

## 概率论与数理统计

### Assignment 12

**Question 1:** (P3) 设  $X_1, X_2, X_3, X_4$  是来自正态总体  $N(0, 2^2)$  的简单随机抽样,  $X = a(2X_1 - X_2)^2 + b(X_3 + 3X_4)^2$ , 则当  $a, b$  各取什么值时统计量  $X$  是服从自由度2的  $\chi^2$  分布。

**Question 2:** (P4) 设随机变量  $X$  和  $Y$  相互独立且都服从正态分布  $N(0, 3^2)$ , 而  $X_1, X_2, \dots, X_9$  和  $Y_1, Y_2, \dots, Y_9$  分别是来自总体  $X$  和  $Y$  的样本, 试确定统计量  $U = \frac{X_1 + \dots + X_9}{\sqrt{Y_1^2 + \dots + Y_9^2}}$  的分布。

**Question 3:** (P6) 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自于总体的样本,

$$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + \dots + X_6); \quad Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9),$$

$$S^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=7}^9 (X_i - Y_2)^2, \quad Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}.$$

证明统计量  $Z$  是服从自由度为2的  $t$  分布。

**Question 4:** 设  $X_1, \dots, X_{2n} (n \geq 2)$  是来自正态总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本,  $\bar{X} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$  为其样本均值。求统计量  $Y = \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2$  的数学期望。

**Question 5:** (P11) 设  $\{X_n : n = 1, 2, \dots\}$  是独立同分布随机变量序列,  $E(X_n^k) = a_k (k = 1, 2, 3, 4; n = 1, 2, \dots)$ , 且  $a_4 - a_2^2 > 0$ 。试问: 当  $n$  充分大时, 随机变量  $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$  近似服从什么分布? 参数为多少?

**Question 6:** 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自于总体的样本, 分别求下列概率密度中的未知参数的矩估计。

$$(1) f(x; \theta) = \begin{cases} (\theta + 1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{其中 } \theta > -1 \text{ 是未知参数})$$

$$(2) f(x; \theta) = \begin{cases} 2e^{-2(x-\theta)}, & x \geq \theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{其中 } \theta > 0 \text{ 是未知参数})$$

$$(3) f(x; \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2} \exp\{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\}, & x > \theta_1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$(4) f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (\text{其中 } a < b \text{ 是未知参数})$$