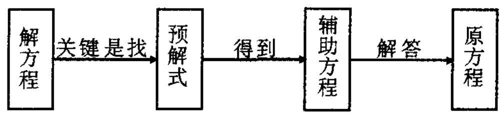

图 1　Lagrange 解方程的思路

Fig. 1　The train of Lagrange's thought for solving eqations

因此解方程实际是要选择合适的预解式 u,那么解方程的理念就发生了变化,即由寻找求根公式到寻找预解式。那么,Lagrange 是如何采用此方法求解一般方程的呢?

3 Lagrange 解代数方程的方法

3.1 Lagrange 解方程的一般方法

设一般方程 $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ 的根为 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n$。

取预解式 $u = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_{n-1}x_{n-1} + c_nx_n$

对于 $\tau \in S_n$

取 $y = \varphi(u)$,$\tau(y)$ 只能取 r(一般要求 $r = n-1$)个不同的值 $y_1,y_2,\cdots,y_r$。则此必为 r 次辅助方程 $y^r + A_1y^{r-1} + A_2y^{r-2} + \cdots + A_{r-1}y + A_r = 0$ 的根

其中

$$A_1 = -(y_1 + y_2 + \cdots + y_r)$$

$$A_2 = y_1y_2 + y_1y_3 + \cdots + y_{r-1}y_r$$

……

$$A_r = (-1)^n y_1y_2\cdots y_r$$

即 $A_i(i = 1,2,3,\cdots,r)$ 为原方程系数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的有理函数。

若辅助方程可解,得到 $r(=n-1)$ 个根 $y_1,y_2,\cdots,y_r$;则可对应得到 $r(=n-1)$ 个 u 值 $u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}$

即:

$u_1 = u = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

$u_2 = \tau_2(u) = c_1x_{\tau_2(1)} + c_2x_{\tau_2(2)} + \cdots + c_nx_{\tau_2(n)}$

……

$u_{n-1} = \tau_{n-1}(u) = c_1x_{\tau_{n-1}(1)} + c_2x_{\tau_{n-1}(2)} + \cdots + c_nx_{\tau_{n-1}(n)}$

与 $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = -a_1$ 联立

即可得到原方程的根 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$。

以三次方程为例来探讨 Lagrange 解代数方程的一般方法。

设方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 的根为 x_1、x_2、x_3

取预解式

$u = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$($\omega$ 为三次本原单位根)

易知

$S_3 = \{1, (1\ 3\ 2), (1\ 2\ 3), (2\ 3), (1\ 2), (1\ 3)\}$

令

$\tau_1 = 1, \tau_2 = (1\ 3\ 2), \tau_3 = (1\ 2\ 3), \tau_4 = (2\ 3), \tau_5 = (1\ 2), \tau_6 = (1\ 3)$

则

$\tau_1(u) = u$

$\tau_2(u) = x_3 + \omega x_1 + \omega^2 x_2 = \omega u$

$\tau_3(u) = x_2 + \omega x_3 + \omega^2 x_1 = \omega^2 u$

$\tau_4(u) = x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2 = v$

$\tau_5(u) = x_2 + \omega x_1 + \omega^2 x_3 = \omega v$

$\tau_6(u) = x_3 + \omega x_2 + \omega^2 x_1 = \omega^2 v$

此时需要找到一个 u 的函数,使其在原方程根的置换下只能取 $3 - 1 = 2$ 个不同值。

故令

$y = u^3$

则对于 $\tau \in S_3$,$\tau(y)$ 只能取两个值:

$y_1 = u^3, y_2 = v^3$

故得到关于 y 的二次辅助方程(根为 y_1, y_2):

$y^2 - Ay + B = 0$

其中:

$A = y_1 + y_2 = u^3 + v^3 = -2a^3 + 9ab - 27c$

$B = y_1 y_2 = u^3 v^3 = (a^2 - b)^3$

则易得 y_1, y_2 的值,

由此,

$u = \sqrt[3]{y_1}$

$v = \sqrt[3]{y_2}$

即

$x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3 = \sqrt[3]{y_1}$

$x_1 + \omega x_3 + \omega^2 x_2 = \sqrt[3]{y_2}$

与 $x_1 + x_2 + x_3 = -a$ 联立

易得原方程的根为:

$$x_1 = \frac{1}{3}(-a + \sqrt[3]{y_1} + \sqrt[3]{y_2})$$

$$x_2 = \frac{1}{3}(-a + \omega^2 \sqrt[3]{y_1} + \omega \sqrt[3]{y_2})$$

$$x_3 = \frac{1}{3}(-a + \omega \sqrt[3]{y_1} + \omega^2 \sqrt[3]{y_2})$$

Lagrange 用上述的方法也取得了四次方程求解的胜利,可惜的是在进行五次方程求解时失败了,因为无法找到合适的预解式 u 使得 $y = \varphi(u)$ 在原方程根的置换下只能取4个值[10]。

但是,用这种思想进行代数方程求解的理念已经形成:即解方程关键是找合适的预解式,然后进行下列程序:

第一步:选取预解式 u

第二步:取 $y = \varphi(u)$,当 $\tau \in S_n$ 时,$\tau(y)$ 只能取 $n - 1$ 个不同的值 $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$;由此确定辅助方程 $y^{n-1} + A_1 y^{n-2} + A_2 y^{n-3} + \cdots + A_{n-2} y + A_{n-1} = 0$(其中 A_i 为原方程系数的有理函数)

第三步:解得 $y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}$,即求得 $u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$。

第四步:得到方程组

$$\begin{cases} u_1 = u = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\ u_2 = \tau_2(u) = c_1x_{\tau_2(1)} + c_2x_{\tau_2(2)} + \cdots + c_nx_{\tau_2(n)} \\ \cdots\cdots \\ u_{n-1} = \tau_{n-1}(u) = c_1x_{\tau_{n-1}(1)} + c_2x_{\tau_{n-1}(2)} + \\ \quad \cdots + c_nx_{\tau_{n-1}(n)} \\ -a_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \end{cases}$$

即得到原方程的根 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$。

亦即求解代数方程的含义由寻找求根公式转变为寻找合适的预解式并进行一系列的程序即可,可以看到此系列的核心是 $K(x_1, x_2, \cdots, x_n) = K(u)$,此处 K 为包含原方程所有系数的域,则原方程的所有根可被 u 和一些已知的数表示。

3.2 Lagrange 解高次方程的方法

对于更高次的方程并不是很容易就找到 u 及 $y = \varphi(u)$,并且有时处理关于 y 的辅助方程的次数也很高($r \geqslant n$),为此 Lagrange 又给出了处理高次方程的一般方法——降次。

Lagrange 是如何处理高次方程的呢?在 Réflexions sur la Résolution Algébrique des Equations 的第86章看到如下文字:Ces méthodes se réduisent toutes à un même principe général , savoir à trouver des fonctions des racines de l'équation proposée , lesquelles soient telles:

1° que l'équation ou les équations par lesquelles elles seront données , c'est-à-dire dont elles seront les racines (équations qu'on nomme communément les réduites), se trouvent d'un degré moindre que celui de la proposée , ou soient au moins décomposables en d'autres équations d'un degré moindre que celui-là;

2° que l'on puisse en déduire aisément les valeurs des racines cherchées([8],355).

其意为,此方法可以归结为一般的原则,怎样找到原方程根的函数,该函数满足:①如果方程能得到,那么其根也确定(一般叫做辅助方程或预解方程),这些方程的的次数小于原方程或至少可以分解为一些低次的方程;②那么能很容易得到这些根的值。

这也就是说当方程的次数高于4次时,Lagrange的意思是添加一些辅助方程把 r 分成更小一些。为了更明晰 Lagrange 的方法先回顾三次方程解法中的一些关键点。解方程关键是找预解式 u 和 u 的函数 $y = \varphi(u)$,很容易看清楚他们的关系:

$$I(u) \subset I(y) \subset S_n。$$

其中 $I(m) = \{\tau \in S_n \mid \tau(m) = m\}$。

若用置换群的概念描述就是:

$$H \subset H_1 \subset S_n。$$

其中 $H = I(u), H_1 = I(y)$。

找到了如此的序列就得到了预解式,即:

$\{\sigma \in H_1 \mid \sigma(u) = u\} = I(u) = H \leftrightarrow$ 预解式 u

$\cap$

$\{\sigma \in S_n \mid \sigma(y) = y\} = I_1(y) = H_1 \leftrightarrow$ 关于 y 的辅助方程

$\cap \quad r$

S_n

在这里 r 为 y 在原方程根下置换出的不同值的个数,也就是说 r 是 y 在 S_n 中置换出的不同值的个数,H_1 在 S_n 中的指标 r 即是关于 y 的辅助方程的次数。

例如对于解三次方程 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ 时,取 $u = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$, $y = \varphi(u) = u^3$,此时 $H = I(u) = \{1\}$, $H_1 = I(y) = \{(1),(1\,2\,3),(1\,3\,2)\}$, $S_3 = \{1,(1\,3\,2),(1\,2\,3),(2\,3),(1\,2),(1\,3)\}$,即:

$\{1\} = I(u) = H \leftrightarrow u = x_1 + \omega x_2 + \omega^2 x_3$

$\cap$

$\{(1),(1\,2\,3),(1\,3\,2)\} = I_1(y) = H_1 \leftrightarrow y = \varphi(u) = u^3 \rightarrow y^2 - Ay + B = 0$,

$\cap \quad r = 2$,

$\{1,(1\,3\,2),(1\,2\,3),(2\,3),(1\,2),(1\,3)\} = S_3$。

但是,对于更高的方程,只需要一个辅助方程是不够的,即可以将方程分解为很多的更低次的方程,若这些次数较低的方程都可解,则原方程可解。在《Réflexions sur la Résolution Algébrique des Equations》的97,98,99,Lagrange 指出对于 S_n 的任意子群 H_2 都存在一个含有 n 个未定元的有理分式 σ 使得:

$$H_2 = I(\varphi) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(\varphi) = \varphi\}^{[11]}。$$

因此,实际上能得到 S_n 的一个子群序列:H, H_1, H_2, Lagrange 的方法就可以表示为:

$\{\sigma \in H_1 \mid \sigma(u) = u\} = I(u) = H \leftrightarrow$ 预解式 u

$\cap \quad r_2$

$\{\sigma \in H_2 \mid \sigma(y) = y\} = I_1(y) = H_1 \leftrightarrow$ 关于 y 的辅助方程

$\cap \quad r_1$

$\{\sigma \in S_n \mid \sigma(\phi) = \phi\} = I_2(\varphi) = H_2 \leftrightarrow$ 关于 φ 的辅助方程

$\cap \quad r$

S_n

此处,r 为关于 φ 的辅助方程的次数,是 φ 在原方程根下置换出的不同值的个数;r_1 是关于 y 的辅助方程的次数,是 y 在原方程根下置换出的不同值的个数;r 和 r_1 都比 n 小。因此,如果关于 φ 的辅助方程可解,我们能得到 φ 的值,由此可以相应得到 y 的值,然后相应得到 u 的值,最后便可以得到原方程的根 $x_1, x_2, \cdots, x_n$。

显然上面的程序可以推广到更一般的情形,可以找到更多的 $H_i \subset S_n (i \geqslant 3)$ 满足上面所述的条件,故得到更多的辅助方程;如果所有的这些辅助方程都是可解的,则原方程一定可解。此过程可以简单表示为

预解式 $u \leftrightarrow H = I(u) = \{\tau(u) = u \mid \tau \in H_1\}$

$\cap$

关于 y 的辅助方程 $\leftrightarrow H_1 = I_1(y) = \{\tau(y) = y \mid \tau \in H_2\}$

$\cap$

关于 φ 的辅助方程 $\leftrightarrow H_2 = I_2(\varphi) = \{\tau(\varphi) = \varphi \mid \tau \in H_3\}$

$\cap$

关于 μ 的辅助方程 $\leftrightarrow H_3 = I_3(\mu) = \{\tau(\mu) = \mu \mid \tau \in H_4\}$

$\cap$

$$\begin{array}{c} \cdots \\ \cap \\ S_n \end{array}$$

此时,得到了一个子群序列 $H \subset H_1 \subset H_2 \subset H_3 \subset \cdots \subset S_n$, Lagrange 认为只要按照此序列构造一系列的辅助方程,如果这些辅助方程可解,那么最终可以得到原方程的根。

因此,Lagrange 认为,解决高于 4 次的代数方程不是不可能的。事实上,Lagrange 在处理五次方程的时候出现了问题,即对于一般的方程这个序列并不是都能构造出来的[12]。但是,这种思路却给后来的 Gauss 指明了前进的道路,Gauss 正是按照 Lagrange 的思路顺利解决了 17 次的分圆方程[12]。

4 结 论

Lagrange 用置换的思想进行代数方程求解是代数方程求解史中第一个转折点,它开辟了代数方程求解的新纪元。这种方法彻底改变了代数方程求解的内涵:从寻找求根公式到寻找预解式,并进行一系列的程序。虽然 Lagrange 最终没有完美解决五次及五次以上方程的求解问题,但给代数方程求解赋予新的理念,所以,Lagrange 是代数方程求解史中第一个划时代的人物。

参考文献:

[1] 李文林. 数学史概论[M]. 2 版. 北京:高等教育出版社,2000.

[2] QU An-jing. Lagrange's Strategy for Solving Algebraic Equation[C] // YADAV B S, SINGH S L. History of the Machemacical Sciences Ⅱ. Cambridge: Cambridge Scientific Publishers, 2010: 1-20.

[3] 莫里斯·克莱因. 古今数学思想. 1 册[M]. 张理京,张锦炎,译. 上海:上海科学技术出版社,2002:1-14,306-330.

[4] VEN B L. der Waerden. A History of Algebra[M]. Belin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1985.

[5] 莫里斯·克莱因. 古今数学思想. 2 册[M]. 朱学贤,叶其孝,译. 上海:上海科学技术出版社,2002:351-361.

[6] H·伊夫斯. 数学史概论[M]. 欧阳绛,译. 山西:山西经济出版社,1986:208-211.

[7] 李迪. 中外数学史教程[M]. 福建:福建教育出版社,1993:302-305.

[8] LAGRANGE J L. Oeuvres de Lagrange, Jome 3[M]. Paris: Gauthier-villars, imprimeur-Libraire de L'ecole imperiale polytechnique, 1869: 205-421.

[9] KIERNAN B M. The development of Galois theory from Lagrange to artin [J]. Archive for the History of the Exact Sciences, 1971, 8: 40-154.

[10] TIGNOL J P. Galois Theory of Algebraic Equations [M]. Singapore: World Scientific, 2001: 163-263.

[11] BARTEL L, WAERDEN V D. A History of Algebra: From al-Khwarizmi to Emmy Noether[M]. New York: Springer-Verlag, 1985.

[12] BEWERSODORFF J. Galois Theory for Beginners-A Historical Perspective [M]. David Kranmer, translated. Rhode Island: American Mathematical Society, 2004.

(编 辑 陈镱文)

·学术动态·

西北大学与加拿大多伦多大学签署校际友好合作意向书

4 月 11 日下午,加拿大多伦多大学士嘉堡校区副校长 Rick Halpern 教授及副校长助理严媛女士来访西北大学,方光华校长会见了该代表团一行并与 Rick Halpern 副校长签署了校际友好合作意向书,为双方今后开展多层次深入合作奠定了良好基础。

方校长对代表团的再次来访表示欢迎。他表示,此次加拿大多伦多大学士嘉堡校区代表团来访,是该校 2010 年 4 月首次来访以来对西北大学进行的第四次访问,充分体现了该校对与我校开展合作的诚意和重视度。两校基于在科研领域的相似性及互派学生的积极性,确定首先在生命科学、城市与环境科学以及社会科学等领域展开具体科研合作。此外,两校联合培养本科及硕士研究生和开展非学位学生交换等合作项目也将有助于提升学生的国际视野,增进双方了解。

Halpern 副校长表示,双方的学科领域具有较大相似性,这为两校实质性的科研合作奠定了良好基础。他邀请西北大学选派生态学、植物学以及环境科学等领域的专家 6 至 8 人于暑假期间赴加拿大访问,就科研合作的细节进行进一步商定。科研处、研究生处、教务处及国际处相关负责人还就联合培养研究生的事宜与 Rick Halpern 副校长一行进行了交流。

(薛 鲍)