概率论与数理统计
第三章 多维随机变量及其分布

金玲飞

复旦大学计算机学院
Email: lfjin@fudan.edu.cn

2018.10.30

目录

- 二维随机变量及其联合分布函数的概念
- 二维离散型和连续型随机变量的概念，边缘分布。
- 二维均匀分布，二维正态分布。
- 随机变量的独立性，条件分布。
- 二维随机变量函数的分布，n维随机变量。

二维随机变量

定义 (Two-dimensional random variable)

设X, Y是定义在同一概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机变量，则由它们构成的二维变量(X, Y)称为二维随机变量，亦称为二维随机向量。

二维随机变量

定义 (Two-dimensional random variable)

设X, Y是定义在同一概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的随机变量，则由它们构成的二维变量(X, Y)称为二维随机变量，亦称为二维随机向量。

定义 (Joint distribution function)

设(X, Y)是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的二维随机变量。称二元函数

$$F(x, y) = P(X \le x, Y \le y), (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

为(X, Y)的（二维）联合分布函数，简称联合分布。

概率的计算：

$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2)$$
$$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1).$$

概率的计算：

$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2)$$
$$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1).$$

注意

$$P(X > a, Y > c) \ne 1 - F(a, c)$$

联合分布函数的性质

定理 (3.1.1)

设$F(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的联合分布函数，则

(1) **单调性：** $F(x,y)$分别对x或y是单调非减的，即

$$x_1 < x_2, F(x_1,y) \le F(x_2,y);$$

$$y_1 < y_2, F(x,y_1) \le F(x,y_2).$$

(2) **有界性：** 对任意x,y，有

$$F(-\infty,y) := \lim_{x\to-\infty} F(x,y) = 0$$
$$F(x,-\infty) := \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$$
$$F(\infty,\infty) := \lim_{x\to\infty,y\to\infty} F(x,y) = 1$$

定理

(3) **右连续**：$F(x,y)$关于x和y都是（一元）右连续的，即

$$F(x+0,y)=F(x,y), -\infty < x,y < \infty$$

$$F(x,y+0)=F(x,y), -\infty < x,y < \infty$$

(4) **非负性**：对任意$x_1 \le x_2, y_1 \le y_2$，有

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1) \ge 0$$

例子 (3.1.1)

考虑如下的二元函数：

$$F(x,y)=\begin{cases}1, & x+y\geq 0\\ 0, & x+y<0\end{cases}$$

判断它是否是（二维）联合分布函数？

边缘分布

- (X, Y) 的联合分布确定了，那么个别分量的统计规律也确定了。

边缘分布

- (X, Y) 的联合分布确定了，那么个别分量的统计规律也确定了。

定义 (Marginal distribution function)

(X, Y) 关于 X 的边缘分布

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y < \infty) = F(x, \infty)$$

(X, Y) 关于 Y 的边缘分布

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X < \infty, Y \leq y) = F(\infty, y)$$

边缘分布

- (X, Y) 的联合分布确定了，那么个别分量的统计规律也确定了。

定义 (Marginal distribution function)

(X, Y) 关于 X 的边缘分布

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(X \leq x, Y < \infty) = F(x, \infty)$$

(X, Y) 关于 Y 的边缘分布

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X < \infty, Y \leq y) = F(\infty, y)$$

- 联合分布可以给出边缘分布，反之不成立。

二维离散型随机变量

若(X, Y) 的每个分量都是离散型随机变量，则 (X, Y) 为二维离散型随机变量。

定义 (3.2.1 Joint prob. mass function)

设(X, Y)为二维离散型随机变量，X取值$x_1, x_2, \ldots$，Y取值$y_1, y_2, \ldots$。令

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), i \geq 1, j \geq 1$$

称p_{ij}为(X, Y)的联合分布律（或联合分布列）。

二维离散型随机变量

若(X, Y) 的每个分量都是离散型随机变量，则 (X, Y) 为二维离散型随机变量。

定义 (3.2.1 Joint prob. mass function)

设(X, Y)为二维离散型随机变量，X取值$x_1, x_2, \ldots$， Y取值$y_1, y_2, \ldots$。 令

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j), i \geq 1, j \geq 1$$

称p_{ij}为(X, Y)的联合分布律（或联合分布列）。

联合分布律满足

- $p_{ij} \geq 0 \ (i \geq 1, j \geq 1)$
- $\sum_{i\geq 1} \sum_{j\geq 1} p_{ij} = 1$

确定联合分布律的方法：

1. 确定随机变量(X, Y)的所有取值。
2. 计算取每对值的概率。
3. 画出概率分布律表格。

确定联合分布律的方法:

1. 确定随机变量(X, Y)的所有取值。
2. 计算取每对值的概率。
3. 画出概率分布律表格。

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

联合分布函数

联合分布函数

$$
\begin{aligned}
F(x, y) &= P(X \leq x, Y \leq y) \\
&= \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}
\end{aligned}
$$

- 联合分布函数和联合分布律相互唯一确定。

边缘分布律

$$p_i(X) = \sum_{j \geq 1} p_{ij}, i \geq 1$$

$$p_j(Y) = \sum_{i \geq 1} p_{ij}, j \geq 1$$

边缘分布律

$$p_i(X) = \sum_{j\geq 1} p_{ij}, i \geq 1$$

$$p_j(Y) = \sum_{i\geq 1} p_{ij}, j \geq 1$$

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$\sum_j p_{ij} = p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\sum_i p_{ij} = p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

例子 (3.2.1)

一整数X等可能地在*1,2,3,4*中取值，另一整数Y等可能地在$1, \ldots, X$中取值。

- 求(X, Y)的联合分布律。
- 求$P(X = Y)$?

例子 (3.2.1)

一整数X等可能地在$1,2,3,4$中取值，另一整数Y等可能地在$1,\ldots,X$中取值。

- 求(X, Y)的联合分布律。
- 求$P(X=Y)$?

X \ Y	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	0	0	0
2	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

例子 (3.2.2)

袋中装有2只白球和3只黑球。现连续摸球2次，定义下列随机变量：

$$X = \begin{cases} 1, & \text{第一次摸出白球} \\ 0, & \text{第一次摸出黑球} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & \text{第二次摸出白球} \\ 0, & \text{第二次摸出黑球} \end{cases}$$

分别求下列两种情况的联合分布律和边缘分布律。

1. 有放回摸球
2. 不放回摸球

例子 (3.2.3)

设二维离散型随机变量(X, Y)的联合分布律为

X/Y	y_1	y_2
x_1	0.1	a
x_2	b	0.4

已知$P(X = x_2 | Y = y_2) = \frac{2}{3}$。试求常数$a, b$的值。

二维连续型随机变量

定义 (Joint probability density function)

设(X,Y)是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的二维随机变量，$F(x,y)$为其联合分布函数。如果存在定义在平面R^2上的非负实值函数$f(x,y)$，使得

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dudv,\quad (x,y)\in R^2$$

则称(X,Y)为（二维）连续型随机变量，称$F(x,y)$为（二维）连续型分布函数，称$f(x,y)$为（二维）联合概率密度函数，简称联合概率密度。

联合概率密度满足

- $f(x,y) \geq 0, \quad (x,y) \in R^2$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$

联合概率密度满足

- $f(x,y) \geq 0, \quad (x,y) \in R^2$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$

- 联合概率密度函数不唯一！

可以在任何面积为0的集合上任意改变联合概率密度函数的值（只要改后非负）。

性质 (3.3.1)

- 若 $f(x,y)$ 在 (x,y) 点连续，$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$.

性质 (3.3.1)

- 若 $f(x,y)$ 在 (x,y) 点连续，$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$.
- 对平面 R^2 中任意面积为 *0* 的集合 C，$P((X,Y) \in C) = 0$ (联合概率密度函数不唯一)。

性质 (3.3.1)

- 若 $f(x,y)$ 在 (x,y) 点连续，$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$.
- 对平面 R^2 中任意面积为 *0* 的集合 C，
  $P((X,Y) \in C) = 0$ (联合概率密度函数不唯一)。
- 对任意常数$x_1 < x_2, y_1 < y_2$，有

$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2) = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f(x,y) dxdy.$$

推论

对平面R^2上任一具有面积的集合D，(X, Y) 落入D 的概率

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y)dxdy$$

例子 (3.3.1)

设(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x,y) = \frac{A}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}, (x,y) \in R^2$$

1. 求常数A
2. 求(X, Y)的联合分布函数
3. 求$P(X = Y)$
4. 求$P(0 < X < 4, 0 < Y < 5)$

见P94!

边缘分布

边缘分布函数

边缘分布

边缘分布函数

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) dv \right) du$$
$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) du \right) dv$$

边缘分布

边缘分布函数

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)dv \right) du$$

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)du \right) dv$$

边缘概率密度函数

$$f_X(x) = \int_{\infty}^{\infty} f(x,v)dv$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u,y)du$$

例子 (3.3.2)

设(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4e^{-2(x+y)}, & 0<x<\infty, 0<y<\infty\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求：

1. 联合分布函数
2. 边缘分布函数和边缘概率密度
3. $P(X+Y\leq 1)$。

见P95!

例子

已知随机变量X,Y的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} 4xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求$F(x,y)$?

例子

已知随机变量X, Y的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求$F(x,y)$?

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0\\ x^2y^2, & 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\\ x^2, & 0\le x\le 1, y>1\\ y^2, & x>1, 0\le y\le 1\\ 1, & x>1, y>1\end{cases}$$

例子 (3.3.3)

设随机变量(X, Y)的联合分布函数为

$$F(x, y) = A(B + \arctan\frac{x}{2})(C + \arctan\frac{y}{3})$$

1. 求常数A, B, C之值
2. 求(X, Y)的联合概率密度
3. 求边缘概率密度$f_X(x)$

n维随机变量

定义 (3.7.1 联合分布函数)

设$(X_1, \ldots, X_n)$是概率空间$(\Omega, \mathscr{F}, P)$上的n维随机变量。称n元函数

$$F(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n), (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$$

为$(X_1, \ldots, X_n)$的（n维）联合分布函数，简称联合分布或分布函数。

- n维离散型随机变量：如果每个分量X_i均为离散型随机变量。
- n维连续型随机变量：如果存在n元非负函数$f(x_1, \ldots, x_n)$，使得

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(y_1, \cdots, y_n) dy_1 \cdots dy_n, (x_1, \ldots, x_n) \in$$

且称$f(x_1, \ldots, x_n)$为联合概率密度函数，简称联合概率密度。

- 边缘分布函数

$$F_{X_i}(x_i) = F(\infty, \cdots, \infty, x_i, \infty, \cdots, \infty)$$

- 边缘概率密度

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, \ldots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \ldots, y_n) dy_1 \cdots dy_{i-1} dy_{i+1} \cdots$$

常见的两个分布

定义 (二维均匀分布)

设G为平面R^2上的有界区域，其面积为$S(G)$。若二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S(G)}, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则称(X,Y)服从区域G上的（二维）均匀分布。

常见的两个分布

定义 (二维均匀分布)

设G为平面R^2上的有界区域，其面积为$S(G)$。若二维随机变量(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{S(G)}, & (x,y) \in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则称(X, Y)服从区域G上的（二维）均匀分布。

均匀分布的概率计算

$$P((X,Y) \in D) = \iint_D \frac{1}{S(G)} dxdy = \frac{S(D)}{S(G)}$$

例子 (3.3.4)

设(X, Y)服从单位圆$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$上的均匀分布，求$X, Y$的边缘概率密度。

例子 (3.3.4)

设(X, Y)服从单位圆$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$上的均匀分布，求$X, Y$的边缘概率密度。

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x, v)\,\mathrm{d}v \\
&= \begin{cases} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi}\,\mathrm{d}v\,, & |x| \leqslant 1 \\ 0\,, & |x| > 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,, & |x| \leqslant 1 \\ 0\,, & |x| > 1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.3.11}
$$

由对称性可知

$$
f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}\,, & |y| \leqslant 1 \\ 0\,, & |y| > 1 \end{cases} \tag{3.3.12}
$$

二维均匀分布的边缘分布不一定是均匀分布。

例子 (3.3.5)

设(X, Y)服从区域G上的均匀分布，其中$G = \{(x, y) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$。求关于$t$的一元二次方程$t^2 + Xt + Y = 0$无实根的概率。

二维正态分布

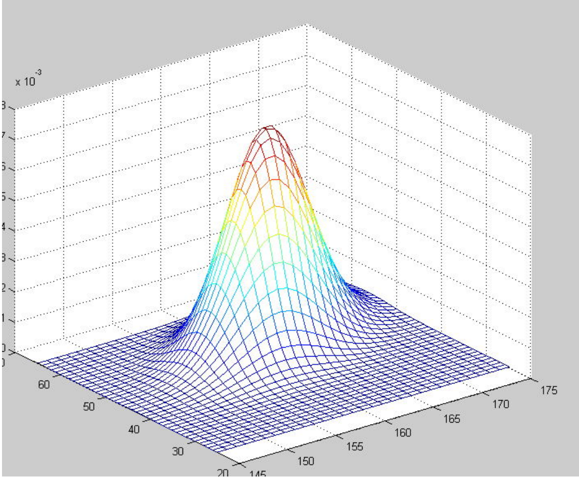
定义 (二维正态分布)

若二维随机变量(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

其中μ_1, μ_2是实数，$\sigma_1, \sigma_2 > 0, |\rho| < 1$，则称$(X, Y)$服从二维正态分布，也称为二维正态随机变量，记为$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$。上述$f(x, y)$称为二维正态概率密度。

二维正态概率密度图



二维正态随机变量的边缘分布

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

二维正态随机变量的边缘分布

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

- 两个边缘分布都是正态分布，其联合分布不唯一。
- **注**：两个边缘分布都是正态分布，其联合分布不一定是二维正态分布。

3.4 条件分布

离散型随机变量的条件分布

定义 (3.5.1 Conditional probability mass function)

设(X, Y)是二维离散型随机变量。对于任一固定的$j \geq 1$，若$P(Y = y_j) > 0$，则称

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_j(Y)}, i \geq 1$$

为在$Y = y_j$条件下随机变量X的条件分布律（或条件分布列）。

离散型随机变量的条件分布

定义 (3.5.1 Conditional probability mass function)

设(X, Y)是二维离散型随机变量。对于任一固定的$j \geq 1$，若$P(Y = y_j) > 0$，则称

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_j(Y)}, i \geq 1$$

为在$Y = y_j$条件下随机变量X的条件分布律（或条件分布列）。

- $\frac{p_{ij}}{p_j(Y)} \geq 0, i \geq 1$
- $\sum_{i \geq 1} \frac{p_{ij}}{p_j(Y)} = 1$

离散型随机变量的条件分布

定义 (3.5.1)

设(X, Y)是二维离散型随机变量。对于任一固定的$i \geq 1$，若$P(X = x_i) > 0$，则称

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_i(x)}, j \geq 1$$

为在$X = x_i$条件下随机变量Y的条件分布律（或条件分布列）。

离散型随机变量的条件分布

定义 (3.5.1)

设(X, Y)是二维离散型随机变量。对于任一固定的$i \geq 1$，若$P(X = x_i) > 0$，则称

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_i(x)}, j \geq 1$$

为在$X = x_i$条件下随机变量Y的条件分布律（或条件分布列）。

- $\frac{p_{ij}}{p_i(X)} \geq 0, j \geq 1$
- $\sum_{j \geq 1} \frac{p_{ij}}{p_i(X)} = 1$

分布函数

给定$Y = y_j$条件下随机变量X的条件分布函数

$$F(x|y_j) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i|Y = y_j)$$

给定$X = X_i$条件下随机变量Y的条件分布函数

$$F(y|x_i) = \sum_{y_i \leq y} P(Y = y_j|X = x_i)$$

例子 (3.5.1)

一射手进行射击，单发击中目标的概率为$p(0 < p < 1)$，设计进行到击中目标两次为止，以X表示到第一次击中目标所需的射击次数，以Y表示总共进行的射击次数。试求X, Y的联合分布律，边缘分布律及条件分布律。

连续型随机变量的条件分布

定义 (3.5.2 Conditional probability density function)

给定y，若$f_Y(y) > 0$，则称

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}, -\infty < x < \infty$$

为在条件$Y = y$下X的条件概率密度函数，简称条件概率密度。称

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)} du, -\infty < x < \infty$$

为条件分布函数，简称条件分布。

例子 (3.5.2)

设(X, Y)服从单位圆$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$上的均匀分布，求条件概率密度。

例子 (3.5.2)

设(X,Y)服从单位圆$D=\{(x,y):x^2+y^2\le 1\}$上的均匀分布，求条件概率密度。

当 $|y|<1$ 时, $f_Y(y)=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}>0$. 由 (3.5.5) 式知

$$
\begin{aligned}
f_{X|Y}(x\,|\,y) &= \frac{f(x,y)}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}}, \quad -\infty<x<\infty \\
&= \begin{cases} \dfrac{\frac{1}{\pi}}{\frac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}}, & x^2+y^2\leqslant 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & |x|\leqslant\sqrt{1-y^2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
\end{aligned}
$$

类似地, 当 $|x|<1$ 时, $f_X(x)>0$. 由 (3.5.7) 式知

$$
f_{Y|X}(y\,|\,x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}, & |y|\leqslant\sqrt{1-x^2} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}
$$

- 若(X, Y)服从二维正态分布$N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$仍是正态分布的密度函数。服从$N(m, (1-\rho)^2\sigma_2^2)$. $(m = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1))$

- 若(X,Y)服从二维正态分布$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$仍是正态分布的密度函数。服从$N(m,(1-\rho)^2\sigma_2^2)$. $(m=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1))$
- 二维正态分布的边缘分布和条件分布均是一维正态分布。

- 若(X, Y)服从二维正态分布$N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，条件概率密度$f_{Y|X}(y|x)$仍是正态分布的密度函数。服从$N(m, (1-\rho)^2\sigma_2^2)$. $(m = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1))$
- 二维正态分布的边缘分布和条件分布均是一维正态分布。
- 乘法公式：

$$f(x,y) = \begin{cases} f_X(x) f_{Y|X}(y|x), & 若\ f_X(x) > 0 \\ f_Y(y) f_{X|Y}(x|y), & 若\ f_Y(y) > 0 \end{cases}$$