概率论与数理统计

Assignment 13

Question 1: 设$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自于总体的样本，分别求下列概率密度中的未知参数的极大似然估计量。

$$(1)\ f(x;\theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^{\theta}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{其中}\theta > -1\text{是未知参数})$$

$$(2)\ f(x;\theta) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x \geq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{其中}\theta > 0\text{是未知参数})$$

$$(3)\ f(x;\theta_1,\theta_2) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2} exp\{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\}, & x > \theta_1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(4)\ f(x;a,b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{其中}a < b\text{是未知参数})$$

Question 2:设总体X服从参数为$N(\mu, 1)$，$X_1, \ldots, X_n$是来自总体X的一个样本，求$P(X \leq 3)$的最大似然估计。

Question 3: (P6)设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，$X_1, \ldots, X_n$是来自总体X的一个样本，试确定常数c，使统计量$c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2$为$\sigma^2$的无偏估计。

Question 4: (P7) 设$\hat{\theta_1}$和$\hat{\theta_2}$是参数θ的两个相互独立的无偏估计，并且$\hat{\theta_1}$的方差是$\hat{\theta_2}$的方差的两倍。试求常数a, b，使得$a\hat{\theta_1} + b\hat{\theta_2}$是参数$\theta$的无偏估计，并且在所有这样的无偏估计中方差最小。

Question 4: (P9)设总体$X \sim U(\theta, \theta+1)$，$X_1, \ldots, X_n$是来自总体X的一个样本，证明估计量

$$\hat{\theta_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2}, \quad \hat{\theta_2} = X_{(n)} - \frac{n}{n+1}$$

皆是参数θ的无偏估计，并且$\hat{\theta_2}$比$\hat{\theta_1}$更有效。

Question 5: 设随机变量X服从参数为λ的指数分布，求未知参数$\theta = \frac{1}{\lambda}$的最大似然估计量，并问是不是相合估计。

Question 6:设总体的密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x \geq \theta \\ 0, otherwise \end{cases}$$

其中θ是未知参数，$X_1, X_2, \ldots, X_n$是来自总体X的样本，

- 求θ的最大似然估计量$\widehat{\theta}$并验证$\widehat{\theta_1} = \widehat{\theta} - \frac{1}{n}$是$\theta$的无偏估计。
- 求θ的矩估计量$\widehat{\theta_2}$，$\widehat{\theta_2}$是不是无偏估计？
- $\widehat{\theta_1}$，$\widehat{\theta_2}$是否是相合估计？比较$\widehat{\theta_1}$，$\widehat{\theta_2}$哪个更有效。