

## 第一章 随机事件与概率

## (一) 基本题答案

1、(1)  $\Omega_1 = \{0, 1, 2, 3\}$

(2)  $\Omega_2 = \{1, 2, \dots\} = \{n/n \text{ 是正整数}\}$

(3)  $\Omega_3 = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$

(4)  $\Omega_4 = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$

(5)  $\Omega_5 = \{2, 3, 4, \dots, 12\}$

(7)  $\Omega_7 = \{0, 1, 2, \dots\}$

(6)  $\Omega_6 = \{(x, y, z) | x + y + z = 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$

2、(1)  $AB\bar{C}$

(2)  $A(B \cup C)$

(3)  $A \cup B \cup C$

(4)  $A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C$

(5)  $AB \cup BC \cup AC$

(6)  $\bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$  (或  $\overline{ABC}$ )

3、 $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - z$

$$P(\bar{AB}) = P(B - AB) = P(B) - P(AB) = y - z$$

$$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A}B) = 1 - x + y - (y - z) = 1 - x + z$$

$$P(\overline{AB}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)] = 1 - x - y + z$$

4、 $P(\overline{AB}) = P(A - AB) = P(A) - P(AB)$

$$= P(A) - [P(A) + P(B) - P(A \cup B)]$$

$$= P(A \cup B) - P(B) = 0.6 - 0.3 = 0.3$$

5、 $P(\bar{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - P(A - (A - B))$

$$= 1 - P(A) + P(A - B) = 1 - 0.7 + 0.3 = 0.6$$

6、 $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$

$$= 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)]$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + 0\right) = \frac{17}{36}$$

7、 $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{8} - 0 + 0 = \frac{5}{8}$$

8、因  $(\bar{A} \cup B)(A \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B})(A \cup \bar{B}) = (\bar{A}A \cup B)(\bar{A}A \cup \bar{B}) = B\bar{B} = \phi$

所以  $P\{(\bar{A} \cup B)(A \cup B)(\bar{A} \cup \bar{B})(A \cup \bar{B})\} = P(\phi) = 0$

9、七字母任意排有  $7!$  种排法，且每一排法的可能性相同，这是一个古典概型问题，而排成 SCIENCE 有  $1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1 \times 1 = 4$  种排法，故所求概率为  $\frac{4}{7!} = \frac{1}{1260}$

10、12 件产品按不放回方式抽两次时有  $12 \times 11$  种抽取法，且每一种取法的概率相等，这是一个古典概型问题，而第二次抽出次品抽取法有  $11 \times 2$  种，故所求事件概率为  $\frac{11 \times 2}{12 \times 11} = \frac{1}{6}$

11、这可看成是条件概率问题

方法一 设 A 表示第一次取到不合格品，B 表示第二次取到不合格品，所求概率是  $P(AB|A \cup B)$ ，按条件概率的定义有

$$P(AB|A \cup B) = \frac{P(AB(A \cup B))}{P(A \cup B)} = \frac{P(AB)}{P(A \cup B)}$$

因  $P(AB) = \frac{4 \times 3}{10 \times 9}$ ， $P(A \cup B) = \frac{4 \times 6 + 4 \times 6 + 4 \times 3}{10 \times 9}$ ，故所求概率为

$$P(AB|A \cup B) = \frac{4 \times 3}{4 \times 6 + 4 \times 6 + 4 \times 3} = \frac{1}{5}$$

方法二 如果是同时从中任取 2 件产品，此时有一件是不合格时共有  $C_4^2 + C_4^1 C_6^1$  种取法，而已知有一件是不合格品时，另一件也是不合格共有  $C_4^2$  种取法，故所求概率为

$$\frac{C_4^2}{C_4^2 + C_4^1 C_6^1} = \frac{1}{5}$$

注：此种方法是在缩减的样本空间中考虑条件概率的计算。

12、设点的坐标为  $(x, y)$ ，则样本空间

$$\Omega = \{(x, y) | 0 < y < \sqrt{2ax - x^2}\}$$

由条件知这是一个几何概型问题且原点和该点的连线与  $Ox$  轴的夹角小于  $\frac{\pi}{4}$  的事件  $A$  为

$$A = \{(x, y) | 0 < y < \sqrt{2ax - x^2}, y < x\}$$

$\Omega$  的面积  $S_{\Omega} = \frac{1}{2}\pi a^2$ ， $A$  的面积  $S_A = \frac{1}{4}\pi a^2 + \frac{1}{2}a^2$ ，故所求概率为

$$P(A) = \frac{\frac{1}{4}\pi a^2 + \frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2} = \frac{\pi + 2}{2\pi}$$

13、设两艘船到达的时刻分别是  $x$  和  $y$ ，则样本空间为  $\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 24, 0 \leq y \leq 24\}$

由实际意义可知这是一个几何概型问题，且有一艘需等待一段时间的事件  $A$  为

$$A = \{(x, y) | -2 \leq x - y \leq 1, (x, y) \in \Omega\}$$

因  $\Omega$  的面积  $S_{\Omega} = 24^2$ ， $A$  的面积  $S_A = 24^2 - \frac{1}{2}(23^2 + 22^2)$ ，故所求概率为

$$P(A) = \frac{S_A}{S_{\Omega}} = 0.121$$

14、不妨设是单位圆，三点  $A, B, C$  将单位圆周分成  $x, y, 2\pi - x - y$  三段，于是样本空间  $\Omega$  为

$$\Omega = \{(x, y) | 0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi, 0 < 2\pi - (x + y) < 2\pi\}$$

由实际意义知这是几何概型问题，当且仅当三段弧长都小于  $\pi$  时，三角形  $ABC$  为锐角三角形，即三角形  $ABC$  为锐角三角形的事件  $A$  为

$$A = \{(x, y) | 0 < x < 2\pi, 0 < y < \pi, 0 < 2\pi - (x + y) < \pi, (x, y) \in \Omega\}$$

因  $\Omega$  的面积  $S_{\Omega} = \frac{1}{2}(2\pi)^2$ ， $A$  的面积  $S_A = \frac{1}{2}\pi^2$ ，故所求概率为

$$P(A) = \frac{\frac{1}{2}\pi^2}{\frac{1}{2}(2\pi)^2} = \frac{1}{4}$$

15、(1) 用全概率公式得他迟到的概率为  $0.3 \times \frac{1}{4} + 0.2 \times \frac{1}{3} + 0.1 \times \frac{1}{12} + 0.4 \times 0 = 0.15$

$$(2) \text{ 用贝叶斯公式得所求概率是 } \frac{0.3 \times \frac{1}{4}}{0.15} = \frac{1}{2}$$

16、用  $A, B, C$  分别表示取出的是一，二，三等品三个事件，则所求概率为

$$P(A|\bar{C}) = \frac{P(A\bar{C})}{P(\bar{C})} = \frac{P(A-AC)}{1-P(C)} = \frac{P(A)}{1-P(C)} = \frac{0.6}{1-0.1} = \frac{2}{3}$$

其中利用到  $AC = \emptyset$ ，即  $A$  与  $C$  互斥。

17、由贝叶斯公式所求概率为

$$\frac{0.01 \times 0.6}{0.01 \times 0.6 + 0.02 \times 0.4} = \frac{3}{7}$$

18、由条件及加法公式有

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

$$= 3P(A) - 3[P(A)]^2 = \frac{9}{16}$$

即  $16[P(A)]^2 - 16P(A) + 3 = 0$ , 得  $P(A) = \frac{1}{4}$  或  $P(A) = \frac{3}{4}$  (舍)

故  $P(A) = \frac{1}{4}$

19、由条件知  $P(\bar{A}\bar{B}) = \frac{1}{9}$ , 且  $P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B)$

由  $P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B)$  得:  $P(A - AB) = P(B - AB)$  即  $P(A) - P(AB) = P(B) - P(AB)$  推得:  
 $P(A) = P(B)$

由独立性, 有  $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = \frac{1}{9}$ , 从而得  $P(\bar{A}) = \frac{1}{3}$ , 故

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = \frac{2}{3}$$

20、设射手的命中率为  $P$ , 则由题意得:

$$1 - (1 - P)^4 = \frac{80}{81}$$

解之得  $P = \frac{2}{3}$

21、设  $P(A) = P$ , 则由题意得

$$1 - (1 - P)^4 = 0.5904$$

解之得  $P = 0.2$ , 在三次独立试验中, 事件  $A$  出现一次的概率是

$$C_3^1 P(1 - P)^2 = 3 \times 0.2 \times 0.8^2 = 0.384$$

## (二) 补充题答案

1、(1) 类似于本章第 11 题, 这里不妨认为是同时取出两件产品, 此时取出产品中有一件是不合格品有  $C_m^2 + C_m^1 C_{M-m}^1$  种取法, 而已知两件中有一件是不合格品, 另一件也是不合格品有  $C_m^2$  种取法, 故所求概率为

$$\frac{C_m^2}{C_m^2 + C_m^1 C_{M-m}^1} = \frac{m-1}{2M-m-1}$$

(2) 取出产品中有一件是合格品有  $C_{M-m}^2 + C_m^1 C_{M-m}^1$  种取法, 而已知两件中有一件是合格品, 另一件是不合格品有  $C_{M-m}^1 C_m^1$  种取法, 故所求概率为

$$\frac{C_{M-m}^1 C_m^1}{C_{M-m}^2 + C_m^1 C_{M-m}^1} = \frac{2m}{M+m-1}$$

注: 这里采用的是在缩减的样本空间中计算条件概率的方法, 且题中“有一件”其意应在“至少有一件”而不能理解为“只有一件”, 这是因为对另一件是否是不合格还不知道。

2、(1) 这是条件概率, 下面考虑在缩减的样本空间中去求, 第一、第二次取到正品有  $15 \times 14 \times 18$  种取法, 在此条件下第三次取到次品有  $15 \times 14 \times 5$  种取法, 故所求概率为

$$\frac{15 \times 14 \times 5}{15 \times 14 \times 18} = \frac{5}{18}$$

注: 上述是将样本空间中的元素看成是三次取完后的结果, 更简单的也可只考虑以第三次取的结果作为样本空间中的元素, 即在第一、第二次取到正品时, 第三次取时有 18 种取法,

而在第一次、第二次取到正品时, 第三次取次品有 5 种取法, 故所求概率为  $\frac{5}{18}$

(2) 此问是要求事件“第一、第二次取到正品, 且第三次取到次品”的概率(与(1)不同的在于这里没有将第一、第二次取到正品作为已知条件, 而是同时发生), 按题意, 三次取产品共有  $20 \times 19 \times 18$  种取法, 而第三次才取到次品共有  $15 \times 14 \times 5$  种取法, 故所求概率为

$$\frac{15 \times 14 \times 5}{20 \times 19 \times 18} = \frac{35}{228}$$

(3) 三次取产品共有  $20 \times 19 \times 18$  种取法, 第三次取到次品有  $5 \times 19 \times 18$  种取法, 故所求概率为

$$\frac{5 \times 19 \times 18}{20 \times 19 \times 18} = \frac{1}{4}$$

注: 此问也可用类似于 (1) 中注的方法去解决, 即只考虑以第三次取得的结果作为样本空间的元素, 也可很快求得答案是  $\frac{5}{20} = \frac{1}{4}$ 。

3、令 A 表示挑选出的是第一箱,  $B_i (i=1, 2)$  表示第  $i$  次取到的零件是一等品, 则

(1) 由全概率公式, 有

$$P(B_1) = P(B_1 | A)P(A) + P(B_1 | \bar{A})P(\bar{A}) = \frac{10}{15} \times \frac{1}{2} + \frac{18}{30} \times \frac{1}{2} = 0.4$$

(2) 用全概率公式有

$$P(B_1 B_2) = P(B_1 B_2 | A)P(A) + P(B_1 B_2 | \bar{A})P(\bar{A}) = \frac{10 \times 9}{50 \times 49} \times \frac{1}{2} + \frac{18 \times 17}{30 \times 29} \times \frac{1}{2}$$

于是所求条件概率是

$$P(B_2 | B_1) = \frac{P(B_1 B_2)}{P(B_1)} = \frac{\frac{10 \times 9}{50 \times 49} \times \frac{1}{2} + \frac{18 \times 17}{30 \times 29} \times \frac{1}{2}}{0.4} = 0.4856$$

4、用 A 表示第一次取到 1 号球, B 表示第二次取到 2 号球, 则由全概率公式有

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B | A)P(A) + P(B | \bar{A})P(\bar{A}) \\ &= \frac{1}{n-1} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \times \frac{n-1}{n} = \frac{n + (n-1)^2}{n^2(n-1)} \end{aligned}$$

5、以  $A_k$  表示有  $k$  个孩子, B 表示所有孩子均为同一性别, 由全概率公式有

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(B | A_k)P(A_k) \\ &= P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} P(B | A_k)P(A_k) \\ &= P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( (0.5)^k + (0.5)^k \right) P_k \\ &= P_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} 0.5^k P_k \end{aligned}$$

6、以 A 表示患有癌症, B 表示试验呈阳性, 则由贝叶斯公式得

$$P(A | B) = \frac{P(A)P(B | A)}{P(A)P(B | A) + P(\bar{A})P(B | \bar{A})} = \frac{0.005 \times 0.95}{0.005 \times 0.95 + 0.995 \times 0.01} = 0.3231$$

7、用 D 表示失业率上升, 此题要求  $P(A | D), P(B | D), P(C | D)$ , 根据题意有  $P(D | A) = 0.8, P(D | B) = 0.2, P(D | C) = 0.2$ , 则由贝叶斯公式得

$$P(A | D) = \frac{0.8 \times \frac{1}{6}}{0.8 \times \frac{1}{6} + 0.2 \times \frac{1}{3} + 0.2 \times \frac{1}{2}} = \frac{4}{9}$$

$$\text{同理 } P(B | D) = \frac{2}{9}$$

$$P(C | D) = \frac{1}{3}$$

故总统对三个顾问的理论正确性应分别调整成 $\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}$ 。

8、以 $A_i (i=1, 2, 3)$ 分别表示甲、乙、丙击中飞机， $B_i (i=0, 1, 2, 3)$ 表示有 $i$ 个人击中飞机， $C$ 表示飞机被击落，则

$$P(B_0) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 0.6 \times 0.5 \times 0.3 = 0.09$$

$$P(B_1) = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) \\ = 0.4 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.7 = 0.36$$

$$P(B_2) = P(A_1 A_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3) \\ = 0.4 \times 0.5 \times 0.3 + 0.4 \times 0.5 \times 0.7 + 0.6 \times 0.5 \times 0.7 = 0.41$$

$$P(B_3) = 1 - P(B_0) - P(B_1) - P(B_2) = 1 - 0.09 - 0.36 - 0.41 = 0.14$$

则由全概率公式有

$$P(C) = \sum_{i=0}^3 P(C|B_i)P(B_i) \\ = 0 \times 0.09 + 0.2 \times 0.36 + 0.6 \times 0.41 + 1 \times 0.14 = 0.458$$

注：在这里 $A_1, A_2, A_3$ 不构成样本空间的划分，因为它们不是两两互斥，可同时发生。

9、(1)  $n$ 次成功之前已经失败了 $m$ 次，表示进行了 $m+n$ 次，第 $m+n$ 次试验一定成功，而前面的 $m+n-1$ 次试验中有 $m$ 次失败， $n-1$ 次成功，从而所求概率为

$$\binom{m+n-1}{m} (1-p)^m p^{n-1} \cdot p = \binom{m+n-1}{m} p^n (1-p)^m$$

(2) 令 $A$ 表示 $n$ 次成功之前已有 $m+1$ 次失败， $A_i (i=1, 2, \dots, n)$ 表示 $n$ 次成功之前已有 $m+1$ 次失败且第 $m+1$ 次（即最后一次）失败在第 $m+i$ 次试验中发生，则可知有

$$P(A) = \binom{m+n}{m+1} p^n (1-p)^{m+1}$$

且 $A = \bigcup_{i=1}^n A_i, A_1, \dots, A_n$ 两两互斥，对事件 $A_i$ ，它表示在 $m+n+1$ 次试验中，从第 $m+i+1$ 次试验至第 $m+n+1$ 次试验都成功，第 $m+i$ 次试验是失败（最后一次失败），而前面的 $m+i-1$ 次试验中有 $m$ 次失败， $i-1$ 次成功，于是

$$P(A_i) = \binom{m+i-1}{m} p^{i-1} (1-p)^m \cdot (1-p) \cdot p^{n-i+1} \\ = \binom{m+i-1}{m} p^n (1-p)^{m+1}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

由于 $P(A) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ ，即

$$\binom{m+n}{m+1} p^n (1-p)^{m+1} = \binom{m}{m} p^n (1-p)^{m+1} + \binom{m+1}{m} p^n (1-p)^{m+1} + \dots + \binom{m+n-1}{m} p^n (1-p)^{m+1}$$

消去 $p^n (1-p)^{m+1}$ 立得结论成立。

10、由全概率公式，每台仪器能出厂的概率 $p = 1 \times 0.7 + 0.8 \times 0.3 = 0.94$

将每台仪器能否出厂看成是一次试验，则 $n$ 台仪器就是 $n$ 次试验，由于每次试验只有两个结果：出厂或不出厂，且各次试验相互独立，则这是一个 $n$ 重伯努利概型问题，于是有

$$(1) \alpha = 0.94^n$$

$$(2) \beta = C_n^2 0.94^{n-2} 0.06^2$$

$$(3) \theta = 1 - 0.94^n - n \cdot 0.94^{n-1} \cdot 0.06$$

## 第二章 随机变量及其概率分布

### (一) 基本题解答

1. 样本空间  $V = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (2,6), \dots, (6,1), \dots, (6,6)\}$ . 这里, 例如  $(6,1)$  表示掷第一次得 6 点, 掷第二次得 1 点. 其余类推.

以  $X$  表示两次所得点数的和. 则  $X$  的分布律为

$X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_K$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. 由题设,  $X$  的可能值为 0, 1, 2, 3. 以  $A_i (i=1,2,3)$  表示事件“汽车在第  $i$  个路口 遇到红灯”;  $A_1, A_2, A_3$  相互独立, 且  $P(A_i) = P(\bar{A}_i) = 1/2, i=1,2,3$ . 于是

$$P\{X=0\} = P(A_1) = 1/2; \quad P\{X=1\} = P(\bar{A}_1 A_2) = 1/2^2; \quad P\{X=2\} = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = 1/2^3; \\ P\{X=3\} = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = 1/2^3.$$

$\therefore X$  的分布律为:

$X$	0	1	2	3
$P_i$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

3. 设“ $\xi=k$ ”表示前  $k$  次取出白球, 第  $k+1$  次取黑球, 则  $\xi$  的分布列为

$$P(\xi=k) = \frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)(n-m)}{n(n-1)\cdots(n-k)} \quad (k=0,1,\dots,m).$$

$$4. (1) \because \sum_{k=1}^5 P(X=k) = \sum_{k=1}^5 \frac{c}{15} = \frac{c}{15} \sum_{k=1}^5 1 = \frac{c}{15} \times 5 = \frac{c}{3} = 1, \quad \therefore c=3.$$

$$(2) P\{1 \leq X \leq 3\} = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{5} = \frac{3}{5}. \quad (3) P\{0.5 < X < 2.5\} = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

5. 设进行了  $i$  次试验, 其中有  $k$  次试验成功之事件设为  $A$ , 则此事件包含有两层意思: 它意味着第  $i$  次 ( $i \geq k$ ) 成功, 且  $i-1$  次试验中成功  $k-1$  次, 设这两个事件分别为  $A_1, A_2$ , 则  $A = A_1 A_2$ , 且  $P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2)$  ( $A_1$  与  $A_2$  独立), 而  $P(A_1) = p$ ,

$$P(A_2) = C_{i-1}^{k-1} p^{k-1} \cdot q^{i-1-(k-1)} = C_{i-1}^{k-1} \cdot p^{k-1} q^{i-k}.$$

于是, 所需试验次数  $X$  的分布律为

$$P\{X=i\} = p \cdot C_{i-1}^{k-1} p^{k-1} q^{i-k} = C_{i-1}^{k-1} p^k q^{i-k} \quad (i=k, k+1, \dots; q=1-p).$$

6. 设  $\xi$  为该种商品每月销售数, 则  $\xi \sim \pi(7)$ ,  $x$  为该种商品每月进货数, 则  $P(\xi \leq x) \geq 0.999$ . 查普哇松分布的数值表, 得  $x \geq 13$ .

7. 设  $X = \{\text{该外国人在 5 个选择题中答对的题数}\}$ , 则  $X \sim B(5, 1/4)$ . 又设  $A = \{\text{答对题数不少于两题}\}$ , 则依题设知  $P(A) = \sum_{k=3}^5 P\{X=k\} = \sum_{k=3}^5 C_5^k \left(\frac{1}{4}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{5-k} = 0.1035$ .

8. 设  $X = \{\text{180 台同类设备中同时发生故障的设备的台数}\}$ , 则  $X \sim B(180, 0.01)$ . 又设配备  $N$  个维修人员, 则所求概率为

$$P\{X > N\} = P\{X \geq N+1\} = \sum_{k=N+1}^{180} P\{X=k\}, \quad \text{而} \quad P\{X=k\} = C_{180}^k (0.01)^k (0.99)^{180-k}, \quad \text{故}$$

$$P\{X > N\} = \sum_{k=N+1}^{180} C_{180}^k (0.01)^k (0.99)^{180-k} \approx \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{(1.8)^k}{k!} e^{-1.8}, \quad \text{这里}$$

$$np = 180 \times 0.01 = 1.8 = \lambda.$$

欲使  $\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1.8^k}{k!} e^{-1.8} \leq 1 - 0.99 = 0.01$ , 查泊松分布表, 可知  $N+1=7$ , 因而至少应配备 6 名工人.

9. 设  $A_i = \{\text{部件}i\text{需要调整}\}$  ( $i=1,2,3$ ), 则  $P(A_1)=0.10, P(A_2)=0.20, P(A_3)=0.30$ . 由于  $A_1, A_2, A_3$  相互独立, 因此, 有

$$P\{X=0\} = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = (1-0.1) \times (1-0.2) \times (1-0.3) = 0.504,$$

$$P\{X=1\} = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) \\ = 0.1 \times 0.8 \times 0.7 + 0.9 \times 0.2 \times 0.7 + 0.9 \times 0.8 \times 0.3 = 0.398,$$

$$P\{X=2\} = P(A_1 A_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3) = 0.092,$$

$$P\{X=3\} = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0.1 \times 0.2 \times 0.3 = 0.006.$$

因此,  $X$  的概率分布为

X	0	1	2	3
P	0.504	0.398	0.092	0.006

10.  $F(x)$  为一阶梯状函数, 则  $X$  可能取得值为  $F(x)$  的跳跃点:  $-1, 1, 3$

$$P(X=-1) = F(-1) - F(-1-0) = 0.4, P(X=1) = F(1) - F(1-0) = 0.8 - 0.4 = 0.4,$$

$$P(X=3) = F(3) - F(3-0) = 1 - 0.8 = 0.2, \text{ 即有}$$

X	-1	1	3
P	0.4	0.4	0.2

11. (1) 由于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$ , 所以有  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (a + b \exp\{-x^2/2\}) = a = 1$ , 即  $a=1$ , 又由于  $X$  为连续型随机变量,  $F(x)$  应为  $x$  的连续函数, 应有

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (a + b \exp\{-x^2/2\}) = a + b \quad \text{所以 } a+b=0, b=-a=-1.$$

$$\text{代入 } a, b \text{ 之值, 得 } F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\{-x^2/2\}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 对函数 } F(x) \text{ 求导, 得 } X \text{ 的概率密度 } P(x) = \begin{cases} x \exp\{-x^2/2\}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$12. \text{ 当 } x \leq 0, F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2} e^x; \text{ 当 } x > 0 \text{ 时,}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^0 e^t dt + \int_0^x e^{-t} dt \right) = \frac{1}{2} [1 + (1 - e^{-x})] = 1 - \frac{1}{2} e^{-x}, \text{ 所以, 我们有}$$

$$F(x) = \begin{cases} e^x/2, & x \leq 0, \\ 1 - e^{-x}/2, & x > 0. \end{cases}$$

$$13. \text{ 由 } P\{X \geq k\} = \frac{2}{3} \text{ 得 } P\{X < k\} = \frac{1}{3}, \text{ 即应选 } k, \text{ 使 } \int_{-\infty}^k f(x) dx = \frac{1}{3}. \text{ 注意 } \int_{-\infty}^0 f(x) dx = 0,$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{3}, \int_1^3 f(x) dx = 0, \int_3^6 f(x) dx = \frac{2}{3}, \text{ 可见当 } 1 \leq k \leq 3 \text{ 时,}$$

$$\int_{-\infty}^k f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^k f(x) dx = \frac{1}{3}, \text{ 所以 } k \text{ 的取值范围应为 } 1 \leq k \leq 3.$$

$$14. P\{X > 0.8\} = \int_{0.8}^1 12x(1-x)^2 dx = 0.272. \quad P\{X > 0.9\} = \int_{0.9}^1 12x(1-x)^2 dx = 0.037.$$

$$15. X \sim E\left(\frac{1}{200}\right), \quad (1) P(X \leq 100) = F(100) = 1 - e^{-\frac{100}{200}} = 1 - e^{-\frac{1}{2}};$$

$$(2) P(X > 300) = e^{-\frac{1}{200} \times 300} = e^{-\frac{3}{2}} = e^{-1.5}.$$

16. 解法1 用随机变量法: 令  $x_i$  表示第  $i$  次掷骰子出现的点数,  $i=1,2$ . 显然  $x_1$  和  $x_2$  独立同分布,  $P\{x_i = j\} = 1/6$ , ( $j=1,2,\dots,6; i=1,2$ ), 则方程变为  $x^2 + x_1 x + x_2 = 0$ . 它有重根的充要条件是  $x_1^2 - 4x_2 = 0$ , 有实根的充要条件是  $x_1^2 - 4x_2 \geq 0$ , 故

$$q = P\{x_1^2 - 4x_2 = 0\} = P(\{x_2 = 1, x_1 = 2\} \cup \{x_2 = 4, x_1 = 4\}) = P\{x_2 = 1, x_1 = 2\} + P\{x_2 = 4, x_1 = 4\} \\ = P\{x_2 = 1\}P\{x_1 = 2\} + P\{x_2 = 4\}P\{x_1 = 4\} = 1/6 \times 1/6 + 1/6 \times 1/6 = 1/18. \quad \text{由全概率公式可}$$

$$\begin{aligned}
\text{得 } P &= P\{x_1^2 - 4x_2 \geq 0\} = P\{x_2 \leq \frac{x_1^2}{4}\} = \sum_{i=1}^6 P\{x_1 = j\}P\{x_2 \leq \frac{x_1^2}{4} | x_1 = j\} \\
&= P\{x_1 = 1\}P\{x_2 \leq \frac{1}{4}\} + P\{x_1 = 2\}P\{x_2 \leq \frac{2^2}{4}\} + P\{x_1 = 3\}P\{x_2 \leq \frac{3^2}{4}\} + P\{x_1 = 4\}P\{x_2 \leq \frac{4^2}{4}\} \\
&\quad + P\{x_1 = 5\}P\{x_2 \leq \frac{5^2}{4}\} + P\{x_2 \leq \frac{6^2}{4}\} = \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 1 = \frac{19}{36}
\end{aligned}$$

解法2 用枚举法:一枚骰子掷2次,其基本事件总数为36.方程有实根和重根的充要条件分别为  $B^2 - 4C \geq 0$  和  $B^2 - 4C = 0$ .

B 的取值	1	2	3	4	5	6
使 $B^2 - 4C \geq 0$ 的基本事件个数	0	1	2	4	6	6
使 $B^2 - 4C = 0$ 的基本事件个数	0	1	0	1	0	0

故使方程有实根的基本事件总数为  $1+2+4+6+6=19$ , 有重根的基本事件总数  $1+1=2$ , 因此  $P=19/36$ ,  $q=2/36=1/18$ .

17. 本题关键是理解随机变量  $N(t)$  的意义. 事件  $\{N(t) = k\}$  表示设备在任何长为  $t$  的时间内发生  $k$  次地震, 其概率为  $P\{N(t) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). 由于  $T$  表示两次地震之间的时间间隔, 故当  $t < 0$  时,  $P\{T \leq t\} = 0$ ; 当  $t \geq 0$  时, 事件  $\{T \leq t\}$  与事件  $\{T > t\}$  是互逆事件, 且  $\{T > t\}$  表示在长为  $t$  的时间内无地震发生, 故它等价于事件  $\{N(t) = 0\}$ .

(1) 由于  $T$  是非负随机变量, 可见当  $t < 0$  时,  $F(t) = P\{T \leq t\} = 0$ .

设  $t \geq 0$ , 则事件  $\{T > t\}$  与  $\{N(t) = 0\}$  等价. 因此, 当  $t \geq 0$  时, 有

$$F(t) = P\{T \leq t\} = 1 - P\{T > t\} = 1 - P\{N(t) = 0\} = 1 - e^{-\lambda t}.$$

于是,  $T$  服从参数为  $\lambda$  的指数分布.

$$(2) Q = P\{T \geq 10 | T \geq 5\} = \frac{P\{T \geq 10, T \geq 5\}}{P\{T \geq 5\}} = \frac{P\{T \geq 10\}}{P\{T \geq 5\}} = \frac{e^{-10t}}{e^{-5t}} = e^{-5t}.$$

18. 设  $X$  为考生的外语成绩, 由题设知  $X \sim N(\mu, \sigma)$ , 其中  $\mu = 72$ . 现在求  $\sigma^2$ . 由题设

$$P\{X \geq 96\} = 0.023, \quad P\left\{\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{96 - 72}{\sigma}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right) = 0.023, \therefore \Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right) = 0.977,$$

由  $\Phi(x)$  的数值表, 可见  $\frac{24}{\sigma} = 2$ , 因此  $\sigma = 12$ . 这样  $X \sim N(72, 12^2)$ . 所求概率为

$$\begin{aligned}
P\{60 \leq x \leq 84\} &= P\left\{\frac{60 - 72}{12} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{84 - 72}{12}\right\} = P\left\{-1 \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq 1\right\} \\
&= \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \times 0.841 - 1 = 0.682.
\end{aligned}$$

$$19. (1) p(\xi > 250) = p\left(\frac{\xi - 300}{35} > \frac{250 - 300}{35}\right) = \Phi(1.43) \approx 0.9236;$$

$$(2) p(\mu - x < \xi < \mu + x) = p\left(-\frac{x}{35} < \frac{\xi - 300}{35} < \frac{x}{35}\right) = \Phi\left(\frac{x}{35}\right) - \Phi\left(-\frac{x}{35}\right) = 2\Phi\left(\frac{x}{35}\right) - 1 \geq 0.9,$$

即  $(x/35) \geq 0.95$ , 所以  $x/35 \geq 1.65$ , 即  $x \geq 57.75$ .

20. 引进下列事件:  $A_1 = \{\text{电压不超过 } 200 \text{ 伏}\}$ ,  $A_2 = \{\text{电压在 } 200 \sim 240 \text{ 伏}\}$ ,  $A_3 = \{\text{电压超过 } 240 \text{ 伏}\}$ ;  $B = \{\text{电子元件损坏}\}$ . 由题设, 知  $X \sim N(220, 25^2)$ , 因此

$$P(A_1) = P\{X \leq 200\} = P\left\{\frac{X - 220}{25} \leq \frac{200 - 220}{25}\right\} = \Phi(-0.8) = 0.212;$$

$$P(A_2) = P\{200 \leq X \leq 240\} = \Phi(0.8) - \Phi(-0.8) = 0.576;$$

$$P(A_3) = P\{X > 240\} = 1 - 0.212 - 0.576 = 0.212.$$

(1) 由题设条件, 知  $P(B|A_1) = 0.1$ ,  $P(B|A_2) = 0.001$ ,  $P(B|A_3) = 0.2$ . 于是, 由全概



率公式, 有  $\alpha = P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i)P(B|A_i) = 0.0642$ .

(2) 由条件概率定义 (或贝叶斯公式), 知  $\beta = P(A_2|B) = \frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)} \approx 0.009$ .

21. 由题设,  $Y \sim B(3, P)$  其中  $P = P\left\{X \leq \frac{1}{2}\right\} = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 2xdx = \frac{1}{4}$ ,

故  $P\{Y=2\} = C_3^2 (1/4)^2 (3/4)^1 = 9/64$ .

22.

P	0.3	0.2	0.4	0.1
X	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
$(2X - \pi)^2$	$\pi^2$	0	$\pi^2$	$4\pi^2$
$\cos(2X - \pi)$	-1	1	-1	1

$(2X - \pi)^2$	0	$\pi^2$	$4\pi^2$
P	0.2	0.7	0.1

$\cos(2X - \pi)$	-1	1
P	0.7	0.3

23. 因为  $\sin \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} -1, & k = 4n-1, \\ 0, & k = 2n, \\ 1, & k = 4n-3 \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots).$

所以,  $Y = \sin(\frac{\pi}{2}X)$  只有 3 个可能取值 -1, 0, 1, 而取这些值的概率分别为

$$P\{Y=-1\} = P\{X=3\} + P\{X=7\} + P\{X=11\} + \dots = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{11}} + \dots = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-1/16} = \frac{2}{15},$$

$$P\{Y=0\} = P\{X=2\} + P\{X=4\} + P\{X=6\} + \dots = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-1/4} = \frac{1}{3},$$

$$P\{Y=1\} = P\{X=1\} + P\{X=5\} + P\{X=9\} + \dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^9} + \dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-1/16} = \frac{8}{15}.$$

于是,  $Y = \sin(\frac{\pi}{2}X)$  的分布列为  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{2}{15} & \frac{1}{3} & \frac{8}{15} \end{bmatrix}$ .

24.  $\because X \sim U(0,2), \therefore$  ①  $y \leq 0$  时,  $F_Y(y) = 0$ ;

② 当  $0 < y < 4$ ,

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(X \leq \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) = \sqrt{y}/2;$$

③  $y \geq 4$  时,  $F_Y(y) = 1$ .

$$\text{故 } f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{y}}, & 0 < y < 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

25. 应先求出  $F_Y(y)$ , 再对  $y$  求导即得  $f_Y(y)$  因

$$F_Y(y) = P\{Y < y\} = P\{e^X < y\} = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ P\{X < \ln y\}, & y \geq 1. \end{cases}$$

故当  $y \geq 1$  时,  $F_Y(y) = P\{X < \ln y\} = \int_0^{\ln y} e^{-x} dx$ , 而  $f_Y(y) = F_Y'(y) = 1/y^2$ .

因此  $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ 1/y^2 & y \geq 1. \end{cases}$

26. 假设随机变量  $X$  具有连续的分布函数  $F(x)$ , 证明:  $Y = F(X)$  在区间  $(0, 1)$  上服从均匀分布.

解 先求  $Y$  的分布函数. 因  $0 \leq F(x) \leq 1$ , 单调非降. 连续, 故  $y = F(x)$  的反函数存在.

当  $y \leq 0$  时,  $F_Y(y) = P(F(X) \leq y) = P(\phi) = 0$ ,

当  $0 < y < 1$  时  $F_Y(y) = P(F(X) \leq y) = P(X \leq F^{-1}(y)) = F[F^{-1}(y)] = y$ ,

当  $y \geq 1$  时  $F_Y(y) = P(F(X) \leq y) = P(\Omega) = 1$ .

于是  $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ y, & 0 < y < 1 \\ 1, & y \geq 1, \end{cases}$  从而  $Y$  的密度函数为  $f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y < 1 \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

即  $Y = F(X)$  服从  $(0, 1)$  上的均匀分布.

27. (1)  $Y = e^X$  的分布函数  $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(e^X \leq y)$ . 当  $y \leq 0$  时,  $F_Y(y) = 0$ ;

当  $y > 0$  时,  $F_Y(y) = P\{e^X \leq y\} = P\{X \leq \ln y\} = \int_0^{\ln y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{x^2}{2}\} dx$ , 于是,  $Y$  的概

率密度函数为  $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0; \\ \frac{1}{y\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{1}{2}(\ln y)^2], & y > 0. \end{cases}$

(2)  $Y = 2X^2 + 1$  的分布函数  $F_Y(y) = P\{2X^2 + 1 \leq y\}$ . 当  $y \leq 1$  时,  $F_Y(y) = 0$ ; 当  $y > 1$  时,

$$F_Y(y) = P\{2X^2 + 1 \leq y\} = P\left\{-\sqrt{\frac{y-1}{2}} \leq X \leq \sqrt{\frac{y-1}{2}}\right\} = \int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

即  $F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 1, \\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, & y > 1. \end{cases}$  故  $Y$  的概率密度为  $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}} e^{-\frac{y-1}{4}}, & y > 1, \\ 0, & y \leq 1. \end{cases}$

(3)  $Y = |X|$  的分布函数  $F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{|X| \leq y\}$ . 当  $y \leq 0$  时,  $F_Y(y) = 0$ ; 当  $y > 0$  时,

$$F_Y(y) = P\{|X| \leq y\} = P\{-y \leq X \leq y\} = \int_{-y}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

于是,  $Y$  的概率密度函数为  $f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}, & y > 0. \end{cases}$

## (二) 补充题答案

1. (1) 由条件可知, 当  $x < -1$  时,  $F(x) = 0$ ;  $F(-1) = \frac{1}{8}$ ,  $P\{-1 < X < 1\} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$ .

易见, 在  $X$  的值属于  $(-1, 1)$  的条件下, 事件  $\{-1 < X \leq x\} (-1 < x < 1)$  的条件概率为

$$P\{-1 < X \leq x | -1 < X < 1\} = (x+1)/2.$$

于是, 对于  $-1 < x < 1$ , 有

$$P\{-1 < X \leq x\} = P\{-1 < X \leq x, -1 < X < 1\} = P\{-1 < X < 1\} \cdot P\{-1 < X \leq x | -1 < X < 1\} = \frac{5}{8} \times \frac{x+1}{2} = \frac{5x+5}{16}$$

$$F(x) = P\{X \leq -1\} + P\{-1 < X \leq x\} = \frac{1}{8} + \frac{5x+5}{16} = \frac{5x+7}{16}.$$

对于  $x \geq 1$ , 有  $F(x) = 1$ . 从而  $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{若 } x < -1 \\ (5x+7)/16 & \text{若 } -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{若 } x \geq 1. \end{cases}$

(2)  $X$  取负值的概率  $p = P\{X \leq 0\} = F(0) - P\{X = 0\} = F(0) = 7/16$ .

2. 用  $A$  表示有效, 由题设知

$$P(A) = \frac{3}{4}, P(\bar{A}) = \frac{1}{4}, P(X = k|A) = \frac{3^k}{k!} e^{-3}, P(X = k|\bar{A}) = \frac{5^k}{k!} e^{-5}, k = 0, 1, 2, \dots$$

应用贝叶斯公式, 得

$$P(A|X=2) = \frac{P(A)P(X=2|A)}{P(A)P(X=2|A) + P(\bar{A})P(X=2|\bar{A})} = \frac{0.75 \times 0.2240}{0.75 \times 0.2240 + 0.25 \times 0.0842} \approx 0.8887.$$

3. (1) 按第一种方式: 记  $A_i$  为“第  $i$  个人承包的 20 台机器不能及时维修”, ( $i=1, 2, 3, 4$ ), 则所求概率为  $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$ . 易知

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \geq P(A_1) = \sum_{k=2}^{20} \binom{20}{k} (0.01)^k (0.99)^{20-k} = 0.0175$$

(2) 按第二种方式: 以  $X$  表示这 80 台机器中需要维修的机器的台数, 则不能及时维修的概率为  $P(X \geq 4) = \sum_{k=4}^{80} \binom{80}{k} (0.01)^k (0.99)^{80-k} = 0.0091$ .

从上述计算结果可以看出, 还是以第二种方式为好. 因按第二种方式 3 个人共同维修 80 台机器不能及时维修的概率较小.

4. ①  $x \leq 0, F(x) = 0$ ; ②  $0 < x < 2$ ,

$$F(x) = \frac{\int_0^x dx \int_0^{2x-x^2} dy}{\int_0^2 dx \int_0^{2x-x^2} dy} = \frac{\int_0^x (2x-x^2) dx}{\int_0^2 (2x-x^2) dx} = \frac{(x^2 - \frac{x^3}{3}) \Big|_0^x}{(x_2 - \frac{x^2}{3}) \Big|_0^2} = \frac{1}{4 - \frac{8}{3}} (x^2 - \frac{x^3}{3}) = \frac{1}{4} (3x^2 - x^3);$$

$$\textcircled{3} X \geq 2, F(x) = 1. \quad \text{故 } f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} (2x - x^2), & 0 < x < 2; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$5. X \text{ 的分布函数为 } F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ P(0 < X \leq x), & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

设  $x_1, x_2 \in [0, 1]$ , 且  $x_i + \Delta x \in [0, 1], i = 1, 2$ , 由题设得

$$F(x_1 + \Delta x) - F(x_1) = P(x_1 < X \leq x_1 + \Delta x) = F(x_2 + \Delta x) - F(x_2) = P(x_2 < X \leq x_2 + \Delta x).$$

令  $\Delta x \rightarrow 0$ , 得  $F'(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_1 + \Delta x) - F(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_2 + \Delta x) - F(x_2)}{\Delta x} = F'(x_2)$ .

从而, 对任意  $x \in (0, 1)$ , 有  $F'(x) \equiv C$ , 当  $x \in [0, 1]$  时, 显然  $F'(x) = 0$ ; 另一方面

$$F(1) = P(0 < X \leq 1) = \int_0^1 f(x) dx = C = 1.$$

所以,  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$  因此  $X$  服从  $[0, 1]$  上的均匀分布.

6. 设  $Y = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$ ,  $\lambda > 0$ .  $\because X \sim U[0, 1]$ ,  $\therefore y \leq 0, F_Y(y) = 0$ ;

$$y > 0, F_Y(y) = P(Y \leq y) = P[-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X) \leq y] = P(X \leq 1 - e^{-\lambda y}) = F_X(1 - e^{-\lambda y}) = 1 - e^{-\lambda y}.$$

### 第三章 多维随机向量及其概率分布

#### (一) 基本题答案

1、设  $X$  和  $Y$  的可能取值分别为  $i$  与  $j$ , 则  $i=0,1,2,3; j=0,1,2$ .

因盒子里有 3 种球, 在这 3 种球中任取 4 个, 其中黑球和红球的个数之和  $i$  与  $j$  必不超过 4. 另一方面, 因白球只有 2 个, 任取的 4 个球中, 黑球和红球个数之和最小为 2 个, 故有

$$2 \leq i+j \leq 4, \text{ 且 } p(X=i, Y=j) = C_3^i C_2^j C_2^{4-i-j} / C_7^4.$$

因而  $P(X=i, Y=j) = 0$  ( $i+j < 2$  或  $i+j > 4, i=0,1,2,3; j=0,1,2$ ).

于是  $p_{11} = P(X=x_1=0, Y=y_1=0) = 0, p_{12} = P(X=x_1=0, Y=y_2=0) = 0,$

$$p_{13} = P(X=x_1=0, Y=y_3=0) = C_3^0 C_2^1 C_2^3 / C_7^4 = 1/35.$$

同法可求得联合分布律中其他的  $p_{ij}$ , 得下表

Y \ X	0	1	2	3
0	0	0	$C_3^2 C_2^0 C_2^2 / C_7^4$	$C_3^3 C_2^0 C_1^1 / C_7^4$
1	0	$C_3^1 C_2^1 C_2^2 / C_7^4$	$C_3^2 C_2^1 C_1^1 / C_7^4$	$C_3^3 C_2^1 C_0^0 / C_7^4$
2	$C_3^0 C_2^2 C_2^2 / C_7^4$	$C_3^1 C_2^2 C_1^1 / C_7^4$	$C_3^2 C_2^2 C_0^0 / C_7^4$	0

即

Y \ X	0	1	2	3
0	0	0	3/35	2/35
1	0	6/35	12/35	2/35
2	1/35	6/35	3/35	0

2、 $X$  和  $Y$  都服从二项分布, 参数相应为 (2,0.2) 和 (2,0.5). 因此  $X$  和  $Y$  的概率分布分别为

$$X \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.64 & 0.32 & 0.04 \end{bmatrix}, \quad Y \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.25 & 0.5 & 0.25 \end{bmatrix}.$$

由独立性知,  $X$  和  $Y$  的联合分布为

Y \ X	0	1	2
0	0.16	0.08	0.01
1	0.32	0.16	0.02
2	0.16	0.08	0.01

3、 $Y$  的分布函数为  $F(y)=1-e^{-y} (y>0), F(y)=0 (y \leq 0)$ . 显知  $(x_1, x_2)$  有四个可能值:

$(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ . 易知  $P\{X_1=0, X_2=0\} = P\{Y \leq 1, Y \leq 2\} = P\{Y \leq 1\} = 1-e^{-1},$

$P\{X_1=0, X_2=1\} = P\{Y \leq 1, Y > 2\} = 0, P\{X_1=1, X_2=0\} = P\{Y > 1, Y \leq 2\} = P\{1 < Y \leq 2\} = e^{-1} - e^{-2},$

$P\{X_1=1, X_2=0\} = P\{Y > 1, Y \leq 2\} = P\{1 < Y \leq 2\} = e^{-1} - e^{-2},$

$P\{X_1=1, X_2=1\} = P\{Y > 1, Y > 2\} = P\{Y > 2\} = e^{-2}.$

于是, 可将  $X_1$  和  $X_2$  联合概率分布列表如下:

P \ X <sub>2</sub> \ X <sub>1</sub>	0	1
0	$1-e^{-1}$	$e^{-1} - e^{-2}$
1	0	$e^{-2}$

$$\begin{aligned}
 4、P(X=n) &= \sum_{m=0}^n P(\zeta=n, \eta=m) = \sum_{m=0}^n \frac{\lambda^n p^m (1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!} e^{-\lambda} \\
 &= \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m} = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} [p + (1-p)]^n = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \quad (n=0,1,2,\dots).
 \end{aligned}$$

即  $X$  是服从参数为  $\lambda$  的泊松分布.

$$\begin{aligned}
 P(Y=m) &= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\lambda^n p^m (1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^m p^m e^{-\lambda}}{m!} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\lambda^{n-m} (1-p)^{n-m}}{(n-m)!} \\
 &= \frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda}}{m!} e^{-\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda p}}{m!}, (m=0,1,2,\dots). \text{ 即 } Y \text{ 是服从参数为 } \lambda p \text{ 的泊}
 \end{aligned}$$

松分布.

$$5、\text{由定义 } F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \varphi(x, y) dx dy.$$

因为  $\varphi(x, y)$  是分段函数, 要正确计算出  $F(x, y)$ , 必须对积分区域进行适当分块:  
 $x < 0$  或  $y < 0$ ;  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ ;  $x > 1, y > 1$ ;  $x > 1, 0 \leq y \leq 1$ ;  $y > 1, 0 \leq x \leq 1$  等 5 个部分.

(1) 对于  $x < 0$  或  $y < 0$ , 有  $F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = 0$ ;

(2) 对于  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ , 有  $F(x, y) = 4 \int_0^x \int_0^y uv du dv = x^2 y^2$ ;

(3) 对于  $x > 1, 0 \leq y \leq 1$ , 有  $F(x, y) = P\{X \leq 1, Y \leq y\} = y^2$ ;

(4) 对于  $y > 1, 0 \leq x \leq 1$ , 有  $F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq 1\} = x^2$ ;

(5) 对于  $x > 1, y > 1$ , 有  $F(x, y) = 1$ .

$$\text{故 } X \text{ 和 } Y \text{ 的联合分布函数 } F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 0, \\ x^2 y^2, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, 1 < y, \\ y^2, & 1 < x, 0 \leq y \leq 1, \\ 1, & 1 < x, 1 < y. \end{cases}$$

6、(1)  $x \leq 0$  或  $y \leq 0, F(x, y) = 0$ ;  $x > 0, y > 0$ ,

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y z e^{-(2s+t)} ds dt = 2 \left( \int_0^x e^{-2s} ds \right) \left( \int_0^y e^{-t} dt \right) = (-e^{-2s} \Big|_0^x) (-e^{-t} \Big|_0^y) = (1 - e^{-2x})(1 - e^{-y})$$

$$\text{即 } F(x, y) = \begin{cases} (1 - e^{-2x})(1 - e^{-y}), & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (2) P(Y \leq X) &= \int_{y < x} f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} dx \int_0^x 2e^{-2x-y} dy = 2 \int_0^{+\infty} e^{-2x} \left( -e^{-y} \Big|_0^x \right) dx \\
 &= -2 \int_0^{+\infty} (1 - e^{-x}) e^{-2x} dx = 2 \int_0^{+\infty} (e^{-2x} - e^{-3x}) dx = 2 \left( \frac{1}{3} e^{-3x} - \frac{1}{2} e^{-2x} \right) \Big|_0^{+\infty} = -2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

7、(1)  $x > 0$  时,  $f_X(x) = \int_x^{+\infty} e^{-y} dy = e^{-x}$ ;  $x \leq 0$  时,  $f_X(x) = 0$ ,

$$\text{即 } f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$(2) P\{X + Y \leq 1\} = \iint_{x+y \leq 1} f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_x^{1-x} e^{-y} dy = 1 + e^{-1} - 2e^{-1/2}$$

8、(1) (i) 根据公式  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$  计算; 当  $x \leq 0$  时,  $f_X(x) = 0$ ; 当  $0 < x < 1$  时,

$$f_X(x) = \int_0^x 4.8y(2-x) dy = 2.4y^2 \Big|_0^x (2-x) = 2.4x^2(2-x); \text{ 当 } x \geq 1 \text{ 时, } f_X(x) = 0$$

$$\text{即 } f_X(x) = \begin{cases} 2.4x^2(2-x), & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(ii) 利用公式  $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$  计算. 当  $y \leq 0$  时,  $f_Y(y) = 0$ ; 当  $0 < y < 1$  时,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_y^1 4.8y(2-x)dx = 4.8y\left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_y^1 = 4.8y\left[\left(2 - \frac{1}{2}\right) - \left(2y - \frac{y^2}{2}\right)\right] \\ &= 4.8y\left(\frac{3}{2} - 2y + \frac{y^2}{2}\right) = 2.4y(3 - 4y + y^2); \text{ 当 } y \geq 1 \text{ 时, } f_Y(y) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{即 } f_Y(y) = \begin{cases} 2.4y(3 - 4y + y^2), & 0 < y < 1; \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

$$(2) P\left\{(X < \frac{1}{2}) \cup (Y < \frac{1}{2})\right\} = 1 - P\left(X \geq \frac{1}{2}, Y \geq \frac{1}{2}\right) = 1 - \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{2}{x} dxdy = \frac{5}{8}.$$

9、本题先求出关于  $x$  的边缘概率密度, 再求出其在  $x=2$  之值  $f_X(2)$ . 由于平面区域  $D$  的

$$\text{面积为 } S_D = \int_1^{e^2} \frac{1}{x} dx = 2, \quad \text{故 } (X, Y) \text{ 的联合概率密度为 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & (x, y) \in D; \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$\text{易知, } X \text{ 的概率密度为 } f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy = \begin{cases} \frac{1}{2x}, & 1 < x < e^2, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases} \quad \text{故 } f_X(2) = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}.$$

10、(1) 有放回抽取: 当第一次抽取到第  $k$  个数字时, 第二次可抽取到该数字仍有十种可能机会, 即为  $P\{X=i|Y=k\} = \frac{1}{10} \quad (i=0,1,\dots,9).$

(2) 不放回抽取: (i) 当第一次抽取第  $k(0 \leq k \leq 9)$  个数时, 则第二次抽到此 (第  $k$  个) 数是不可能的, 故  $P\{X=i|Y=k\} = 0 \quad (i=k; i, k=0,1,\dots,9).$

(ii) 当第一次抽取第  $k(0 \leq k \leq 9)$  个数时, 而第二次抽到其他数字 (非  $k$ ) 的机会为  $1/9$ , 知  $P\{X=i|Y=k\} = 1/9 \quad (i \neq k; i, k=0,1,\dots,9).$

11、(1) 因  $f_\eta(y) = \int_y^1 24(1-x)ydx = 12y(1-y)^2, 0 \leq y \leq 1; f_\eta(y) = 0, \text{ 其它.}$

$$\text{故在 } 0 \leq y \leq 1 \text{ 时, } f_{\xi|\eta}(x|y) = \begin{cases} 2(1-x)/(1-y)^2 & y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其它;} \end{cases}$$

$$\text{因 } f_\xi(x) = \int_0^x 24(1-x)ydy = 12x^2(1-y)^2, \quad 0 \leq x \leq 1; f_\xi(x) = 0, \text{ 其它.}$$

$$\text{故在 } 0 \leq x \leq 1 \text{ 时, } f_{\eta|\xi}(y|x) = \begin{cases} 2y/x^2 & 0 \leq y \leq x, \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

$$(2) \text{ 因 } f_\xi(X) = \int_{1/x}^x \frac{1}{2x^2y} dy = \frac{\ln x}{x^2}, 1 \leq x \leq \infty; f_\xi(x) = 0, \text{ 其它;}$$

$$\text{故在 } 1 \leq x < \infty \text{ 时, } f_{\eta|\xi}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2y \ln x} & \frac{1}{x} < y < x, \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

$$\text{因 } f_{\eta}(y) = \begin{cases} \int_{1/y}^{\infty} \frac{1}{2x^2 y} dx = \frac{1}{2} & 0 < y \leq 1 \\ \int_y^{\infty} \frac{1}{2x^2 y} dx = \frac{1}{2y^2} & 0 < y < \infty \\ 0 & \text{其它,} \end{cases} \quad \text{故在 } 0 < y \leq 1 \text{ 时, } f_{\eta|\xi}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 y} & \frac{1}{y} < x < \infty \\ 0 & \text{其它;} \end{cases}$$

$$\text{而在 } 1 < y < \infty \text{ 时, } f_{\eta|\xi}(y|x) = \begin{cases} \frac{y}{x^2} & y < x < \infty \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

$$(3) f_{\xi}(x) = \int_x^{\infty} e^{-y} dy = e^{-x}, x > 0; f_{\xi}(x) = 0, x \leq 0. \text{ 在 } x > 0, f_{\eta|\xi}(y|x) = \begin{cases} e^{x-y} & y > x, \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

$$f_{\eta}(y) = \int_0^y e^{-y} dx = ye^{-y}, y > 0; f_{\eta}(y) = 0, y \leq 0. \text{ 故在 } y > 0 \text{ 时, } f_{\xi|\eta}(x|y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & 0 < x < y, \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

$$12. f_X(x) = \int_0^{\infty} \frac{(n-1)(n-2)}{(1+x+y)^n} dy = \frac{n-2}{(1+x)^{n-1}}, x > 0, \text{ 故}$$

$$f_{Y|X}(y/1) = \begin{cases} 2^{n-1}(n-1)/(2+y)^n & y > 0, \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

13. X 和 Y 是否独立, 可用分布函数或概率密度函数验证.

方法一: X 的分布函数  $F_X(x)$  和 Y 的分布函数  $F_Y(y)$  分别为

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0, \end{cases} \quad F_Y(y) = F(+\infty, y) = \begin{cases} 1 - e^{-0.5y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0. \end{cases}$$

由于  $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$ , 知 X 和 Y 独立.

$$\alpha = P\{X > 0.1, Y > 0.1\} = P\{X > 0.1\} \cdot P\{Y > 0.1\} = [1 - F_X(0.1)] \cdot [1 - F_Y(0.1)] = e^{-0.05} \cdot e^{-0.05} = e^{-0.1}$$

方法二: 以  $f(x, y)$ ,  $f_X(x)$  和  $f_Y(y)$  分别表示  $(X, Y)$ , X 和 Y 的概率密度, 可知

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = \begin{cases} 0.25e^{-0.5(x+y)} & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} 0.5e^{-0.5x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0, \end{cases} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 0.5e^{-0.5y} & y \geq 0, \\ 0 & y < 0. \end{cases}$$

$$\text{由于 } f(x, y) = f_X(x)f_Y(y), \text{ 知 X 和 Y 独立. } \alpha = P\{X > 0.1, Y > 0.1\} = \int_{0.1}^{+\infty} \int_{0.1}^{+\infty} 0.25e^{-0.5(x+y)} dx dy = e^{-0.1}.$$

14. 因知 X 与 Y 相互独立, 即有  $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$ .

( $i=1, 2, j=1, 2, 3$ ) 首先, 根据边缘分布的定义知  $P(X = x_1, Y = y_1) = \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = \frac{1}{24}$ . 又根据独立

性有  $\frac{1}{24} = p\{X = x_1, Y = y_1\} = p(X = x_1) \cdot p(Y = y_1) = \frac{1}{6} p(X = x_1)$ , 解得  $P(X = x_i) = \frac{1}{4}$ , 从而有

$$P(X = x_1, Y = y_3) = \frac{1}{4} - \frac{1}{24} - \frac{1}{8} = \frac{1}{12} \quad \text{又由 } P(X = x_1, Y = y_2) = P(X = x_1) \cdot P(Y = y_2), \text{ 可得}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{4} P(Y = y_2), \text{ 即有 } P(Y = y_2) = \frac{1}{2}, \text{ 从而 } P(X = x_2, Y = y_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

类似地, 由  $P(X = x_1, Y = y_3) = P(X = x_1)P(Y = y_3)$ , 有  $\frac{1}{12} = \frac{1}{4} P(Y = y_3)$ , 得  $P(Y = y_3) = \frac{1}{3}$ ,

从而,  $P(X = x_1, Y = y_3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ . 最后  $P(X = x_2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ . 将上述数值填入表中有

	X	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$P\{X = x_i\} = P_i.$
Y					

$x_1$	1/24	1/8	1/12	1/4
$x_2$	1/8	3/8	1/4	3/4
$P\{X=y_j\}=P \cdot j$	1/6	1/2	1/3	1

15、本题的关键是由题设 $P\{X_1X_2=0\}=1$ ，可推出 $P\{X_1X_2 \neq 0\}=0$ ；再利用边缘分布的定义即可列出概率分布表。

(1)由 $P\{X_1X_2=0\}=1$ ，可见 $P\{X_1=-1, X_2=1\}=P\{X_1=1, X_2=1\}=0$ ，易见

$$P\{X_1=-1, X_2=0\}=P\{X_1=-1\}=0.25 \quad P\{X_1=0, X_2=1\}=P\{X_2=1\}=0.5$$

$$P\{X_1=1, X_2=0\}=P\{X_1=1\}=0.25 \quad P\{X_1=0, X_2=0\}=0$$

于是，得 $X_1$ 和 $X_2$ 的联合分布

$X_2 \backslash X_1$	-1	0	1	$\Sigma$
0	0.25	0	0.25	0.5
1	0	0.5	0	0.5
$\Sigma$	0.25	0.5	0.25	1

(2) 可见  $P\{X_1=0, X_2=0\}=0$ ，而 $P\{X_1=0\}P\{X_2=0\}=1/4 \neq 0$ 。于是， $X_1$ 和  $X_2$ 不独立。

$$16、(1) f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases} \quad \text{因为 } X, Y \text{ 独立, 对任何 } x, y \text{ 都}$$

$$\text{有 } f_X(x) \cdot f_Y(y) = f(x, y). \quad \text{所以有 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & 0 < x < 1, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(2) 二次方程  $t^2 + 2Xt + Y = 0$  中  $t$  有实根， $\Delta = (2X)^2 - 4Y \geq 0$ ，即  $X^2 - Y \geq 0$ ，

$$Y \leq X^2, \text{ 故 } P(t \text{ 有实根}) = P\{Y \leq X^2\} = \iint_{y \leq x^2} f(x, y) dy dx = \int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} dy dx = \int_0^1 (-e^{-\frac{y}{2}}) \Big|_0^{x^2} dx$$

$$= \int_0^1 (1 - \frac{x^2}{2}) dx = 1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} dx = 1 - \sqrt{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= 1 - \sqrt{2\pi} \left[ \int_{-\infty}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right]$$

$$= 1 - \sqrt{2\pi} [\Phi(1) - \Phi(0)] \approx 1 - \sqrt{2\pi} [0.8413 - 0.5] \approx 1 - 0.8555 = 0.1445.$$

$$17、(1) \text{ 因为 } X, Y \text{ 独立, 所以 } f(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \lambda\mu e^{-(\lambda x + \mu y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$(2) \text{ 根据 } Z \text{ 的定义, 有 } P\{z=1\} = P\{Y \geq X\} = \iint_{y \geq x} f(x, y) dy dx = \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} \lambda\mu e^{-(\lambda x + \mu y)} dy dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \left( \int_x^{+\infty} \mu e^{-\mu y} dy \right) dx = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} \cdot e^{-\mu x} dx = \lambda / (\lambda + \mu),$$

$P\{Z=0\} = 1 - P\{Z=1\} = \mu / (\lambda + \mu)$ . 所以  $Z$  的分布律为

$Z$	0	1
$p$	$\mu / (\lambda + \mu)$	$\lambda / (\lambda + \mu)$

$$Z \text{ 的分布函数为 } F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{\mu}{\lambda + \mu}, & 0 \leq z < 1, \\ 1, & z \geq 1. \end{cases}$$

18、 $\because X, Y$  分别仅取 0, 1 两个数值,  $\therefore Z$  亦只取 0, 1 两个数值. 又  $\because X$  与  $Y$  相互独立,



$$\therefore P\{Z=0\}=P\{\max(X,Y)=0\}=P(X=0,Y=0)=P\{X=0\}P\{Y=0\}=1/2 \times 1/2=1/4,$$

故  $P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=1-1/4=3/4$ .

19、X由  $2 \times 2$  阶行列式表示，仍是一随机变量，且  $X=X_1X_4-X_2X_3$ ，根据  $X_1, X_2, X_3, X_4$  的地位是等价且相互独立的， $X_1X_4$ 与 $X_2X_3$ 也是独立同分布的，因此可先求出 $X_1X_4$ 和 $X_2X_3$ 的分布律，再求X的分布律。记  $Y_1=X_1X_4, Y_2=X_2X_3$ ，则  $X=Y_1-Y_2$ 。随机变量  $Y_1$ 和 $Y_2$ 独立同分布：

$$P\{Y_1=1\}=P\{Y_2=1\}=P\{X_2=1, X_3=1\}=0.16 \quad P\{Y_1=0\}=P\{Y_2=0\}=1-0.16=0.84.$$

显见，随机变量  $X=Y_1-Y_2$  有三个可能值  $-1, 0, 1$ 。易见  $P\{X=-1\}=P\{Y_1=0, Y_2=1\}=0.84 \times 0.16=0.1344$ ， $P\{X=1\}=P\{Y_1=1, Y_2=0\}=0.16 \times 0.84=0.1344$ ， $P\{X=0\}=1-2 \times 0.1344=0.7312$ 。

$$\text{于是，行列式的概率分布为 } X = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.1344 & 0.7312 & 0.1344 \end{bmatrix}$$

20、因为  $\{Z=i\}=\{X+Y=i\}=\{X=0, Y=i\} \cup \{X=1, Y=i-1\} \cup \cdots \cup \{X=i, Y=0\}$ 。由于上述各事件互不相容，且注意到  $X$  与  $Y$  相与独立，则有

$$\begin{aligned} P\{Z=i\} &= \sum_{k=0}^i P\{X=k, Y=i-k\} = \sum_{k=0}^i P\{X=k\}P\{Y=i-k\} \\ &= \sum_{k=0}^i C_{n_1}^k p^k (1-p)^{n_1-k} C_{n_2}^{i-k} p^{i-k} (1-p)^{n_2-i+k} = P^i (1-p)^{n_1+n_2-i} \sum_{k=0}^i C_{n_1}^k C_{n_2}^{i-k} \\ &= C_{n_1+n_2}^i p^i (1-p)^{n_1+n_2-i}, i=0, 1, \cdots, n_1+n_2, \quad \text{故 } Z=X+Y \sim B(n_1+n_2, p). \end{aligned}$$

注：在上述计算过程中，已约定：当  $r>n$  时， $C_n^r=0$ ，并用到了公式  $\sum_{k=1}^i C_{n_1}^k C_{n_2}^{i-k} = C_{n_1+n_2}^i$ 。

21、X 和 Y 的概率分布密度为  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(x-y)^2}{2\sigma^2}\}$ ,  $(-\infty < x < +\infty)$ ;

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1/(2\pi), & -\pi \leq y \leq \pi, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad \text{因 } X \text{ 和 } Y \text{ 独立, 考虑到 } f_Y(y) \text{ 仅在 } [-\pi, \pi] \text{ 上才有非零值, 故由卷积公式知 } Z \text{ 的概率密度为}$$

上才有非零值，故由卷积公式知 Z 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy.$$

$$\text{令 } t = \frac{z-y-\mu}{\sigma}, \text{ 则上式右端等于 } \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2\pi} \left[ \Phi\left(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right) \right].$$

22、(1) 由题设知  $F_M(y) = P(M \leq y) = P\{\max(X_1, \cdots, X_n) \leq y\} = P(X_1 \leq y, \cdots, X_n \leq y)$   
 $= P(X_1 \leq y)P(X_2 \leq y) \cdots P(X_n \leq y) = F_{X_1}(y) \cdots F_{X_n}(y).$

$\because X_1, \cdots, X_n$  独立且同分布:  $X_i \sim U[0, \theta]$  ( $1 \leq i \leq n$ ),

$$\therefore F_{X_i}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{\theta}, & 0 < x < \theta, \\ 1, & x > \theta, \end{cases} \therefore F_M(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0, \\ \frac{y^n}{\theta^n}, & 0 < y < \theta, \\ 1, & y \geq \theta. \end{cases} \quad \text{故 } f_M(y) = \begin{cases} \frac{ny^{n-1}}{\theta^n}, & 0 < y < \theta, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad F_N(y) &= P(N \leq y) = 1 - P(N > y) = 1 - P\{\min(X_1, \cdots, X_n) > y\} \\ &= 1 - P(X_1 > y, X_2 > y, \cdots, X_n > y) = 1 - P(X_1 > y)P(X_2 > y) \cdots P(X_n > y) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > y) = 1 - [1 - F_{X_i}(y)] \end{aligned}$$

$$\text{故 } f_N(y) = \begin{cases} -n(1-\frac{y}{\theta})^{n-1}(-\frac{1}{\theta}), & 0 < y < \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases} = \begin{cases} \frac{n(\theta-y)^{n-1}}{\theta^n}, & 0 < y < \theta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

23、由题设容易得出随机变量 (X, Y) 的概率密度，本题相当于求随机变量 X、Y 的函数

$S=XY$  的概率密度, 可用分布函数微分法求之.

依题设, 知二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为  $f(x, y) = \begin{cases} 1/2 & \text{若 } (x, y) \in G \\ 0, & \text{若 } (x, y) \notin G \end{cases}$

设  $F(s) = P\{S \leq s\}$  为  $S$  的分布函数, 则 当  $s \leq 0$  时,  $F(s) = 0$ ; 当  $s \geq 2$  时,  $F(s) = 1$ .  
现设  $0 < s < 2$ . 曲线  $xy = s$  与矩形  $G$  的上边交于点  $(s, 1)$ ; 位于曲线  $xy = s$  上方的点满足  $xy > s$ , 位于下方的点满足  $xy < s$ . 故

$$F(s) = P\{S \leq s\} = P\{XY \leq s\} = 1 - P\{XY > s\} = 1 - \iint_{xy > s} \frac{1}{2} dx dy = 1 - \frac{1}{2} \int_s^2 dx \int_{\frac{s}{x}}^1 dy = \frac{s}{2} (1 + \ln 2 - \ln s).$$

$$\text{于是, } f(s) = \begin{cases} (\ln 2 - \ln s)/2, & \text{若 } 0 < s < 2, \\ 0, & \text{若 } s \leq 0 \text{ 或 } s \geq 2. \end{cases}$$

## (二)、补充题答案

1. 由于  $X = \max\{\xi, \eta\}$ ,  $Y = \min\{\xi, \eta\}$ , 故知  $P(X < Y) = 0$ , 即

$$P\{X = 1, Y = 2\} = P\{X = 1, Y = 3\} = P\{X = 2, Y = 3\} = 0; \text{ 又易知}$$

$$P\{X = 1, Y = 1\} = P\{\xi = 1, \eta = 1\} = P\{\xi = 1\} \cdot P\{\eta = 1\} = 1/9,$$

$$P\{X = 2, Y = 2\} = P\{\xi = 2, \eta = 2\} = 1/9, \quad P\{X = 3, Y = 3\} = P\{\xi = 3, \eta = 3\} = 1/9,$$

$$P\{X = 2, Y = 1\} = P\{\xi = 1, \eta = 2\} + P\{\xi = 2, \eta = 1\} = 1/9 + 1/9 = 2/9,$$

$$P\{X = 3, Y = 2\} = P\{\xi = 2, \eta = 3\} + P\{\xi = 3, \eta = 2\} = 2/9, \quad P\{X = 3, Y = 1\} = 1 - 7/9 = 2/9.$$

所以

$Y \backslash X$	1	2	3
1	1/9	2/9	2/9
2	0	1/9	2/9
3	0	0	1/9

$$2. (1) P\{Y = m | X = n\} = C_n^m P^m (1-P)^{n-m}, \quad 0 \leq m \leq n, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(2) P\{X = n, Y = m\} = P\{Y = m | X = n\} P\{X = n\} \\ = C_n^m P^m (1-P)^{n-m} \cdot e^{-\lambda} \cdot \lambda^n / n!, \quad 0 \leq m \leq n, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$3. P(Z = 1) = P(X = 0)P(Y = 0) + P(X = 1)P(Y = 1) = (1-p)^2 + p^2$$

$$P(Z = 0) = P(X = 0)P(Y = 1) + P(X = 1)P(Y = 0) = 2p(1-p)$$

而  $P(X = 1, Z = 1) = P(X = 1, Y = 1) = p^2$ , 由  $P(X = 1, Z = 1) = P(X = 1)P(Z = 1)$ , 得  $p = 1/2$ .

5.: 设随机变量  $\xi$  和  $\eta$  相互独立, 都服从  $N(0, 1)$  分布.

布. 则  $p(x, y) = \frac{1}{2\pi} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right\}$ . 显然,

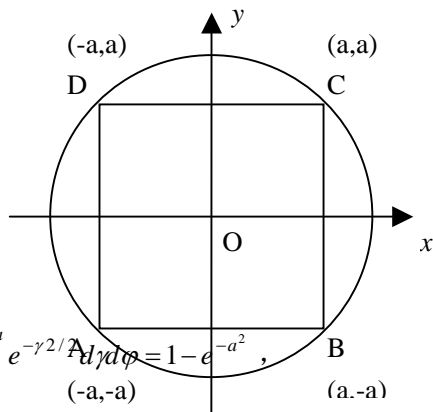
$$\iint_G p(x, y) dx dy < \iint_S p(x, y) dx dy,$$

其中,  $G$  和  $S$  分别是如图所示的矩形  $ABCD$  和圆.

$$\iint_G p(x, y) dx dy = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-x^2/2} dx\right)^2,$$

$$\text{令 } x = \gamma \cos \varphi, y = \gamma \sin \varphi, \text{ 则 } \iint_S p(x, y) dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_a^{\sqrt{2}a} e^{-\gamma^2/2} \gamma d\gamma d\varphi = 1 - e^{-a^2},$$

$$\text{所以 } \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-x^2/2} dx < \sqrt{1 - e^{-a^2}}.$$



6. 设这类电子管的寿命为  $\xi$ , 则  $P(\xi > 150) = \int_{150}^{+\infty} 100/(x^2) dx = 2/3$ . (1) 三个管子均不要替换

的概率为  $(2/3)^3 = 8/27$ ; (2) 三个管子均要替换的概率为  $(1 - 2/3)^3 = 1/27$ .

7. 假设总体  $X$  的密度函数为  $f(x)$ , 分布函数为  $F(x)$ , 第  $i$  次的观察值为  $X_i (1 \leq i \leq n)$ ,  $X_i$  独立同分布, 其联合密度函数  $f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1)f(x_2) \cdots f(x_n)$ . 依题意, 所求的概率为

$$\begin{aligned} P\{X_n > X_1, X_n > X_2, \dots, X_n > X_{n-1}\} &= \int \cdots \int_{\substack{x_i < x_n \\ i=1, 2, \dots, n-1}} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_n) dx_n \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{x_n} f(x_2) dx_2 \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_{n-1}) dx_{n-1} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F^{n-1}(x_n) f(x_n) dx_n = \int_{-\infty}^{+\infty} F^{n-1}(x_n) dF(x_n) = \frac{1}{n} F^n(x_n) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

$$8. P(\xi_1 = k | \xi_1 + \xi_2 = n) = \frac{P(\xi_1 = k, \xi_1 + \xi_2 = n)}{P(\xi_1 + \xi_2 = n)} = \frac{P(\xi_1 = k)P(\xi_2 = n - k)}{P(\xi_1 + \xi_2 = n)}.$$

由普哇松分布的可加性, 知  $\xi_1 + \xi_2$  服从参数为  $\lambda_1 + \lambda_2$  的普哇松分布, 所以

$$P(\xi_1 = k | \xi_1 + \xi_2 = n) = \frac{\frac{\lambda_1^k}{k!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda_2}}{\frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}} = \binom{n}{k} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left( 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-k}.$$

9. 当  $z \leq 0$ ,  $F_z(z) = P(Z \leq z) = 0$ , 当  $z > 0$ ,

$$F_z(z) = P(Z \leq z) = \int_0^z dx \int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-(x+2y)} dy = \int_0^z e^{-x} dx \int_0^{\frac{z-x}{2}} 2e^{-2y} dy = 1 - e^{-z} - ze^{-z},$$

所以  $z = X + 2Y$  的分布函数为  $F(x, y) = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ 1 - (1 + z)e^{-z}, & z > 0. \end{cases}$

10. 由条件知  $X$  和  $Y$  的联合密度为

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{若 } 1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

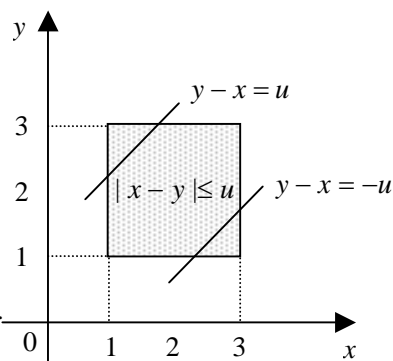
以  $F(u) = P\{U \leq u\} (-\infty < u < \infty)$  表示随机

变量  $U$  的分布函数. 显然, 当  $u \leq 0$  时,

$F(u) = 0$ ; 当  $u \geq 2$  时,  $F(u) = 1$ ;

当  $0 < u < 2$  时, 则

$$F(u) = \iint_{|x-y| \leq u} p(x, y) dx dy = \iint_{|x-y| \leq u} \frac{1}{4} dx dy = \frac{1}{4} [4 - (2-u)^2] = 1 - \frac{1}{4} (2-u)^2.$$



于是, 随机变量的密度为  $p(u) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-u), & 0 < u < 2; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ .

11. 记  $X_1, X_2, X_3$  为这 3 个元件无故障工作的时间, 则  $T = \min(X_1, X_2, X_3)$  的分布函数

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P\{\min(X_1, X_2, X_3) > t\} = 1 - [P(X_1 > t)]^3 = 1 - [1 - P(X_1 \leq t)]^3.$$

$$\therefore X_i \sim F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_i t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases} \quad (i=1, 2, 3) \therefore F_T(t) = \begin{cases} 1 - e^{-3\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

$$\text{故 } f_T(t) = F'_T(t) = \begin{cases} 3\lambda e^{-3\lambda t}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

## 第四章 随机变量的数字特征

## (一)、基本解答

1.  $\because EX = 0 \times 0.4 + 1 \times 0.3 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0.1 = 1$ ,  $EY = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.5 + 2 \times 0.2 + 3 \times 0 = 0.9$ ,

$\therefore EX > EY$ , 即甲比乙车床在一天内生产的次品多, 故乙机床生产的零件质量较好.

2. 若记  $u_n$  为完成每次检验所发现的次品数. 显然  $u_n \sim B(10, 0.1)$ , 即  $u_n$  服从  $n=10$ ,  $p=0.1$  的二项分布:  $P\{u_n = k\} = C_{10}^k 0.1^k 0.9^{10-k}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots, 10$ .

$$P\{u_n \leq 1\} = P\{u_n = 0\} + P\{u_n = 1\} = 0.9^{10} + 10 \times 0.1 \times 0.9^9 \approx 0.7361.$$

$$P\{u_n > 1\} = 1 - P\{u_n \leq 1\} = 0.2639.$$

$X$  为调整设备的次数, 即  $\{u_n > 1\}$  出现的次数, 显然  $X$  服从  $n=4$ ,  $p=0.2639$  的二项分布, 即  $X \sim B(4, 0.2639)$ . 因此  $E(X) = np = 4 \times 0.2639 = 1.0556 \approx 1.1$ .

3. 把  $X$  的分布律写成更明显的关系为

$i$	1	2	3	4	5	...
$X$	3	$-\frac{3^2}{2}$	$\frac{3^3}{2}$	$-\frac{3^4}{4}$	$\frac{3^5}{5}$	...
$P_i$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3^2}$	$\frac{2}{3^3}$	$\frac{2}{3^4}$	$\frac{2}{3^5}$	...

$$\text{这里 } \sum_{i=1}^{\infty} p_i = \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \dots = \frac{2}{3} (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots) = 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i &= 3 \times \frac{2}{3} - \frac{3^2}{2} \times \frac{2}{3^2} + \frac{3^3}{3} \times \frac{2}{3^3} - \frac{3^4}{4} \times \frac{2}{3^4} + \frac{3^5}{5} \times \frac{2}{3^5} - \dots = 2 - \frac{2}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{4} + \frac{2}{5} - \dots \\ &= 2(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots). \end{aligned}$$

显然此级数不是绝对收敛的 (是条件收敛级数), 所以  $E(X)$  不存在.

$$4. \because f(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(\lambda + x^2)}, \therefore \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(\lambda + x^2)} dx = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi} \left( \int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{(\lambda + x^2)} + \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(\lambda + x^2)} \right)$$

$$\text{而 } \int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{\lambda + x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{1}{2} \frac{d(\lambda + x^2)}{\lambda + x^2} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[ -\frac{1}{2} \ln(\lambda + ax^2) \right] = -\infty,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\lambda + x^2} = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{d(\lambda + x^2)}{\lambda + x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \Big|_0^b = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(\lambda + b^2) = +\infty,$$

因此, 广义积分  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\lambda} x dx}{\pi(\lambda + x^2)}$  发散, 当然不可能绝对收敛了, 所以  $E(X)$  不存在.

$$\begin{aligned} 5. (1) EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 x(2-x) dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 + \left( x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{3} + \left[ \left( 4 - \frac{8}{3} \right) - \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1. \end{aligned}$$

$$(2) EX = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_{-1}^1 \frac{xdx}{\pi\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad (\text{奇函数}).$$

$$\begin{aligned} (3) EX &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_0^{1500} \frac{x^2}{1500^2} dx + \int_{1500}^{3000} \frac{x}{1500^2} (3000-x) dx \\ &= \frac{1}{1500^2} \left[ \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{1500} + \left( 1500x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{1500}^{3000} \right] = 1500. \end{aligned}$$

6. (1)  $\because E(2X^2) = 2EX^2$ , 又  $\because EX^2 = DX + (EX)^2$ ,  $\therefore E(2X^2) = 2(DX + (EX)^2)$ ;

再  $\because X \sim E(1)$ ,  $\therefore EX = 1, DX = 1$ ,  $\therefore E(2X^2) = 2(1 + 1^2) = 4$ .

$$(2) E(e^{-2X}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} f(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-2x} \cdot e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} e^{-3x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{3}.$$

7. (1) 由条件知,  $X$  的可能值为 0, 1, 2, 3, 以  $A_i (i=1,2,3)$  表示事件“汽车在第  $i$  个路口首次遇到红灯”;  $A_1, A_2, A_3$  相互独立, 且  $P(A_i) = P(\bar{A}_i) = 1/2, i=1,2,3$ . 从而知

$$P\{X=0\} = P(A_1) = \frac{1}{2}; P\{X=1\} = P(\bar{A}_1 A_2) = \frac{1}{2^2}; P\{X=2\} = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = \frac{1}{2^3};$$

$$P\{X=3\} = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = \frac{1}{2^3}; \text{故 } E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{67}{96}.$$

8. (1) 设  $p = P(A)$ . 由  $X$  与  $Y$  同分布, 可知

$$P(\bar{B}) = P\{Y \leq a\} = P\{X \leq a\} = P(A) = p, P(B) = 1 - p.$$

由  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = p + (1-p) - p(1-p) = p^2 - p + 1 = \frac{7}{9}$ , 得  $p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{2}{3}$ . 于是  $a$  有两个值:

$$\text{由 } \frac{a-1}{2} = p_1, \text{ 得 } a_1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}; \text{ 由 } \frac{a-1}{2} = p_2, \text{ 得 } a_2 = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3}.$$

$$(2) E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} p(x) dx = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} \ln 3.$$

9. 发生故障次数服从二项分布, 本题关键是列出所获利润与发生故障次数的函数关系. 以  $X$  表示一周 5 天内机器发生故障的天数, 则  $X$  服从参数为 (5, 0.2) 的二项分布

$$P\{X=k\} = C_5^k 0.2^k \cdot 0.8^{5-k} (k=0,1,2,3,4,5); P\{X=0\} = 0.8^5 = 0.328,$$

$$P\{X=1\} = C_5^1 0.2 \cdot 0.8^4 = 0.410, P\{X=2\} = C_5^2 0.2^2 \cdot 0.8^3 = 0.205,$$

$$P\{X \geq 3\} = 1 - P\{X=0\} - P\{X=1\} - P\{X=2\} = 0.057.$$

若以  $Y$  表示所获利润, 则

$$Y = f(X) = \begin{cases} 10 & X=0 \\ 5 & X=1 \\ 0 & X=2 \\ -2 & X \geq 3, \end{cases} \quad \text{故 } EY = 10 \times 0.328 + 5 \times 0.410 + 0 \times 0.205 - 2 \times 0.057 = 5.216 (\text{万元}).$$

10. 已知  $X$  在  $[0,60]$  上服从均匀分布, 其密度为  $X \sim f(x) = \begin{cases} 1/60 & 0 \leq x \leq 60 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

$$\text{设 } Y \text{ 是游客等候电梯的时间 (单位: min), 则 } Y = g(X) = \begin{cases} 5-X & 0 < X \leq 5 \\ 25-X & 5 < X \leq 25 \\ 55-X & 25 < X \leq 55 \\ 60-X+5 & 55 < X \leq 60, \end{cases}$$

$$\text{因此 } EY = Eg(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x) dx = \frac{1}{60} \int_0^{60} g(x) dx$$

$$= \frac{1}{60} \left[ \int_0^5 (5-x) dx + \int_5^{25} (25-x) dx + \int_{25}^{55} (55-x) dx + \int_{55}^{60} (65-x) dx \right] = 11.67.$$

11.  $X, Y$  相互独立且都服从  $[10,20]$  上的均匀分布, 由此可写出  $(X, Y)$  的联合概率密度, 另外, 由题设可列出所得利润与需求量和进货量之间的关系, 最后由多元化随机变量函数均值定义可求得期望利润.

$$\text{设 } Z \text{ 表示商店每周所得的利润, 则 } Z = \begin{cases} 1000Y & Y \leq X, \\ 1000X + 500(Y-X) = 500(X+Y), & Y > X. \end{cases}$$

由于  $X$  与  $Y$  的联合概率密度为  $\varphi(x, y) = \begin{cases} 1/100, & 10 \leq x \leq 20, 10 \leq y \leq 20, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{所以 } EZ &= \iint_{D_1} 1000y \times \frac{1}{100} dx dy + \iint_{D_2} 500(x+y) \times \frac{1}{100} dx dy = 10 \int_{10}^{20} dy \int_y^{20} y dx + 5 \int_{10}^{20} dy \int_{10}^y (x+y) dx \\ &= 10 \int_{10}^{20} y(20-y) dy + 5 \int_{10}^{20} \left( \frac{3}{2} y^2 - 10y - 50 \right) dy = \frac{20000}{3} + 5 \times 1500 \approx 14166.67 (\text{元}). \end{aligned}$$

12. 本题关键是正确列出供大于求和供不应求时利润与进货量的关系, 然后利用期望利润不少于 9280 建立一不等式解出进货量  $a$  的值.

设进货数量为  $a$ , 则利润为

$$M_a = \begin{cases} 500a + (X-a)300 & a < X \leq 30 \\ 500X - (a-X)100 & 10 \leq X \leq a \end{cases} = \begin{cases} 300X + 200a & a < X \leq 30, \\ 600X - 100a & 10 \leq X \leq a, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{期望利润 } EM_a &= \int_{10}^{30} \frac{1}{20} \cdot M_a dx = \frac{1}{20} \int_{10}^a (600x - 100a) dx + \frac{1}{20} \int_a^{30} (300x + 200a) dx \\ &= \frac{1}{20} \left( 600 \cdot \frac{x^2}{2} - 100ax \right) \Big|_{10}^a + \frac{1}{20} \left( 300 \cdot \frac{x^2}{2} + 200ax \right) \Big|_a^{30} = -7.5a^2 + 350a + 5250. \end{aligned}$$

依题意, 有  $-7.5a^2 + 350a + 5250 \geq 9280$  即  $7.5a^2 - 350a + 4030 \leq 0$ , 解得  $20\frac{2}{3} \leq a \leq 26$ ,

故利润期望值不少于 9280 元的最少进货量为 21 单位.

13. 方法一 设  $A_i = \{\text{部件 } i \text{ 需要调整}\} (i=1,2,3)$ .  $P(A_1)=0.1, P(A_2)=0.2, P(A_3)=0.3$ .

易见,  $X$  有四个可能值 0,1,2,3. 由于  $A_1, A_2, A_3$  独立, 因此

$$\begin{aligned} P\{X=0\} &= P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = 0.9 \times 0.8 \times 0.7 = 0.504, \\ P\{X=1\} &= P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) \\ &= 0.1 \times 0.8 \times 0.7 + 0.9 \times 0.2 \times 0.7 + 0.9 \times 0.8 \times 0.3 = 0.398, \\ P\{X=2\} &= P(A_1 A_2 \bar{A}_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(\bar{A}_1 A_2 A_3) \\ &= 0.1 \times 0.2 \times 0.7 + 0.1 \times 0.8 \times 0.3 + 0.9 \times 0.2 \times 0.3 = 0.092, \\ P\{X=3\} &= P(A_1 A_2 A_3) = 0.1 \times 0.2 \times 0.3 = 0.006. \end{aligned}$$

$$\text{于是 } X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.504 & 0.398 & 0.092 & 0.006 \end{pmatrix}. EX = 1 \times 0.398 + 2 \times 0.092 + 3 \times 0.006 = 0.6,$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 1 \times 0.398 + 4 \times 0.092 + 9 \times 0.006 - (0.6)^2 = 0.46.$$

方法二 考虑随机变量  $X_i = \begin{cases} 1 & \text{当 } A_i \text{ 出现} \\ 0 & \text{若 } A_i \text{ 不出现} \end{cases} (i=1,2,3).$

易见  $EX_i = P(A_i), DX_i = P(A_i)[1 - P(A_i)]$ . 设  $X = X_1 + X_2 + X_3$ , 因此, 由于  $X_1, X_2, X_3$  独立, 可见  $EX = 0.1 + 0.2 + 0.3 = 0.6, DX = 0.1 \times 0.9 + 0.2 \times 0.8 + 0.3 \times 0.7 = 0.46$ .

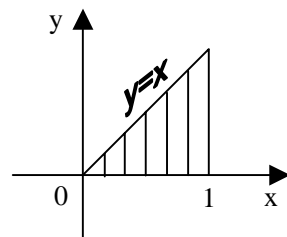
14. 注意到仅在三角形区域  $0 \leq y \leq x \leq 1$  上  $f(x, y)$  取非零值 (见图), 分别可得到

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx dy = 12 \int_0^1 dx \int_0^x xy^2 dy = \frac{4}{5},$$

$$EY = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y) dy = 12 \int_0^1 dx \int_0^x y^3 dy = \frac{3}{5},$$

$$E(X^2 + Y^2) = 12 \int_0^1 dx \int_0^x (x^2 + y^2) y^2 dy = \frac{16}{15}.$$

$$E(XY) = 12 \int_0^1 dx \int_0^x xy^3 dy = \frac{1}{2},$$



$$15. E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx \quad (r=1,2) \quad (1) \quad E(X) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \frac{2}{\pi} \cos^2 x dx = 0;$$

$$\begin{aligned}
\because E(X^2) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \frac{2}{\pi} \cos^2 x dx = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2}{2} (1 + \cos 2x) dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) dx \right) = \frac{2}{\pi} \left( \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 d \sin(2x) \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left( \frac{\pi^3}{24} + \frac{1}{2} x^2 \sin(2x) \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \sin 2x dx = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x d \cos(2x) \\
&= \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{\pi} x \cos(2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\pi} \sin(2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}, \\
\therefore D(X) &= E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad E(X) &= \int_0^{+\infty} x \cdot \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d \frac{x^2}{2\sigma^2} = x(-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= 0 + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{2} \sqrt{2\pi} \sigma \cdot 1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sigma. \\
\because E(X^2) &= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} d \left( \frac{x^2}{2\sigma^2} \right) = \int_0^{+\infty} 2\sigma^2 t e^{-t} dt \quad (\text{记 } t = \frac{x^2}{2\sigma^2}) \\
&= 2\sigma^2 \left[ (-te^{-t}) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \right] = 2\sigma^2, \\
\therefore D(X) &= E(X^2) - E^2(X) = 2\sigma^2 - \frac{\pi}{2} \sigma^2 = (2 - \frac{\pi}{2}) \sigma^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad EX &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-\beta x} dx = \frac{\beta^\alpha}{(\beta^\alpha \cdot \beta) \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} (\beta x)^\alpha e^{-\beta x} d(\beta x) \\
&= \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt = \frac{1}{\beta \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha \Gamma(\alpha)}{\beta \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\beta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{因 } EX^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_0^{+\infty} x^2 \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = \frac{\beta^\alpha}{\beta^{\alpha+1} \beta \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} (\beta x)^{\alpha+1} e^{-\beta x} d(\beta x) \\
&= \frac{1}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+2) = \frac{(\alpha+1) \Gamma(\alpha+1)}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} = \frac{(\alpha+1) \alpha \Gamma(\alpha)}{\beta^2 \Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2},
\end{aligned}$$

$$\text{故 } DX = EX^2 - (EX)^2 = \alpha(\alpha+1) \beta^2 - \alpha^2 / \beta^2 = \alpha / \beta^2.$$

16. 记  $q=1-p$ ,  $X$  的概率分布为  $P\{X=i\}=q^{i-1}p$ ,  $i=1,2,\dots$ .

$$X \text{ 的数学期望为 } E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} i q^{i-1} p = p \sum_{i=1}^{\infty} (q^i)' = p \left( \sum_{i=1}^{\infty} q^i \right)' = p \left( \frac{q}{1-q} \right)' = \frac{1}{p}.$$

$$\text{因为 } E(X^2) = \sum_{i=1}^{\infty} i^2 q^{i-1} p = p \left[ q \left( \sum_{i=1}^{\infty} (q^i)' \right)' \right] = p \left[ \frac{q}{(1-q)^2} \right]' = \frac{2-p}{p^2},$$

$$\text{所以 } X \text{ 的方差为 } D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

17. 解法1 先求分布律, 再求期望  $E(X)$ .

设  $A_i (i=1,2,3,\dots,n)$  表示第  $i$  次取到的钥匙能打开锁,  $X$  为直到打开锁时的试开次数, 则

$$P\{X=k\}=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{i-1})=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)\cdots P(A_k|\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{k-1})$$

$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-k+1}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1}=1/n.$$

$$\text{故 } E(X)=\sum_{k=1}^n kP\{X=k\}=\sum_{k=1}^n k\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n k=\frac{1}{n}(1+2+\cdots+n)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

解法2 不求分布律, 引进新的随机变量, 利用期望的运算性质求  $E(X)$ .

引进新随机变量  $X_i$ , 定义如下:  $X_i=\begin{cases} 1, & \text{前}(i-1)\text{次中没有能打开锁的,} \\ 0, & \text{与上相反.} \end{cases}$

显然有  $X_1=1, X_i$  服从  $(0-1)$  分布,  $i=2,3,\cdots,n$ .  $X$  为直到打开锁时的试开次数.

$$\text{设 } X=X_1+\sum_{i=2}^n X_i, \text{ 则 } E(X)=E(X_1)+\sum_{i=2}^n E(X_i)=1+\sum_{i=2}^n E(X_i), E(X_i)=P\{X_i=1\}, (i=2,3,\cdots).$$

仍设  $A_i$  为第  $i$  次取到的钥匙能打开锁, 则

$$P\{X_i=1\}=P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{i-1})=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)\cdots P(A_{i-1}|\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_{i-2})=\frac{n-i+1}{n},$$

$$\text{故 } E(X)=1+\sum_{i=2}^n P\{X_i=1\}=1+\sum_{i=2}^n \frac{n-i+1}{n}=1+(\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\cdots+\frac{1}{n})=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}.$$

$$18. 1. EZ=EX-2EY+7=-3-2\times 2+7=0$$

2. 因为  $X, Y$  相互独立, 所以  $DZ=D(X-2Y+7)=DX+4DY=1+4\times 1=5$ .

$$19. (X, Y) \text{ 的联合概率密度函数是 } f(x, y)=\begin{cases} 1, & 0 < x < 1, |y| < x, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因此, 关于  $X$  的边缘概率密度函数是  $f_x(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy=\begin{cases} 2x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

$$D(Z)=D(2X+1)=4[E(X^2)-(E(X))^2]=4\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx - (\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx)^2\right]$$

$$=4\left[\int_0^1 2x^3 dx - (\int_0^1 2x^2 dx)^2\right]=4(\frac{1}{2}-\frac{4}{9})=\frac{2}{9}.$$

20. 因已知方差  $DX=2$ , 所以, 根据切比雪夫不等式, 有

$$P\{|X-EX|\geq 2\}\leq \frac{DX}{2^2}=\frac{1}{2}.$$

$$21. \because E(X+Y)=EX+EY=-2+2=0,$$

$$\therefore P\{|X+Y|\geq 6\}=P\{|(X+Y)-E(X+Y)|\geq 6\}\leq D(X+Y)/6^2;$$

$$\text{又 } \because D(X+Y)=DX+DY+2\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}\cdot\rho_{XY}=1+4+2\times 1\times 2\times (-0.5)=3,$$

$$\therefore P\{|X+Y|\geq 6\}\leq 3/6^2=1/12.$$

$$22. \text{直接由 } f(x, y) \text{ 求各量的值. } E(X)=\int_0^2\int_0^2 x\cdot\frac{1}{8}(x+y)dydx=\frac{6}{7},$$

$$E(Y)=\int_0^2\int_0^2 y\cdot\frac{1}{8}(x+y)dydx=\frac{6}{7}, \quad E(XY)=\int_0^2\int_0^2 xy\cdot\frac{1}{8}(x+y)dydx=\frac{4}{3},$$

$$\therefore Cov(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}=-\frac{1}{36},$$

$$\text{又 } E(X^2)=\int_0^2\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dydx=\frac{5}{3}, \quad E(Y^2)=E(X^2)=\frac{5}{3},$$

$$\therefore D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{5}{3}-\left(\frac{7}{6}\right)^2=\frac{11}{36}, \quad D(Y)=D(X)=\frac{11}{36},$$



$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}} = \left(-\frac{1}{36}\right) / \left(\frac{1}{36}\right) = -\frac{1}{11}.$$

$$23. \because (X, Y) \sim p(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi r^2}, & x^2 + y^2 \leq r^2, \\ 0, & x^2 + y^2 > r^2, \end{cases} \therefore X \text{ 和 } Y \text{ 的密度 } p_1(x) \text{ 和 } p_2(y) \text{ 为}$$

$$p_1(x) = \frac{2}{\pi r^2} \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy = \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2-x^2} \quad (|x| \leq r); \quad p_2(y) = \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2-y^2} \quad (|y| \leq r).$$

$$E(X) = \frac{2}{\pi r^2} \int_{-r}^r x \sqrt{r^2-x^2} dx = 0; \quad E(Y) = \frac{2}{\pi r^2} \int_{-r}^r y \sqrt{r^2-y^2} dy = 0.$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) = \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} \frac{xy}{\pi r^2} dxdy = 0. \quad \text{于是, } X \text{ 和 } Y \text{ 的相关系数 } \rho = 0.$$

(2) 由于  $p(x, y) \neq p_1(x)p_2(y)$ , 可见  $X$  和  $Y$  不独立.

24. 记  $P(A)=p_1$ ,  $P(B)=p_2$ ,  $P(AB)=p_{12}$ . 由数学期望的定义, 可见

$$E(X) = P(A) - P(\bar{A}_1) = 2p_1 - 1, \quad E(Y) = 2p_2 - 1.$$

现在求  $E(XY)$ . 由于  $XY$  只有两个可能值 1 和 -1. 易知

$$P\{XY=1\} = P(AB) + P(\bar{A}\bar{B}) = 2p_{12} - p_1 - p_2 + 1,$$

$$P\{XY=-1\} = 1 - P\{XY=1\} = p_1 + p_2 - 2p_{12},$$

$$E(XY) = P\{XY=1\} - P\{XY=-1\} = 4p_{12} - 2p_1 - 2p_2 + 1.$$

从而  $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 4p_{12} - 4p_1p_2$ .

因此,  $\text{Cov}(X, Y) = 0$  当且仅当  $p_{12} = p_1p_2$ , 即  $X$  和  $Y$  不相关当且仅当事件  $A$  和  $B$  相互独立.

25. 本题应特别注意  $X_1$  与  $X_2$  并非独立的. 由于  $X_i (i=1, 2, 3)$  均只取 0 和 1 值, 因此随机变量  $(X_1, X_2)$  取值应为 (0,0)、(0,1)、(1,0) 和 (1,1). 须逐个计算它们的概率. 譬如事件  $\{X_1=0, X_2=0\}$  表示抽取的是一等品;  $\{X_1=1, X_2=1\}$  表示既是一等品又是二等品, 因此是不可能事件等等.

(1) 设事件  $A_i =$  “抽到  $i$  等品” ( $i=1, 2, 3$ ).

由题意知  $A_1, A_2, A_3$  两两互不相容, 且  $P(A_1)=0.8, \quad P(A_2)=P(A_3)=0.1$ .

易知,  $P\{X_1=0, X_2=0\} = P(A_3) = 0.1, \quad P\{X_1=0, X_2=1\} = P(A_2) = 0.1,$

$$P\{X_1=1, X_2=0\} = P(A_1) = 0.8, \quad P\{X_1=1, X_2=1\} = P(\Phi) = 0.$$

(2)  $E(X_1)=0.8, E(X_2)=0.1; D(X_1)=0.8 \times 0.2=0.16, D(X_2)=0.1 \times 0.9=0.09;$

$$E(X_1X_2) = 0 \times 0 \times 0.1 + 0 \times 1 \times 0.1 + 1 \times 0 \times 0.8 + 1 \times 1 \times 0 = 0$$

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1) \cdot E(X_2) = 0 - 0.8 \times 0.1 = -0.08,$$

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{D(X_1) \cdot D(X_2)}} = \frac{-0.08}{\sqrt{0.16 \times 0.09}} = -\frac{2}{3}.$$

26. (1) 由数学期望的运算性质, 知  $E(Z) = \frac{1}{3}E(X) + \frac{1}{2}E(Y) = \frac{1}{3}$

由  $D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$ , 有  $D(Z) = D(\frac{1}{3}X) + D(\frac{1}{2}Y) + 2\text{cov}(\frac{1}{3}X, \frac{1}{2}Y)$

$$= \frac{1}{9}D(X) + \frac{1}{4}D(Y) + 2 \times \frac{1}{6} \times \sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)} \rho_{XY} = 1 + 4 - \frac{1}{6} \times 3 \times 4 = 3.$$

(2) 因为  $\text{Cov}(X, Z) = \frac{1}{3}\text{Cov}(X, X) + \frac{1}{2}\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{3}D(X) + \frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 \cdot 4 = 0,$$

$$\text{所以 } \rho_{XZ} = \frac{\text{Cov}(X, Z)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Z)}} = 0.$$

(3) 由于  $(X, Z)$  不一定服从二维正态分布, 故由  $\rho_{XZ} = 0$  不能确定  $X$  与  $Z$  是否相互独立.

## (二) 补充题答案

1、平均利润就是销售利润  $T$  的数学期望  $E(T)$ , 而  $T$  是离散型随机变量, 取值概率与  $X$  的概率分布有关, 因此用标准正态分布函数  $\Phi(x)$  表示概率  $P\{X < 10\}$ ,  $P\{10 \leq X \leq 12\}$  和  $P\{X > 12\}$  是解决问题的关键, 写出  $E(T)$  后, 使  $\frac{dE(T)}{d\mu} = 0$  的点即为所求的  $\mu$  值.

由条件知, 平均利润为

$$E(T) = 20P\{10 \leq X \leq 12\} - P\{X < 10\} - 5P\{X > 12\} \\ = 20[\Phi(12 - \mu) - \Phi(10 - \mu)] - \Phi(10 - \mu) - 5[1 - \Phi(12 - \mu)] = 25\Phi(12 - \mu) - 21\Phi(10 - \mu) - 5.$$

其中  $\Phi(x)$  是标准正态分布函数. 设  $\phi(x)$  为标准正态密度. 令

$$\frac{dE(T)}{d\mu} = -25\phi(12 - \mu) + 21\phi(10 - \mu) = 0, \text{ 得 } \frac{-25}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}} + \frac{21}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}} = 0,$$

$$\text{即 } 25e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}} = 21e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}. \text{ 由此得 } \mu = \mu_0 = 11 - \frac{1}{2} \ln \frac{25}{21} \approx 10.9.$$

即 当  $\mu = \mu_0 \approx 10.9$  毫米时, 平均利润最大.

$$2、(1) E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = 0, \quad D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2.$$

$$(2) E(X|X|) - E(X) \cdot E(|X|) = E(X|X|) = \int_{-\infty}^{\infty} x|x|f(x)dx = 0, \text{ 故 } X \text{ 与 } |X| \text{ 不相关.}$$

(3) 对给定  $0 < a < +\infty$ , 显然事件  $\{|X| < a\}$  包含在事件  $\{X < a\}$  内, 且  $P\{X < a\} < 1$ ,  $0 < P\{|X| < a\}$ , 故  $P\{X < a, |X| < a\} = P\{|X| < a\}$ , 但  $P\{X < a\} \cdot P\{|X| < a\} < P\{|X| < a\}$ , 所以  $P\{X < a, |X| < a\} \neq P\{X < a\} \cdot P\{|X| < a\}$ , 因此,  $X$  与  $|X|$  不独立.

3、方法一: 由于  $X, Y$  相互独立且服从正态分布, 根据正态分布的性质知, 服从正态分布的随机变量的线性组合也服从正态分布, 令  $Z = X - Y$ , 由于  $X \sim N(0, 1/2), Y \sim N(0, 1/2)$ , 故易知  $EZ = EX - EY = 0, DZ = DX + DY = 1$ , 即  $Z \sim N(0, 1)$ .

$$\text{因为 } D|X - Y| = D|Z| = E|Z|^2 - (E|Z|)^2 = E(Z^2) = E(Z^2) - (E|Z|)^2, \text{ 而 } EZ^2 = DZ + (EZ)^2 = 1, \\ E|Z| = \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} ze^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \text{ 所以 } D|X - Y| = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

方法二:  $X, Y$  的概率密度分别为  $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2}$ , 由于  $X, Y$  相互独立, 故  $X, Y$  的联合概率密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, \text{ 因此} \\ E|X - Y| = \left[ \frac{1}{\pi} \iint_{y < x} (x - y) e^{-(x^2+y^2)} dx dy + \iint_{y > x} (y - x) e^{-(x^2+y^2)} dx dy \right] \\ = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^x (x - y) e^{-(x^2+y^2)} dy + \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^y (y - x) e^{-(x^2+y^2)} dx \right] \\ = \frac{2}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^x (x - y) e^{-(x^2+y^2)} dy \right] \\ = \frac{2}{\pi} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} dx \int_{-\infty}^x e^{-y^2} dy - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^x ye^{-y^2} dy \right] = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x^2} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

4、解法1 三角形区域为  $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \geq 1\}$ ; 随机变量  $X$  和  $Y$  的联合密度

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$$

以  $f_1(x)$  表示  $X$  的概率密度, 则当  $x \leq 0$  或  $x \geq 1$  时,  $f_1(x) = 0$ ; 当  $0 < x < 1$  时, 有

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_{1-x}^1 2 dy = 2x.$$

$$\text{因此 } E(X) = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}; E(X^2) = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}; D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

$$\text{同理可得 } E(Y) = 2/3 \quad D(Y) = 1/18.$$

$$\text{现在求 } X \text{ 和 } Y \text{ 的协方差. } E(XY) = \iint_G 2xy dx dy = 2 \int_0^1 x dx \int_{1-x}^1 y dy = \frac{5}{12}, \quad \text{Cov}(X, Y) = E(XY) -$$

$$E(X) \cdot E(Y) = 5/12 - 4/9 = -1/36. \quad \text{于是 } D(U) = D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{Cov}(X, Y) = 1/18 + 1/18 - 2/36 = 1/18.$$

解法2 三角形区域为  $G = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x+y \geq 1\}$ ; 随机变量  $X$  和  $Y$  的联合密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2, & (x, y) \in G, \\ 0, & (x, y) \notin G. \end{cases}$$

以  $f(u)$  表示  $U=X+Y$  的概率密度, 当  $u < 1$  或  $u > 2$  时, 显然  $f(u) = 0$ .

设  $1 \leq u \leq 2$ , 当  $0 \leq x \leq 1$  且  $0 \leq u-x \leq 1$  时,  $f(x, u-x) = 2$ , 否则  $f(x, u-x) = 0$ . 由随机变量之和的概率密度公式, 有  $f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, u-x) dx = \int_{u-1}^1 2 dx = 2(2-u)$ .

$$\text{因此 } E(X+Y) = EU = \int_{-\infty}^{\infty} uf(u) du = 2 \int_1^2 u(2-u) du = 4/3;$$

$$E(X+Y)^2 = EU^2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 f(u) du = 2 \int_1^2 u^2 (2-u) du = 11/6;$$

$$DU = D(X+Y) = E(X+Y)^2 - [E(X+Y)]^2 = 11/6 - 16/9 = 1/18.$$

5、 $U, V$  为离散型随机变量, 其联合分布  $(U, V)$  只有四个可能:  $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ , 分别求出取这些值的概率即可. 求相关系数  $\rho$ , 应分别计算  $\text{Cov}(U, V)$  及  $DU, DV$ , 然后再用公式

$$\rho = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{DU \cdot DV}}. \text{ 由题设易知 } P\{X \leq Y\} = 1/4, \quad P\{X > 2Y\} = 1/2, \quad P\{X > 2Y\} = 1/2, \text{ 故有}$$

$$(1) \quad P\{U=0, V=0\} = P\{X \leq Y, X \leq 2Y\} = P\{X \leq Y\} = 1/4, \quad P\{U=0, V=1\} = P\{X \leq Y, X > 2Y\} = 0, \\ P\{U=1, V=0\} = P\{X > Y, X \leq 2Y\} = P\{Y < X \leq 2Y\} = 1/4, \quad P\{U=1, V=1\} = 1 - (1/4 + 1/4) = 1/2.$$

(2) 以上可见  $UV$  以及  $U$  和  $V$  分布为

$$UV \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad U \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad V \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

于是, 有  $EU = 3/4, DU = 3/16; EV = 1/2, DV = 1/4; E(UV) = 1/2,$

$$\text{Cov}(U, V) = E(UV) - EU \cdot EV = 1/8, \quad \text{故 } \rho = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{DU \cdot DV}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

6、(1) 由于二维正态密度函数的两个边缘密度都是正态密度函数, 因此  $\varphi_1(x, y)$  和  $\varphi_2(x, y)$  的两个边缘密度为标准正态密度函数, 故

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x, y) dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(x, y) dy \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\text{同理 } f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}. \text{ 由于 } X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1), \text{ 可见 } EX=EY=0, \quad DY=DX=1, \text{ 故}$$

$$\rho = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy = \frac{1}{2} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi_1(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi_2(x, y) dx dy \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = 0.$$

$$(2) \text{由题设, 知 } f(x, y) = \frac{3}{8\pi\sqrt{2}} \left[ e^{-\frac{9}{16}(x^2 - \frac{2}{3}xy + y^2)} + e^{-\frac{9}{16}(x^2 + \frac{2}{3}xy + y^2)} \right],$$

$$\text{而 } f_1(x) \cdot f_2(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2 + y^2}{2}}, \text{ 显见 } f(x, y) \neq f_1(x) \cdot f_2(y),$$

所以  $X$  与  $Y$  不独立.

$$7、\because E(X - Y) = EX - EY = 0, D(X - Y) = DX + DY - 2\text{Cov}(X, Y) = 2(1 - \rho),$$

$$\therefore X - Y \sim N(0, 2(1 - \rho)). \xi = (X - Y) / \sqrt{2(1 - \rho)} \sim N(0, 1),$$

$$\therefore E \left| \frac{X - Y}{\sqrt{2(1 - \rho)}} \right| = E(|\xi|) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$$\text{即有 } E|X - Y| = \sqrt{2(1 - \rho)} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 2\sqrt{\frac{1 - \rho}{\pi}}. \text{ 而 } \max(X, Y) = \frac{1}{2}[X + Y + |X - Y|],$$

$$\text{故 } E \max(X, Y) = \frac{1}{2}[EX + EY + E|X - Y|] = \frac{1}{2}[0 + 0 + 2\sqrt{\frac{1 - \rho}{\pi}}] = \sqrt{\frac{1 - \rho}{\pi}};$$

$$E \min(X, Y) = \frac{1}{2}[EX + EY - E|X - Y|] = \frac{1}{2}[0 + 0 - 2\sqrt{\frac{1 - \rho}{\pi}}] = -\sqrt{\frac{1 - \rho}{\pi}}.$$

$$8、\text{不妨设 } EX_i = 0, i = 1, 2, \dots, n + m. \text{ 则 } EY = EZ = 0, DY = DZ = n \cdot EX_1^2.$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y, Z) &= EY \cdot Z = E[(X_1 + \dots + X_n) \cdot (X_{m+1} + \dots + X_{m+n})] \\ &= E \left[ \sum_{k=m+1}^n X_k^2 + \sum_{\substack{i=1, \dots, n, i \neq j \\ j=m+1, \dots, m+n}} X_i X_j \right] = (n - m) \cdot EX_1^2. \quad \rho_{YZ} = \frac{\text{Cov}(Y, Z)}{\sqrt{DY} \cdot \sqrt{DZ}} = \frac{n - m}{n}. \end{aligned}$$

$$9、DY = D(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n DX_i + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(X_i, X_j) = n + n(n - 1)\rho;$$

$$\text{同理 } DZ = n + n(n - 1)\rho.$$

$$\text{Cov}(Y, Z) = \text{cov}(X_1 + \dots + X_n, X_{n+1}, \dots, X_{2n}) = \sum_{1 \leq i \leq n < j \leq 2n} \text{Cov}(X_j, X_i) = n^2 \cdot \rho$$

$$\rho_{Y,Z} = \frac{\text{Cov}(Y, Z)}{\sqrt{DY} \cdot \sqrt{DZ}} = \frac{n\rho}{1 + (n - 1)\rho}.$$

$$10、\text{设 } X \sim f(x), \text{ 则有}$$

$$P\{|X| > \varepsilon\} = \int_{|x| > \varepsilon} f(x) dx \leq \int_{|x| > \varepsilon} \frac{|x|^r}{\varepsilon^r} f(x) dx \leq \frac{1}{\varepsilon^r} \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^r f(x) dx = \frac{1}{\varepsilon^r} E|x|^r.$$

$$11、\because X \text{ 的概率密度为 } p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-x^2/2\sigma^2) (-\infty < x < +\infty),$$

$$\therefore E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x) dx. \text{ 当 } n \text{ 为奇数时, 可以求得}$$

$$E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n p(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp(-x^2/2\sigma^2) dx = 0; \text{ 当 } n \text{ 为偶数时, 有}$$

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \exp(-x^2/2\sigma^2) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \left( -\sigma^2 x^{n-1} \exp(-x^2/2\sigma^2) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \sigma^2 (n-1) \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-2} \exp(-x^2/2\sigma^2) dx \right) \\ &= \sigma^2 (n-1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{n-2} \exp(-x^2/2\sigma^2) dx = \sigma^2 (n-1) E(X^{n-2}) \quad (n > 2). \end{aligned}$$

这样, 当  $n(>2)$  为偶数时, 有递推式  $E(X^n) = \sigma^2 (n-1) E(X^{n-2})$ ,

$$E(X^{n-2}) = \sigma^2(n-3)E(X^{n-4}), \dots, \quad E(X^4) = \sigma^2(4-1)E(X^2).$$

考虑到  $X \sim N(0, \sigma^2)$ , 故  $E(X) = 0$ , 并且  $E(X^2) = D(X) = \sigma^2$ . 于是, 由以上各式可得  $E(X^4) = \sigma^2(4-1)E(X^2) = \sigma^4 \cdot 3$ ,  $E(X^6) = \sigma^2(X^6)E(X^4) = \sigma^6 \cdot 5 \cdot 3, \dots$ .

一般地, 有  $E(X^n) = \sigma^n(n-1)(n-3) \cdots 5 \cdot 3$ . 若记  $(n-1)(n-3) \cdots 5 \cdot 3 = (n-1)!!$ , 则

$$\text{有 } E(X^n) = \sigma^n(n-1)!! \text{. 两种情况综合, 有 } E(X^n) = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为奇数,} \\ \sigma^n(n-1)!!, & \text{当 } n \text{ 为偶数.} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 12、 E(X^n) &= \int_0^{+\infty} x^n \lambda e^{-\lambda x} dx = - \int_0^{+\infty} x^n de^{-\lambda x} = -e^{-\lambda x} x^n \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} nx^{n-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= -\frac{n}{\lambda} \int_0^{+\infty} x^{n-1} de^{-\lambda x} = \frac{n}{\lambda} x^{n-1} e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + \frac{\lambda}{n} \int_0^{+\infty} (n-1)x^{n-2} e^{-\lambda x} dx = \dots = \frac{-n!}{\lambda^n} e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} = \frac{n!}{\lambda^n} \cdot 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3、 E \sum_{k=1}^Y X_k &= E[E(\sum_{k=1}^Y X_k | Y)] = \sum_{s=1}^{\infty} E(\sum_{k=1}^s X_k) \cdot P(Y=s) = \sum_{s=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^s EX_k) P(Y=s) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} EX_k [\sum_{s=k}^{\infty} P(Y=s)] = \sum_{k=1}^{\infty} EX_k [P(Y \geq k)]. \end{aligned}$$

## 第五章 极限定理（大数定律和中心极限定理）

1、由于  $X_1, X_2 \dots$  两两不相关，则

$$D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n D(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{COV}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n D(X_i)$$

由切比雪夫不等式，有  $\forall \varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right| \geq \varepsilon\right) &\leq \frac{D\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sum_{i=1}^n D(X_i)}{n^2 \varepsilon^2} \\ &\leq \frac{nC}{n^2 \varepsilon^2} = \frac{C}{n \varepsilon^2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

由此立得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i)\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

2、 $\forall \varepsilon > 0$ ，由于  $P\{X_n = \frac{1}{n}\} = 1$ ，从而，当  $n > \frac{1}{\varepsilon}$  时

$$P\{|X_n| \geq \varepsilon\} \leq P\{X_n \neq \frac{1}{n}\} = 0$$

于是当  $n > \frac{1}{\varepsilon}$  时  $P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = P\{|X_n - 0| \geq \varepsilon\} = P\{|X_n| \geq \varepsilon\} = 0$

即  $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} = 0$

从而知  $\{X_n\}$  依概率收敛  $X$ 。

$X_n$  的分布函数为

$$F_{n(x)} = P\{X_n \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{n} \\ 1, & x \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$

$X$  的分布函数为

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n(x)} = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

即当  $x=0$  时， $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(0) = 0 \neq F(0)$

即  $X_n$  的分布函数不收敛于  $X$  的分布函数。

3、设  $n_A$  表示使用终端的个数，则  $n_A \sim B(120, 0.05)$ ，于是所求概率是

$$\begin{aligned} P\{n_A \geq 10\} &= P\left\{\frac{10 - 120 \times 0.05}{\sqrt{120 \times 0.05 \times 0.95}} \leq \frac{n_A - 120 \times 0.05}{\sqrt{120 \times 0.05 \times 0.95}} \leq \frac{120 - 120 \times 0.05}{\sqrt{120 \times 0.05 \times 0.95}}\right\} \\ &\approx \Phi\left(\frac{120 - 6}{\sqrt{5.7}}\right) - \Phi\left(\frac{4}{\sqrt{5.7}}\right) \\ &\approx 1 - \Phi(1.675) = 1 - 0.953 = 0.047 \end{aligned}$$

4、设  $X_i$  表示装运的第  $i$  箱的重量， $i=1, 2, \dots, n$ ，其中  $n$  是所求箱，数  $X_1, \dots, X_n$  独立同分布， $E(X_1) = 50$ ， $D(X_1) = 5^2$ ，且承运总重量是

$$T = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

由条件知,  $P\{T \leq 5000\} > 0.997$ , 由中心极限定理有

$$\begin{aligned} P\{T \leq 5000\} &= P\left\{\sum_{i=1}^n X_i \leq 5000\right\} \\ &= P\left\{\frac{\sum_{i=1}^n X_i - 50n}{\sqrt{25n}} \leq \frac{5000 - 50n}{\sqrt{25n}}\right\} \approx \Phi\left(\frac{5000 - 50n}{5\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

$$\text{即应有 } \Phi\left(\frac{5000 - 50n}{5\sqrt{n}}\right) > 0.997$$

查表有  $\frac{5000 - 50n}{5\sqrt{n}} > 2$ , 即  $n < 98.0199$ , 故最多可以装 98 箱。

5、以  $X_i$  表示第  $i$  个数的取整误差, 则有

(1) 此时  $i=1, 2, \dots, 1500$ , 且  $X_1, X_2, \dots, X_{1500}$  独立皆服从  $(-0.5, 0.5)$  上的均匀分布,

$E(X_i) = 0, D(X_i) = \frac{1}{12}$ , 于是所求概率是

$$\begin{aligned} P\left\{\left|\sum_{i=1}^{1500} X_i\right| > 15\right\} &= 1 - P\left\{\frac{-15}{\sqrt{1500 \times \frac{1}{12}}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{1500} X_i - 0}{\sqrt{1500 \times \frac{1}{12}}} \leq \frac{15}{\sqrt{1500 \times \frac{1}{12}}}\right\} \\ &\approx 1 - \left[\Phi\left(\frac{15}{\sqrt{125}}\right) - \Phi\left(\frac{-15}{\sqrt{125}}\right)\right] = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)\right) \\ &= 2(1 - \Phi(1.34)) = 2(1 - 0.9099) = 0.1802 \end{aligned}$$

(2) 此时  $i=1, 2, \dots, n$  其中  $n$  是所求的个数,  $X_1, \dots, X_n$  独立皆服从  $(-0.5, 0.5)$  上的均匀分布, 由条件知, 应有

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| < 10\right\} \geq 0.90$$

由独立同分布的中心极限定理, 有

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^n X_i\right| < 10\right\} = P\left\{\frac{-10}{\sqrt{\frac{n}{12}}} < \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{\frac{n}{12}}} < \frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}}\right\} \approx 2\Phi\left(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) - 1$$

$$\text{即有 } 2\Phi\left(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) - 1 \geq 0.9, \text{ 即 } \Phi\left(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) \geq 0.95$$

查表有:  $\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \geq 1.645$ , 即  $n \leq 443.45$

故最多有 443 个数相加, 才能使误差总和的约对值小于 10 的概率不小于 0.90。

6、用  $n_A$  表示要使用外线的分机个数, 则  $n_A \sim B(200, 0.5)$ , 设  $n$  表示外线数, 则由题知应有

$$P\{n_A \leq n\} \geq 0.9$$

由

于

$$P\{n_A \leq n\} = P\left\{\frac{0-200 \times 0.05}{\sqrt{200 \times 0.05 \times 0.95}} < \frac{n_A - 200 \times 0.05}{\sqrt{200 \times 0.05 \times 0.95}} \leq \frac{n - 200 \times 0.05}{\sqrt{200 \times 0.05 \times 0.95}}\right\} = \Phi\left(\frac{n-10}{\sqrt{9.5}}\right)$$

即应有  $\Phi\left(\frac{n-10}{\sqrt{9.5}}\right) \geq 0.9$ , 查表得  $\frac{n-10}{\sqrt{9.5}} \geq 1.39$ , 即  $n \geq 14.28$

故至少需要 15 条外线, 才能满足需要。

7、设  $n_A$  表示开动的车床台数  $n$  表示供给的电能, 则  $n_A \sim B(200, 0.6)$ , 且由题知, 应有

$$P\{n_A \leq n\} \geq 0.999$$

$$\begin{aligned} \text{由于 } P\{n_A \leq n\} &= P\left\{\frac{0-200 \times 0.06}{\sqrt{200 \times 0.6 \times 0.4}} < \frac{n_A - 200 \times 0.06}{\sqrt{200 \times 0.6 \times 0.4}} \leq \frac{n - 200 \times 0.06}{\sqrt{200 \times 0.6 \times 0.4}}\right\} \\ &\approx \Phi\left(\frac{n-120}{\sqrt{48}}\right) - \Phi\left(\frac{-120}{\sqrt{48}}\right) \approx \Phi\left(\frac{n-120}{4\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

即应有  $\Phi\left(\frac{n-120}{4\sqrt{3}}\right) \geq 0.999$ , 查表得  $\frac{n-120}{4\sqrt{3}} \geq 3.1$ , 即  $n \geq 141.48$

故至少供给 142E 的电能才能满足条件。

8、设  $n_A$  表示参加保险的人中死亡的人数, 则  $n_A \sim B(10000, 0.006)$

(1) 所求概率是

$$\begin{aligned} P\{1000 n_A > 120000\} &= P\{n_A > 120\} = P\left\{\frac{n_A - 60}{\sqrt{60 \times 0.994}} > \frac{120 - 60}{\sqrt{60 \times 0.994}}\right\} \\ &\approx 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{60}{0.994}}\right) = 1 - \Phi(7.77) \approx 0 \end{aligned}$$

(2) 所求概率分别为

$$\begin{aligned} P\{120000 - 1000 n_A \geq 40000\} &= P\{n_A \leq 80\} = P\left\{\frac{n_A - 60}{\sqrt{60 \times 0.994}} > \frac{80 - 60}{\sqrt{60 \times 0.994}}\right\} \\ &\approx \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{60 \times 0.994}}\right) = \Phi(2.59) = 0.9952 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{120000 - 1000 n_A \geq 60000\} &= P\{n_A \leq 60\} = P\left\{\frac{n_A - 60}{\sqrt{60 \times 0.994}} > \frac{60 - 60}{\sqrt{60 \times 0.994}}\right\} \\ &\approx \Phi(0) = 0.5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\{120000 - 1000 n_A \geq 80000\} &= P\{n_A \leq 40\} = P\left\{\frac{n_A - 60}{\sqrt{60 \times 0.994}} > \frac{40 - 60}{\sqrt{60 \times 0.994}}\right\} \\ &\approx \Phi(-2.59) = 0.0048 \end{aligned}$$



## 第六章 数理统计的基本概念

1. 设样本均值为  $\bar{X}$ , 则由题意, 有  $\bar{X} \sim N(1.4, \frac{6^2}{n})$ , 或  $\frac{\bar{X}-1.4}{6/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ , 于是由

$$0.95 \leq P\{1.4 < \bar{X} < 5.4\} = P\left\{\frac{1.4-3.4}{6/\sqrt{n}} < \frac{\bar{X}-3.4}{6/\sqrt{n}} < \frac{5.4-3.4}{6/\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) - 1$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right) \geq 0.975 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{3} \geq 1.96 \Rightarrow n \geq 34.5744$$

故样本容量至少应取 35.

2. 由题意可知  $\frac{\bar{X}_n - a}{0.2/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ , 又

$$0.95 \leq P\{|\bar{X}_n - a| < 0.1\} = P\left\{\left|\frac{\bar{X}_n - a}{0.2/\sqrt{n}}\right| < \frac{0.1}{0.2/\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) - 1$$

$$\text{故有 } \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) \geq 0.975 \Rightarrow \frac{\sqrt{n}}{2} \geq 1.96 \Rightarrow n \geq 15.3664$$

因此  $n$  至少应等于 16.

3. 由正态分布的性质及样本的独立性知,  $X_1 - 2X_2$  和  $3X_3 - 4X_4$  均服从正态分布, 由于

$$E(X_1 - 2X_2) = 0, D(X_1 - 2X_2) = D(X_1) + 4D(X_2) = 20$$

以及

$$E(3X_3 - 4X_4) = 0, D(3X_3 - 4X_4) = 9D(X_3) + 16D(X_4) = 100$$

所以, 有

$$X_1 - 2X_2 \sim N(0, 20) \Rightarrow \frac{X_1 - 2X_2}{\sqrt{20}} \sim N(0, 1)$$

$$3X_3 - 4X_4 \sim N(0, 100) \Rightarrow \frac{3X_3 - 4X_4}{10} \sim N(0, 1)$$

于是由  $\chi^2$  分布的定义知, 当  $a = \frac{1}{20}$ ,  $b = \frac{1}{100}$  时, 有

$$X = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2 = \left(\frac{X_1 - 2X_2}{\sqrt{20}}\right)^2 + \left(\frac{3X_3 - 4X_4}{10}\right)^2 \sim \chi^2(2)$$

4. 由正态分布的性质及样本的独立性知,

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_9 \sim N(0, 9^2) \Rightarrow \frac{1}{9}(X_1 + X_2 + \cdots + X_9) \sim N(0, 1)$$

$$\text{又 } \frac{Y_i}{3} \sim N(0, 1), i = 1, 2, \dots, 9$$

$$\text{所以 } \left(\frac{Y_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{Y_2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{Y_9}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}(Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_9^2) \sim \chi^2(9)$$

由于两个总体是  $X$  和  $Y$  相互独立的, 所以其相应的样本也是相互独立的, 故  $\frac{1}{9}(X_1 + X_2 + \cdots + X_9)$  与  $\frac{1}{9}(Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_9^2)$  也相互独立, 于是由  $t$  分布的定义知,

$$U = \frac{X_1 + \cdots + X_9}{\sqrt{Y_1^2 + \cdots + Y_9^2}} = \frac{\frac{1}{9}(X_1 + \cdots + X_9)}{\sqrt{\frac{1}{9}(Y_1^2 + \cdots + Y_9^2)/9}} \sim t(9)$$

5. 由题意知,  $\frac{X_i}{2} \sim N(0,1), i=1,2,\cdots,15$ , 故有

$$U = \frac{1}{4}(X_1^2 + \cdots + X_{10}^2) = \left(\frac{X_1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2 \sim \chi^2(10)$$

$$V = \frac{1}{4}(X_{11}^2 + \cdots + X_{15}^2) = \left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2 \sim \chi^2(5)$$

利用样本的独立性以及 F 分布的定义, 有

$$Y = \frac{X_1^2 + \cdots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + \cdots + X_{15}^2)} = \frac{U/10}{V/5} \sim F(10,5)$$

6. 解法 1 考虑  $X_1 + X_{n+1}, X_2 + X_{n+2}, \cdots, X_n + X_{2n}$ , 将其视为取自正态总体  $N(2\mu, 2\sigma^2)$  的

简单随机样本, 则其样本均值为  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{2n} X_i = 2\bar{X}$

样本方差为  $\frac{1}{n-1} Y$

由于  $E\left(\frac{1}{n-1} Y\right) = 2\sigma^2$ , 所以  $E(Y) = (n-1)(2\sigma^2) = 2(n-1)\sigma^2$

解法 2 记  $\bar{X}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{X}'' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{n+i}$ , 显然有  $2\bar{X} = \bar{X}' + \bar{X}''$ , 因此

$$\begin{aligned} E(Y) &= E\left[\sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2\right] = E\left\{\sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X}') + (X_{n+i} - \bar{X}'')]^2\right\} \\ &= E\left\{\sum_{i=1}^n [(X_i - \bar{X}')^2 + 2(X_i - \bar{X}')(X_{n+i} - \bar{X}'') + (X_{n+i} - \bar{X}'')^2]\right\} \\ &= (n-1)\sigma^2 + 0 + (n-1)\sigma^2 = 2(n-1)\sigma^2 \end{aligned}$$

7. 记  $D(X) = \sigma^2$  (未知), 易见  $E(Y_1) = E(Y_2)$ ,  $D(Y_1) = \sigma^2/6, D(Y_2) = \sigma^2/3$

由于  $Y_1, Y_2$  相互独立, 故有

$$E(Y_1 - Y_2) = 0, \quad D(Y_1 - Y_2) = \frac{\sigma^2}{6} + \frac{\sigma^2}{3} = \frac{\sigma^2}{2}$$

从而  $U = \frac{Y_1 - Y_2}{\sigma/\sqrt{2}} \sim N(0,1)$ , 又  $\chi^2 = \frac{2S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$

由于  $Y_1$  与  $Y_2$  相互独立,  $Y_1$  与  $S^2$  独立, 由定理 6.3.2,  $Y_2$  与  $S^2$  独立, 所以  $Y_1 - Y_2$  与  $S^2$  独立, 于是由  $t$  分布的定义, 知

$$Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S} = \frac{U}{\sqrt{\chi^2/2}} \sim t(2)$$

8. 由  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ , 其中由题意知,  $n=25, \sigma^2=100$ , 于是

$$P\{S^2 > 50\} = P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \frac{50(n-1)}{\sigma^2}\right\} = P\{\chi^2(25-1) > 12\}$$

$$= P\{\chi^2(24) > 12\} \geq 0.975$$

上式中的不等式是查表得到的,所以所求的概率至少为 0.975

9. 本题要用到这样一个结论,即  $\Gamma$  分布  $\Gamma(\alpha, \beta)$  关于第一个参数具有可加性,即若  $U \sim \Gamma(\alpha_1, \beta), V \sim \Gamma(\alpha_2, \beta)$ , 且  $U$  与  $V$  相互独立, 则  $U+V \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$ , 其中  $\Gamma(\alpha, \beta)$

的概率密度为: 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

可利用卷积公式证明.

回到本题, 当  $\alpha=1, \beta=\frac{1}{\lambda}$ ,  $\Gamma$  分布就是参数为  $\lambda$  的指数分布, 所以样本的独立性及  $\Gamma$

分布的可加性, 有  $X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim \Gamma(n, \frac{1}{\lambda})$

即  $\sum_{i=1}^n X_i$  的概率密度为 
$$g(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

因此  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  的概率密度为 
$$h(y) = ng(ny) = \begin{cases} \frac{(n\lambda)^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\lambda ny}, & y > 0 \\ 0, & y \leq 0 \end{cases}$$

10. (1) 根据正态分布的性质,  $X_1 + X_2$  与  $X_1 - X_2$  服从二维正态分布, 所以要证明它们相互独立, 只需它们不相关, 由于

$$E[(X_1 + X_2)(X_1 - X_2)] = E(X_1^2) - E(X_2^2) = 0$$

$$E(X_1 + X_2)E(X_1 - X_2) = 0$$

所以  $Cov(X_1 + X_2, X_1 - X_2) = 0$

即  $X_1 + X_2$  与  $X_1 - X_2$  相互独立

(2) 由于  $\mu = 0$ , 所以

$$X_1 + X_2 \sim N(0, 2\sigma^2) \Rightarrow \frac{X_1 + X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1) \Rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{X_1 + X_2}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(1)$$

$$X_1 - X_2 \sim N(0, 2\sigma^2) \Rightarrow \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \sim N(0, 1) \Rightarrow \frac{1}{2} \left( \frac{X_1 - X_2}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(1)$$

由上面证明的独立性, 再由  $F$  分布的定义知

$$F = \frac{(X_1 + X_2)^2}{(X_1 - X_2)^2} = \frac{\left( \frac{X_1 + X_2}{\sigma} \right)^2 / 2}{\left( \frac{X_1 - X_2}{\sigma} \right)^2 / 2} \sim F(1, 1)$$

所以 
$$P\left\{\frac{(X_1 + X_2)^2}{(X_1 - X_2)^2} < 4\right\} = P\{F < 4\} < P\{F < 5.83\} = 0.25$$

## 第七章 参数估计

## (一)基本题

$$1 \quad (1) \quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 (\theta+1)x^{\theta+1}dx = \frac{\theta+1}{\theta+2}$$

令  $\frac{\theta+1}{\theta+2} = \bar{X}$ , 得未知参数  $\theta$  的矩估计量为  $\hat{\theta} = \frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$

(2) 因为  $E(X) = \frac{1}{p}$ , 所以  $p$  的矩估计量为  $\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$

$$(3) \quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, \theta)dx = \int_{\theta}^{\infty} 2xe^{-2(x-\theta)}dx = \frac{1}{2} + \theta$$

令  $\frac{1}{2} + \theta = \bar{X}$ , 解得  $\theta$  矩估计量为  $\hat{\theta} = \bar{X} - \frac{1}{2}$

$$(4) \quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, \theta)dx = \int_0^1 \sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}dx = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}, \quad \text{令 } \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1} = \bar{X},$$

解得  $\theta$  矩估计量为  $\hat{\theta} = \left( \frac{\bar{X}}{1-\bar{X}} \right)^2$

$$(5) \quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x; \theta_1, \theta_2)dx = \int_{\theta_1}^{\infty} \frac{x}{\theta_2} \exp\left\{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right\}dx = \theta_1 + \theta_2$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x; \theta_1, \theta_2)dx = \int_{\theta_1}^{\infty} \frac{x^2}{\theta_2} \exp\left\{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right\}dx = (\theta_1 + \theta_2)^2 + \theta_2^2$$

令 
$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 = \bar{X} \\ (\theta_1 + \theta_2)^2 + \theta_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \end{cases}$$

解得参数  $\theta_1, \theta_2$  的矩估计量为:  $\hat{\theta}_1 = \bar{X} - \hat{\theta}_2, \quad \hat{\theta}_2 = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - (\bar{X})^2}$

(6) 因为一阶矩  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, \sigma)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx = 0$ , 它与  $\sigma$  无关, 所以还必须求二

阶矩,  $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, \sigma)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{2\sigma} e^{-\frac{|x|}{\sigma}} dx = \int_0^{\infty} \frac{x^2}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} dx = 2\sigma^2$

令  $2\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ , 解得参数  $\sigma$  的矩估计量为  $\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2}$

2 (1) 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是相应于  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的样本, 则似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i) = \begin{cases} (\theta+1)^n \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\theta}, & 0 < x_i < 1, i=1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

当  $0 < x_i < 1, i=1, 2, \dots, n$  时,  $L(\theta) > 0$ , 并且有

$$\ln L(\theta) = n \ln(\theta + 1) + \theta \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L}{d\theta} = \frac{n}{\theta + 1} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0, \text{ 解得 } \theta \text{ 的极大似然估计值为 } \hat{\theta} = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln x_i}$$

$$\text{从而 } \theta \text{ 的极大似然估计量为 } \hat{\theta} = -1 - \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln X_i}$$

(2) 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是相应于  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的样本, 则似然函数为

$$L(p) = \prod_{i=1}^n p(1-p)^{x_i-1} = p^n (1-p)^{\sum_{i=1}^n x_i - n}$$

$$\ln L = n \ln p + (\sum_{i=1}^n x_i - n) \ln(1-p)$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L}{dp} = \frac{n}{p} + \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i}{1-p} = 0, \text{ 解得 } p \text{ 的极大似然估计值为 } \hat{p} = \frac{1}{\bar{x}}$$

$$\text{从而 } \theta \text{ 的极大似然估计量为 } \hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$$

(3) 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是相应于  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的样本, 则似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \begin{cases} 2^n e^{-2 \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)}, & x_i \geq \theta, i=1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\text{当 } x_i \geq \theta \ (i=1, 2, \dots) \text{ 时, } L(\theta) > 0, \text{ 并且 } \ln L(\theta) = n \ln 2 - 2 \sum_{i=1}^n (x_i - \theta)$$

$$\text{因为 } \frac{d \ln L}{d\theta} = 2n > 0, \text{ 所以 } L(\theta) \text{ 单调递增.}$$

因为必须满足  $x_i \geq \theta \ (i=1, 2, \dots)$ , 因此  $\theta = x_{(1)} = \min\{x_1, \dots, x_{(n)}\}$  时,  $L(\theta)$  取最大值, 所以  $\theta$  的极大似然估计值为  $\hat{\theta} = x_{(1)}$ , 极大似然估计量为

$$\hat{\theta} = X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_n\}$$

(4) 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是相应于  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的样本, 则似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \begin{cases} \theta^{\frac{n}{2}} (x_1 x_2 \cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1}, & 0 \leq x_i \leq 1, i=1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\text{当 } 0 \leq x_i \leq 1, i=1, 2, \dots, n \text{ 时, } L(\theta) > 0, \text{ 并且 } \ln L = \frac{n}{2} \ln \theta + (\sqrt{\theta} - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L}{d\theta} = \frac{n}{2\theta} + \frac{\sum_{i=1}^n \ln x_i}{2\sqrt{\theta}} = 0, \text{ 解得 } \theta \text{ 的极大似然估计值为 } \hat{\theta} = \frac{n^2}{\left[ \sum_{i=1}^n \ln x_i \right]^2}$$

$$\theta \text{ 的极大似然估计量为 } \hat{\theta} = \frac{n^2}{\left[ \sum_{i=1}^n \ln X_i \right]^2}$$

(5) 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是相应于  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的样本, 则似然函数为

$$L(\theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2^n} \exp\left\{-\frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^n (x_i - \theta_1)\right\}, & x_i > \theta_1, i=1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

所以当  $x_i > \theta_1, i=1, 2, \dots, n$  时,  $L(\theta_1, \theta_2) > 0$ , 并且

$$\ln L = -n \ln \theta_2 - \frac{1}{\theta_2} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{n\theta_1}{\theta_2}$$

由于  $\frac{\partial \ln L}{\partial \theta_1} = \frac{n}{\theta_2} > 0$ , 所以  $L(\theta_1, \theta_2)$  是  $\theta_1$  的单调递增函数, 因为必须满足

$$x_i > \theta_1, i=1, 2, \dots, n, \text{ 所以对于任意给定的 } \theta_2, \quad L(x_{(1)}, \theta_2) = \inf_{\theta_1} L(\theta_1, \theta_2)$$

$$\text{令 } \frac{\partial \ln L(x_{(1)}, \theta_2)}{\partial \theta_2} = \frac{-n}{\theta_2} + \frac{\sum_{i=1}^n x_i - nx_{(1)}}{\theta_2^2} = 0$$

解得  $\hat{\theta}_2 = \bar{x} - x_{(1)}$ , 所以  $\theta_1, \theta_2$  的极大似然估计值分别为  $\hat{\theta}_1 = x_{(1)} \quad \hat{\theta}_2 = \bar{x} - x_{(1)}$

$\theta_1, \theta_2$  的极大似然估计量分别为  $\hat{\theta}_1 = X_{(1)} \quad \hat{\theta}_2 = \bar{X} - X_{(1)}$

(6) 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是相应于  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的样本, 则似然函数为

$$L(\sigma) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \sigma) = \frac{1}{2} \sigma^{-n} e^{-\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |x_i|}$$

$$\text{取对数 } \ln L = \frac{-n}{2} \ln \sigma - \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^n |x_i|, \quad \text{令 } \frac{d \ln L}{d \sigma} = \frac{-n}{2\sigma} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n |x_i| = 0$$

$$\text{解得 } \sigma \text{ 的极大似然估计值为 } \hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\text{所以 } \sigma \text{ 的极大似然估计量为 } \hat{\sigma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |X_i|.$$

3 设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是相应于  $X_1, X_2, \dots, X_n$  的样本, 似然函数为

$$L(p) = \prod_{i=1}^n P\{X = x_i\} = p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{mn - \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \binom{m}{x_i}$$

$$\text{取对数, 得 } \ln L(p) = \sum_{i=1}^n x_i \ln p + (mn - \sum_{i=1}^n x_i) \ln(1-p) + \sum_{i=1}^n \ln \binom{m}{x_i}$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(p)}{dp} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - \frac{mn - \sum_{i=1}^n x_i}{1-p} = 0$$

$$\text{得 } p \text{ 的极大似然估计值为 } \hat{p} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{m} \bar{x}$$

所以  $p$  的极大似然估计量为  $\hat{p} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{m} \bar{X}$

4 (1) 已知,  $\lambda$  的极大似然估计值为  $\hat{\lambda} = \bar{x}$ , 又  $P\{X=0\} = e^{-\lambda}$ , 所以根据极大似然估计的性质,  $P\{X=0\}$  的极大似然估计值为  $e^{-\bar{x}}$

(2) 观察到的五年内每一扳道员引起的严重事故的平均次数为

$$\bar{x} = \frac{1}{122} (0 \times 44 + 1 \times 42 + 2 \times 21 + 3 \times 9 + 4 \times 4 + 5 \times 2) = \frac{137}{122} = 1.123$$

所以一个扳道员在五年内未引起严重事故的概率  $p$  的极大似然估计值为

$$\hat{p} = e^{-1.123} = 0.3253$$

$$\begin{aligned} 5. (1) \quad E(X) &= E(e^Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^z e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(z^2 - (2\mu + 2\sigma^2)z + (\mu + \sigma^2)^2 - 2\mu\sigma^2 - \sigma^4)\right\} dz \\ &= \exp\left\{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(z - \mu - \sigma^2)\right\} dz = \exp\left\{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\right\} \end{aligned}$$

(2) 可以将  $\ln x_1, \ln x_2, \dots, \ln x_n$  视为取自总体  $Z = \ln X$  的样本, 则由于  $Z \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 因而可得参数  $\mu, \sigma^2$  的极大似然估计值分别为

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \hat{\mu})^2$$

故由极大似然估计的性质, 可得  $E(X)$  的极大似然估计值为  $E(X) = \exp\left\{\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right\}$

$$(3) \text{ 经计算得, } \hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i = 3.0909, \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \hat{\mu})^2 = 0.5115,$$

所以, 一个句子字数均值的极大似然估计值为  $E(X) = \exp\left\{\hat{\mu} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\right\} = 28.4073$

6. 由正态分布的性质以及样本的独立性可知  $X_{i+1} - X_i \sim N(0, 2\sigma^2)$

因此  $E(X_{i+1} - X_i)^2 = D(X_{i+1} - X_i) = 2\sigma^2$

$$\text{欲使 } \sigma^2 = E\left(c \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2\right) = c \sum_{i=1}^{n-1} E(X_{i+1} - X_i)^2 = 2(n-1)c\sigma^2$$

必须  $c = \frac{1}{2(n-1)}$ , 因此, 当  $c = \frac{1}{2(n-1)}$  时, 统计量  $c \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$  为  $\sigma^2$  的无偏估计.

7. 由于  $\hat{\theta}_1$  和  $\hat{\theta}_2$  均为参数  $\theta$  的无偏估计, 所以  $E(a\hat{\theta}_1 + b\hat{\theta}_2) = aE(\hat{\theta}_1) + bE(\hat{\theta}_2) = (a+b)\theta$

欲使  $a\hat{\theta}_1 + b\hat{\theta}_2$  是  $\theta$  的无偏估计, 必须  $a+b=1$ , 即  $b=1-a$ .

从而由  $\hat{\theta}_1$  和  $\hat{\theta}_2$  的独立性以及题设条件, 有

$$D(a\hat{\theta}_1 + b\hat{\theta}_2) = a^2 D(\hat{\theta}_1) + (1-a)^2 D(\hat{\theta}_2) = [2a^2 + (1-a)^2] D(\hat{\theta}_2) = (1-2a+3a^2) D(\hat{\theta}_2)$$

上式右边当  $a = \frac{1}{3}$  时达到最小.

综上所述, 当  $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$  时,  $a\hat{\theta}_1 + b\hat{\theta}_2$  是  $\theta$  的无偏估计, 并且在所有这样的无偏估计中方差最小.

8. (1) 由于总体  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松分布, 所以其数学期望和方差均为  $\lambda$ , 由于样本均值和样本方差是总体均值和方差的无偏估计, 所以有

$$E(\bar{X}) = E(S^2) = \lambda$$

从而

$$E[\alpha\bar{X} + (1-\alpha)S^2] = \alpha E(\bar{X}) + (1-\alpha)E(S^2) = \lambda$$

所以  $\alpha\bar{X} + (1-\alpha)S^2$  为  $\lambda$  的无偏估计量

(2) 已知,  $\lambda$  的极大似然估计量为  $\hat{\lambda}_M = \bar{X}$ , 所以由极大似然估计的性质,  $\lambda^2$  的极大似然估计量为  $\hat{\lambda}_M^2 = (\bar{X})^2$ .

$$(3) \text{ 由于 } E(\hat{\lambda}_M^2) = E(\bar{X}^2) = D(\bar{X}) + [E(\bar{X})]^2 = \frac{\lambda}{n} + \lambda^2$$

$$\text{因此 } \hat{\lambda}_M^2 = (\bar{X})^2 \text{ 不是 } \lambda^2 \text{ 的无偏估计, 令 } \hat{\lambda}^2 = (\bar{X})^2 - \frac{\bar{X}}{n}$$

$$\text{则有 } E(\hat{\lambda}^2) = E(\bar{X}^2) - \frac{1}{n} E(\bar{X}) = \frac{\lambda}{n} + \lambda^2 - \frac{\lambda}{n} = \lambda^2$$

所以  $\hat{\lambda}^2 = (\bar{X})^2 - \frac{\bar{X}}{n}$  是  $\lambda^2$  的一个无偏估计量.

注:  $\lambda^2$  的无偏估计量不唯一, 如统计量  $\hat{\lambda}_i^2 = (\bar{X})^2 - \frac{X_i}{n}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 都是  $\lambda^2$  无偏估计量.

9. 由题意知,  $X$  的概率密度和分布函数分别为

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \theta < x < \theta+1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \theta \\ x - \theta, & \theta < x < \theta+1 \\ 1, & x \geq \theta+1 \end{cases}$$

因此, 最大顺序统计量  $X_{(n)}$  的概率密度为

$$f_{(n)}(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x) = \begin{cases} n(x-\theta)^{n-1}, & \theta < x < \theta+1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$\text{所以, } E(X_{(n)}) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{(n)}(x) dx = \int_{\theta}^{\theta+1} n x (x-\theta)^{n-1} dx = n \int_0^1 (t+\theta) t^{n-1} dt = \frac{n}{n+1} + \theta$$

$$E(X_{(n)}^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{(n)}(x) dx = \int_{\theta}^{\theta+1} n x^2 (x-\theta)^{n-1} dx = n \int_0^1 (t+\theta)^2 t^{n-1} dt = \frac{n}{n+2} + \frac{2n}{n+1} \theta + \theta^2$$

$$D(X_{(n)}) = E(X_{(n)}^2) - [E(X_{(n)})]^2 = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}$$

$$\text{于是 } E(\hat{\theta}_1) = E(\bar{X}) - \frac{1}{2} = E(X) - \frac{1}{2} = \frac{\theta + \theta + 1}{2} - \frac{1}{2} = \theta$$

$$E(\hat{\theta}_2) = E(X_{(n)}) - \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1} + \theta - \frac{n}{n+1} = \theta$$

所以,  $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$  皆为参数  $\theta$  的无偏估计, 又

$$D(\hat{\theta}_1) = D(\bar{X}) = \frac{1}{n} D(X) = \frac{1}{12n}$$

$$D(\hat{\theta}_2) = D(X_{(n)}) = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} < \frac{1}{12n} \quad (n > 1)$$

所以  $\hat{\theta}_2$  比  $\hat{\theta}_1$  有效.



10. (1)  $\sigma^2 = 0.025^2$  已知时  $\mu$  的置信度为  $1-\alpha$  的置信区间为  $\left( \bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \right)$

将  $\bar{x} = 0.081, \sigma = 0.025, z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$  代入得  $\mu$  的置信度为  $1-\alpha$  的置信区间为  
(0.0775, 0.0845)

11.  $\sigma^2$  已知时  $\mu$  的置信度为  $1-\alpha$  的置信区间为  $\left( \bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \right)$

欲使其区间长度不大于给定的  $L$ , 必须  $\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} \leq L$ , 即  $n \geq \frac{4z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{L^2}$

12. 利用上题的结果, 由于  $\sigma = 0.05, z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$ , 要使他平均反应时间的估计误差不超过 0.01 秒, 必须  $L = 0.02$ , 所以  $n \geq \frac{4z_{\alpha/2}^2 \sigma^2}{L^2} = 49$

13.  $\sigma^2$  的置信度为  $1-\alpha$  的置信区间为  $\left( \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \right)$

在本题中,  $\alpha = 0.05, n = 16$ , 经计算得,  $s^2 = 0.00244$ , 查表得,  $\chi_{0.975}^2(15) = 6.262, \chi_{0.025}^2(15) = 27.488$ , 最后得  $\sigma^2$  的置信度为 95% 的置信区间为  
(0.00133, 0.00584)

14. 此题为方差未知但相等时的两个总体均值差的区间估计问题, 已知此时  $\mu_1 - \mu_2$  的置信度

为  $1-\alpha$  的置信区间为  $\left( \bar{X} - \bar{Y} \pm S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) \right)$

已知  $\bar{x} = 1000, \bar{y} = 980, n_1 = 5, n_2 = 7, \alpha = 0.01$ , 查表得  $t_{0.005}(10) = 3.1693$ ,

$$s_w = \sqrt{\frac{4 \times 28^2 + 6 \times 32^2}{4 + 6}} = 30.463$$

最后得两个总体均值差的置信度为 0.99 的置信区间为 (-36.53, 76.53)

15. 设  $X, Y$  分别为一、二号方案的单位面积产量, 并设  $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  和  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  为相应于总体  $X, Y$  的样本, 令  $Z = X - Y$ , 则  $Z \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ , 令  $Z_i = X_i - Y_i$ , 于是,  $\mu_1 - \mu_2$  的置信度为  $1-\alpha$  的置信区间为

$$\left( \bar{X} - \bar{Y} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \right)$$

其中  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [(X_i - Y_i) - (\bar{X} - \bar{Y})]^2$

已知  $n = 8, \bar{z} = \bar{x} - \bar{y} = 5.75, s = 5.12, \alpha = 0.05, t_{0.025}(7) = 2.3646$ , 计算得  $\mu_1 - \mu_2$  的置信度为 95% 的置信区间为 (1.47, 10.03)

16. 方差比  $\sigma_A^2 / \sigma_B^2$  的置信度为  $1-\alpha$  的置信区间为

$$\left( \frac{S_A^2 / S_B^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)}, \frac{S_A^2 / S_B^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)} \right).$$

已知  $s_A^2 = 0.5419$ ,  $s_B^2 = 0.6065$ ,  $n_1 = n_2 = 10$ ,  $\alpha = 0.05$ ,  $F_{0.025}(9,9) = 4.03$ ,  $F_{0.975}(9,9) = 0.2481$ , 代入算得方差比  $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$  的置信度为 0.95 的置信区间 (0.2217, 3.601)

## (二)补充题

1. (1) 设  $x_1, \dots, x_n$  是相应于  $X_1, \dots, X_n$  的一组样本值, 则似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n a_{x_i} \frac{\theta^{x_i}}{f(\theta)} = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} f^{-n}(\theta) \prod_{i=1}^n a_{x_i}$$

取对数得  $\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^n x_i \ln \theta - n \ln f(\theta) + \ln \prod_{i=1}^n a_{x_i}$   $\frac{d \ln L}{d \theta} = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n f'(\theta)}{f(\theta)} = 0$

令  $\frac{d \ln L}{d \theta} = \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i - \frac{n f'(\theta)}{f(\theta)} = 0$

可得  $\theta$  的极大似然估计值是方程  $\bar{x} = \frac{\theta f'(\theta)}{f(\theta)}$

的一个根, 从而  $\theta$  的极大似然估计量是方程

$$\bar{X} = \frac{\theta f'(\theta)}{f(\theta)} \quad (1)$$

的一个根.

由  $\sum_{x=1}^{\infty} a_x \frac{\theta^x}{f(\theta)} = 1 \Rightarrow \sum_{x=1}^{\infty} a_x \theta^x = f(\theta)$

故  $E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} a_x \frac{x \theta^x}{f(\theta)} = \frac{\theta}{f(\theta)} \sum_{x=1}^{\infty} a_x (\theta^x)' = \frac{\theta}{f(\theta)} \left( \sum_{x=1}^{\infty} a_x \theta^x \right)' = \frac{\theta f'(\theta)}{f(\theta)}$

所以 (1) 也是  $\theta$  的矩法方程.

(2) 对于泊松分布(参数为  $\lambda$ ),  $a_x = \frac{1}{x!}$ ,  $f(\lambda) = e^\lambda$ , 因此  $f'(\lambda) = f(\lambda)$ , 故  $\lambda$  的极大似然估计

满足方程  $\bar{X} = \lambda$

从而  $\lambda$  的极大似然估计为  $\hat{\lambda} = \bar{X}$ .

对于二项分布  $B(n, p)$ , 令  $\frac{p}{1-p} = \theta$ , 则

$$P\{X = x\} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} \left( \frac{p}{1-p} \right)^x (1-p)^n = \binom{n}{x} \frac{\theta^x}{(1+\theta)^n}$$

因此,  $f(\theta) = (1+\theta)^n$ , 故  $\theta$  的极大似然估计满足的方程为  $\bar{X} = \frac{n\theta}{1+\theta}$

由极大似然估计的性质可知,  $p = \frac{\theta}{1+\theta}$  的极大似然估计满足的方程为  $\bar{X} = np$

2.  $X$  的概率密度为  $f(x, \theta) = \begin{cases} 1, & \theta < x < \theta + 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是相应的样本值, 则似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \begin{cases} 1, & \theta < x_i < \theta + 1, i = 1, 2, \dots, n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

因此, 当  $\theta < x_i < \theta + 1, i = 1, 2, \dots, n$  时,  $L(\theta) = 1$  为常数, 因此对于满足

$$\theta < x_{(1)} \leq x_{(n)} < \theta + 1$$

的一切  $\theta$  均为极大似然估计, 因此  $\theta$  的极大似然估计量不止一个. 由于区间  $(\theta, \theta + 1)$  的总长度为 1, 因此由上述不等式知, 如果  $\theta$  尽可能的靠近  $x_{(1)}$ , 或者  $\theta + 1$  应尽量靠近  $x_{(n)}$ , 则所得的估计显得更加合理, 因此  $\hat{\theta}_1 = X_{(1)}$ ,  $\hat{\theta}_2 = X_{(n)} - 1$ , 都可以取为  $\theta$  的极大似然估计量. 由极大似然估计的性质,  $\hat{\theta}_3 = \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)}) - \frac{1}{2}$  也可以作为极大似然估计.

3. 此时  $X$  的概率密度为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

设  $X_1, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的一个样本,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是相应的样本值, 则似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \begin{cases} \theta^{-n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i}, & x_i > 0, i = 1, \dots, n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

所以当  $x_i > 0, i = 1, \dots, n$  时,  $L(\theta) > 0$ , 并且

$$\ln L(\theta) = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\text{令 } \frac{d \ln L}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i = 0$$

解得  $\theta$  的极大似然估计值为  $\hat{\theta} = \bar{x}$

故其极大似然估计量为  $\hat{\theta} = \bar{X}$

由于  $E(\hat{\theta}) = E(\bar{X}) = E(X) = \theta$ , 故  $\hat{\theta} = \bar{X}$  是  $\theta$  无偏估计.

$$\text{又 } \ln f(x, \theta) = -\ln \theta - \frac{x}{\theta}; \quad \frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{x}{\theta^2}$$

$$\text{故信息量 } I(\theta) = E \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X, \theta) \right]^2 = E \left( -\frac{1}{\theta} + \frac{X}{\theta^2} \right)^2 = \frac{1}{\theta^4} E(X - \theta)^2 = \frac{D(X)}{\theta^4} = \frac{1}{\theta^2}$$

$$\text{由于 } D(\hat{\theta}) = D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{\theta^2}{n} = \frac{1}{nI(\theta)}$$

所以估计量  $\hat{\theta}$  是为  $\theta$  的有效估计.

$$4. (1) \text{ 由于 } E(2^X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k \lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{2\lambda} e^{-\lambda} = e^{\lambda}$$

所以如果  $X_1, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的一个样本, 则  $2^{X_i} (i = 1, 2, \dots, n)$  均为  $e^{\lambda}$  的无偏估计.

$$(2) \text{ 由于 } \hat{\theta} = (-1)^X, \text{ 所以有 } E(\hat{\theta}) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k!} = e^{-2\lambda}$$

故  $\hat{\theta} = (-1)^X$  是  $\theta = e^{-2\lambda}$  的无偏估计.

5 (1) 由本章基本题 5 知

$$b = E(X) = \exp\left\{\mu + \frac{1}{2}\right\}$$

(2) 由于  $Y \sim N(\mu, 1)$ , 所以  $\mu$  的置信度为  $1 - \alpha$  的置信区间为

$$(\bar{Y} - \frac{1}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{Y} + \frac{1}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}) \quad \text{其中 } \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln X_i$$

在本题中已知  $n=4$ , 经计算得  $\bar{y}=0$ , 查表得  $z_{0.025}=1.96$ , 所以  $\mu$  的置信度为 0.95 的置信区间为  $(-0.98, 0.98)$ .

(3) 由上面的结果,  $b$  的置信度为  $1-\alpha$  的置信区间为

$$\left( \exp(\bar{Y} - \frac{1}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2}), \exp(\bar{Y} + \frac{1}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{2}) \right)$$

将  $n=4$ ,  $\bar{y}=0$ ,  $z_{0.025}=1.96$  代入得  $b$  的置信度为 0.95 的置信区间为  $(e^{-0.48}, e^{1.48})$

6. (1) 由于  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$ , 所以有  $P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi_{1-\alpha}^2(n-1)\right\} = 1-\alpha$

即  $P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)} > \sigma^2\right\} = 1-\alpha$

所以  $\sigma^2$  的置信度为  $1-\alpha$  的置信上限为  $\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}$

(2) 由于  $\sigma^2$  的置信度为  $1-\alpha$  的置信区间为  $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}\right)$

所以  $\log \sigma^2$  的置信度为  $1-\alpha$  的置信区间为  $\left(\log \frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \log \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}\right)$

其区间长度为  $\log \frac{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}$ , 因此要使其具有固定长度  $L$ , 必须选择样本容量  $n$  使其满足

$$\log \frac{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} = L, \quad \text{即} \quad \frac{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} = e^L$$

7. (1) 由题意知,  $X_i \sim N(\frac{\theta}{2} t_i^2, \sigma^2)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), 且相互独立, 由于  $\hat{\theta}$  是  $X_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) 线性组合, 故也服从正态分布.

又 
$$E(\hat{\theta}) = \frac{2 \sum_{i=1}^n t_i^2 E(X_i)}{\sum_{i=1}^n t_i^4} = \theta, \quad D(\hat{\theta}) = \frac{4 \sum_{i=1}^n t_i^4 D(X_i)}{(\sum_{i=1}^n t_i^4)^2} = \frac{4\sigma^2}{\sum_{i=1}^n t_i^4}$$

于是 
$$U = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\frac{4\sigma^2}{\sum_{i=1}^n t_i^4}}} \sim N(0, 1), \quad \text{由} \quad P\{z_{1-\alpha+\alpha_1} < U < z_{\alpha_1}\} = 1-\alpha$$

可解得  $\theta$  的置信度为  $1-\alpha$  的置信区间为

$$\left( \hat{\theta} - \frac{2\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^n t_i^4}} z_{\alpha_1}, \hat{\theta} - \frac{2\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^n t_i^4}} z_{1-\alpha+\alpha_1} \right)$$

因此,要是上面的区间具有固定长度,必须选择合适的 $\alpha_1$ ,使
$$\frac{2\sigma(z_{\alpha_1} - z_{1-\alpha+\alpha_1})}{(\sum_{i=1}^n t_i^4)^{1/2}} = L$$

(2) 由于有限制  $0 \leq t_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n$ , 因此要是区间长度尽可能的短, 必须使上式的分母

$\sqrt{\sum_{i=1}^n t_i^4}$  尽可能的大, 因此我们取  $t_i = 1, i = 1, 2, \dots, n$ .

8. 设  $\alpha_1, \alpha_2$  不相等, 且  $\alpha_1 < \frac{\alpha}{2} < \alpha_2$ , 则  $z_{\alpha_2} < z_{\frac{\alpha}{2}} < z_{\alpha_1}$ , 由于  $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ , 所以

$\alpha_2 - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} - \alpha_1$ , 设标准正态分布的概率密度为  $\varphi(x)$ , 则

$$\int_{z_{\alpha_2}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}} \varphi(x) dx = \alpha_2 - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2} - \alpha_1 = \int_{z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\alpha_1}} \varphi(x) dx$$

由于  $\varphi(x)$  在  $x > 0$  时是单调递减的, 所以有  $z_{\alpha_1} - z_{\frac{\alpha}{2}} > z_{\frac{\alpha}{2}} - z_{\alpha_2}$ , 即  $z_{\alpha_1} + z_{\alpha_2} > 2z_{\frac{\alpha}{2}}$

因此, 区间  $(\bar{X} - z_{\alpha_1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha_2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$  的长度为  $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{\alpha_1} + z_{\alpha_2}) > \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}$ , 而右边即为

$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$  是置信区间的长度.

所以形如  $(\bar{X} - z_{\alpha_1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + z_{\alpha_2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$  的置信度为  $1 - \alpha$  ( $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ ) 的置信区间中, 当

$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$  时, 区间长度最短.

9. (1) 设  $\bar{X} = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} Y_i$ , 则有 
$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

则  $\mu_1 - \mu_2$  的置信度为  $1 - \alpha$  的置信区间为

$$\left( \bar{X} - \bar{Y} - z_{\alpha-\alpha_1} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \bar{X} - \bar{Y} + z_{\alpha_1} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right)$$

要使该区间具有固定长度  $L$ , 必须选择适当的  $\alpha_1$  或样本容量  $n_1, n_2$ , 使得

$$z_{\alpha-\alpha_1} + z_{\alpha_1} = \frac{L}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

(2) 由于  $L = \frac{2}{5} \sigma, n_1 = n_2 = n$ , 取  $\alpha_1 = \frac{\alpha}{2}$ , 则上式变为 
$$2z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{2}{5} \sigma}{\sqrt{\frac{2}{n}} \sigma}$$

解得  $n = (5\sqrt{2}z_{\alpha/2})^2$ , 又  $\alpha = 0.1$ , 故  $z_{0.05} = 1.645$ , 代入计算得  $n = 135.3$ , 由于容量为整数, 故取  $n = 136$ .

10. (1) 总体  $X$  的概率密度为  $f(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}$

设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是相应的样本值, 则似然函数为

$$L(\mu) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}} = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right)$$

取对数, 得  $\ln L(\mu) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$

$$\text{令 } \frac{d \ln L(\mu)}{d\mu} = \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0$$

解得  $\mu$  的极大似然估计值为  $\hat{\mu} = \bar{x}$ , 从而  $\mu$  的极大似然估计量为  $\hat{\mu} = \bar{X}$ .

(2) 依据辛钦大数定律, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\hat{\mu} = \bar{X}$  依概率收敛于  $\mu$ , 故  $\hat{\mu} = \bar{X}$  是  $\mu$  的一致估计量.

$$\text{又 } E(\hat{\mu}) = E(\bar{X}) = E(X) = \mu$$

故  $\hat{\mu} = \bar{X}$  是  $\mu$  的无偏估计量.

$$\text{由于 } \ln f(x, \mu) = -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} (x - \mu)^2; \quad \frac{\partial \ln f}{\partial \mu} = x - \mu$$

$$\text{信息量 } I(\mu) = E\left(\frac{\partial \ln f(X, \mu)}{\partial \mu}\right)^2 = E(X - \mu)^2 = D(X) = 1$$

$$\text{由于 } D(\hat{\mu}) = D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{1}{n} = \frac{1}{nI(\mu)}$$

综上所述, 所得的估计量为  $\mu$  的一致的、无偏的达到罗-克拉美不等式下界的有效估计.

$$11. (1) \quad E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, \theta) dx = \int_0^{\theta} \frac{2x^2}{\theta^2} dx = \frac{2}{3}\theta$$

$$\text{令 } \frac{2}{3}\theta = \bar{X}, \text{ 解得 } \theta \text{ 的矩估计量为 } \hat{\theta} = \frac{3}{2}\bar{X}$$

$$(2) \text{ 由于 } E(\hat{\theta}) = \frac{3}{2}E(\bar{X}) = \frac{3}{2}E(X) = \theta, \text{ 故 } \hat{\theta} \text{ 是 } \theta \text{ 的无偏估计量.}$$

$$(3) \quad \ln f(x, \theta) = \ln 2x - 2 \ln \theta; \quad \frac{\partial \ln f}{\partial \theta} = -\frac{2}{\theta}$$

$$\text{信息量 } I(\theta) = E\left(\frac{\partial \ln f(X, \theta)}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{4}{\theta^2}$$

$$\text{又 } E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, \theta) dx = \int_0^{\theta} \frac{2x^3}{\theta^2} dx = \frac{1}{2}\theta^2$$

$$\text{故 } D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{18}\theta^2$$

$$\text{由于 } D(\hat{\theta}) = \frac{9}{4}D(\bar{X}) = \frac{9}{4n}D(X) = \frac{1}{8n}\theta^2 < \frac{1}{4n}\theta^2 = \frac{1}{nI(\theta)}$$

所以  $D(\hat{\theta})$  小于罗-克拉美不等式的下界.

## 第八章 假设检验

## (一) 基本题

1. 此题是在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下检验假设:

$$H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0 \quad \text{其中 } \mu_0 = 1600$$

检验统计量为  $u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ , 拒绝域为  $|u| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$ , 已知  $\sigma = 150, n = 26, \bar{x} = 1637$ , 查表得

$z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96$ , 计算得  $|u| = 1.258 < 1.96$ , 所以接受原假设  $H_0$ , 即认为这批产品的指标的

期望值  $\mu$  为 1600.

2. 设该次考试的考生成绩为  $X$ , 则  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 把从  $X$  中抽取的容量为  $n$  的样本均值记为  $\bar{x}$ , 样本标准差为  $s$ , 本题是在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下检验假设:

$$H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0 \quad \text{其中 } \mu_0 = 70$$

检验统计量为  $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$ , 拒绝域为  $|t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ , 由  $n = 36, \bar{x} = 66.5, s = 15$ ,

$$t_{0.025}(36-1) = 2.0301, \text{ 算得 } |t| = \frac{|66.5 - 70| \sqrt{36}}{15} = 1.4 < 2.0301$$

所以接受原假设, 即可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.

3. 由题意知检验统计量为  $u = \frac{\bar{x} - 1000}{\sigma / \sqrt{n}}$ , 拒绝域为  $u < -z_{\frac{\alpha}{2}}$ , 由

$n = 25, \bar{x} = 950, \sigma = 100, \alpha = 0.05, z_{0.025} = 1.96$ , 算得

$$u = \frac{(950 - 1000) \sqrt{25}}{100} = -2.5 < -1.96$$

所以拒绝原假设, 即认为这批元件不合格.

4. (1) 检验统计量为  $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$ , 拒绝域为  $|t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ , 由

$n = 10, \mu_0 = 0.5\%, \bar{x} = 0.452\%, s = 0.037\%, \alpha = 0.05, t_{0.025}(9) = 2.2622$ , 算得

$$|t| = 3.8919 > 2.2622$$

所以拒绝原假设  $H_0$ .

(2) 检验统计量为  $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$  (其中  $\sigma_0 = 0.04\%$ ), 拒绝域为

$$\{\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)\} \cup \{\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)\}$$

查表得  $\chi_{0.025}^2(9) = 19.023, \chi_{0.975}^2(9) = 2.7$ , 算得  $\chi^2 = 7.701$ , 它没有落在拒绝域中, 故接受原假设  $H_0$ .

5. 本题是在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下检验假设:

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1: \sigma > \sigma_0^2 \quad (\text{其中 } \sigma_0 = 0.005)$$

检验统计量为  $\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$ , 拒绝域为  $\{\chi^2 > \chi_{\alpha}^2(n-1)\}$ , 由

$n = 9, s = 0.007, \chi_{0.05}^2(8) = 15.504$ , 算得  $\chi^2 = 15.68 > 15.504$ , 因此拒绝原假设  $H_0$ , 即认为这批导线的标准差显著地偏大.

6 设枪弹甲、乙的速度分别为  $x, y$ , 并设  $x \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ .

首先需在显著性水平  $\alpha = 0.05$  检验两种枪弹在均匀性方面有无显著差异,即需检验:

$$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

检验统计量为  $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ , 拒绝域为  $C = \left\{ F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) \text{ 或 } F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) \right\}$

由

$n_1 = n_2 = 110$ ,  $s_1 = 120.41$ ,  $s_2 = 105.00$ ,  $F_{0.025}(109, 109) > F_{0.025}(120, 120) = 1.43$ ,  $F_{0.975}(109, 109) < 0.6993$ , 可以算得,  $F = 1.315$ , 显然  $0.6993 < F = 1.315 < 1.43$ , 故检验没有落在拒绝域内, 故可以认为两个总体的方差相等, 即两种枪弹在均匀性方面没有差异.

其次我们需在显著性水平  $\alpha = 0.05$  检验两种枪弹在速度方面有无显著差异, 即需检验:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \leftrightarrow H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

由于可以认为两者的方差相等, 故可取检验统计量为 
$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

其中  $s_w^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ , 拒绝域为  $C = \left\{ |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) \right\}$ .

由于  $n_1, n_2$  很大, 故有  $t_{0.025}(218) \approx z_{0.025} = 1.96$  将  $\bar{x} = 2805$ ,  $\bar{y} = 2680$ , 以上数据代入上式计算可得  $|t| = 8.206 > 1.96$ , 故拒绝原假设  $H_0$ , 可以认为两个总体的平均值有显著差异, 即两种枪弹在速度方面有显著差异.

综上所述, 两种枪弹在速度方面有显著差异但在均匀性方面没有显著差异.

7. 设马克吐温与思诺特格拉斯的小品文中由 3 个字母组成的词的比例分别为  $x, y$ , 并且由题意可设  $x \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ ,  $y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ , 本题是在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下检验假设:

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \leftrightarrow H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

由于两个总体的方差相等, 故可取检验统计量为 
$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

其中  $s_w^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ , 拒绝域为  $C = \left\{ |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) \right\}$ .

已知  $n_1 = 8, n_2 = 10$ , 查表得  $t_{0.025}(16) = 2.1199$ , 经计算得,  $\bar{x} = 0.2319, s_1 = 0.01456$ ,  $\bar{y} = 0.2097, s_2 = 0.00966$ , 代入检验统计量得  $|t| = 3.5336 > 2.1199$

故拒绝原假设, 即可以认为两个作家所写的小品文中包含由 3 个字母组成的词的比例是否有显著的差异.

8. 设两台机器所加工的零件的尺寸分别为  $x, y$ , 并且由题意可设  $x \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ , 本题是要在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下检验:  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

检验统计量为  $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ , 拒绝域为  $C = \{F \geq F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)\}$

已知  $n_1 = 8, n_2 = 9$ , 计算得  $s_1 = 0.3092, s_2 = 0.16159$ ,  $F_{0.05}(7, 8) = 3.5$ , 因此

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 3.6615 > 3.5$$

故拒绝原假设, 即可以认为第二台机器的加工精度比第一台机器的高.

9. 设没关禁闭和关禁闭的人的脑电波中的  $x, y$ , 且设  $x \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ .



(1)先在显著性水平下  $\alpha = 0.05$  检验:  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

检验统计量为  $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ , 拒绝域为  $C = \left\{ F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) \text{ 或 } F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) \right\}$

已知  $n_1 = n_2 = 10$ , 经计算得  $\bar{x} = 10.58$ ,  $\bar{y} = 9.78$ ,  $s_1^2 = 0.21$ ,  $s_2^2 = 0.36$ ,  $F = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 0.5833$

查表得  $F_{0.025}(9,9) = 4.03$ ,  $F_{0.975}(9,9) = \frac{1}{F_{0.025}(9,9)} = 0.248$

由于检验统计量的观察值 0.5833 没有落在拒绝域中,故接受原假设  $H_0$ ,即可以认为两个总体的方差没有显著差异.

(2) 再在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下检验假设:  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \leftrightarrow H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

由于两个总体的方差相等, 故可取检验统计量为 
$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

其中  $s_w^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ , 拒绝域为  $C = \left\{ |t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) \right\}$ .

查表得  $t_{0.025}(18) = 2.093$ , 经计算得  $s_w = 0.5338$ ,  $|t| = 3.35 > 2.093 = t_{0.025}(18)$

故拒绝  $H_0$ , 即认为两个总体的均值有显著差异, 即可以认为关紧闭对脑电波的影响显著.

10. 设两台机器生产的部件的重量分别为  $x, y$ , 且设  $x \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ ,  $y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ .

由题意知, 需在显著性水平下  $\alpha = 0.05$  检验:  $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

检验统计量为  $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$ , 拒绝域为  $C = \{F \geq F_{\alpha}(n_1-1, n_2-1)\}$

已知  $n_1 = 60$ ,  $n_2 = 40$ ,  $F_{0.05}(59,39) = 1.65$ , 计算得  $F = \frac{15.46}{9.66} = 1.6 < 1.65$

故接受原假设  $H_0$ , 即不能认为第一台机器生产的部件重量的方差显著地大于第二台机器生产的部件重量的方差

11. 设一年内的暴雨次数为  $X$ , 现在的问题是在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下检验假设:

$H_0: X$  服从参数为  $\lambda$  泊松分布

首先来估计泊松分布中的参数  $\lambda$ .  $\lambda$  的极大似然估计值为

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{1}{63} (0 \times 4 + 1 \times 8 + \cdots + 9 \times 0) = 2.8571$$

为利用  $\chi^2$  拟合检验法则, 将相关的计算结果列表表示(见下表).

$i$	$v_i$	$\hat{p}_i$	$n\hat{p}_i$	$v_i - n\hat{p}_i$	$(v_i - n\hat{p}_i)^2 / n\hat{p}_i$
0	4	0.0574	3.62	-1.96	0.2752
1	8	0.1641	10.34		
2	14	0.2344	14.77	-0.77	0.0401
3	19	0.2233	14.07	4.93	1.7274
4	10	0.1595	10.05	-0.05	0.0002
5	4	0.0911	5.74		
6	2	0.0434	2.73		
7	1	0.0177	1.12	-2.16	0.4592

8	1	0.0083	0.52		
$\geq 9$	0	0.0008	0.05		
$\Sigma$					$\chi^2 = 2.5021$

其中  $\hat{p}_i$  为  $p_i = P\{X = i\}$  的估计值:  $\hat{p}_i = \frac{(2.8571)^i}{i!} e^{-2.8571} \quad i = 0, 1, 2, \dots$

表中我们对于不满足  $np_i > 5$  的组作了适当的合并,并组后,  $k = 10 - 5 = 5$ , 而  $\alpha = 0.05, r = 1, \chi_{0.05}^2(5 - 1 - 1) = 7.815$ , 因此有  $\chi^2 = \sum_{i=1}^5 \frac{(v_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} = 2.5021 < \chi_{0.95}^2(3)$ ,

所以接受  $H_0$ , 即可以认为一年的暴雨次数服从泊松分布.

12. 设事故发生发生在星期  $X$ , 则本题是要在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下检验:

$$H_0: P\{X = i\} = \frac{1}{6}, i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

计算结果列表如下

$i$	$v_i$	$p_i$	$np_i$	$v_i - n\hat{p}_i$	$(v_i - n\hat{p}_i)^2 / n\hat{p}_i$
1	9	1/6	10.5	-1.5	0.2143
2	10	1/6	10.5	-0.5	0.02381
3	11	1/6	10.5	0.5	0.02381
4	8	1/6	10.5	-2.5	0.5952
5	13	1/6	10.5	2.5	0.5952
6	12	1/6	10.5	1.5	0.2143
$\Sigma$					1.6667

查表得  $\chi_{0.05}^2(6 - 1) = 11.071$ , 所以  $\chi^2 = \sum_{i=1}^6 \frac{(v_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} = 1.6667 < \chi_{0.05}^2(5)$ , 所以接受  $H_0$ ,

所以可以认为事故的发生与星期几无关.

13. 设考试成绩为  $X$ , 则由题意知需在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下检验假设:  $H_0: X \sim N(\mu, \sigma^2)$

对正态分布中的参数  $\mu, \sigma^2$  用极大似然估计法估计可得  $\mu, \sigma^2$  的估计值为

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 80.1 \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n} s^2 = 92.72$$

为利用  $\chi^2$  拟合检验法则, 将相关的计算结果列表表示(见下表).

区间	$v_i$	$\hat{p}_i$	$n\hat{p}_i$	$v_i - n\hat{p}_i$	$(v_i - n\hat{p}_i) / n\hat{p}_i$
$(-\infty, 70)$	8	0.1469	8.14	-0.14	0.002
$[70, 75)$	6	0.1512	9.072	-3.072	1.040
$[75, 80)$	14	0.1979	11.874	2.126	0.381
$[80, 85)$	13	0.1990	11.94	1.06	0.094
$[85, 90)$	8	0.1535	9.21	-1.21	0.159
$[90, 100]$	11	0.1515	9.09	1.91	0.401
$\Sigma$					2.077

表中区间的划分是按照每个区间  $[a_{i-1}, a_i)$  至少要包含 5 个样本值的原则确立的, 其中

$$\hat{p}_i = \Phi\left(\frac{a_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

而  $k = 6$ , 估计的参数为  $r = 2$ , 故  $k - r - 1 = 3, \chi_{0.05}^2(3) = 7.815$ , 而检验统计量的值

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(v_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} = 2.077 < 7.815$$

故接受原假设, 即可以认为考试成绩服从正态分布

## (二)补充题

1 设甲、乙两试验员对同样试样的分析结果分别为  $x, y$ , 令  $d = x - y$ , 则  $d_i = x_i - y_i$  为取自总体  $d$  的样本, 设  $d$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 于是本题是要在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下检验假设:  $H_0: \mu = 0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq 0$

检验统计量为 
$$u = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n}}$$

其中  $\bar{d}$ ,  $s_d$  分别是取自总体  $d$  的样本的样本均值和样本方差, 拒绝域为  $C = \{|u| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\}$

已知  $n = 8$ , 经计算得  $\bar{d} = -0.1, s_d = 0.727$ , 并且  $|u| = 0.389 < 1.96 = z_{0.025}$

故接受原假设  $H_0$ , 即认为甲、乙两试验员试验分析结果之间无显著差异.

2. 设睡眠时间为  $X$ , 且设  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 由题意知需在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下检验假设:

$$H_0: \mu = \mu_0 + 3 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0 + 3, \text{ 其中 } \mu_0 = 20.8$$

检验统计量为 
$$u = \frac{\bar{x} - (\mu_0 + 3)}{\sigma / \sqrt{n}}$$

拒绝域为  $|u| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$

已知  $n = 7, \sigma = 1.6$ , 计算得  $|u| = 1.058 < 1.96 = z_{0.025}$

故接受原假设, 即可以认为新安眠药已达到新的疗效.

3. 犯第一类错误的概率为

$$\alpha = P\{(x_1, x_2) \in C \mid H_0 \text{ 为真}\} = P\left\{\frac{3}{4x_1} \leq x_2 \mid \theta = 1\right\}$$

当  $\theta = 1$  时,  $x_1, x_2$  的联合概率密度为

$$f_{H_0}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & 0 < x_1, x_2 < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

令 
$$D = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1, x_2 < 1, \frac{3}{4x_1} \leq x_2\}$$

所以 
$$\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{H_0}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \iint_D dx_1 dx_2 = \int_{\frac{3}{4}}^1 dx_1 \int_{\frac{3}{4x_1}}^1 dx_2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \ln \frac{3}{4}$$

犯第二类错误的概率为

$$\beta = P\{(x_1, x_2) \notin C \mid H_0 \text{ 为假}\} = P\left\{\frac{3}{4x_1} > x_2 \mid \theta = 2\right\}$$

当  $\theta = 2$  时,  $x_1, x_2$  的联合概率密度为

$$f_{H_1}(x_1, x_2) = \begin{cases} 4x_1x_2, & 0 < x_1, x_2 < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

令 
$$D_1 = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1, x_2 < 1, \frac{3}{4x_1} > x_2\}$$

则 
$$\begin{aligned} \beta &= \iint_{D_1} f_{H_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 4x_1 x_2 dx_2 - \int_{\frac{3}{4}}^1 dx_1 \int_{\frac{3}{4x_1}}^1 4x_1 x_2 dx_2 \\ &= \frac{9}{16} - \frac{9}{8} \ln \frac{3}{4} \end{aligned}$$

4. 由题意知  $\bar{x} - 2\bar{y} \sim N(\mu_1 - 2\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{4\sigma_2^2}{n_2})$

取检验统计量为 
$$u = \frac{\bar{x} - 2\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{4\sigma_2^2}{n_2}}}$$

当  $H_0$  为真时,  $u \sim N(0,1)$ , 而当  $H_1$  为真时,  $u$  又偏大的倾向, 故拒绝域的形式可取为  $\{u \geq k\}$ , 由

$$\alpha = P\{u \geq k \mid \mu_1 - 2\mu_2 = 0\}$$

可解得拒绝域为

$$C = \{u \geq z_\alpha\}$$

6. 设病人在服用 A, B 两种药后身体细胞内药的浓度分别为  $x, y$ , 并且设  $x \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ . 由题意知, 需在显著性水平下  $\alpha = 0.05$  检验:

$$H_0: \sigma_1^2 = \frac{2}{3}\sigma_2^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 \neq \frac{2}{3}\sigma_2^2$$

或 
$$H_0: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{2}{3} \leftrightarrow H_1: \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq \frac{2}{3}$$

由于 
$$\frac{(n_1-1)s_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1), \quad \frac{(n_2-1)s_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1)$$

所以 
$$\frac{s_1^2}{s_2^2} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

于是取检验统计量为  $F = \frac{3s_1^2}{2s_2^2}$ , 当原假设  $H_0$  为真时,  $F \sim F(n_1-1, n_2-1)$ , 拒绝域为

$$C = \left\{ F \leq F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) \text{ 或 } F \geq F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) \right\}$$

已知  $n_1 = 8, n_2 = 6$ ,  $F_{0.025}(7,5) = 5.29$ ,  $F_{0.975}(7,5) = 0.189$  计算得  $s_1^2 = 0.01918, s_2^2 = 0.0293$ , 并且  $F = 0.98202$ . 由于检验统计量的值不在拒绝域中, 故接受原假设, 即认为 A 种药在病人身体内的浓度的方差是 B 种药在病人身体细胞内浓度方差的  $\frac{2}{3}$ .