Bayesian Sequential Analysis

Fudan University
Xiaoqing Zheng
zhengxq@fudan.edu.cn

效用理论

- 评价可能的行为所产生的结果时，也有两个主要问题
- 第一是结果的价值可能没有明确的测定尺度。比如地位、顾客的好感和声望在很多商业活动中是很重要的，但对他们的重要性如何作具体的定量描述还不明确
- 其次，即使在估价时有明确的尺度（如：货币），然而，这个尺度可能并不反映决策都眼中真正的“价值”

效用理论

- 假如你有机会为完成一件很不愉快的任务可获得100美元
- 若你现在的收入水平，完成此任务挣100是够好了
- 但如果你先已得到了100万美元，那么添加这100美元的价值就显得少得多了，你可能就不会接受这个任务
- 1000100的价值可能与1000000加100的价值不一样

效用理论

- 假设你可选择在圣诞节接受作为礼物的5000美元，或者参加（免费）一项赌，赢得0美元和10000美元的机会皆为50%
- 你的选择？

从数学上谈“价值”的思想，就要用赋予数值来表示某件事的价值。这样的数被称为效用，效用理论从事于对这些数值的研究

货币价值

① 同样货币在不同的风险场合，其价值在同一个人感觉不一样。

② 同样货币，在不同的人来看，有不同的价值观。

对比提问法：

设计两种方案 A_1，A_2

A_1：无风险可得一笔金额 X_2

A_2：以概率P得一笔金额 X_3，以概率(1-P)损失一笔金额 X_1

$X_1<X_2<X_3$，$u(x_i)$表示金额x_i的效用值。

在某种条件下，决策者认为A_1，A_2两方案等效

$$P\cdot U(x_1)+(1-P)\,U(x_3)=U(x_2)$$

P，x_1，x_2，x_3为4个未知数。

已知其中3个可定第4个。

效用值计算及效用曲线

表明决策者对不同风险的态度的变化曲线

效用函数$u(x)$, $\quad 0 \le u(x) \le 1$

$$\begin{cases} x: & \text{货币值} \\ u(x): & \text{效用值} \end{cases}$$

求效用曲线方法：对比提问法

可以设已知x_1, x_2, x_3, 提问确定P。

一般用改进的方法，即固定P=0.5,每次给出

x_1, x_3，通过提问确定x_2，求出$U(x_2)$

5点法：定5个点作图

例1、在某次交易中，决策者认为：

可承担的最大损失是 -1000万元

可获得的最大收益是2000万元

$$U(2000)=1 \qquad U(-1000)=0$$

提问(1) A_1：无风险得？你觉得A_1，A_2等效？

A_2：以0.5可能得2000万，

0.5可能损失1000万。

回答 1200万，$0.5U(2000)+0.5U(-1000)=U(1200)$

则$U(1200)=0.5$

提问(2) A_1：无风险得？你觉得A_1，A_2等效？

A_2：以0.5可能得1200万，

0.5可能损失 -1000万。

回答　800万，$0.5U(1200)+0.5U(-1000) = U(800)$

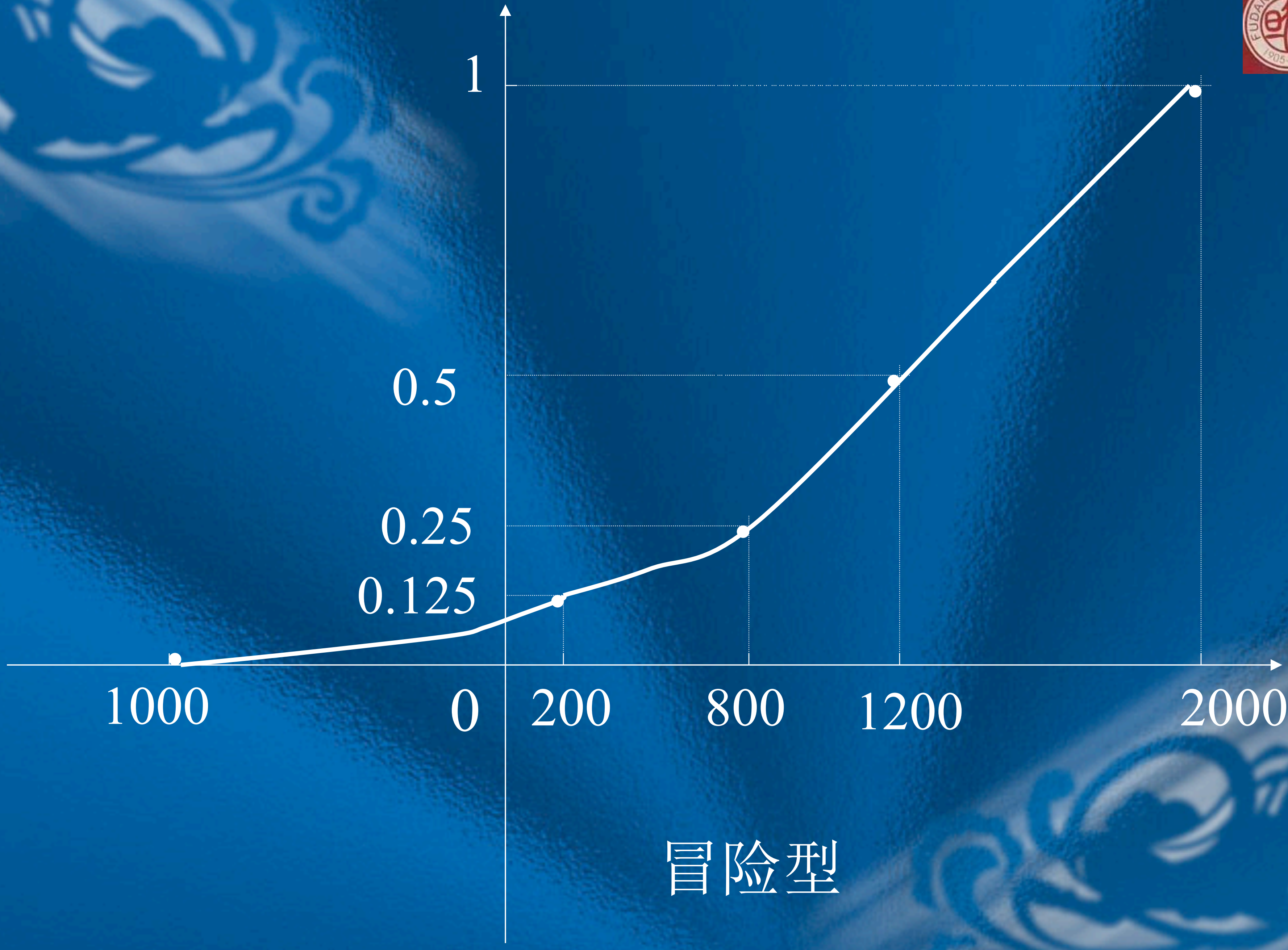
$0.5\times0.5=U(800) = 0.25$

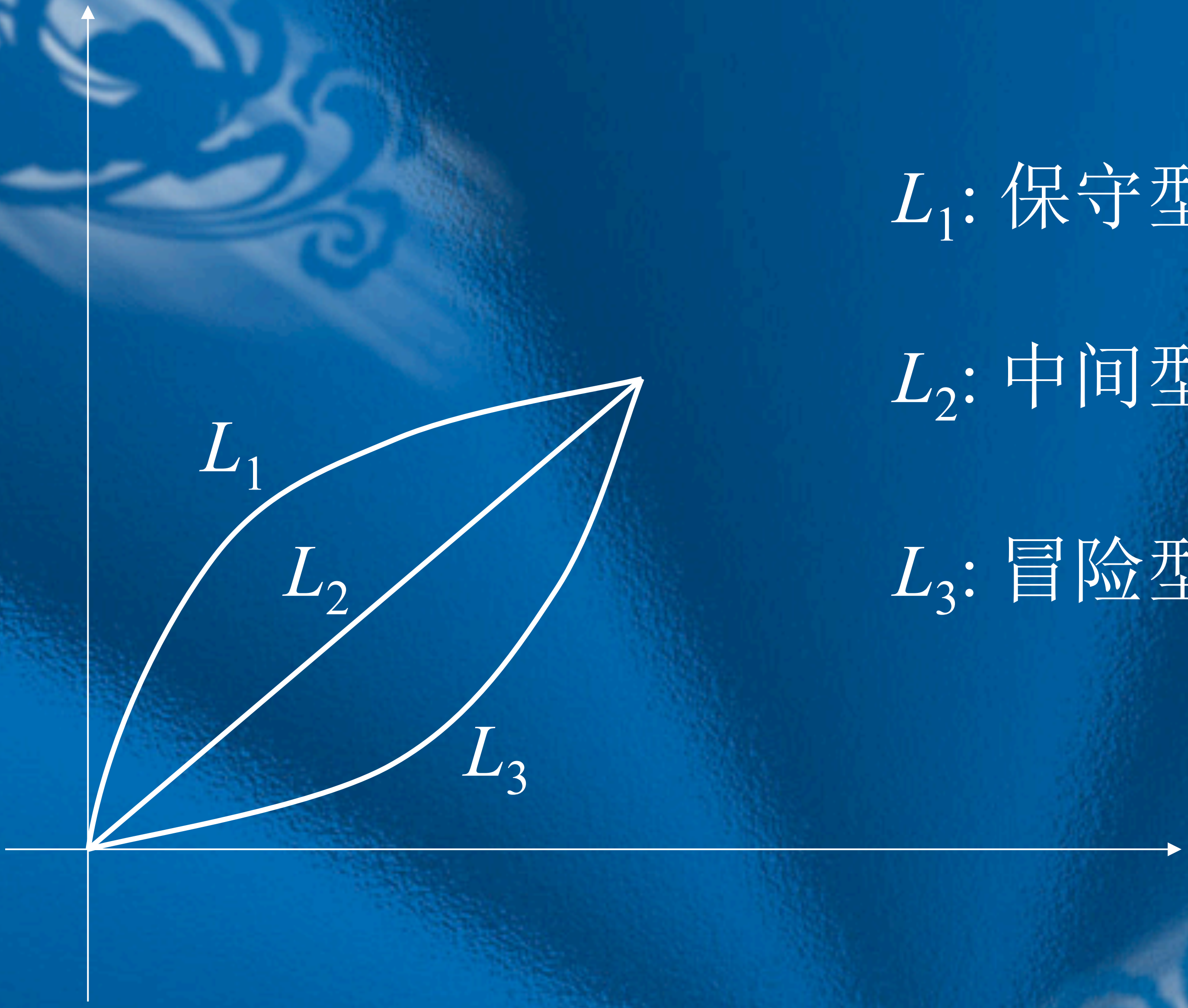
提问(3) A_1：无风险得？你觉得A_1，A_2等效？

A_2：以0.5可能得800万，

0.5可能损失 -1000万。

回答　200万，$U(200)= 0.5\times0.25 = 0.125$


1
0.5
0.25
0.125
1000
0
200
800
1200
2000
冒险型

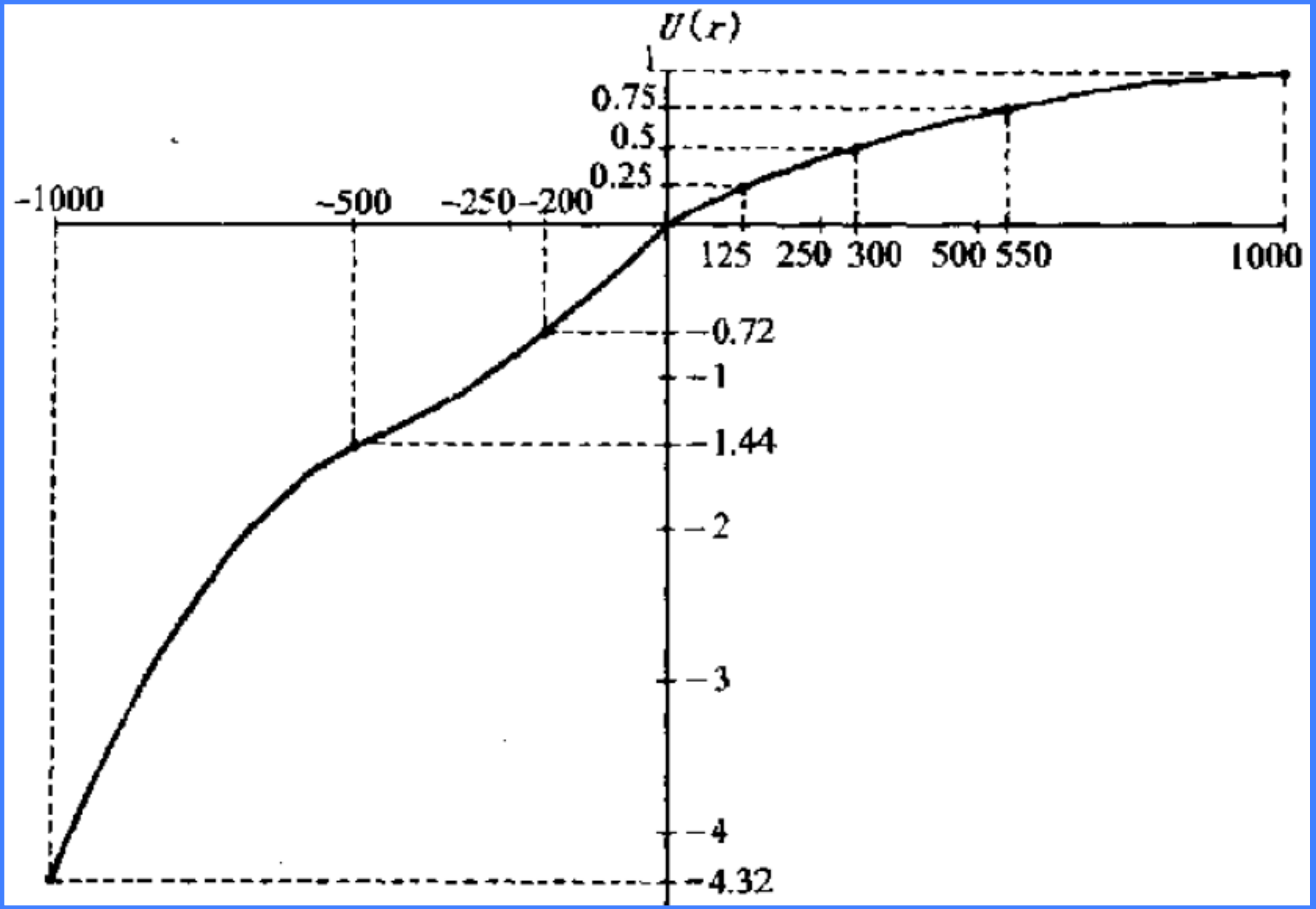


L_1: 保守型

L_2: 中间型

L_3: 冒险型

财富效用


U(x)
1
0.75
0.5
0.25
-1000
-500
-250
-200
125
250
300
500
550
1000
-0.72
-1
-1.44
-2
-3
-4
-4.32

贝叶斯序贯分析

某个制造业公司打算在俄亥俄（行为a_1）还是在亚拉巴马（ a_2）建一个新的工厂

若建在亚拉巴马要比建在俄亥俄少花费1,000,000美元，但在该区域缺乏熟练工人（在俄亥俄则有大量熟练的工人）

共需要700个熟练工，公司觉得在亚拉巴马的建厂位置所具备的熟练工人数 θ 有分布$N(350, (100)^2)$的先验密度

贝叶斯序贯分析

如果熟练工不够，公司则不得不进行培训，培训一个熟练工需花费3500美元。假设公司对钱有近似为线性的效用函数，则决策损失可写为

$$L(\theta,a)=\begin{cases}1\,000\,000 & if\ \ a=a_1\\ 3\,500(700-\theta) & if\ \ a=a_2, 0\le\theta\le 700\\ 0 & if\ \ a=a_2, \theta>700\end{cases}$$

假设公司或者立即做出决策，或者授权去进行调查（调查将花费20000美元），调查的结果为对 θ 的一个估计X，调查的精度已知为X分布密度$N(\theta, (30)^2)$

贝叶斯序贯分析

假设样本 $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ 来自于正态分布 $N(\theta, \sigma^2)$ (σ2 已知)

先验分布$\pi(\theta)$为$N(\mu, \tau^2)$，其中μ 和τ^2 已知

$\overline{X}$ 服从于分布$N(\theta, \sigma^2/n)$.

给定 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$， θ 的后验分布$N(\mu(x), \rho)$，其中：

$$\mu(x) = \frac{\sigma^2/n}{(\tau^2+\sigma^2/n)}\mu + \frac{\tau^2}{(\tau^2+\sigma^2/n)}\bar{x}$$

$$\rho = \frac{\tau^2\sigma^2}{(n\tau^2+\sigma^2)}$$

贝叶斯序贯分析

现在的问题就是决定是否做此调查（即决定是立即做决策，还是先做调查然后再决策）

不调查立即做决策的贝叶斯风险比较小的是

$$r(\pi, a_1) = 1\,000\,000 \quad \text{而}$$

$$r(\pi, a_2) = 3500\int_0^{700}(700-\theta)\pi(\theta)\,d\theta$$

$$\cong 3500\int_{-\infty}^{\infty}(700-\theta)\pi(\theta)d\theta$$

$$= 3500(700-350) = 1\,225\,000$$

立即做决策的贝叶斯风险为1 000 000

贝叶斯序贯分析

若做调查，观测值为x，后验密度$r(\theta\,|\,x)$为$N(\mu(x),\rho)$

$$\mu(x)=\frac{900}{900+10000}(350)+\frac{10000}{900+1000}(x)$$
$$\cong 28.9+(0.9174)x$$

$$\rho=\frac{(900)(10000)}{900+10000}\cong 825.66$$

贝叶斯序贯分析

$$r(\pi(\theta \mid x), a_2) = 3500\int_0^{700} (700-\theta)\pi(\theta \mid x)\,d\theta$$

若100<x<600（故从0到700，$\mu(x)$是跨过4个标准差了），上式近似为

$$3500\int_{-\infty}^{\infty} (700-\theta)\pi(\theta \mid x)\,d\theta = 3500[700-\mu(x)]$$

$$= 3500[671.1-(0.9174)x]$$

贝叶斯序贯分析

显然有 $r(\pi(\theta|x),a_1)=1000000$， 故做调查有了观测值$x$之后再做决策的贝叶斯风险为

$$
\begin{aligned}
r(x)&=\min\{r(\pi(\theta|x),a_1),r(\pi(\theta|x),a_2)\}+20000\\
&\cong\min\{(1020000),3500[676.8-(0.9174)x]\}\\
&=\begin{cases}1020000 & \text{if } 100<x<420.08\\ 3500[676.8-(0.9174)x] & \text{if } 420.08<x<600\end{cases}
\end{aligned}
$$

贝叶斯序贯分析

此时并不知道哪一个x会发生，所以只能通过所有x的期望值为估计贝叶斯风险$r(x)$，X的分布是“预报的”或边际分布$m(x)$，此时它为 $N(350,(100)^2+(30)^2)$

$$E^m[r(x)] \cong \int_{-\infty}^{420.08}(102000)m(x)\,dx$$

$$+\int_{420.08}^{\infty}3500[676.8-(0.9174)x]m(x)\,dx$$

$$\cong 763\,980+205\,745=969\,725$$

这比立即决策的风险小，所以调查花费钱是值得的

Any Question?