概率论与数理统计
第一章 随机事件与概率

金玲飞

复旦大学计算机学院
Email: lfjin@fudan.edu.cn

2018.9.25

1.4 条件概率

Monty Hall problem

假设一个电视竞猜栏目，你面前有三扇门，其中一扇门后面有一台保时捷，猜到就送你了，剩下的什么也没有。假设你已经选了一扇门（不打开），此时主持人打开剩下的两扇门中什么都没有的那一扇，然后给你一次重选的机会，请问你会改变注意选择另一扇吗？

银行账户管理问题

- 某银行将客户分为信用好和坏两类，并通过分析历史数据得到：在每个月都会有近1%的好客户和10%坏客户透支银行账户。当一新客户来银行开办现金账户时，信用处通过基本检验后认为这位客户大概有70%的概率是好客户。问题是该客户第一个月内透支，问银行对这个客户的信用度有什么改变？如果他第二个月仍透支呢？

问题： 已知事件B发生，怎么求另一事件A发生的概率？

问题： 已知事件B发生，怎么求另一事件A发生的概率？

例子：任意抽取有两个小孩的家庭考察性别。$\Omega = \{bb, gb, bg, gg\}$。假定生男生女的概率是相同的，家中至少有一女孩的概率？已知家中至少有一男孩，有女孩的概率？

问题： 已知事件B发生，怎么求另一事件A发生的概率？

例子：任意抽取有两个小孩的家庭考察性别。$\Omega=\{bb,gb,bg,gg\}$。假定生男生女的概率是相同的，家中至少有一女孩的概率？已知家中至少有一男孩，有女孩的概率？

$P(A|B)$: 已知事件B发生，事件A发生的概率.

条件概率

定义 (条件概率 Conditional Probability)

设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为概率空间，$B \in \mathcal{F}$，$P(B) > 0$，则对任意$A \in \mathcal{F}$，令

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

并称它为在事件B发生的条件下事件A发生的条件概率。

条件概率

定义 (条件概率 Conditional Probability)

设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为概率空间，$B \in \mathcal{F}$，$P(B) > 0$，则对任意$A \in \mathcal{F}$，令

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

并称它为在事件B发生的条件下事件A发生的条件概率。

条件概率是概率，$P(\cdot|B)$具有概率所具有的一切性质。

$(i) P(A|B) \geq 0; (ii) P(\Omega|B) = 1;$

$(iii) A_i \in \mathcal{F}, A_i A_j = \emptyset, P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$

条件概率的性质

- $P(\varnothing|B) = 0$.
- $P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|B)$.
- $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B)$.

条件概率的性质

- $P(\varnothing|B) = 0$.
- $P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|B)$.
- $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B)$.

概率是一种特殊的条件概率。

乘法公式 Multiplication formula

乘法公式

- $P(AB) = P(A|B)P(B)$.
- $P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$.

注：用于$P(A|B)$容易求得，$P(AB)$较难。

例子 (1.4.2)

袋中有a只白球和b只红球。现依次不放回地从袋中任取两球，试求两次均取到白球的概率。

例子 (1.4.2)

袋中有a只白球和b只红球。现依次不放回地从袋中任取两球，试求两次均取到白球的概率。

例子 (1.4.3)

袋中有一个白球和一个黑球，一次次地从袋中取球，如果取出白球，则除把白球放回外再加进一个白球，直至取出黑球为止。求取了n次都没有取到黑球的概率。

全概率公式

求事件A的概率难求怎么办？

定义 (1.4.2 完备事件组)

设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为概率空间，$B_i \in \mathscr{F}, i = 1, \ldots, n$，如果

$$\cup_{i=1}^{n} B_i = \Omega, B_iB_j = \phi(i \neq j), P(B_i) > 0, i = 1, \ldots, n,$$

则称$B_1, \ldots, B_n$为完备事件组。
类似地，称$\mathscr{F}$中可列无穷个事件$B_1, \ldots, B_n, \ldots$为完备事件组，如果

$$\cup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega, B_iB_j = \phi(i \neq j), P(B_i) > 0, i = 1, \ldots, n, \ldots$$

全概率公式

定理 (1.4.2 Total Probability Formula)

设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为概率空间，$B_1, \ldots, B_n$为完备事件组，则对任何事件$A \in \mathcal{F}$，

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$$

类似地，若$B_1, \ldots, B_n, \ldots$为完备事件组，则对任何事件$A \in \mathscr{F}$，

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)P(A|B_i)$$

- 全概率公式用于求复杂事件的概率。
- 使用关键：找出完备事件组$B_i(i \geq 1)$ 使得$P(B_i)$和$P(A|B_i)$比较好计算。
- 全概率公式最简单的形式：

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$

- 全概率公式用于求复杂事件的概率。
- 使用关键：找出完备事件组$B_i (i \geq 1)$ 使得$P(B_i)$和$P(A|B_i)$比较好计算。
- 全概率公式最简单的形式：

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$

- 条件$B_1, \ldots, B_n$为样本空间的一个分割，可以改成$B_1, \ldots, B_n$互不相容且$A \subset \cup_{i=1}^n B_i$，定理依然成立。

例子

摸彩模型 设n张彩票中有一张奖券，求第二个人摸到奖券的概率？

例子

摸彩模型 设n张彩票中有一张奖券，求第二个人摸到奖券的概率？

解：设A_i =第i人摸到奖券

$$P(A_1) = 1/n, P(\overline{A_1}) = \frac{n-1}{n}$$

$$P(A_2|A_1) = 0, P(A_2|\overline{A_1}) = \frac{1}{n-1}$$

$$P(A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) + P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1}) = 1/n$$

注： 与先后顺序无关。

例子 (1.4.4)

某工厂有四条流水线生产同一种产品，该四条流水线的产量分别占到总产量的*15%,20%,30%,35%*。又这四条流水线的不合格品率依次为*0.05,0.04,0.03,0.02*。现在从出厂产品中任取一件，问恰好抽到不合格品的概率是多少？

例子 (1.4.4)

某工厂有四条流水线生产同一种产品，该四条流水线的产量分别占到总产量的*15%,20%,30%,35%*。又这四条流水线的不合格品率依次为*0.05,0.04,0.03,0.02*。现在从出厂产品中任取一件，问恰好抽到不合格品的概率是多少？

解：A：抽到不合格品， B：抽到第i条流水线的产品

$$P(A) = \sum_{i=1}^{4} P(B_i)P(A|B_i) = 0.0315$$

问： 已知抽到不合格品，问来自第一条流水线的概率？

Bayes formula

已知“结果”求“原因”

定理 (1.4.3（贝叶斯公式）)

设$B_1, \ldots, B_n$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的完备事件组，$P(A) > 0$，则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A|B_j)}, i = 1, \ldots, n$$

类似地，若$B_1, \ldots, B_n, \ldots$是完备事件组，$P(A) > 0$，则

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{\infty} P(B_j)P(A|B_j)}, i = 1, \ldots, n, \ldots$$

两种概率

- $B_1, B_2, \ldots, B_n$可以看成是导致A发生的原因

两种概率

- $B_1, B_2, \ldots, B_n$可以看成是导致A发生的原因
- 先验概率 **Prior probability**：$P(B_i)$是试验前就知道的
- 后验概率 **Posterior probability**：$P(B_i|A)$是观察到A后的B_i的概率
- 贝叶斯公式又称“逆概率公式”或“后验概率公式”

两种概率

- $B_1, B_2, \ldots, B_n$可以看成是导致A发生的原因
- 先验概率 **Prior probability**：$P(B_i)$是试验前就知道的
- 后验概率 **Posterior probability**：$P(B_i|A)$是观察到A后的B_i的概率
- 贝叶斯公式又称“逆概率公式”或“后验概率公式”

最常用的贝叶斯公式

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B})}$$

例子 (1.4.5)

用甲胎蛋白法普查肝癌。令

$$A = \text{甲胎蛋白检验结果为阳性}, B = \text{被检验者患肝癌}$$

$$\overline{A} = \text{甲胎蛋白检验结果为阴性}, \overline{B} = \text{被检验者未患肝癌}$$

由过去的资料知，

$$P(A|B) = 0.95, P(\overline{A}|\overline{B}) = 0.90$$

又知某地居民的肝癌发病率为$P(B) = 0.0004$。在一次普查中查出一批甲胎蛋白检验结果为阳性的人，求这批人中真的患有肝癌的概率$P(B|A)$。

例子 (1.4.5)

用甲胎蛋白法普查肝癌。令

$$A = \text{甲胎蛋白检验结果为阳性}, B = \text{被检验者患肝癌}$$

$$\overline{A} = \text{甲胎蛋白检验结果为阴性}, \overline{B} = \text{被检验者未患肝癌}$$

由过去的资料知，

$$P(A|B) = 0.95, P(\overline{A}|\overline{B}) = 0.90$$

又知某地居民的肝癌发病率为$P(B) = 0.0004$。在一次普查中查出一批甲胎蛋白检验结果为阳性的人，求这批人中真的患有肝癌的概率$P(B|A)$。

后验概率的大小受先验概率的影响。

解. 由贝叶斯公式 (1.4.9), 可得

$$
\begin{aligned}
P(B|A) &= \frac{P(B)\,P(A|B)}{P(B)\,P(A|B) + P(\overline{B})\,P(A|\overline{B})} \\
&= \frac{0.0004 \times 0.95}{0.0004 \times 0.95 + (1 - 0.0004) \times (1 - 0.90)} \\
&= 0.0038
\end{aligned}
\tag{1.4.10}
$$

例子 (1.4.6 “狼来了”的贝叶斯分析)

设$A=$“孩子说谎”，$B=$“孩子可信”。设村民过去对这个孩子的印象（先验概率）为

$$P(B)=0.8, P(\overline{B})=0.2$$

假设可信的孩子说谎的概率为*10%*，不可信的孩子说谎的概率为*50%*，即

$$P(A|B)=0.1, P(A|\overline{B})=0.5$$

计算第一次和第二次“狼来了”说谎发生后，村民对孩子印象（可信度）。

例子：罐子模型

设罐中有b个黑球，r个红球，每次随机取出一球，取出后将原球放回，再加入c个同色球和d个异色球。记B_i为第i次取出的是黑球，R_j为第j次取出的是红球。若连续从罐中取出三个球，其中两个红球，一个黑球的概率是

例子：罐子模型

设罐中有b个黑球，r个红球，每次随机取出一球，取出后将原球放回，再加入c个同色球和d个异色球。记B_i为第i次取出的是黑球，R_j为第j次取出的是红球。若连续从罐中取出三个球，其中两个红球，一个黑球的概率是

$$\begin{aligned} P(B_1R_2R_3) &= P(B_1)P(R_2|B_1)P(R_3|B_1R_2) \\ &= \frac{b}{b+r}\frac{r+d}{b+r+c+d}\frac{r+d+c}{b+r+2c+2d} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(R_1B_2R_3) &= P(R_1)P(B_2|R_1)P(R_3|R_1B_2) \\
&= \frac{r}{b+r}\frac{b+d}{b+r+c+d}\frac{r+d+c}{b+r+2c+2d}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(R_1R_2B_3) &= P(R_1)P(R_2|R_1)P(B_3|R_1R_2) \\
&= \frac{r}{b+r}\frac{r+c}{b+r+c+d}\frac{b+2d}{b+r+2c+2d}
\end{aligned}
$$

以上概率与黑球是第几次抽到有关。

(1) 不返回抽样：$c=-1, d=0$。只要抽取的黑球红球个数确定，概率不依赖与先后次序。

$$P(B_1R_2R_3)=P(R_1B_2R_3)=P(R_1R_2B_3)$$

(1) 不返回抽样：$c = -1, d = 0$。只要抽取的黑球红球个数确定，概率不依赖与先后次序。

$$P(B_1R_2R_3) = P(R_1B_2R_3) = P(R_1R_2B_3)$$

(2) 返回抽样：$c = 0, d = 0$。此时抽取结果互不影响。

(1) 不返回抽样：$c=-1, d=0$。只要抽取的黑球红球个数确定，概率不依赖与先后次序。

$$P(B_1R_2R_3)=P(R_1B_2R_3)=P(R_1R_2B_3)$$

(2) 返回抽样：$c=0, d=0$。此时抽取结果互不影响。

(3) 传染病模型：$c>0, d=0$。每发现一个传染病患者，都会增加再传染概率。

$$P(B_1R_2R_3)=P(R_1B_2R_3)=P(R_1R_2B_3)$$

(1) 不返回抽样：$c=-1, d=0$。只要抽取的黑球红球个数确定，概率不依赖与先后次序。

$$P(B_1R_2R_3)=P(R_1B_2R_3)=P(R_1R_2B_3)$$

(2) 返回抽样：$c=0, d=0$。此时抽取结果互不影响。

(3) 传染病模型：$c>0, d=0$。每发现一个传染病患者，都会增加再传染概率。

$$P(B_1R_2R_3)=P(R_1B_2R_3)=P(R_1R_2B_3)$$

(4) 安全模型：$c=0, d>0$。

1.5 事件的独立性

事件的独立性

直观的说：若A的发生与否与B的发生与否互不影响，则这两个事件是独立的。即

$$P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B)$$

事件的独立性

直观的说：若A的发生与否与B的发生与否互不影响，则这两个事件是独立的。即

$$P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B)$$

定义 (1.5.1（两个事件的独立性）)

设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为概率空间，$A, B \in \mathcal{F}$。如果

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称事件A与B相互独立(独立)。否则称A与B不独立或相依。

- 概率为0的事件与概率为1的事件与任何事件独立。

- 概率为0的事件与概率为1的事件与任何事件独立。

例子 (1.5.1)

袋中有a只黑球和b只白球，采取有放回方式摸球两次，记

$$A = \text{第一次摸得黑球}, B = \text{第二次摸得黑球}$$

计算$P(B|A)$，判断A, B是否独立。

- 概率为0的事件与概率为1的事件与任何事件独立。

例子 (1.5.1)

袋中有a只黑球和b只白球，采取有放回方式摸球两次，记

$$A = \text{第一次摸得黑球}, B = \text{第二次摸得黑球}$$

计算$P(B|A)$，判断A, B是否独立。

注: 若摸球改为不放回方式，判断此时A, B是否独立。

例子 (1.5.3)

若事件A, B独立，证明下列各对事件也相互独立：

$$\{\overline{A}, B\}, \{A, \overline{B}\}, \{\overline{A}, \overline{B}\}$$

例子 (1.5.3)

若事件A, B独立，证明下列各对事件也相互独立：

$$\{\overline{A}, B\}, \{A, \overline{B}\}, \{\overline{A}, \overline{B}\}$$

$$P(\overline{A}B) = P(B - AB) = P(B) - P(AB) = P(\overline{A})P(B)$$

例子 (1.5.3)

若事件A, B独立，证明下列各对事件也相互独立：

$$\{\overline{A}, B\}, \{A, \overline{B}\}, \{\overline{A}, \overline{B}\}$$

$$P(\overline{A}B) = P(B - AB) = P(B) - P(AB) = P(\overline{A})P(B)$$

- 事件A, B独立 VS 事件A, B互不相容

例子 (1.5.3)

若事件A, B独立，证明下列各对事件也相互独立：

$$\{\overline{A}, B\}, \{A, \overline{B}\}, \{\overline{A}, \overline{B}\}$$

$$P(\overline{A}B) = P(B - AB) = P(B) - P(AB) = P(\overline{A})P(B)$$

- 事件A, B独立 VS 事件A, B互不相容
- $P(A) > 0, P(B) > 0$，独立与互不相容不能同时成立。

定义 (1.5.2（三个事件的独立性）)

设A, B, C是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$中的三个事件，若有

$$
\begin{aligned}
P(AB) &= P(A)P(B) \\
P(BC) &= P(B)P(C) \\
P(AC) &= P(A)P(C)
\end{aligned}
$$

则称A, B, C 两两独立。若还有

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称A, B, C 相互独立 *mutually independent*。

定义 (1.5.2（三个事件的独立性）)

设A, B, C是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$中的三个事件，若有

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A)P(B) \\ P(BC) &= P(B)P(C) \\ P(AC) &= P(A)P(C) \end{aligned}$$

则称A, B, C 两两独立。若还有

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

则称A, B, C 相互独立 *mutually independent*。

- 将任意事件换成对立事件，仍然成立。
- 注： $A \cup B$ 与C, $A - B$ 与C 都相互独立。

例子 (1.5.4)

设样本空间$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$有等可能的四个样本点，又$A = \{\omega_1, \omega_2\}, B = \{\omega_1, \omega_3\}, C = \{\omega_1, \omega_4\}$。判断$A, B, C$是否相互独立。

例子 (1.5.4)

设样本空间$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$有等可能的四个样本点，又$A = \{\omega_1, \omega_2\}, B = \{\omega_1, \omega_3\}, C = \{\omega_1, \omega_4\}$。判断$A, B, C$是否相互独立。

例子 (1.5.5)

有一均匀正八面体，其第*1,2,3,4*面有红色，第*1,2,3,5*面有白色，第*1,6,7,8*面有黑色。现在以A, B, C分别表示投一次正八面体出现红、白、黑的事件。分析A, B, C是否相互独立。

定义 (1.5.3（n个事件的独立性）)

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$中的n个事件（$n > 2$）。若对所有可能的组合$1 \leq i < j < k < \ldots \leq n$，成立

$$
\begin{aligned}
&P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j)\\
&P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k)\\
&\cdots\cdots\\
&P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)
\end{aligned}
$$

则称$A_1, \ldots, A_n$相互独立。

定义 (1.5.3（n个事件的独立性）)

设$A_1, A_2, \ldots, A_n$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$中的n个事件（$n > 2$）。若对所有可能的组合$1 \leq i < j < k < \ldots \leq n$，成立

$$
\begin{aligned}
& P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j) \\
& P(A_iA_jA_k) = P(A_i)P(A_j)P(A_k) \\
& \cdots\cdots \\
& P(A_1A_2\cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)
\end{aligned}
$$

则称$A_1, \ldots, A_n$相互独立。

注：无穷多个事件相互独立–任意有限多个事件都相互独立。

例子 (1.5.6)

若$A_1,\ldots,A_n$相互独立，则$\overline{A}_1,\ldots,\overline{A}_n$相互独立。已知$P(A_1),\ldots,P(A_n)$，计算$P(\cup_{i=1}^n A_i)$。

例子 (1.5.6)

若$A_1, \dots, A_n$相互独立，则$\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_n$相互独立。已知$P(A_1), \dots, P(A_n)$，计算$P(\cup_{i=1}^n A_i)$。

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = 1 - P(\cap_{i=1}^n \overline{A_i}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$$

推论 (1.5.7)

设随机试验中某一事件A发生的概率为$\epsilon > 0$，则不论ϵ如何小，当我们不断独立地重复做该试验，则A迟早会发生的概率为1。

例子 (1.5.6)

若$A_1,\ldots,A_n$相互独立，则$\overline{A}_1,\ldots,\overline{A}_n$相互独立。已知$P(A_1),\ldots,P(A_n)$，计算$P(\cup_{i=1}^n A_i)$。

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) = 1 - P(\cap_{i=1}^n \overline{A_i}) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P(A_i))$$

推论 (1.5.7)

设随机试验中某一事件A发生的概率为$\epsilon > 0$，则不论ϵ如何小，当我们不断独立地重复做该试验，则A 迟早会发生的概率为1。

A_i : A 在第i 次试验中发生

$$P(A\text{发生}) = P(\cup_{i=1}^\infty A_i) = 1 - P(\cap_{i=1}^\infty \overline{A_i}) \geq 1 - P(\cap_{i=1}^n \overline{A_i})$$

小概率事件在一次试验中不太可能发生，但是不断重复实验，几乎必然发生。

小概率事件在一次试验中不太可能发生，但是不断重复实验，几乎必然发生。

用概率说明：

三个臭皮匠，顶个诸葛亮。

众矢之地，必死无疑。

例子 (1.5.8)

设每门高射炮（发射一发炮弹）击中敌机的概率为*0.6*。现若干门炮发射，问：要以*99%*的概率击中来犯一架敌机，至少需要配置多少门高射炮？

伯努利试验

两个试验相互独立：设两个试验$\mathscr{E}_1$和$\mathscr{E}_2$，试验$\mathscr{E}_1$的任一结果和试验$\mathscr{E}_2$的任一结果都是相互独立的事件。

伯努利试验

两个试验相互独立：设两个试验$\mathscr{E}_1$和$\mathscr{E}_2$，试验$\mathscr{E}_1$的任一结果和试验$\mathscr{E}_2$的任一结果都是相互独立的事件。

定义 (伯努利（Bernoulli）试验)

设随机试验$\mathscr{E}$只有两个可能的结果：A与$\overline{A}$。记$P(A) = p$。把$\mathscr{E}$独立地重复做n次的试验构成了一个新试验，我们把这个试验称作n重伯努利试验，记为$\mathscr{E}^n$。

伯努利试验

两个试验相互独立：设两个试验$\mathscr{E}_1$和$\mathscr{E}_2$，试验$\mathscr{E}_1$的任一结果和试验$\mathscr{E}_2$的任一结果都是相互独立的事件。

定义 (伯努利（Bernoulli）试验)

设随机试验$\mathscr{E}$只有两个可能的结果：A与$\overline{A}$。记$P(A)=p$。把$\mathscr{E}$独立地重复做n次的试验构成了一个新试验，我们把这个试验称作n重伯努利试验，记为$\mathscr{E}^n$。

$\mathscr{E}^n$的样本空间：

$$\Omega=\{(\omega_1,\cdots,\omega_n):\omega_i=A\quad or\quad \overline{A}, i=1,\cdots,n\}$$

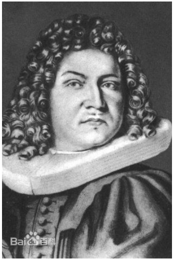
记事件

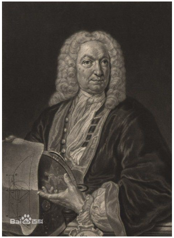
$$B_k = \text{在}n\text{重伯努利试验中事件}A\text{恰好发生}k\text{次}, 0 \le k \le n$$

则，

$$P(B_k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}, 0 \le k \le n$$

伯努利家族





Jocob（公元1654～1705） Nicolaus（公元1662～1716） Johann（公元1667～1748）

(Daniel Bernoulli 1700～1782）最杰出的一位。

例子 (1.5.10)

设一天内到图书馆的人数恰好为k的概率是$\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ $k=0,1,2,\ldots,\lambda>0$，每位到图书馆的人借书的概率为p，且每人借书与否相互独立。证明：借书人数恰好为r的概率为$\frac{(\lambda p)^r}{r!}e^{-\lambda p}$。

航班超售

据民航总局网站消息，2014年5月民航局运输司、各地区管理局、民航局消费者事务中心和中国航空运输协会受理消费者对国内航空公司的投诉99件。其中，航班问题44件，行李运输差错16件，预定、票务与登机13件，退款11件，超售与旅客服务各4件，综合(含常旅客)3件，票价与残疾旅客各2件。

序号	投诉类型	投诉件数	比例(%)
1	航班问题	44	44.44
2	行李	16	16.16
3	预定、票务与登机	13	13.13
4	退款	11	11.12
5	超售	4	4.04
6	旅客服务	4	4.04
7	综合(含常旅客)	3	3.03
8	票价	2	2.02
9	残疾旅客	2	2.02
合计		99	100