概率论与数理统计
第七章 参数估计

金玲飞

复旦大学计算机学院
Email: lfjin@fudan.edu.cn

2019.12.23

7.3 区间估计

区间估计 Interval estimate

- 对未知参数θ，除了求它的点估计外，我们希望估出一个范围，并知道这个范围包含未知参数θ的可靠程度。

- 区间估计：找两个统计量$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ 和$\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$来把未知参数$\theta$估计在$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$内。 由于样本的随机性，$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$盖住$\theta$的可能性并不确定。一般的，要求概率尽可能大。

置信区间

定义 (7.3.1 confidence interval)

设总体X的分布函数为$F(x;\theta)$，未知参数$\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}$，$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自$X$的样本，$\alpha$是给定值($0 < \alpha < 1$)。若两个统计量 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ 和 $\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ 满足

$$P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} = 1 - \alpha, \forall \theta \in \Theta$$

则称随机区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$是$\theta$的置信度为$1 - \alpha$的置信区间，分别称$\overline{\theta}$ 和$\underline{\theta}$为置信上限 *confidence upper limit*和置信下限 *confidence lower limit*。

- 置信区间又称区间估计，置信度又称置信水平；
- 置信区间的长度刻画了区间估计的精度；
- 置信度表达了置信区间包含未知参数真值的可靠度。

- 置信区间又称区间估计，置信度又称置信水平；
- 置信区间的长度刻画了区间估计的精度；
- 置信度表达了置信区间包含未知参数真值的可靠度。

置信区间好坏的两个要素：

- 精度：区间的长度越短，精度越高；
- 置信度 $1-\alpha$越大越好。

- 置信区间又称区间估计，置信度又称置信水平；
- 置信区间的长度刻画了区间估计的精度；
- 置信度表达了置信区间包含未知参数真值的可靠度。

置信区间好坏的两个要素：

- 精度：区间的长度越短，精度越高；
- 置信度 $1-\alpha$越大越好。

一般的，我们先确定置信度，然后再寻找长度最短的一个置信区间。

如何选取最短的一个置信区间？

枢轴量法

(1) 构造一个样本$X_1, X_2, \ldots, X_n$和θ的函数 $Z = Z(X_1, X_2, \ldots, X_n; \theta)$。$Z$的分布已知，不依赖于$\theta$。一般称这样的函数为枢轴量 pivotal variable。

(2) 对于给定的置信度$1-\alpha$，适当的选取两个常数a, b使得

$$P\{a < Z(X_1, X_2, \ldots, X_n; \theta) < b\} = 1-\alpha, \quad \forall \theta \in \Theta$$

(3) 利用不等式变形，求得未知参数θ的置信区间。 若可以求得$P\{\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}\} = 1-\alpha$，则$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$就是$\theta$的置信度为$1-\alpha$的置信区间。

单侧置信区间

有时只关心上限或下限。

定义 (7.3.2)

对给定的$\alpha(0 < \alpha < 1)$，若统计量$\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$满足

$$P\{\underline{\theta} < \theta\} = 1 - \alpha, \forall \theta \in \Theta$$

则称随机区间$(\underline{\theta}, +\infty)$是$\theta$的置信度为$1 - \alpha$的单侧置信区间，称$\underline{\theta}$ 为置信下限。 若统计量$\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$满足

$$P\{\theta < \overline{\theta}\} = 1 - \alpha, \forall \theta \in \Theta$$

则称随机区间$(-\infty, \overline{\theta})$是$\theta$的置信度为$1 - \alpha$的单侧置信区间，称$\underline{\theta}$ 为置信上限。

7.4 正态总体均值与方差的区间估计

单个正态总体均值的区间估计

1. 当σ^2已知时，μ的区间估计

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本。

单个正态总体均值的区间估计

1. 当σ^2已知时，μ的区间估计

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本。

1. 选取枢轴量$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$，已知$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$。
2. 对给定的α，

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\frac{\alpha}{2}}\right\} = 1-\alpha$$

3. 由此得到μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$$

注：从$P\left\{-z_{\frac{\alpha}{3}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\frac{2\alpha}{3}}\right\} = 1-\alpha$ 也可得到置信区间，但这个置信区间比$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ 长。

注：从$P\left\{-z_{\frac{\alpha}{3}} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{\frac{2\alpha}{3}}\right\} = 1-\alpha$ 也可得到置信区间，但这个置信区间比$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}, \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$ 长。

注：对于标准正态分布和t分布这种对称分布，取对称的分位点所得的区间最短。

单个正态总体均值的区间估计

2. 当σ^2未知时，μ的区间估计

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本。

单个正态总体均值的区间估计

2. 当σ^2未知时，μ的区间估计

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本。

1. 选取枢轴量$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$，已知$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$，有

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

2. 由此得到μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\overline{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

单个正态总体均值的区间估计——例子

例子 (7.4.1)

设某种清漆的9个样品，其干燥时间（单位：h）分别为

$$6.0 \quad 5.7 \quad 5.8 \quad 6.5 \quad 7.0 \quad 6.3 \quad 5.6 \quad 6.1 \quad 5.0$$

设干燥时间总体服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$。分别就下列两种情形求μ的置信度为0.95的置信区间：

1. $\sigma = 0.6(h)$
2. σ未知

单个正态总体均值的区间估计——例子

例子 (7.4.1)

设某种清漆的9个样品，其干燥时间（单位：h）分别为

$$6.0 \quad 5.7 \quad 5.8 \quad 6.5 \quad 7.0 \quad 6.3 \quad 5.6 \quad 6.1 \quad 5.0$$

设干燥时间总体服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$。分别就下列两种情形求μ的置信度为0.95的置信区间：

1. $\sigma = 0.6(h)$
2. σ未知

$$\overline{X} = 6, s = 0.577$$

单个正态总体方差的区间估计

1. 当μ已知时，σ^2的区间估计

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本。

单个正态总体方差的区间估计

1. 当μ已知时，σ^2的区间估计

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本。

1. 选取枢轴量

$$\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$$

2. 由χ^2分布的分位点可得

$$P\left\{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n) < \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)\right\} = 1-\alpha$$

1. 得到σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)} \right\}$$

1. 得到σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right\}$$

- 得到σ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left\{\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)}}, \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}}\right\}$$

单个正态总体方差的区间估计

2. 当μ未知时，σ^2的区间估计

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本。

单个正态总体方差的区间估计

2. 当μ未知时，σ^2的区间估计

设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本。

1. 选取枢轴量

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

2. 可得σ^2的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)} \right)$$

1. σ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}}\right)$$

单个正态总体方差的区间估计 I

例子 (7.4.3)

随机地取某种炮弹9发作试验，得炮口速度的样本标准差$S = 11(m/s)$。设炮口速度服从正态分布，求这种炮弹的炮口速度的标准差的置信度为0.95的置信区间。

两个正态总体均值差的区间估计

1. 当σ_1^2及σ_2^2已知时，$\mu_1-\mu_2$的区间估计

设$X_1,\ldots,X_{n_1}$来自总体$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y_1,\ldots,Y_{n_2}$来自总体$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，其两组样本相互独立。

两个正态总体均值差的区间估计

1. 当σ_1^2及σ_2^2已知时，$\mu_1-\mu_2$的区间估计

设$X_1,\ldots,X_{n_1}$来自总体$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y_1,\ldots,Y_{n_2}$来自总体$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，其两组样本相互独立。

1. 选取枢轴量

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

2. 可得$\mu_1-\mu_2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

2. 当$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$未知时，$\mu_1 - \mu_2$的区间估计

设$X_1, \ldots, X_{n_1}$来自总体$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y_1, \ldots, Y_{n_2}$来自总体$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，其两组样本相互独立。

2. 当$\sigma_1^2=\sigma_2^2$未知时，$\mu_1-\mu_2$的区间估计

设$X_1,\ldots,X_{n_1}$来自总体$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y_1,\ldots,Y_{n_2}$来自总体$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，其两组样本相互独立。

1. 选取枢轴量

$$\frac{(\overline{X}-\overline{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\sim t(n_1+n_2-2)$$

其中

$$S_w^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$$

2. 可得$\mu_1-\mu_2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right)$$

两个正态总体均值差的区间估计——例子

例子 (7.4.2)

随机地从A批导线中抽取4根，又从B批导线中抽取5根，测得电阻(Ω)为

A批	0.143	0.143	0.143	0.137	
B批	0.140	0.142	0.136	0.138	0.140

设测定数据分别来自分布$N(\mu_1,\sigma^2)$，$N(\mu_2,\sigma^2)$，且两样本独立，又μ_1,μ_2,σ^2均未知。试求$\mu_1-\mu_2$的置信度为0.95 的置信区间。

两个正态总体均值差的区间估计——例子

例子 (7.4.2)

随机地从A批导线中抽取4根，又从B批导线中抽取5根，测得电阻(Ω)为

A批	0.143	0.143	0.143	0.137	
B批	0.140	0.142	0.136	0.138	0.140

设测定数据分别来自分布$N(\mu_1, \sigma^2)$，$N(\mu_2, \sigma^2)$，且两样本独立，又μ_1, μ_2, σ^2均未知。试求$\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.95 的置信区间。

$$\overline{x} = 0.141, \overline{y} = 0.139, s_w^2 = 6.7 * 10^{-6}$$

两个正态总体均值差的区间估计——例子

例子 (7.4.2)

随机地从A批导线中抽取4根，又从B批导线中抽取5根，测得电阻(Ω)为

A批	0.143	0.143	0.143	0.137	
B批	0.140	0.142	0.136	0.138	0.140

设测定数据分别来自分布$N(\mu_1, \sigma^2)$，$N(\mu_2, \sigma^2)$，且两样本独立，又μ_1, μ_2, σ^2均未知。试求$\mu_1 - \mu_2$的置信度为0.95 的置信区间。

$$\bar{x} = 0.141, \bar{y} = 0.139, s_w^2 = 6.7 * 10^{-6}$$

置信区间为(-0.002,0.006)。可以近似认为$\mu_1 = \mu_2$。

两个正态总体均值差的区间估计

3. 当$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$未知时，但$n_1 = n_2 = n$，$\mu_1 - \mu_2$的区间估计

设$X_1, \ldots, X_{n_1}$来自总体$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y_1, \ldots, Y_{n_2}$来自总体$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，其两组样本相互独立。

两个正态总体均值差的区间估计

3. 当$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$未知时，但$n_1 = n_2 = n$，$\mu_1 - \mu_2$的区间估计

设$X_1, \ldots, X_{n_1}$来自总体$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，$Y_1, \ldots, Y_{n_2}$来自总体$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，其两组样本相互独立。

- 令$Z_i = X_i - Y_i, \quad i = 1, \cdots, n,$
  $Z_i \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$且相互独立。
- 将Z_i看成单个正态总体可得置信度为$1 - \alpha$的置信区间为

$$(\overline{X} - \overline{Y} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1))$$

两个正态总体方差比的区间估计——μ_1及μ_2未知

1. 当μ_1, μ_2未知时，σ_1^2/σ_2^2的区间估计

两个正态总体方差比的区间估计——μ_1及μ_2未知

1. 当μ_1, μ_2未知时，σ_1^2/σ_2^2的区间估计

- 选取枢轴量

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} = \frac{\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}/(n_1-1)}{\frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}/(n_2-1)} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

- 由F分布的分位点有

$$P\left\{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1) < \frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} < F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1, n_2-1)\right\} = 1-\alpha$$

- 由此得到σ_1^2/σ_2^2的置信区间

$$\left(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right)$$

两个正态总体方差比的区间估计——例子

例子 (7.4.4)

某自动机床加工同类型套筒，假设套筒的直径服从正态分布，现从两个班次的产品中各抽验*5*个套筒，测量它们的直径，

*A*班	*2.066*	*2.063*	*2.068*	*2.060*	*2.067*
*B*班	*2.058*	*2.057*	*2.063*	*2.059*	*2.060*

试求两班所加工套筒直径的方差比置信度为*0.90*的置信区间。

大样本置信区间

当样本容量充分大，可以用渐进分布构造枢轴量。

大样本置信区间

当样本容量充分大，可以用渐进分布构造枢轴量。

- 设$X_1, \cdots, X_n$是来自$B(1, p)$的样本，现要求p的$1-\alpha$置信区间。

大样本置信区间

当样本容量充分大，可以用渐进分布构造枢轴量。

- 设$X_1, \cdots, X_n$是来自$B(1,p)$的样本，现要求p的$1-\alpha$置信区间。
- 由中心极限定理，

$$u = \frac{\overline{X} - p}{\sqrt{p(1-p)/n}} \quad \text{近似服从} \quad N(0,1)$$

- 将u作为枢轴量，$P(|\frac{\overline{X}-p}{\sqrt{p(1-p)/n}}| \le z_{\alpha/2}) \approx 1-\alpha$

- 当n较大时，置信区间近似为

$$(\overline{X} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}})$$

两个正态总体均值差区间估计 I

当σ_1^2, σ_2^2未知，$\mu_1 - \mu_2$的区间估计

- 当n_1, n_2都很大，由中心极限定理

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \quad \text{近似服从} \quad N(0, 1)$$

- $\mu_1 - \mu_2$置信区间近似为

$$\left(\overline{X} - \overline{Y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}} \right)$$

例子

设$X_1, \cdots, X_n$是来自均匀总体$U(0, \theta)$的一个样本，试对给定α，求θ的置信度为$1-\alpha$的置信区间。

例子

设$X_1, \cdots, X_n$是来自均匀总体$U(0, \theta)$的一个样本，试对给定α，求θ的置信度为$1-\alpha$的置信区间。

- 选取枢轴量$y = x_{(n)}/\theta$。已知它的密度函数为

$$f(y;\theta) = ny^{n-1}, \qquad 0 < y < 1$$

- y的分布函数

$$F(y) = y^n, \quad 0 < y < 1$$