概率论与数理统计
第一章 随机事件与概率

金玲飞

复旦大学计算机学院
Email: lfjin@fudan.edu.cn

2018.9.18

1.3 古典概型与几何概型

排列组合知识回顾

加法原理:完成一件事情有n类方法，第i类方法中有m_i种具体的方法，则完成这个事情的方法共有

$$\sum_{i=1}^{n} m_i$$

排列组合知识回顾

加法原理:完成一件事情有n类方法，第i类方法中有m_i种具体的方法，则完成这个事情的方法共有

$$\sum_{i=1}^{n} m_i$$

乘法原理：完成一件事情有n个步骤，第i个步骤有m_i种具体的方法，则完成这个事情的方法共有

$$\prod_{i=1}^{n} m_i$$

排列：从n个不同的元素中取出$r(r \leq n)$个元素排列(考虑元素出现的先后顺序)，其总数为

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

重复排列：有放回的选取中，从n个不同的元素中取出$r(r \leq n)$个元素排列，总数为n^r.

排列：从n个不同的元素中取出$r(r \le n)$个元素排列(考虑元素出现的先后顺序)，其总数为

$$A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

重复排列：有放回的选取中，从n个不同的元素中取出$r(r \le n)$个元素排列，总数为n^r.

组合：从n个不同的元素中取出$r(r \le n)$个元素拼成一组(不考虑元素出现的先后顺序)，其总数为

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

重复组合：$\binom{n+r-1}{r}$.

例子 (1.3.2)

将一颗均匀骰子抛两次，观察出现的点数的情况。求事件A：两次抛出的点数之和为5的概率。

抽签是否与顺序有关?

例子 (1.3.3)

口袋中有a只黑球，b只白球，它们除颜色不同外没有任何差别。现在把球随机地一只只摸出来，求第k次摸出黑球的概率（$1 \le k \le a+b$）。

放球模型

例子 (1.3.4)

将n只球随机地放入$N(N \geq n)$个盒子，（设盒子的容量不限），试求下列事件概率

(1) 指定的n个盒子各有一球；
(2) 每个盒子至多有一只球的概率；
(3) 指定的一个盒子恰有m球；

放球模型

例子 (1.3.4)

将n只球随机地放入$N(N \geq n)$个盒子，（设盒子的容量不限），试求下列事件概率

(1) 指定的n个盒子各有一球；

(2) 每个盒子至多有一只球的概率；

(3) 指定的一个盒子恰有m球；

解：（1）$P_1 = \frac{n!}{N^n}$。 (2)$P_2 = \frac{\binom{N}{n} n!}{N^n} = \frac{N!}{N^n(N-n)!}$。

(3)$P_3 = \frac{C_m^n (N-1)^{(n-m)}}{N^n}$。

注：许多问题可以归结为放球模型，如生日问题。

两种抽样方式

例子 (1.3.5)

如果某批产品中有a件次品b件正品，我们采用下述抽样方式从中抽取n件产品，问正好有k件次品的概率各是多少？

(1) 有放回抽样；

(2) 不放回抽样。

两种抽样方式

例子 (1.3.5)

如果某批产品中有a件次品b件正品，我们采用下述抽样方式从中抽取n件产品，问正好有k件次品的概率各是多少？

(1) 有放回抽样；

(2) 不放回抽样。

解： 1)所求概率

$$b_k = \frac{\binom{n}{k} a^k b^{n-k}}{(a+b)^n} = \binom{n}{k} \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}.$$

两种抽样方式

例子 (1.3.5)

如果某批产品中有a件次品b件正品，我们采用下述抽样方式从中抽取n件产品，问正好有k件次品的概率各是多少？

(1) 有放回抽样；

(2) 不放回抽样。

解： 1)所求概率

$$b_k = \frac{\binom{n}{k} a^k b^{n-k}}{(a+b)^n} = \binom{n}{k} (\frac{a}{a+b})^k (\frac{b}{a+b})^{n-k}.$$

2)所求概率

$$h_k = \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}.$$

几何概型

引例：某人没有带表，他打开收音机听电台报时，已知电台是整点报时的，问他等待报时时间少于10分钟的概率。

几何概型

引例：某人没有带表，他打开收音机听电台报时，已知电台是整点报时的，问他等待报时时间少于10分钟的概率。

定义 (几何概型)

几何概型的随机试验具有如下的两个特征：

- 随机现象的样本空间Ω形成某个有界区域，其度量（长度，面积或体积等）大小是S_Ω；
- 对Ω的每个具有测度的子集A，试验的结果落入A的概率与A的测度$S(A)$成正比，而与A的位置和形状无关。

几何概型中事件的概率计算公式，

$$P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$$

例子 (1.3.9(会面问题))

甲、乙两人约定6时到7时之间在某处会面，并约定先到者应等候另一人*15min*，过时即离去。求两人能会面的概率。

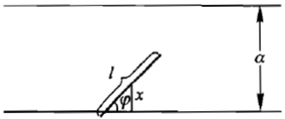
例子 (1.3.10（蒲丰投针问题）)

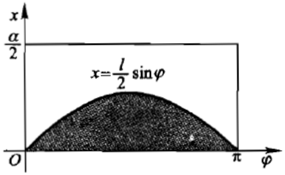
平面上画有一些等距离的平行线，相邻平行线的距离为α。向平面任意投掷一枚长为$\ell(\ell < \alpha)$的针，试求与平行线相交的概率。

例子 (1.3.10（蒲丰投针问题）)

平面上画有一些等距离的平行线，相邻平行线的距离为α。向平面任意投掷一枚长为$\ell(\ell < \alpha)$的针，试求与平行线相交的概率。

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{\pi\cdot\frac{\alpha}{2}}=\frac{2l}{\pi\alpha} \tag{1.3.5}$$





π的随机模拟

- 由蒲丰投针可知，长为ℓ的针与平行线相交的概率：$2\ell/\pi\alpha$
- 频率方法：做N次实验，n次相交，则频率n/N.
- 用频率代替概率：$\pi \approx 2\ell N/\alpha n$.

π的随机模拟

- 由蒲丰投针可知，长为ℓ的针与平行线相交的概率：$2\ell/\pi\alpha$
- 频率方法：做N次实验，n次相交，则频率n/N.
- 用频率代替概率：$\pi \approx 2\ell N/\alpha n$.

注：利用蒲丰投针问题可以得到π近似值。

表 1.2

实验者	年份	投掷次数	相交次数	针长	π 的近似值
Wolf	1850	5 000	2 532	0.8	3.159 6
Smith	1855	3 204	1 218.5	0.6	3.155 4
De Morgan,C	1860	600	382.5	1.0	3.13 7
Fox	1884	1 030	489	0.75	3.159 5
Lazzerini	1901	3 408	1 808	$0.8\dot{3}$	3.141 592 9
Reina	1925	2 520	859	0.541 9	3.179 5

如果某一未知数与某个事件的概率相关，且可以知道它们之间的函数关系式，那么，可以设计一个随机试验，然后重复这个试验，再以频率近似概率，则可求得这个未知数的近似值。——Monte Carlo method

如果某一未知数与某个事件的概率相关，且可以知道它们之间的函数关系式，那么，可以设计一个随机试验，然后重复这个试验，再以频率近似概率，则可求得这个未知数的近似值。——Monte Carlo method

——蒙特卡罗方法是在第二次世界大战期间随着计算机的诞生而兴起和发展起来的。这种方法在应用物理、原子能、固体物理、化学、生态学、社会学以及经济行为等领域中得到广泛利用。

习题：

在长度为a的线段内任取两点将其分成三段。求它们可以构成一个三角形的概率。

1.4 条件概率

Monty Hall problem

假设一个电视竞猜栏目，你面前有三扇门，其中一扇门后面有一台保时捷，猜到就送你了，剩下的什么也没有。假设你已经选了一扇门（不打开），此时主持人打开剩下的两扇门中什么都没有的那一扇，然后给你一次重选的机会，请问你会改变注意选择另一扇吗？

银行账户管理问题

- 某银行将客户分为信用好和坏两类，并通过分析历史数据得到：在每个月都会有近1%的好客户和10%坏客户透支银行账户。当一新客户来银行开办现金账户时，信用处通过基本检验后认为这位客户大概有70%的概率是好客户。问题是该客户第一个月内透支，问银行对这个客户的信用度有什么改变？如果他第二个月仍透支呢？

问题： 已知事件B发生，怎么求另一事件A发生的概率？

问题： 已知事件B发生，怎么求另一事件A发生的概率？

例子：任意抽取有两个小孩的家庭考察性别。$\Omega = \{bb, gb, bg, gg\}$。假定生男生女的概率是相同的，家中至少有一女孩的概率？已知家中至少有一男孩，有女孩的概率？

问题： 已知事件B发生，怎么求另一事件A发生的概率？

例子：任意抽取有两个小孩的家庭考察性别。$\Omega = \{bb, gb, bg, gg\}$。假定生男生女的概率是相同的，家中至少有一女孩的概率？已知家中至少有一男孩，有女孩的概率？

$P(A|B)$: 已知事件B发生，事件A发生的概率.

条件概率

定义 (条件概率 Conditional Probability)

设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为概率空间，$B \in \mathcal{F}$，$P(B) > 0$，则对任意$A \in \mathcal{F}$，令

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

并称它为在事件B发生的条件下事件A发生的条件概率。

条件概率

定义 (条件概率 Conditional Probability)

设$(\Omega, \mathcal{F}, P)$为概率空间，$B \in \mathcal{F}$，$P(B) > 0$，则对任意$A \in \mathcal{F}$，令

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

并称它为在事件B发生的条件下事件A发生的条件概率。

条件概率是概率，$P(\cdot|B)$具有概率所具有的一切性质。
$(i) P(A|B) \geq 0$; $(ii) P(\Omega|B) = 1$;
$(iii) A_i \in \mathcal{F}, A_iA_j = \emptyset, P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$

条件概率的性质

- $P(\varnothing|B) = 0$.
- $P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|B)$.
- $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B)$.

条件概率的性质

- $P(\varnothing|B) = 0.$
- $P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|B).$
- $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B).$

概率是一种特殊的条件概率。