第一章　随机事件与概率

（一）基本题答案

1、（1）$\Omega_1=\{0,1,2,3\}$　　（2）$\Omega_2=\{1,2,\cdots\}=\{n/n$ 是正整数$\}$

（3）$\Omega_3=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$　　（4）$\Omega_4=\{x|0\le x\le 2\}$

（5）$\Omega_5=\{2,3,4,\cdots,12\}$　　（7）$\Omega_7=\{0,1,2,\cdots\}$

（6）$\Omega_6=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1,x>0,y>0,z>0\}$

2、（1）$AB\overline{C}$　　（2）$A(B\cup C)$　　（3）$A\cup B\cup C$

（4）$A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$　　（5）$AB\cup BC\cup AC$　　（6）$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$（或$\overline{ABC}$）

3、$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-z$

$P(\overline{A}B)=P(B-AB)=P(B)-P(AB)=y-z$

$P(\overline{A}\cup B)=P(\overline{A})+P(B)-P(\overline{A}B)=1-x+y-(y-z)=1-x+z$

$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=1-x-y+z$

4、$P(A\overline{B})=P(A-AB)=P(A)-P(AB)$

$=P(A)-[P(A)+P(B)-P(A\cup B)]$

$=P(A\cup B)-P(B)=0.6-0.3=0.3$

5、$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-P(A-(A-B))$

$=1-P(A)+P(A-B)=1-0.7+0.3=0.6$

6、$P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)$

$=1-[P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)]$

$=1-(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+0)=\frac{17}{36}$

7、$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0=\frac{5}{8}$

8、因$(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})=(\overline{A}A\cup B)(\overline{A}A\cup\overline{B})=B\overline{B}=\phi$

所以$P\{(\overline{A}\cup B)(A\cup B)(\overline{A}\cup\overline{B})(A\cup\overline{B})\}=P(\phi)=0$

9、七个字母任意排有 7！种排法，且每一排法的可能性相同，这是一个古典概型问题，而排成 SCIENCE 有$1\times2\times1\times2\times1\times1\times1=4$种排法，故所求概率为$\frac{4}{7!}=\frac{1}{1260}$

10、12 件产品按不放回方式抽两次时有12×11种抽取法，且每一种取法的概率相等，这是一个古典概型问题，而第二次抽出次品抽取法有11×2种，故所求事件概率为$\frac{11\times2}{12\times11}=\frac{1}{6}$

11、这可看成是条件概率问题

方法一　设 A 表示第一次取到不合格品，B 表示第二次取到不合格品，所求概率是$P(AB|A\cup B)$，按条件概率的定义有

$$P(AB|A\cup B)=\frac{P(AB(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(AB)}{P(A\cup B)}$$

因$P(AB)=\frac{4\times3}{10\times9}$，$P(A\cup B)=\frac{4\times6+4\times6+4\times3}{10\times9}$，故所求概率为

$$P(AB|A\cup B)=\frac{4\times3}{4\times6+4\times6+4\times3}=\frac{1}{5}$$

方法二　如果是同时从中任取 2 件 产品，此时有一件是不合格时共有$C_4^2+C_4^1C_6^1$种取法，而已知有一件是不合格品时，另一件也是不合格共有C_4^2种取法，故所求概率为

$$\frac{C_4^2}{C_4^2+C_4^1C_6^1}=\frac{1}{5}$$

注：此种方法是在缩减的样本空间中考虑条件概率的计算。

12、设点的坐标为(x,y)，则样本空间

$$\Omega=\{(x,y)\,|\,0<y<\sqrt{2ax-x^2}\}$$

由条件知这是一个几何概型问题且原点和该点的连线与$0x$轴的夹角小于$\frac{\pi}{4}$的事件 A 为

$A=\{(x,y)\,|\,0<y<\sqrt{2ax-x^2}\,,y<x\}$

Ω的面积$S_\Omega=\frac{1}{2}\pi a^2$，A 的面积$S_A=\frac{1}{4}\pi a^2+\frac{1}{2}a^2$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{\frac{1}{4}\pi a^2+\frac{1}{2}a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{\pi+2}{2\pi}$$

13、设两艘船到达的时刻分别是x和y，则样本空间为$\Omega=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 24,0\le y\le 24\}$ 由实际意义可知这是一个几何概型问题，且有一艘需等待一段时间的事件 A 为

$$A=\{(x,y)\,|\,-2\le x-y\le 1,(x,y)\in\Omega\}$$

因Ω的面积$S_\Omega=24^2$，A 的面积$S_A=24^2-\frac{1}{2}(23^2+22^2)$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=0.121$$

14、不妨设是单位圆，三点 A、B、C 将单位圆周分成$x,y,2\pi-x-y$三段，于是样本空间Ω为

$$\Omega=\{(x,y)\,|\,0<x<2\pi,0<y<2\pi,0<2\pi-(x+y)<2\pi\}$$

由实际意义知这是几何概型问题，当且仅当三段弧长都小于π时，三角形 ABC 为锐角三角形，即三角形 ABC 为锐角三角形的事件 A 为

$$A=\{(x,y)\,|\,0<x<2\pi,0<y<\pi,0<2\pi-(x+y)<\pi,(x,y)\in\Omega\}$$

因Ω的面积$S_\Omega=\frac{1}{2}(2\pi)^2$，A 的面积$S_A=\frac{1}{2}\pi^2$，故所求概率为

$$P(A)=\frac{\frac{1}{2}\pi^2}{\frac{1}{2}(2\pi)^2}=\frac{1}{4}$$

15、（1）用全概率公式得他迟到的概率为　$0.3\times\frac{1}{4}+0.2\times\frac{1}{3}+0.1\times\frac{1}{12}+0.4\times 0=0.15$

（2）用贝叶斯公式得所求概率是　$\dfrac{0.3\times\frac{1}{4}}{0.15}=\dfrac{1}{2}$

16、用 A，B，C 分别表示取出的是一，二，三等品三个事件，则所求概率为

$$P(A|\overline{C})=\frac{P(A\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(A-AC)}{1-P(C)}=\frac{P(A)}{1-P(C)}=\frac{0.6}{1-0.1}=\frac{2}{3}$$

其中利用到$AC=\phi$，即 A 与 C 互斥。

17、由贝叶斯公式所求概率为

$$\frac{0.01\times 0.6}{0.01\times 0.6+0.02\times 0.4}=\frac{3}{7}$$

18、由条件及加法公式有

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$$=3P(A)-3[P(A)]^2=\frac{9}{16}$$

即　$16[P(A)]^2-16P(A)+3=0$，得 $P(A)=\frac{1}{4}$ 或 $P(A)=\frac{3}{4}$（舍）

故　$P(A)=\frac{1}{4}$

19、由条件知 $P(\overline{A}\,\overline{B})=\frac{1}{9}$，且 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$

由 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$ 得：$P(A-AB)=P(B-AB)$ 即 $P(A)-P(AB)=P(B)-P(AB)$ 推得：$P(A)=P(B)$

由独立性，有 $P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})=\frac{1}{9}$，从而得 $P(\overline{A})=\frac{1}{3}$，故

$$P(A)=1-P(\overline{A})=\frac{2}{3}$$

20、设射手的命中率为 P，则由题意得：

$$1-(1-P)^4=\frac{80}{81}$$

解之得　$P=\frac{2}{3}$

21、设 $P(A)=P$，则由题意得

$$1-(1-P)^4=0.5904$$

解之得 $P=0.2$，在三次独立试验中，事件 A 出现一次的概率是

$$C_3^1P(1-P)^2=3\times0.2\times\mathbf{0}.8^2=0.384$$

（二）补充题答案

1、(1) 类似于本章第 11 题，这里不妨认为是同时取出两件产品，此时取出产品中有一件是不合格品有 $C_m^2+C_m^1C_{M-m}^1$ 种取法，而已知两件中有一件是不合格品，另一件也是不合格品有 C_m^2 种取法，故所求概率为

$$\frac{C_m^2}{C_m^2+C_m^1C_{M-m}^1}=\frac{m-1}{2M-m-1}$$

(2) 取出产品中有一件是合格品有 $C_{M-m}^2+C_m^1C_{M-m}^1$ 种取法，而已知两件中有一件是合格品，另一件是不合格品有 $C_{M-m}^1C_m^1$ 种取法，故所求概率为

$$\frac{C_{M-m}^1C_m^1}{C_{M-m}^2+C_m^1C_{M-m}^1}=\frac{2m}{M+m-1}$$

注：这里采用的是在缩减的样本空间中计算条件概率的方法，且题中“有一件”其意应在“至少有一件”而不能理解为“只有一件”，这是因为对另一件是否是不合格还不知道。

2、(1) 这是条件概率，下面考虑在缩减的样本空间中去求，第一、第二次取到正品有 $15\times14\times18$ 种取法，在此条件下第三次取到次品有 $15\times14\times5$ 种取法，故所求概率为

$$\frac{15\times14\times5}{15\times14\times18}=\frac{5}{18}$$

注：上述是将样本空间中的元素看成是三次取完后的结果，更简单的也可只考虑以第三次取的结果作为样本空间中的元素，即在第一、第二次取到正品时，第三次取时有 18 种取法，而在第一次、第二次取到正品时，第三次取次品有 5 种取法，故所求概率为 $\frac{5}{18}$

(2) 此问是要求事件“第一、第二次取到正品，且第三次取到次品”的概率（与 (1) 不同的在于这里没有将第一、第二次取到正品作为已知条件，而是同时发生），按题意，三次取产品共有 $20\times19\times18$ 种取法，而第三次才取到次品共有 $15\times14\times5$ 种取法，故所求概率为

$$\frac{15\times14\times5}{20\times19\times18}=\frac{35}{228}$$

（3）三次取产品共有 $20\times19\times18$ 种取法，第三次取到次品有 $5\times19\times18$ 种取法，故所求概率为

$$\frac{5\times19\times18}{20\times19\times18}=\frac{1}{4}$$

注：此问也可用类似于（1）中注的方法去解决，即只考虑以第三次取得的结果作为样本空间的元素，也可很快求得答案是 $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$。

3、令 A 表示挑选出的是第一箱，B_i（$i=1,2$）表示第 i 次取到的零件是一等品，则

（1）由全概率公式，有

$$P(B_1)=P(B_1|A)P(A)+P(B_1|\overline{A})P(\overline{A})=\frac{10}{15}\times\frac{1}{2}+\frac{18}{30}\times\frac{1}{2}=0.4$$

（2）用全概率公式有

$$P(B_1B_2)=P(B_1B_2|A)P(A)+P(B_1B_2|\overline{A})P(\overline{A})=\frac{10\times9}{50\times49}\times\frac{1}{2}+\frac{18\times17}{30\times29}\times\frac{1}{2}$$

于是所求条件概率是

$$P(B_2|B_1)=\frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)}=\frac{\frac{10\times9}{50\times49}\times\frac{1}{2}+\frac{18\times17}{30\times29}\times\frac{1}{2}}{0.4}=0.4856$$

4、用 A 表示第一次取到 1 号球，B 表示第二次取到 2 号球，则由全概率公式有

$$P(B)=P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A})$$

$$=\frac{1}{n-1}\times\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\times\frac{n-1}{n}=\frac{n+(n-1)^2}{n^2(n-1)}$$

5、以 A_k 表示有 k 个孩子，B 表示所有孩子均为同一性别，由全概率公式有

$$P(B)=\sum_{k=0}^{\infty}P(B|A_k)P(A_k)$$

$$=P_0+\sum_{k=1}^{\infty}P(B|A_k)P(A_k)$$

$$=P_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left((0.5)^k+(0.5)^k\right)P_k$$

$$=P_0+2\sum_{k=1}^{\infty}0.5^k\ P_k$$

6、以 A 表示患有癌症，B 表示试验呈阳性，则由贝叶斯公式得

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(A|B)}{P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})}=\frac{0.005\times0.95}{0.005\times0.95+0.995\times0.01}=0.3231$$

7、用 D 表示失业率上升，此题要求 $P(A|D),P(B|D),P(C|D)$，根据题意有 $P(D|A)=0.8,P(D|B)=0.2,P(D|C)=0.2$，则由贝叶斯公式得

$$P(A|D)=\frac{0.8\times\frac{1}{6}}{0.8\times\frac{1}{6}+0.2\times\frac{1}{3}+0.2\times\frac{1}{2}}=\frac{4}{9}$$

同理　$P(B|D)=\frac{2}{9}$

$$P(C|D)=\frac{1}{3}$$

故总统对三个顾问的理论正确性应分别调整成$\frac{4}{9},\frac{2}{9},\frac{1}{3}$。

8、以A_i $(i=1,2,3)$分别表示甲、乙、丙击中飞机，B_i $(i=0,1,2,3)$表示有i个人击中飞机，C 表示飞机被击落，则

$$P(B_0)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=0.6\times0.5\times0.3=0.09$$

$$P(B_1)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$
$$=0.4\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.3+0.6\times0.5\times0.7=0.36$$

$$P(B_2)=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)$$
$$=0.4\times0.5\times0.3+0.4\times0.5\times0.7+0.6\times0.5\times0.7=0.41$$

$$P(B_3)=1-P(B_0)-P(B_1)-P(B_2)=1-0.09-0.36-0.41=0.14$$

则由全概率公式有

$$P(C)=\sum_{i=0}^{3}P(C\mid B_i)P(B_i)$$
$$=0\times0.09+0.2\times0.36+0.6\times0.41+1\times0.14=0.458$$

注：在这里A_1,A_2,A_3不构成样本空间的划分，因为它们不是两两互斥，可同时发生。

9、（1）n次成功之前已经失败了m次，表示进行了$m+n$次，第$m+n$次试验一定成功，而前面的$m+n$-1 次试验中有m次失败，n-1 次成功，从而所求概率为

$$\binom{m+n-1}{m}(1-p)^m\ p^{n-1}\cdot p=\binom{m+n-1}{m}p^n\ (1-p)^m$$

（2）令 A 表示n次成功之前已有m+1 次失败，A_i $(i=1,2,\cdots,n)$表示n次成功之前已有m+1 次失败且第m+1 次（即最后一次）失败在第$m+i$次试验中发生，则可知有

$$P(A)=\binom{m+n}{m+1}p^n\ (1-p)^{m+1}$$

且$A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$，$A_1,\cdots,A_n$两两互斥，对事件A_i，它表示在$m+n+1$次试验中，从第$m+i+1$次试验至第$m+n+1$试验都成功，第$m+i$次试验是失败（最后一次失败），而前面的$m+i$-1 次试验中有m次失败，$i-1$次成功，于是

$$p(A_i)=\binom{m+i-1}{m}p^{i-1}\ (1-p)^m\ \cdot(1-p)\cdot p^{n-i+1}$$
$$=\binom{m+i-1}{m}p^n\ (1-p)^{m+1}\ ,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

由于$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$，即

$$\binom{m+n}{m+1}p^n\ (1-p)^{m+1}=\binom{m}{m}p^n\ (1-p)^{m+1}+\binom{m+1}{m}p^n\ (1-p)^{m+1}+\cdots+\binom{m+n-1}{m}p^n\ (1-p)^{m+1}$$

消去$p^n\ (1-p)^{m+1}$立得结论成立。

10、由全概率公式，每台仪器能出厂的概率$p=1\times0.7+0.8\times0.3=0.94$

将每台仪器能否出厂看成是一次试验，则n台仪器就是n次试验，由于每次试验只有两个结果：出厂或不出厂，且各次试验相互独立，则这是一个n重伯努利概型问题，于是有

（1）$\alpha=0.94^n$

（2）$\beta=C_n^2\ 0.94^{n-2}0.06^2$

（3）$\theta=1-0.94^n-n\cdot0.94^{n-1}\cdot0.06$

第二章　随机变量及其概率分布

（一）基本题解答

1.样本空间$V=\{(1,1),(1,2),\cdots,(1,6),(2,1),(2,2),\cdots,(2,6),\cdots,(6,1),\cdots,(6,6)\}$.这里，例如(6,1)表示掷第一次得 6 点，掷第二次得 1 点.其余类推.

以 X 表示两次所得点数的和.则 X 的分布律为

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_K	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2.由题设，X的可能值为 0，1，2，3. 以 $A_i(i=1,2,3)$ 表示事件“汽车在第i个路口 遇到红灯”；A_1，A_2，A_3相互独立，且$P(A_i)=P(\overline{A}_i)=1/2, i=1,2,3.$ 于是

$$P\{X=0\}=P(A_1)=1/2;\quad P\{X=1\}=P(\overline{A}_1A_2)=1/2^2;\quad P\{X=2\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=1/2^3;$$

$P\{X=3\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=1/2^3$.

∴ X 的分布律为：

X	0	1	2	3
P_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

3.设“ξ=k”表示前 k 次取出白球，第 k+1 次取黑球，则ξ的分布列为

$$P(\xi=k)=\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)(n-m)}{n(n-1)\cdots(n-k)}\qquad(k=0,1,\cdots,m).$$

4.（1）$\because \sum_{k=1}^{5}P(X=k)=\sum_{k=1}^{5}\frac{c}{15}=\frac{c}{15}\sum_{k=1}^{5}=\frac{c}{15}\times5=\frac{c}{3}=1,\qquad \therefore c=3.$

（2）$P\{1\le X\le3\}=\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{5}=\frac{3}{5}.$　　（3）$P\{0.5<X<2.5\}=\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{5}=\frac{2}{5}.$

5.设进行了i次试验，其中有k次试验成功之事件设为A，则此事件包含有两层意思：它意味着第i次（$i\ge k$）成功，且$i-1$次试验中成功$k-1$次，设这两个事件分别为A_1，A_2，则$A=A_1A_2$,且$P(A)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$($A_1$与$A_2$独立),而　$P(A_1)=p$,

$$P(A_2)=C_{i-1}^{k-1}p^{k-1}\cdot q^{i-1-(k-1)}=C_{i-1}^{k-1}\cdot p^{k-1}q^{i-k}.$$

于是，所需试验次数 X 的分布律为

$$P\{X=i\}=p\cdot c_{i-1}^{k-1}p^{k-1}q^{i-k}=c_{i-1}^{k-1}p^{k}q^{i-k}\quad(i=k,k+1,\cdots;q=1-p).$$

6.设ξ为该种商品每月销售数，则　ξ～π（7），　x为该种商品每月进货数，则$P(\xi\le x)\ge0.999$.查普哇松分布的数值表，得x⩾13.

7.设 X=｛该外国人在 5 个选择题中答对的题数｝，则 X~B（5，1/4）.又设 A=｛答对题数不少于两题｝，则依题设知　$P(A)=\sum_{k=3}^{5}P\{X=k\}=\sum_{k=3}^{5}C_5^k(\frac{1}{4})^k(\frac{3}{4})^{5-k}=0.1035.$

8.设 X=｛180 台同类设备中同时发生故障的设备的台数｝，则 X~B（180，0.01）.又设配备 N 个维修人员，则所求概率为

$P\{X>N\}=P\{X\ge N+1\}=\sum_{k=N+1}^{180}P\{X=k\}$　，　而　$P\{X=k\}=C_{180}^k(0.01)^k(0.99)^{180-k}$　，　故

$P\{X>N\}=\sum_{k=N+1}^{180}c_{180}^k(0.01)^k(0.99)^{180-k}\approx\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{(1.8)^k}{k!}e^{-1.8}$　，　这里

$np=180\times0.01=1.8=\lambda$.

欲使$\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1.8^k}{k!}e^{-1.8}\le1-0.99=0.01$，查泊松分布表，可知 N+1=7，因而至少应配备 6 名工人.

9.设 $A_i=\{部件i需要调整\}$（$i=1,2,3$），则 $P(A_1)=0.10, P(A_2)=0.20,$ $P(A_3)=0.30$. 由于A_1，A_2，A_3相互独立，因此，有

$P\{X=0\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=(1-0.1)\times(1-0.2)\times(1-0.3)=0.504,$

$P\{X=1\}=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$

$=0.1\times0.8\times0.7+0.9\times0.2\times0.7+0.9\times0.8\times0.3=0.398,$

$P\{X=2\}=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)=0.092$，

$P\{X=3\}=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=0.1\times0.2\times0.3=0.006.$

因此，X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	0.504	0.398	0.092	0.006

10. F(x)为一阶梯状函数，则 X 可能取得值为 F(x)的跳跃点：-1，1，3

$P(X=-1)=F(-1)-F(-1-0)=0.4, P(X=1)=F(1)-F(1-0)=0.8-0.4=0.4,$

$P(X=3)=F(3)-F(3-0)=1-0.8=0.2,$ 即有

X	-1	1	3
P	0.4	0.4	0.2

11.（1）由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$，所以有 $\lim\limits_{x\to+\infty}(a+b\exp\{-x^2/2\})=a=1,$ 即 $a=1$，又由于 X 为连续型随机变量，F(x)应为 x 的连续函数，应有

$\lim\limits_{x\to0^-}F(x)=0=\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(a+b\exp\{-x^2/2\})=a+b$　所以 $a+b=0, b=-a=-1.$

代入 a,b 之值，得 $F(x)=\begin{cases}1-\exp\{-x^2/2\}, & x>0,\\ 0, & x\le0.\end{cases}$

（2）对函数 F(x)求导，得 X 的概率密度 $P(x)=\begin{cases}x\exp\{-x^2/2\}, & x\ge0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

12.当 x≤0, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^t dt=\frac{1}{2}e^x$; 当 x>0 时，

$F(x)=\frac{1}{2}(\int_{-\infty}^{0}e^t dt+\int_0^x e^{-t}dt)=\frac{1}{2}[1+(1-e^{-x})]=1-\frac{1}{2}e^{-x}$，所以，我们有

$$F(x)=\begin{cases}e^x/2, & x\le0,\\ 1-e^{-x}/2, & x>0.\end{cases}$$

13 由 $P\{X\ge k\}=\frac{2}{3}$ 得 $P\{X<k\}=\frac{1}{3}$，即应选 k，使 $\int_{-\infty}^{k}f(x)dx=\frac{1}{3}$.注意 $\int_{-\infty}^{0}f(x)dx=0$，$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{3}$，$\int_1^3 f(x)dx=0$，$\int_3^6 f(x)dx=\frac{2}{3}$，可见当 1≤k≤3 时，

$\int_{-\infty}^{k}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx+\int_0^1 f(x)dx+\int_1^k f(x)dx=\frac{1}{3}$，所以 k 的取值范围应为 1≤k≤3.

14. $P\{X>0.8\}=\int_{0.8}^{1}12x(1-x)^2dx=0.272$.　$P\{X>0.9\}=\int_{0.9}^{1}12x(1-x)^2dx=0.037$.

15. $X\sim E(\frac{1}{200}),$ （1）$P(X\le100)=F(100)=1-e^{-\frac{100}{200}}=1-e^{-\frac{1}{2}}$；

（2）$P(X>300)=e^{-\frac{1}{200}\times300}=e^{-\frac{3}{2}}=e^{-1.5}$.

16.解法 1　用随机变量法：令 x_i 表示第 i 次掷骰子出现的点数，$i=1,2$. 显然x_1和x_2独立同分布，$P\{x_i=j\}=1/6,\ (j=1,2,\cdots,6;\ i=1,2)$，则方程变为 $x^2+x_1x+x_2=0$.它有重根的充要条件是 $x_1^2-4x_2=0$，有实根的充要条件是 $x_1^2-4x_2\ge0$，故

$q=P\{x_1^2-4x_2=0\}=P(\{x_2=1,x_1=2\}U\{x_2=4,x_1=4\})=P\{x_2=1,x_1=2\}+P\{x_2=4,x_1=4\}$

$=P\{x_2=1\}P\{x_1=2\}+P\{x_2=4\}P\{x_1=4\}=1/6\times1/6+1/6\times1/6=1/18.$　由全概率公式可

得 $P=P\{x_1^2-4x_2\geq 0\}=P\{\,x_2\leq\frac{x_1^2}{4}\,\}=\sum_{i=1}^{6}P\{x_1=j\}P=\{\,x_2\leq\frac{x_1^2}{4}\big|x_1=j\,\}$

$=P\{x_1=1\}P\{\,x_2\leq\frac{1}{4}\,\}+P\{x_1=2\}P\{\,x_2\leq\frac{2^2}{4}\,\}+P\{x_1=3\}P\{\,x_2\leq\frac{3^2}{4}\,\}+P\{x_1=4\}P\{\,x_2\leq\frac{4^2}{4}\,\}$

$+P\{x_1=5\}P\{\,x_2<\frac{5^2}{4}\,\}+P\{\,x_2\leq\frac{6^2}{4}\,\}=\frac{1}{6}\times 0+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{1}{6}\times 1+\frac{1}{6}\times 1=\frac{19}{36}$

解法 2　用枚举法：一枚骰子掷 2 次，其基本事件总数为 36.方程有实根和重根的充要条件分别为 $B^2-4C\geq 0$ 和 $B^2-4C=0$.

B 的取值	1	2	3	4	5	6
使 $B^2-4C\geq 0$ 的基本事件个数	0	1	2	4	6	6
使 $B^2-4C=0$ 的基本事件个数	0	1	0	1	0	0

故使方程有实根的基本事件总数为 1+2+4+6+6=19，有重根的基本事件总数 1+1=2，因此　$P=19/36,\ \ q=2/36=1/18.$

17.本题关键是理解随机变量 N(t)的意义.事件 $\{N(t)=k\}$ 表示设备在任何长为 t 的时间内发生 k 次地震，其概率为 $P\{N(t)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}(k=0,1,2,\cdots)$．由于 T 表示两次地震之间的时间间隔，故当 t<0 时，$P\{T\leq t\}=0$；当 t⩾0 时，事件 $\{T\leq t\}$ 与事件 $\{T>t\}$ 是互逆事件，且 $\{T>t\}$ 表示在长为 t 的时间内无地震发生，故它等价于事件 $\{N(t)=0\}$.

（1）由于 T 是非负随机变量，可见当 t<0 时，$F(t)=P\{T\leq t\}=0$.

设 t⩾0，则事件 $\{T>t\}$ 与 $\{N(t)=0\}$ 等价. 因此，当 t⩾0 时，有

$$F(t)=P\{T\leq t\}=1-P\{T>t\}=1-P\{N(t)=0\}=1-e^{-\lambda t}.$$

于是，T 服从参数为 λ 的指数分布.

（2）$Q=P\{T\geq 10|T\geq 5\}=\frac{P\{T\geq 10,T\geq 5\}}{P\{T\geq 5\}}=\frac{P\{T\geq 10\}}{P\{T\geq 5\}}=\frac{e^{-10t}}{e^{-5t}}=e^{-5t}$.

18.设X为考生的外语成绩，由题设知 $X\sim N(\mu,\sigma)$，其中 μ =72.现在求 σ^2.由题设

$$P\{X\geq 96\}=0.023,\ \ P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\geq\frac{96-72}{\sigma}\right\}=1-\Phi(\frac{24}{\sigma})=0.023,\therefore\Phi(\frac{24}{\sigma})=0.977,$$

由 $\Phi(x)$ 的数值表，可见 $\frac{24}{\sigma}$=2，因此 $\sigma=12$.这样X~N(72, 12^2). 所求概率为

$$P\{60\leq x\leq 84\}=P\left\{\frac{60-72}{12}\leq\frac{X-\mu}{\sigma}\leq\frac{84-72}{12}\right\}=P\left\{-1\leq\frac{X-\mu}{\sigma}\leq 1\right\}$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)-1=2\times 0.841-1=0.682.$$

19.（1） $p(\xi>250)=p(\frac{\xi-300}{35}>\frac{250-300}{35})=\Phi(1.43)\approx 0.9236;$

（2） $p(\mu-x<\xi<\mu+x)=p(-\frac{x}{35}<\frac{\xi-300}{35}<\frac{x}{35})=\Phi(\frac{x}{35})-\Phi(-\frac{x}{35})=2\Phi(\frac{x}{35})-1\geq 0.9$，

即 $(x/35)\geq 0.95$，所以 $x/35\geq 1.65$，即 $x\geq 57.75$.

20.引进下列事件：A_1=｛电压不超过 200 伏｝，A_2=｛电压在 200~240 伏｝，A_3=｛电压超过 240 伏｝；B=｛电子元件损坏｝.由题设，知X~N(220,25^2)，因此

$P(A_1)=P\{X\leq 200\}=P\left\{\frac{X-220}{25}\leq\frac{200-220}{25}\right\}=\Phi(-0.8)=0.212$；

$P(A_2)=P\{200\leq X\leq 240\}=\Phi(0.8)-\Phi(-0.8)=0.576$；

$P(A_3)=P\{X>240\}=1-0.212-0.576=0.212$.

（1）由题设条件，知 $P(B|A_1)=0.1$，$P(B\mid A_2)=0.001$，$P(B\mid A_3)=0.2$. 于是，由全概

率公式，有 $\alpha = P(B) = \sum_{i=1}^{3} P(A_i)P(B \mid A_i) = 0.0642$.

（2）由条件概率定义（或贝叶斯公式），知 $\beta = P(A_2 \mid B) = \dfrac{P(A_2)P(B \mid A_2)}{P(B)} \approx 0.009$.

21.由题设，Y～$B(3, P)$ 其中 $P = P\left\{X \le \dfrac{1}{2}\right\} = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{1}{2}} 2xdx = \dfrac{1}{4},$

故 $P\{Y = 2\} = C_3^2 (1/4)^2 (3/4)^1 = 9/64.$

22.

P	0.3	0.2	0.4	0.1
X	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π	$\dfrac{3}{2}\pi$
$(2X-\pi)^2$	π^2	0	π^2	$4\pi^2$
$\cos(2X-\pi)$	-1	1	-1	1

∴

$(2X-\pi)^2$	0	π^2	$4\pi^{-2}$
P	0.2	0.7	0.1

$\cos(2X-\pi)$	-1	1
P	0.7	0.3

23.因为 $\sin\dfrac{k\pi}{2} = \begin{cases} -1, & k = 4n-1, \\ 0, & k = 2n, \\ 1, & k = 4n-3 \end{cases} \qquad (n = 1, 2, \cdots).$

所以，$Y = \sin(\dfrac{\pi}{2}X)$ 只有 3 个可能取值 -1，0，1，而取这些值的概率分别为

$$P\{Y=-1\} = P\{X=3\} + P\{X=7\} + P\{X=11\} + \cdots = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^{11}} + \cdots = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-1/16} = \frac{2}{15},$$

$$P\{Y=0\} = P\{X=2\} + P\{X=4\} + P\{X=6\} + \cdots = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-1/4} = \frac{1}{3},$$

$$P\{Y=1\} = P\{X=1\} + P\{X=5\} + P\{X=9\} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^9} + \cdots = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-1/16} = \frac{8}{15}.$$

于是，$Y = \sin(\dfrac{\pi}{2}X)$ 的分布列为 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \dfrac{2}{15} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{8}{15} \end{bmatrix}$.

24.$\because X \sim U(0,2)$, $\therefore$ ① $y \le 0$时，$F_Y(y) = 0$；

②当 $0 < y < 4$,

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X^2 \le y) = P(X \le \sqrt{y}) = F_X(\sqrt{y}) = \sqrt{y}/2$；

③ $y \ge 4$时, $F_y(y) = 1$.

故 $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\sqrt{y}}, & 0 < y < 1 \\ 0, & 其它, \end{cases}$

25.应先求出$F_Y(y)$，再对y求导即得$f_Y(y)$　因

$$F_Y(y) = p\{Y < y\} = p\{e^X < y\} = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ p\{X < Iny\}, & y \ge 1. \end{cases}$$

故当 $y \ge 1$ 时, $F_Y(y) = p\{X < \ln y\} = \int_0^{\ln y} e^{-x}dx$, 而 $f_Y(y) = F_Y'(y) = 1/y^2$.

因此 $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 1, \\ 1/y^2 & y \ge 1. \end{cases}$

26.假设随机变量 X 具有连续的分布函数$F(x)$，证明:$Y=F(X)$在区间（0,1）上服从均匀分布.

解　先求 Y 的分布函数. 因$0\le F(x)\le 1$，单调非降. 连续，故$y=F(x)$的反函数存在.

当$y\le 0$时，$F_Y(y)=P(F(X)\le y)=P(\phi)=0$，

当$0<y<1$时$F_Y(y)=P(F(X)\le y)=P(X\le F^{-1}(y))=F[F^{-1}(y)]=y$，

当$y\ge 1$时$F_Y(y)=P(F(X)\le y)=P(\Omega)=1$.

于是　$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ y, & 0<y<1\\ 1, & y\ge 1,\end{cases}$　从而 Y 的密度函数为　$f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0\le y<1\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$

即 Y= F（X）服从(0，1)上的均匀分布.

27.（1）$Y=e^X$ 的分布函数　$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)$.当$y\le 0$ 时，$F_Y(y)=0$;

当 y>0 时，$F_Y(y)=P\{\ e^X\le y\}=P\{X\le \ln y\}=\int_0^{\ln y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{x^2}{2}\}dx$, 于是，$Y$ 的概率密度函数为　$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0;\\ \frac{1}{y\sqrt{2\pi}}\exp[-\frac{1}{2}(\ln y)^2], & y>0.\end{cases}$

（2）$Y=2X^2+1$ 的分布函数 $F_Y(y)=P\{2X^2+1\le y\}$.当$y\le 1$时,$F_Y(y)=0$;当$y>1$ 时，

$$F_Y(y)=p\{2X^2+1\le y\}=P\left\{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}\le X\le \sqrt{\frac{y-1}{2}}\right\}=\int_{-\sqrt{\frac{y-1}{2}}}^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

即　$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 1,\\ \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\sqrt{\frac{y-1}{2}}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx, & y>1.\end{cases}$　故Y的概率密度为　$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-1)}}e^{-\frac{y-1}{4}}, & y>1,\\ 0, & y\le 1.\end{cases}$

（3）$Y=|X|$的分布函数　$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{|X|\le y\}$. 当$y\le 0$时,$F_Y(y)=0$;当$y>0$时,

$$F_Y(y)=P\{|X|\le y\}=P\{-y\le X\le y\}=\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-y}^{y}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

于是，Y 的概率密度函数为　$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}0, & y\le 0,\\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}, & y>0.\end{cases}$

（二）补充题答案

1.（1）由条件可知，当$x<-1$时，$F(x)=0$；$F(-1)=\frac{1}{8}$, $P\{-1<X<1\}=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}$.

易见，在 X 的值属于$(-1,1)$的条件下，事件$\{-1<X\le x\}(-1<x<1)$的条件概率为

$$P\{-1<X\le x|-1<X<1\}=(x+1)/2.$$

于是，对于$-1<x<1$, 有

$$P\{-1<X\le x\}=P\{-1<X\le x,-1<X<1\}=P\{-1<X<1\}\cdot P\{-1<X\le x|-1<X<1\}=\frac{5}{8}\times\frac{x+1}{2}=\frac{5x+5}{16}$$

$$F(x)=P\{X\le -1\}+P\{-1<X\le x\}=\frac{1}{8}+\frac{5x+5}{16}=\frac{5x+7}{16}.$$

对于$x\ge 1$, 有 F（x）=1.　从而　$F(x)=\begin{cases}0 & \text{若}x<-1\\ (5x+7)/16 & \text{若}-1\le x<1\\ 1 & \text{若}x\ge 1.\end{cases}$

（2）X 取负值的概率　$p=P\{X\le 0\}=F(0)-P\{X=0\}=F(0)=7/16.$

2．用 A 表示有效，由题设知

$$P(A)=\frac{3}{4},P(\overline{A})=\frac{1}{4},P(X=k|A)=\frac{3^k}{k!}e^{-3},P(X=k|\overline{A})=\frac{5^k}{k!}e^{-5},k=0,1,2,\cdots.$$

应用贝叶斯公式，得

$$P(A|X=2)=\frac{P(A)P(X=2|A)}{P(A)P(X=2|A)+P(\overline{A})P(X=2|\overline{A})}=\frac{0.75\times 0.2240}{0.75\times 0.2240+0.25\times 0.0842}\approx 0.8887.$$

3.（1）按第一种方式：记 A_i 为“第 i 个人承包的 20 台机器不能及时维修”，$(i=1,2,3,4)$，则所求概率为 $P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)$. 易知

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)\ge P(A_1)=\sum_{k=2}^{20}\binom{20}{K}(0.01)^k(0.99)^{20-k}=0.0175$$

（2）按第二种方式：以 X 表示这 80 台机器中需要维修的机器的台数，则不能及时维修的概率为　$P(X\ge 4)=\sum_{k=4}^{80}\binom{80}{K}(0.01)^k(0.99)^{80-k}=0.0091$.

从上述计算结果可以看出，还是以第二种方式为好. 因按第二种方式 3 个人共同维修 80 台机器不能及时维修的概率较小.

4. ① $x\le 0,F(x)=0$;　② $0<x<2$,

$$F(x)=\frac{\int_0^x dx\int_0^{2x-x^2}dy}{\int_0^2 dx\int_0^{2x-x^2}}=\frac{\int_0^x(2x-x^2)dx}{\int_0^2(2x-x^2)dx}=\frac{(x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_0^x}{(x_2-\frac{x^2}{3})\Big|_0^x}=\frac{1}{4-\frac{8}{3}}(x^2-\frac{x^3}{3})=\frac{1}{4}(3x^2-x^3);$$

③ $X\ge 2,F(x)=1$.　故$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4}(2x-x^2),0<x<2;\\0,\qquad 其它.\end{cases}$

5. X 的分布函数为　$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\P(0<X\le x), & 0\le x<1\\1, & x\ge 1\end{cases}$

设 $x_1,x_2\in[0,1),且x_i+\Delta x\in[0,1),i=1.2,$ 由题设得

$$F(x_1+\Delta x)-F(x_1)=P(x_1<X\le x_1+\Delta x)=F(x_2+\Delta x)-F(x_2)=P(x_2<X\le x_2+\Delta x).$$

令　$\Delta x\to 0$，得　$F'(x_1)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{F(x_1+\Delta x)-F(x_1)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{F(x_2+\Delta x)-F(x_2)}{\Delta x}=F'(x_2).$

从而，对任意 $x\in(0.1)$，有 $F'(x)\equiv C$，当 $x\overline{\in}[0,1]$ 时，显然 $F'(x)=0$；另一方面

$$F(1)=P(0<X\le 1)=\int_0^1 f(x)dx=C=1.$$

所以，X 的密度函数为　$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1\\0, & 其他,\end{cases}$　因此 X 服从[0，1]上的均匀分布.

6.设 $Y=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-X),\quad \lambda>0.\quad \because X\sim U[0,1],\quad \therefore y\le 0,F_Y(y)=0;$

$$y>0,F_Y(y)=P(Y\le y)=P[-\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)\le y]=F(X\le 1-e^{-\lambda y})=F_X(1-e^{-\lambda y})=1-e^{-\lambda y}.$$

第三章　　多维随机向量及其概率分布

(一) 基本题答案

1、设 X 和 Y 的可能取值分别为 $i与j$, 则 $i=0,1,2,3;\ j=0,1,2.$

因盒子里有 3 种球，在这 3 种球中任取 4 个，其中黑球和红球的个数之和 $i与j$ 必不超过 4.另一方面，因白球只有 2 个，任取的 4 个球中，黑球和红球个数之和最小为 2 个，故有

$$2\le i+j\le 4,\ 且\ p(X=i,Y=j)=C_3^iC_2^jC_2^{4-i-j}/C_7^4.$$

因而　$P(X=i,Y=j)=0\quad(i+j<2\quad 或\ i+j>4,\ i=0,1,2,3;\ j=0,1,2).$

于是　$P_{11}=P(X=x_1=0,Y=y_1=0)=0,\ p_{12}=P(X=x_1=0,Y=y_2=0)=0,$

$p_{13}=P(X=x_1=0,Y=y_3=0)=C_3^0C_2^1C_2^2/C_7^4=1/35.$

同法可求得联合分布律中其他的 p_{ij}，得下表

Y \ X	0	1	2	3
0	0	0	$C_3^2C_2^0C_2^2/C_7^4$	$C_3^3C_2^0C_2^1/C_7^4$
1	0	$C_3^1C_2^1C_2^2/C_7^4$	$C_3^2C_2^1C_2^1/C_7^4$	$C_3^3C_2^1C_2^0/C_7^4$
2	$C_3^0C_2^2C_2^2/C_7^4$	$C_3^1C_2^2C_2^1/C_7^4$	$C_3^2C_2^2C_2^0/C_7^4$	0

即

Y \ X	0	1	2	3
0	0	0	3/35	2/35
1	0	6/35	12/35	2/35
2	1/35	6/35	3/35	0

2、X 和 Y 都服从二项分布，参数相应为(2,0.2)和（2,0.5）.因此 X 和 Y 的概率分布分别为

$$X\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.64 & 0.32 & 0.04\end{bmatrix}\qquad Y\sim\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 0.25 & 0.5 & 0.25\end{bmatrix}.$$

由独立性知，X 和 Y 的联合分布为

Y \ X	0	1	2
0	0.16	0.08	0.01
1	0.32	0.16	0.02
2	0.16	0.08	0.01

3、Y 的分布函数为 $F(y)=1-e^{-y}(y>0), F(y)=0(y\le 0)$. 显知 (X_1,X_2) 有四个可能值：$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$. 易知 $P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{Y\le 1,Y\le 2\}=P\{Y\le 1\}=1-e^{-1}$,

$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{Y\le 1,Y>2\}=0, P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{Y>1,Y\le 2\}=P\{1<Y\le 2\}=e^{-1}-e^{-2}$,

$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{Y>1,Y\le 2\}=P\{1<Y\le 2\}=e^{-1}-e^{-2}$,

$P\{X_1=1,X_2=1\}=P\{Y>1,Y>2\}=P\{Y>2\}=e^{-2}$.

于是，可将 X_1 和 X_2 联合概率分布列表如下：

X_2 \ P \ X_1	0	1
0	$1-e^{-1}$	$e^{-1}-e^{-2}$
1	0	e^{-2}

4、 $P(X=n)=\sum_{m=0}^{n}P(\zeta=n,\eta=m)=\sum_{m=0}^{n}\frac{\lambda^n p^m(1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}e^{-\lambda}$

$$=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\left[p+(1-p)\right]^n=\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\quad(n=0,1,2,\cdots).$$

即 X 是服从参数为 λ 的泊松分布.

$$P(Y=m)=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\lambda^n p^m(1-p)^{n-m}}{m!(n-m)!}e^{-\lambda}=\frac{\lambda^m p^m e^{-\lambda}}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\lambda^{n-m}(1-p)^{n-m}}{(n-m)!}$$

$=\frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda}}{m!}e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^m e^{-\lambda p}}{m!},(m=0,1,2,\cdots).$ 即 Y 是服从参数为 λp 的泊松分布.

5、由定义 F（x,y）=P$\left\{X\le x,Y\le y\right\}=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\varphi(x,y)dxdy.$

因为 φ（x,y）是分段函数，要正确计算出 F（x,y），必须对积分区域进行适当分块：$x<0$或$y<0;0\le x\le 1,0\le y\le 1;x>1,y>1;x>1,0\le y\le 1;y>1,0\le x\le 1$等 5 个部分.

（1）对于 $x<0$或$y<0$，有　F（x,y）=P{X≤ x, Y≤y}=0;

（2）对于 $0\le x\le 1,0\le y\le 1$，有　$F(x,y)=4\int_0^x\int_0^y uvdudv=x^2y^2$；

（3）对于 $x>1,0\le y\le 1$，有　$F(x,y)=P\left\{X\le 1,Y\le y\right\}=y^2$;

（4）对于 $y>1,0\le x\le 1$，有　$F(x,y)=P\left\{X\le x,Y\le 1\right\}=x^2$;

（5）对于 $x>1,y>1$，有　$F(x,y)=1$.

故 X 和 Y 的联合分布函数　$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0\text{或}y<0,\\ x^2y^2, & 0\le x\le 1,0\le y\le 1,\\ x^2, & 0\le x\le 1,1<y,\\ y^2, & 1<x,0\le y\le 1,\\ 1,. & 1<x,1<y.\end{cases}$

6、（1） $x\le 0$或$y\le 0,F(x,y)=0;x>0,y>0,$

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y ze^{-(2s+t)}dsdt=2(\int_0^x e^{-2s}ds)(\int_0^y e^{-t}dt)=(-e^{-2s}\Big|_0^x)(-e^{-t}\Big|_0^y)=(1-e^{-2x})(1-e^{-y})$$

即 $F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0,y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

（2）P$(Y\le X)=\int\limits_{y<x}f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^x 2e^{-2x-y}dy=2\int_0^{+\infty}e^{-2x}\left(-e^{-y}\Big|_0^x\right)dx$

$$=-2\int_0^{+\infty}(1-e^{-x})e^{-2x}dx=2\int_0^{+\infty}(e^{-2x}-e^{-3x})dx=2(\frac{1}{3}e^{-3x}-\frac{1}{2}e^{-2x})\Big|_0^{+\infty}=-2(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})=\frac{1}{3}.$$

7、（1） $x>0$ 时，$f_X(x)=\int_X^{+\infty}e^{-y}dy=e^{-x};x\le 0\text{时},f_X(x)=0,$

即 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

（2） $P\left\{X+Y\le 1\right\}=\iint\limits_{x+y\le 1}f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy=1+e^{-1}-2e^{-1/2}$

8、（1）（i） 根据公式 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ 计算; 当$x\le 0$ 时, $f_X(x)=0$; 当$0<x<1$时，

$$f_X(x)=\int_0^x 4.8y(2-x)dy=2.4y^2\Big|_0^x(2-x)=2.4x^2(2-x);\text{当}x\ge 1\text{时},f_X(x)=0$$

即 $f_X(x)=\begin{cases}2.4x^2(2-x), & 0<x<1;\\ 0, & 其它.\end{cases}$

（ii）　利用公式 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$ 计算. 当 $y\le 0$ 时, $f_Y(y)=0$; 当 $0<y<1$ 时,

$$f_Y(y)=\int_y^1 4.8y(2-x)dx=4.8y(2x-\frac{x^2}{2})\Big|_y^1=4.8y\left[\left(2-\frac{1}{2}\right)-\left(2y-\frac{y^2}{2}\right)\right]$$

$$=4.8y(\frac{3}{2}-2y+\frac{y^2}{2})=2.4y(3-4y+y^2);$$ 当 $y\ge 1$ 时， $f_Y(y)=0.$

即 $f_Y(y)=\begin{cases}2.4y(3-4y+y^2), & 0<y<1;\\ 0 & 其它.\end{cases}$

$$(2)P\left\{(X<\frac{1}{2})\cup(Y<\frac{1}{2})\right\}=1-P(X\ge\frac{1}{2},Y\ge\frac{1}{2})=1-\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1-\int_{\frac{1}{2}}^{1}dx\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{1}{2}dxdy=\frac{5}{8}.$$

9、本题先求出关于 x 的边缘概率密度，再求出其在 $x=2$ 之值 $f_X(2)$. 由于平面区域 D 的面积为 $S_D=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=2,$　故（X,Y）的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D;\\ 0, & 其它.\end{cases}$

易知，X 的概率密度为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\frac{1}{2x}, & 1<x<e^2,\\ 0, & 其它,\end{cases}$　故 $f_X(2)=\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{4}.$

10、（1）有放回抽取：当第一次抽取到第 k 个数字时，第二次可抽取到该数字仍有十种可能机会，即为　$P\{X=i|Y=k\}=\frac{1}{10}\ \ (i=0,1,\cdots,9).$

（2）不放回抽取：（i）当第一次抽取第 $k(0\le k\le 9)$ 个数时，则第二次抽到此（第 k 个）数是不可能的，故　$P\{X=i|Y=k\}=0\ \ (i=k;i,k=0,1,\cdots,9.)$

（ii）当第一次抽取第 $k(0\le k\le 9)$ 个数时，而第二次抽到其他数字（非 k）的机会为 $1/9$，知 $P\{X=i|Y=k\}=1/9(i\ne k;i,k=0,1,\cdots,9.)$

11、（1）因 $f_\eta(y)=\int_y^1 24(1-x)ydx=12y(1-y)^2,\ 0\le y\le 1;\quad f_n(y)=0,$ 其它.

故在 0≤y≤1 时， $f_{\xi|\eta}(x|y)=\begin{cases}2(1-x)/(1-y)^2 & y\le x\le 1\\ 0 & 其它;\end{cases}$

因 $f_\xi(x)=\int_0^x 24(1-x)ydy=12x^2(1-y)^2,\quad 0\le x\le 1;\ f_\xi(x)=0,$　其它.

故在 0≤x≤1 时， $f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases}2y/x^2 & 0\le y\le x,\\ 0 & 其它.\end{cases}$

（2）因 $f_\xi(X)=\int_{1/x}^{x}\frac{1}{2x^2y}dy=\frac{1nx}{x^2},1\le x\le\infty;\ f_\xi(x)=0,$ 其它;

故在 1≤x<∞ 时， $f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{2y1nx} & \frac{1}{x}<y<x,\\ 0 & 其它.\end{cases}$

因 $f_\eta(y)=\begin{cases}\int_{1/y}^{\infty}\dfrac{1}{2x^2y}dx=\dfrac{1}{2} & 0<y\le 1\\ \int_{y}^{\infty}\dfrac{1}{2x^2y}dx=\dfrac{1}{2y^2} & 0<y<\infty\\ 0 & \text{其它,}\end{cases}$ 故在 $0<y\le 1$ 时, $f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2y} & \dfrac{1}{y}<x<\infty\\ 0 & \text{其它;}\end{cases}$

而在 $1<y<\infty$ 时, $f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{y}{x^2} & y<x<\infty\\ 0 & \text{其它.}\end{cases}$

（3） $f_\xi(x)=\int_x^{\infty}e^{-y}dy=e^{-x}, x>0;\ f_\xi(x)=0, x\le 0.$ 在 x>0, $f_{\eta|\xi}(y|x)=\begin{cases}e^{x-y} & y>x,\\ 0 & \text{其它.}\end{cases}$

$f_\eta(y)=\int_0^{y}e^{-y}dx=ye^{-y}, y>0;\quad f_\eta(y)=0, y\le 0.$ 故在 y>0 时， $f_{\xi|\eta}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y} & 0<x<y,\\ 0 & \text{其它.}\end{cases}$

12、 $f_X(x)=\int_0^{\infty}\dfrac{(n-1)(n-2)}{(1+x+y)^n}dy=\dfrac{n-2}{(1+x)^{n-1}}, x>0$，故

$$f_{Y|X}(y/1)=\begin{cases}2^{n-1}(n-1)/(2+y)^n & y>0,\\ 0 & \text{其它.}\end{cases}$$

13、X 和 Y 是否独立，可用分布函数或概率密度函数验证.

方法一：X 的分布函数 $F_X(x)$和Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 分别为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\begin{cases}1-e^{-0.5x} & x\ge 0\\ 0 & x<0,\end{cases}\quad F_Y(y)=F(+\infty,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5y} & y\ge 0\\ 0 & y<0.\end{cases}$$

由于 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$,知X和Y 独立.

$\alpha=P\{X>0.1,Y>0.1\}=P\{X>0.1\}\cdot P\{Y>0.1\}=[1-F_X(0.1)]\cdot[1-F_Y(0.1)]=e^{-0.05}\cdot e^{-0.05}=e^{-0.1}$

方法二：以 $f(x,y), f_X(x)$和$f_Y(x)$分别表示$(X,Y), X$和Y 的概率密度，可知

$$f(x,y)=\frac{\partial F^2(x,y)}{\partial x\partial y}=\begin{cases}0.25e^{-0.5(x+y)} & x\ge 0, y\ge 0\\ 0 & \text{其它.}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}0.5e^{-0.5x} & x\ge 0\\ 0 & x<0,\end{cases}\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}0.5e^{-0.5y} & y\ge 0,\\ 0 & y<0.\end{cases}$$

由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$,知X和Y独立.$a=P\{X>0.1,Y>0.1\}=\int_{0.1}^{+\infty}\int_{0.1}^{+\infty}0.25e^{-0.5(x+y)}dxdy=e^{-0.1}$.

14、因知 X 与 Y 相互独立，即有 $P(X=x_i,Y=y_j)=P(x=x_i)\cdot P(Y=y_j)$.

$(i=1,2, j=1,2,3)$ 首先，根据边缘分布的定义知 $P(X=x_1,Y=y_1)=\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{24}$.又根据独立性有 $\dfrac{1}{24}=p\{X=x_1,Y=y_1\}=p(X=x_1)\cdot p(Y=y_1)=\dfrac{1}{6}p(X=x_i)$, 解得 $P(X=x_i)=\dfrac{1}{4}$,从而有 $P(X=x_1,Y=y_3)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{24}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{12}$　又由 $P(X=x_1,Y=y_2)=P(X=x_1)\cdot P(Y=y_2)$，可得 $\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}P(Y=y_2)$, 即有 $P(Y=y_2)=\dfrac{1}{2}$， 从而 $P(X=x_2,Y=y_2)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{8}$.

类似地，由 $P(X=x_1,Y=y_3)=P(X=x_1)P(Y=y_3)$, 有 $\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{4}P(Y=y_3)$, 得 $P(Y=y_3)=\dfrac{1}{3}$, 从而, $P(X=x_1,Y=y_3)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{4}$. 最后 $P(X=x_2)=\dfrac{1}{8}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$. 将上述数值填入表中有

X / Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_1\}=P_i.$

x_1	1/24	1/8	1/12	1/4
x_2	1/8	3/8	1/4	3/4
$P\{X=y_j\}=P\cdot j$	1/6	1/2	1/3	1

15、本题的关键是由题设P{X_1X_2=0}=1，可推出P{X_1X_2≠0}=0；再利用边缘分布的定义即可列出概率分布表.

(1)由P{X_1X_2=0}=1,可见 $P\{X_1=-1,X_2=1\}=P\{X_1=1,X_2=1\}=0,$ 易见

$P\{X_1=-1,X_2=0\}=P\{X_1=-1\}=0.25$　　$P\{X_1=0,X_2=1\}=P\{X_2=1\}=0.5$

$P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{X_1=1\}=0.25$　　$P\{X_1=0,X_2=0\}=0$

于是，得X_1和X_2的联合分布

X_2 \ X_1	–1	0	1	Σ
0	0.25	0	0.25	0.5
1	0	0.5	0	0.5
Σ	0.25	0.5	0.25	1

(2)　可见　P{X_1=0，X_2=0}=0，而P{X_1=0}P{X_2=0}=1/4≠0. 于是，X_1和 X_2不独立.

16、(1) $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$　　$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}} & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$　因为 X，Y 独立，对任何 x,y 都有 $f_X(x)\cdot f_Y(y)=f(x,y).$　所以有　$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & 0<x<1, y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

（2）二次方程　$t^2+2Xt+Y=0$　中t有实根，$\triangle=(2X)^2-4Y\ge 0,$　即$X^2-Y\ge 0,$

$Y\le X^2$，故 $P(t有实根)=P\{Y\le X^2\}=\iint\limits_{y\le x^2} f(x,y)dydx=\int_0^1\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dydx=\int_0^1(-e^{-\frac{y}{2}})\Big|_0^{x^2}dx$

$$=\int_0^1(1-\frac{x^2}{2})dx=1-\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1-\sqrt{2\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$=1-\sqrt{2\pi}\ \left[\int_{-\infty}^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx-\int_{-\infty}^0\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\ \right]$$

$$=1-\sqrt{2\pi}[\Phi(1)-\Phi(0)]\approx 1-\sqrt{2\pi}[0.8413-0.5]\approx 1-0.8555=0.1445.$$

17、（1）因为 X，Y 独立，所以　$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\lambda\mu e^{-(\lambda x+uy)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$.

（2）根据 Z 的定义，有 P{z=1}=P{Y≥X}$=\iint\limits_{y\ge x}f(x,y)dydx=\int_0^{+\infty}\int_x^{-\infty}\lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)}dydx$

$$=\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}(\int_x^{+\infty}\mu e^{-\mu y}dy)dx\ =\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda x}\cdot e^{-\mu x}dx=\lambda/(\lambda+u),$$

$P\{Z=0\}=1-P\{Z=1\}=\mu/(\lambda+\mu)$.所以 Z 的分布律为

Z	0	1
p	$\mu/(\lambda+\mu)$	$\lambda/(\lambda+\mu)$

Z 的分布函数为 $F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{\mu}{\lambda+\mu}, & 0\le z<1,\\ 1, & z\ge 1.\end{cases}$

18、∵X、Y 分别仅取 0，1 两个数值，∴Z 亦只取 0，1 两个数值. 又∵X 与 Y 相互独立，

$\therefore P\{Z=0\}=P\{\max(X,Y)=0\}=P(X=0,Y=0)=P\{X=0\}P\{Y=0\}=1/2\times1/2=1/4$，

故　$P\{Z=1\}=1=1-P\{Z=0\}=1-1/4=3/4.$

19、 X由 2×2 阶行列式表示，仍是一随机变量，且$X=X_1X_4-X_2X_3$，根据X_1，X_2，X_3，X_4的地位是等价且相互独立的，X_1X_4与X_2X_3也是独立同分布的，因此可先求出X_1X_4和X_2X_3的分布律，再求X的分布律.　记$Y_1=X_1X_4, Y_2=X_2X_3$,则$X=Y_1-Y_2$.随机变量Y_1和Y_2独立同分布：

$P\{Y_1=1\}=P\{Y_2=1\}=P\{X_2=1,X_3=1\}=0.16$　$P\{Y_1=0\}=P\{Y_2=0\}=1-0.16=0.84.$

显见，随机变量$X=Y_1-Y_2$有三个可能值–1,0,1.易见 $P\{X=-1\}=P\{Y_1=0,Y_2=1\}=0.84\times0.16=0.1344$，　$P\{X=1\}=P\{Y_1=1,Y_2=0\}=0.16\times0.84=0.1344$，　$P\{X=0\}=1-2\times0.1344=0.7312$.

于是，行列式的概率分布为　$X=\begin{vmatrix}X_1 & X_2\\ X_3 & X_4\end{vmatrix}\sim\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.1344 & 0.7312 & 0.1344\end{bmatrix}$

20、因为$\{Z=i\}=\{X+Y=i\}=\{X=0,Y=i\}\cup\{X=1,Y=i-1\}\cup\cdots\cup\{X=i,Y=0\}$. 由于上述各事件互不相容，且注意到 X 与 Y 相与独立，则有

$$\begin{aligned}P\{Z=i\}&=\sum_{k=0}^{i}P\{X=k,Y=i-k\}=\sum_{k=0}^{i}P\{X=k\}P\{Y=i-k\}\\&=\sum_{k=0}^{i}c_{n_1}^{k}p^{k}(1-P)^{n_1-k}C_{n_2}^{i-k}p^{i-k}(1-p)^{n_2-i+k}=P^{i}(1-p)^{n_1+n_2-i}\sum_{k=0}^{i}C_{n_1}^{k}C_{n_2}^{i-k}\\&=C_{n_1+n_2}^{i}p^{i}(1-p)^{n_1+n_2-i},i=0,1,\cdots n_1+n_2,\quad 故Z=X+Y\sim B(n_1+n_2,p).\end{aligned}$$

注：在上述计算过程中，已约定：当 r>n 时，$C_n^r=0,$并用到了公式$\sum_{k=1}^{i}C_{n_1}^{k}C_{n_2}^{i-k}=C_{n_1+n_2}^{i}$.

21、X 和 Y 的概率分布密度为 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\{-\dfrac{(x-y)^2}{2\sigma^2}\}$,　$(-\infty<x<+\infty)$;

$f_Y(y)=\begin{cases}1/(2\pi), & -\pi\le y\le\pi,\\ 0, & 其它.\end{cases}$　因 X 和 Y 独立，考虑到 $f_Y(y)$)仅在$[-\pi,\pi]$上才有非零值，故由卷积公式知 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2a^2}}dy.$$

令$t=\dfrac{z-y-\mu}{\sigma}$,则上式右端等于$\dfrac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}}^{\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\dfrac{1}{2\pi}\left[\Phi(\dfrac{z+\pi-\mu}{\sigma})-\Phi\left(\dfrac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right].$

22、（1）由题设知　$F_M(y)=P(M\le y)=P\{\max(X_1,\cdots,X_n)\le y\}=P(X_1\le y,\cdots,X_n\le y)$
$=P(X_1\le y)P(X_2\le y)\cdots P(X_n\le y)=F_{X_1}(y)\cdots F_{Xn}(y)$.

$\because$　$X_1,\cdots,X_n$独立且同分布$:X_i\sim U[0,\theta]$　$(1\le i\le n)$,

$\therefore F_{X_i}(x)=\begin{cases}0, & x\le0,\\ \dfrac{x}{\theta}, & 0<x<\theta,\\ 1, & x>0,\end{cases}$ $\therefore F_M(y)=\begin{cases}0, & y\le0,\\ \dfrac{y^n}{\theta^n}, & 0<y<\theta,\\ 1, & y\ge\theta.\end{cases}$ 故 $f_M(y)=\begin{cases}\dfrac{ny^{n-1}}{\theta^n}, & 0<y<\theta,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

（2）$F_N(y)=P(N\le y)=1-P(N>y)=1-P\{\min(X_1,\cdots,X_n)>y\}$
$=1-P(X_1>y,X_2>y,\cdots,X_n>y)=1-P(X_1>y)P(X_2>y)\cdots P(X_n>y)$
$=1-\prod_{i=1}^{n}P(X_i>y)=1-\left[1-F_{X_i}(y)\right]$

故　$f_N(y)=\begin{cases}-n(1-\dfrac{y}{\theta})^{n-1}(\dfrac{-1}{\theta}),0<y<\theta\\ 0, \quad 其它\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{n(\theta-y)^{n-1}}{\theta^n},0<y<0,\\ 0, \quad 其它\end{cases}$

23、由题设容易得出随机变量（X，Y）的概率密度，本题相当于求随机变量 X、Y 的函数

S=XY 的概率密度，可用分布函数微分法求之.

依题设，知二维随机变量（X，Y）的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1/2 & 若(x,y)\in G\\ 0, & 若(x,y)\notin G\end{cases}$

设 $F(s)=P\{S\le s\}$ 为 S 的分布函数,则 当 $s\le 0$ 时, $F(s)=0$； 当 $s\ge 2$ 时，$F(s)=1$.
现设 0<s<2. 曲线 $xy=s$ 与矩形 G 的上边交于点(s,1);位于曲线 $xy=s$ 上方的点满足 $xy>s$,位于下方的点满足 $xy<s$. 故

$$F(s)=P\{S\le s\}=P\{XY\le s\}=1-P\{XY>S\}=1-\iint\limits_{xy>s}\frac{1}{2}dxdy=1-\frac{1}{2}\int_s^2 dx\int_{\frac{s}{x}}^1 dy=\frac{s}{2}(1+\ln 2-\ln s).$$

于是， $f(s)=\begin{cases}(\ln 2-\ln s)/2, & 若0<s<2,\\ 0, & 若s\le 0或s\ge 2.\end{cases}$

（二）、补充题答案

1.由于 $X=\max\{\xi,\eta\},Y=\min(\xi,\eta)$, 故知 $P(X<Y)=0$, 即

$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1,Y=3\}=P\{X=2,Y=3\}=0$；又易知

$P\{X=1,Y=1\}=P\{\xi=1,\eta=1\}=P\{\xi=1\}\cdot P\{\eta=1\}=1/9$,

$P\{X=2,Y=2\}=P\{\xi=2,\eta=2\}=1/9$, $P\{X=3,Y=3\}=P\{\xi=3,\eta=3\}=1/9$,

$P\{X=2,Y=1\}=P\{\xi=1,\eta=2\}+P\{\xi=2,\eta=1\}=1/9+1/9=2/9$,

$P\{X=3,Y=2\}=P\{\xi=2,\eta=3\}+P\{\xi=3,\eta=2\}=2/9$, $P\{X=3,Y=1\}=1-7/9=2/9$.

所以

Y \ X	1	2	3
1	1/9	2/9	2/9
2	0	1/9	2/9
3	0	0	1/9

2.（1） $P\{Y=m|X=n\}=C_n^m P^m(1-P)^{n-m}$, $0\le m\le n, n=0,1,2,\cdots$.

（2） $P\{X=n,Y=m\}=P\{Y=m|X=n\}P\{X=n\}$

$=C_n^m P^m(1-P)^{n-m}\cdot e^{-\lambda}\cdot\lambda^n/n!$, $0\le m\le n, n=0,1,2,\cdots$.

3. $P(z=1)=P(X=0)P(Y=0)+P(X=1)P(Y=1)=(1-p)^2+p^2$

$P(z=0)=P(X=0)P(Y=1)+P(X=1)P(Y=0)=2p(1-p)$

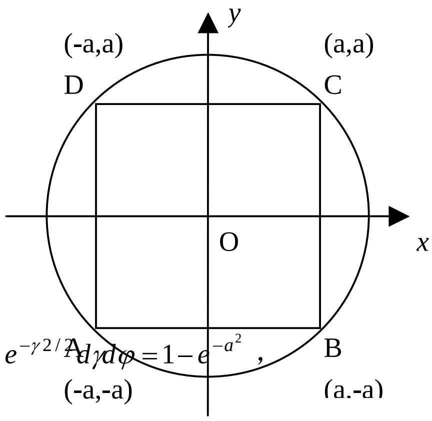
而 $P(X=1,Z=1)=P(X=1,Y=1)=p^2$，由 $P(X=1,Z=1)=P(X=1)P(Z=1)$, 得 $p=1/2$.

5.:设随机变量 ξ 和 η 相互独立，都服从 $N(0,1)$ 分布.则 $p(x,y)=\frac{1}{2\pi}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}$.显然，

$$\iint\limits_G p(x,y)dxdy<\iint\limits_S p(x,y)dxdy,$$

其中， G 和 S 分别是如图所示的矩形 $ABCD$ 和圆.

$$\iint\limits_G p(x,y)dxdy=(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^a e^{-x^2/2}dx)^2,$$



令 $x=\gamma\cos\varphi, y=\gamma\sin\varphi$, 则 $\iint\limits_S p(x,y)dxdy=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_a^{\sqrt{2}a}e^{-\gamma^2/2}\gamma d\gamma d\varphi=1-e^{-a^2}$,

所以 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^a e^{-x^2/2}dx<\sqrt{1-e^{-a^2}}$.

6.设这类电子管的寿命为 ξ，则 $P(\xi>150)=\int_{150}^{+\infty}100/(x^2)dx=2/3$.（1）三个管子均不要替换的概率为 $(2/3)^3=8/27$；（2）三个管子均要替换的概率为 $(1-2/3)^3=1/27$.

7.假设总体 X 的密度函数为 $f(x)$，分布函数为 $F(x)$，第 i 次的观察值为 $X_i(1\le i\le n)$，X_i 独立同分布，其联合密度函数 $f(x_1,\cdots,x_n)=f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n)$.依题意，所求的概率为

$$P\{X_n>X_1,X_n>X_2,...,X_n>X_{n-1}\}=\underset{\substack{x_i<x_n\\ i=1,2,...,n-1}}{\int\cdots\int}.f(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_n)dx_n\int_{-\infty}^{x_n}f(x_1)dx_1\int_{-\infty}^{x_n}f(x_2)dx_2...\int_{-\infty}^{x_n}f(x_{n-1})dx_{n-1}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F^{n-1}(x_n)f(x_n)dx_n=\int_{-\infty}^{+\infty}F^{n-1}(x_n)dF(x_n)=\frac{1}{n}F^n(x_n)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{n}.$$

8. $P(\xi_1=k|\xi_1+\xi_2=n)=\dfrac{P(\xi_1=k,\xi_1+\xi_2=n)}{P(\xi_1+\xi_2=n)}=\dfrac{P(\xi_1=k)P(\xi_2=n-k)}{P(\xi_1+\xi_2=n)}$.

由普哇松分布的可加性，知 $\xi_1+\xi_2$ 服从参数为 $\lambda_1+\lambda_2$ 的普哇松分布，所以

$$P(\xi_1=k|\xi_1+\xi_2=n)=\frac{\dfrac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\cdot\dfrac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}}{\dfrac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}.$$

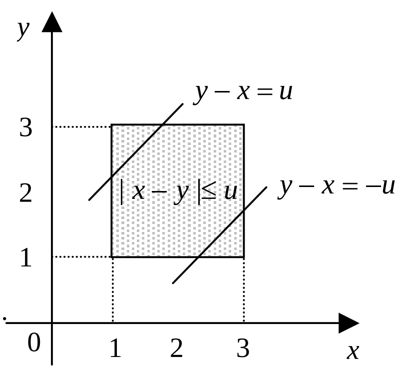
9.当 $z\le 0$，$F_z(z)=P(Z\le z)=0,$ 当$z>0,$

$$F_z(z)=P(Z\le z)=\int_0^z dx\int_0^{\frac{z-x}{2}}2e^{-(x+2y)}dy=\int_0^z e^{-x}dx\int_0^{\frac{z-x}{2}}2e^{-2y}dy=1-e^{-z}-ze^{-z},$$

所以　$z=X+2Y$ 的分布函数为　$F(x,y)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ 1-(1+z)e^{-z}, & z>0.\end{cases}$

10.由条件知 X 和 Y 的联合密度为

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 若1\le x\le 3,1\le y\le 3,\\ 0, & 其他\end{cases}$$



以 $F(u)=P\{U\le u\}(-\infty<u<\infty)$ 表示随机变量 U 的分布函数.显然，当 $u\le 0$ 时，$F(u)=0$；当 $u\ge 2$ 时，$F(u)=1$；当 $0<u<2$，则

$$F(u)=\iint\limits_{|x-y|\le u}p(x,y)dxdy=\iint\limits_{|x-y|\le u}\frac{1}{4}dxdy=\frac{1}{4}\left[4-(2-u)^2\right]=1-\frac{1}{4}(2-u)^2.$$

于是，随机变量的密度为 $p(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(2-u), & 0<u<2;\\ 0, & 其他\end{cases}$.

11.记 X_1,X_2,X_3 为这 3 个元件无故障工作的时间，则 $T=\min(X_1,X_2,X_3)$ 的分布函数

$$F_T(t)=P(T\le t)=1-P\{\min(X_1,X_2,X_3)>t\}=1-[P(X_1>t)]^3=1-[1-P(X_1\le t)]^3.$$

$$\because X_i\sim F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\le 0,\end{cases}(i=1,2,3)\quad\therefore F_T(t)=\begin{cases}1-e^{-3\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\le 0,\end{cases}$$

故　$f_T(t)=F'_T(t)=\begin{cases}3\lambda e^{-3\lambda t}, & t>0,\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$

第四章　随机变量的数字特征

（一）、基本解答

1. $\because EX=0\times0.4+1\times0.3+2\times0.2+3\times0.1=1$，　$EY=0\times0.3+1\times0.5+2\times0.2+3\times0=0.9,$

$\therefore EX>EY$，即甲比乙车床在一天内生产的次品多，故乙机床生产的零件质量较好.

2. 若记 u_n 为完成每次检验所发现的次品数. 显然 $u_n\sim B(10,0.1)$，即 u_n 服从 n=10，p=0.1 的二项分布：$P\{u_n=k\}=C_{10}^k0.1^k0.9^{10-k},k=0,1,2,\cdots,10.$

$P\{u_n\le1\}=P\{u_n=0\}+P\{u_n=1\}=0.9^{10}+10\times0.1\times0.9^9\approx0.7361.$

$P\{u_n>1\}=1-p\{u_n\le1\}=0.2639.$

X 为调整设备的次数，即 $\{u_n>1\}$ 出现的次数，显然 X 服从 n=4，p=0.2639 的二项分布，即 $X\sim B(4,0.2639)$.　因此 $E(X)=np=4\times0.2639=1.0556\approx1.1.$

3. 把 X 的分布律写成更明显的关系为

i	1	2	3	4	5	$\cdots$
X	3	$-\frac{3^2}{2}$	$\frac{3^3}{2}$	$-\frac{3^4}{4}$	$\frac{3^5}{5}$	$\cdots$
P_i	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3^2}$	$\frac{2}{3^3}$	$\frac{2}{3^4}$	$\frac{2}{3^5}$	$\cdots$

这里 $\sum_{i=1}^{\infty}p_i=\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{3^5}+\cdots=\frac{2}{3}(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots)=1$

$$\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i=3\times\frac{2}{3}-\frac{3^2}{2}\times\frac{2}{3^2}+\frac{3^3}{3}\times\frac{2}{3^3}-\frac{3^4}{4}\times\frac{2}{3^4}+\frac{3^5}{5}\times\frac{2}{3^5}-\cdots=2-\frac{2}{2}+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+\frac{2}{5}-\cdots$$

$$=2(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots).$$

显然此级数不是绝对收敛的（是条件收敛级数），所以 E（X）不存在.

4. $\because f(x)=\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(\lambda+x^2)}$，$\therefore\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(\lambda+x^2)}dx=\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}(\int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{(\lambda+x^2)}+\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{(\lambda+x^2)})$

而 $\int_{-\infty}^{0}\frac{xdx}{\lambda+x^2}=\lim_{\alpha\to-\infty}\int_a^0\frac{1}{2}\frac{d(\lambda+x^2)}{\lambda+x^2}=\lim_{\alpha\to-\infty}=\left[-\frac{1}{2}\ln(\lambda+ax^2)\right]=-\infty$，

$$\int_0^{+\infty}\frac{xdx}{\lambda+x^2}=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{d(\lambda+x^2)}{\lambda+x^2}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to+\infty}\ln(\lambda+b^2)=+\infty,$$

因此，广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{\lambda}xdx}{\pi(\lambda+x^2)}$ 发散，当然不可能绝对收敛了，所以 E（X）不存在.

5. （1）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1x^2dx+\int_1^2x(2-x)dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+(x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_1^2$

$$=\frac{1}{3}+[(4-\frac{8}{3})-(1-\frac{1}{3})]=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1.$$

（2）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\pi\sqrt{1-x^2}}=0$　(奇函数).

（3）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^{1500}\frac{x^2}{1500^2}dx+\int_{1500}^{3000}\frac{x}{1500^2}(3000-x)dx$

$$=\frac{1}{1500^2}\left[\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{1500}+(1500x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_{1500}^{3000}\right]=1500.$$

6.（1）$\because E(2X^2)=2EX^2$，又$\because EX^2=DX+(EX)^2$，$\therefore E(2X^2)=2(DX+(EX)^2)$；

再$\because X\sim E(1)$，$\therefore EX=1, DX=1$，$\therefore E(2X^2)=2(1+1^2)=4$.

（2）$E(e^{-2X})=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x}f(x)dx=\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cdot e^{-x}dx=\int_0^{+\infty}e^{-3x}dx=-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{3}$.

7.（1）由条件知，X的可能值为 0，1，2，3，以 $A_i(i=1,2,3)$ 表示事件“汽车在第 i 个路口首次遇到红灯”；A_1，A_2，A_3相互独立，且 $P(A_i)=P(\overline{A}_i)=1/2, i=1,2,3.$ 从而知

$P\{X=0\}=P(A_1)=\frac{1}{2}$; $P\{X=1\}=P(\overline{A}_1A_2)=\frac{1}{2^2}$; $P\{X=2\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=\frac{1}{2^3}$;

$P\{X=3\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=\frac{1}{2^3}$; 故 $E(\frac{1}{1+X})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}=\frac{67}{96}$.

8.（1）设 $p=P(A)$.由 X 与 Y 同分布，可知

$$P(\overline{B})=P\{Y\le a\}=P\{X\le a\}=P(A)=p, P(B)=1-p.$$

由 $P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=p+(1-p)-p(1-p)=p^2-p+1=\frac{7}{9}$, 得 $p_1=\frac{1}{3}, p_2=\frac{2}{3}$. 于是 a 有两个值：

由 $\frac{a-1}{2}=p_1$, 得 $a_1=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$;由 $\frac{a-1}{2}=p_2$, 得 $a_2=1+\frac{4}{3}=\frac{7}{3}$.

（2）$E(\frac{1}{X})=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x}p(x)dx=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}\ln 3$.

9. 发生故障次数服从二项分布，本题关键是列出所获利润与发生故障次数的函数关系.以 X 表示一周 5 天内机器发生故障的天数，则 X 服从参数为（5，0.2）的二项分布

$P\{X=k\}=C_5^k0.2^k\cdot0.8^{5-k}(k=0,1,2,3,4,5)$；$P\{X=0\}=0.8^5=0.328$，

$P\{X=1\}=C_5^1 0.2\ \cdot0.8^4=0.410$，$P\{X=2\}=C_5^2 0.2^2\cdot0.8^3=0.205$，

$P\{X\ge3\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}-P\{X=2\}=0.057$.

若以 Y 表示所获利润，则

$$Y=f(X)=\begin{cases}10 & X=0\\ 5 & X=1\\ 0 & X=2\\ -2 & X\ge3,\end{cases}$$ 故 EY=10×0.328+5×0.410+0×0.205-2×0.057=5.216（万元).

10.已知 X 在[0,60]上服从均匀分布，其密度为 $X\sim f(x)=\begin{cases}1/60 & 0\le x\le 60\\ 0 & 其他\end{cases}$

设 Y 是游客等候电梯的时间(单位:min),则 $Y=g(X)=\begin{cases}5-X & 0<X\le5\\ 25-X & 5<X\le25\\ 55-X & 25<X\le55\\ 60-X+5 & 55<X\le60,\end{cases}$

因此 $EY=Eg(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\cdot f(x)x=\frac{1}{60}\int_0^{60}g(x)dx$

$$=\frac{1}{60}\Big[\int_0^5(5-x)dx+\int_5^{25}(25-x)dx+\int_{25}^{55}(55-x)dx+\int_{55}^{60}(65-x)dx\Big]=11.67.$$

11. X,Y 相互独立且都服从[10,20]上的均匀分布，由此可写出（X,Y）的联合概率密度，另外，由题设可列出所得利润与需求量和进货量之间的关系，最后由多元化随机变量函数均值定义可求得期望利润.

设 Z 表示商店每周所得的利润，则 $Z=\begin{cases}1000Y & Y\le X,\\ 1000X+500(Y-X)=500(X+Y), & Y>X.\end{cases}$

由于 X 与 Y 的联合概率密度为 $\varphi(x,y)=\begin{cases}1/100, & 10\le x\le 20, 10\le y\le 20,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

所以 $EZ=\iint\limits_{D_1}1000y\times\frac{1}{100}dxdy+\iint\limits_{D_2}500(x+y)\times\frac{1}{100}dxdy=10\int_{10}^{20}dy\int_{y}^{20}ydx+5\int_{10}^{20}dy\int_{10}^{y}(x+y)dx$

$$=10\int_{10}^{20}y(20-y)dy+5\int_{10}^{20}(\frac{3}{2}y^2-10y-50)dy=\frac{20000}{3}+5\times 1500\approx 14166.67(元).$$

12. 本题关键是正确列出供大于求和供不应求时利润与进货量的关系，然后利用期望利润不少于 9280 建立一不等式解出进货量 a 的值.

设进货数量为 a，则利润为

$$M_a=\begin{cases}500a+(X-a)300 & a<X\le 30\\ 500X-(a-X)100 & 10\le X\le a\end{cases}=\begin{cases}300X+200a & a<X\le 30,\\ 600X-100a & 10\le X\le a,\end{cases}$$

期望利润 $EM_a=\int_{10}^{30}\frac{1}{20}\cdot M_a dx=\frac{1}{20}\int_{10}^{a}(600x-100a)dx+\frac{1}{20}\int_{a}^{30}(300x+200a)dx$

$$=\frac{1}{20}(600\cdot\frac{x^2}{2}-100ax)\Big|_{10}^{a}+\frac{1}{20}(300\cdot\frac{x^2}{2}+200ax)\Big|_{a}^{30}=-7.5a^2+350a+5250.$$

依题意，有 $-7.5a^2+350a+5250\ge 9280$ 即 $7.5a^2-350a+4030\le 0$，解得 $20\frac{2}{3}\le a\le 26$，

故利润期望值不少于 9280 元的最少进货量为 21 单位.

13. 方法一 设 $A_i=\{部件i需要调整\}$ $(i=1,2,3)$. $P(A_1)=0.1, P(A_2)=0.2, P(A_3)=0.3.$

易见，X 有四个可能值 0,1,2,3. 由于 A_1,A_2,A_3 独立，因此

$$P\{X=0\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=0.9\times 0.8\times 0.7=0.504,$$

$$P\{X=1\}=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$$
$$=0.1\times 0.8\times 0.7+0.9\times 0.2\times 0.7+0.9\times 0.8\times 0.3=0.398,$$

$$P\{X=2\}=P(A_1A_2\overline{A}_3)+P(A_1\overline{A}_2A_3)+P(\overline{A}_1A_2A_3)$$
$$=0.1\times 0.2\times 0.7+0.1\times 0.8\times 0.3+0.9\times 0.2\times 0.3=0.092,$$

$$P\{X=3\}=P(A_1A_2A_3)=0.1\times 0.2\times 0.3=0.006.$$

于是 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 0.504 & 0.398 & 0.092 & 0.006\end{pmatrix}$. $EX=1\times 0.398+2\times 0.092+3\times 0.006=0.6$,

$$DX=EX^2-(EX)^2=1\times 0.398+4\times 0.092+9\times 0.006-(0.6)^2=0.46.$$

方法二 考虑随机变量 $X_i=\begin{cases}1 & 当A_i出现\\ 0 & 若A_i不出现\end{cases}$ $(i=1,2,3)$.

易见 $EX_i=P(A_i), DX_i=P(A_i)[1-P(A_i)]$. 设 $X=X_1+X_2+X_3$，因此，由于 X_1,X_2,X_3 独立，可见 $EX=0.1+0.2+0.3=0.6$， $DX=0.1\times 0.9+0.2\times 0.8+0.3\times 0.7=0.46$.

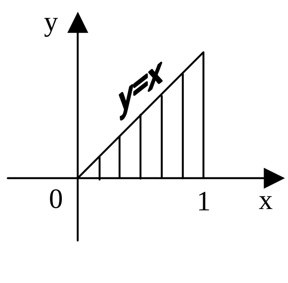
14. 注意到仅在三角形区域 $0\le y\le x\le 1$ 上 $f(x,y)$ 取非零值（见图），分别可得到

$$EX=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,y)dxdy=12\int_0^1dx\int_0^x xy^2dy=\frac{4}{5},$$

$$EY=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}yf(x,y)dy=12\int_0^1dx\int_0^x y^3dy=\frac{3}{5},$$

$$E(X^2+Y^2)=12\int_0^1dx\int_0^x(x^2+y^2)y^2dy=\frac{16}{15}.$$

$$E(XY)=12\int_0^1dx\int_0^x xy^3dy=\frac{1}{2},$$



15. $E(X^r)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^rf(x)dx$ $(r=1,2)$ （1） $E(X)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\cdot\frac{2}{\pi}\cos^2xdx=0;$

$$\because E(X^2)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\frac{2}{\pi}\cos^2 x dx=\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x^2}{2}(1+\cos 2x)dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2x)dx\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3}x^3\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2d\sin(2x)\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{24}+\frac{1}{2}x^2\sin(2x)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\sin 2xdx=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}xd\cos(2x)$$

$$=\frac{\pi^2}{12}+\frac{1}{\pi}x\cos(2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2xdx=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2\pi}\sin(2x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2},$$

$$\therefore D(X)=E(X^2)-E(X)=\frac{\pi^2}{12}-\frac{1}{2}.$$

（2） $$E(X)=\int_0^{+\infty}x\cdot\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}d\frac{x^2}{2\sigma^2}=x(-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}})\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=0+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\sigma\cdot 1=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma.$$

$$\because E(X^2)=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}d(\frac{x^2}{2\sigma^2})=\int_0^{+\infty}2\sigma^2te^{-t}dt\quad(\text{记}t=\frac{x^2}{2\sigma^2})$$

$$=2\sigma^2\left[(-te^{-t})\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-t}dt\right]=2\sigma^2,$$

$$\therefore D(X)=E(X^2)-E^2(X)=2\sigma^2-\frac{\pi}{2}\sigma^2=(2-\frac{\pi}{2})\sigma^2.$$

（3） $$EX=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\frac{\beta^a}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}x^ae^{-\beta x}dx=\frac{\beta^\alpha}{(\beta^\alpha\cdot\beta)\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}(\beta x)^\alpha e^{-\beta x}d(\beta x)$$

$$=\frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}t^ae^{-t}dt=\frac{1}{\beta\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}t^ae^{-t}dt=\frac{\Gamma(a+1)}{\beta\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha\Gamma(\alpha)}{\beta\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha}{\beta},$$

因 $$EX^2=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{+\infty}x^2\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{a-1}e^{-\beta x}dx=\frac{\beta^\alpha}{\beta^{\alpha+1}\beta\Gamma(\alpha)}=\int_0^{+\infty}(\beta x)^{a+1}e^{-\beta x}d(\beta x)$$

$$=\frac{1}{\beta^2\Gamma(\alpha)}\Gamma(\alpha+2)=\frac{(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}{\beta^2\Gamma(\alpha)}=\frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)}{\beta^2\Gamma(\alpha)}=\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2},$$

故 $DX=EX^2-(EX)^2=\alpha(\alpha+1)\beta^2-\alpha^2/\beta^2=\alpha/\beta^2.$

16.记 $q=1-p$, X 的概率分布为 $P\{X=i\}=q^{i-1}p,\qquad i=1,2,\cdots.$

X 的数学期望为 $$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}iq^{i-1}p=p\sum_{i=1}^{\infty}(q^i)'=p(\sum_{i=1}^{\infty}q^i)'=p(\frac{q}{1-q})'=\frac{1}{p}.$$

因为 $$E(X^2)=\sum_{i=1}^{\infty}i^2q^{i-1}p=p[q(\sum_{i=1}^{\infty}(q^i)')']'=p[\frac{q}{(1-q)^2}]'=\frac{2-p}{p^2},$$

所以 X 的方差为 $$D(X)=E(X^2)-[E(X)']^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}.$$

17.解法 1　先求分布律，再求期望 E（X）.

设 $A_i\,(i=1,2,3,\cdots,n)$ 表示第 i 次取到的钥匙能打开锁，X 为直到打开锁时的试开次数，则

$$P\{X=k\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{i-1})=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)\cdots P(A_k|\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{k-1})$$
$$=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdots\frac{n-k+1}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1}=1/n.$$

故 $E(X)=\sum_{k=1}^{n}kp\{X=k\}=\sum_{k=1}^{n}k\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n}(1+2+\cdots n)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}.$

解法 2　不求分布律，引进新的随机变量，利用期望的运算性质求 $E(X)$.

引进新随机变量 X_i，定义如下: $X_i=\begin{cases}1, & 前(i-1)次中没有能打开锁的,\\ 0, & 与上相反.\end{cases}$

显然有 $X_1=1, X_i$服从$(0-1)$分布$, i=2,3,\cdots,n.$ X 为直到打开锁时的试开次数.

设$X=X_1+\sum_{i=2}^{n}X_i$，则$E(X)=E(X_1)+\sum_{i=2}^{n}E(X_i)=1+\sum_{i=2}^{n}E(X_i), E(X_i)=P\{X_i=1\}$, $(i=2,3,\cdots)$.

仍设 A_i 为第 i 次取到的钥匙能打开锁，则

$$P\{X_i=1\}=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{i-1})=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)\cdots P(A_{i-1}|\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{i-2})=\frac{n-i+1}{n},$$

故　$E(X)=1+\sum_{i=2}^{n}P\{X_i=1\}=1+\sum_{i=2}^{n}\frac{n-i+1}{n}=1+(\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{n}+\cdots+\frac{1}{n})=\frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}.$

18. 1. $EZ=EX-2EY+7=-3-2\times2+7=0$

2. 因为 X,Y 相互独立，所以 $DZ=D(X-2Y+7)=DX+4DY$ =1+4×1=5.

19.(X, Y)的联合概率密度函数是 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\ |y|<x,\\ 0, & 其他\end{cases}$

因此，关于 X 的边缘概率密度函数是　$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$$D(Z)=D(2X+1)=4\left[E(X^2)-(E(X))^2\right]=4\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f_X(x)dx-(\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx)^2\right]$$
$$=4\left[\int_0^1 2x^3dx-(\int_0^1 2x^2dx)^2\right]=4(\frac{1}{2}-\frac{4}{9})=\frac{2}{9}.$$

20. 因已知方差 DX=2，所以，根据切比雪夫不等式，有

$$P\{\ |X-EX|\ \ \geq 2\}\leq\frac{DX}{2^2}=\frac{1}{2}.$$

21. $\because E(X+Y)=EX+EY=-2+2=0,$

$\therefore P\{\ |X+Y|\ \ \geq 6\}=P\{\ |(X+Y)-E(X+Y)|\ \ \geq 6\}\leq D(X+Y)/6^2;$

又$\because D(X+Y)=DX+DY+2\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}\cdot\rho_{XY}=1+4+2\times1\times2\times(-0.5)=3,$

$\therefore P\{\ |X+Y|\geq 6\}\leq 3/6^2=1/12.$

22. 直接由 $f(x,y)$求各量的值.　$E(X)=\int_0^2\int_0^2 x\cdot\frac{1}{8}(x+y)dydx=\frac{6}{7},$

$$E(Y)=\int_0^2\int_0^2 y\cdot\frac{1}{8}(x+y)dydx=\frac{6}{7},\quad E(XY)=\int_0^2\int_0^2 xy\cdot\frac{1}{8}(x+y)dydx=\frac{4}{3},$$

$$\therefore Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}=-\frac{1}{36},$$

又　$E(X^2)=\int_0^2\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dydx=\frac{5}{3},\quad E(Y^2)=E(X^2)=\frac{5}{3},$

$$\therefore D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{5}{3}-(\frac{7}{6})^2=\frac{11}{36},\quad D(Y)=D(X)=\frac{11}{36},$$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}=(-\frac{1}{36})\Big/(\frac{1}{36})=-\frac{1}{11}.$$

23. $\because (X,Y)\sim p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi r^2}, & x^2+y^2\le r^2,\\ 0, & x^2+y^2>r^2,\end{cases}$ $\therefore X$和Y的密度$p_1(x)$和$p_2(x)$为

$$p_1(x)=\frac{2}{\pi r^2}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}dy=\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2}\ (|x|\le r);\qquad p_2(y)=\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2}\ (|y|\le r).$$

$$E(X)=\frac{2}{\pi r^2}\int_{-r}^{r}x\sqrt{r^2-x^2}dx=0;\qquad E(Y)=\frac{2}{\pi r^2}\int_{-r}^{r}y\sqrt{r^2-y^2}dy=0.$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)=\iint\limits_{x^2+y^2\le r^2}\frac{xy}{\pi r^2}dxdy=0.$$ 于是，X 和 Y 的相关系数 $\rho=0$.

（2）由于 $p(x,y)\ne p_1(x)p_2(y)$,可见X和Y不独立.

24. 记P(A)=p_1，P(B)=p_2，P(AB)=p_{12}. 由数学期望的定义，可见

$$E(X)=P(A)-P(\overline{A_1})=2p_1-1,E(Y)=2p_2-1.$$

现在求 EXY.由于 XY 只有两个可能值 1 和 -1. 易知

$$P\{XY=1\}=P(AB)+P(\overline{A}\overline{B})=2p_{12}-p_1-p_2+1,$$

$$P\{XY=-1\}=1-P\{XY=1\}=p_1+p_2-2p_{12},$$

$$E(XY)=P\{XY=1\}-P\{XY=-1\}=4p_{12}-2p_1-2p_2+1.$$

从而　$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=4p_{12}-4p_1p_2$.

因此,$Cov(X,Y)=0$当且仅当$p_{12}=p_1p_2$,即X和Y不相关当且仅当事件A和B相互独立..

25. 本题应特别注意 X_1与X_2 并非独立的.由于 $X_i(i=1,2,3)$ 均只取 0 和 1 值，因此随机变量 (X_1,X_2)取值应为$(0,0)$、$(0,1)$、$(1,0)$ 和 $(1,1)$.须逐个计算它们的概率.譬如事件$\{X_1=0,X_2=0\}$表示抽取的是一等品;$\{X_1=1,X_2=1\}$表示既是一等品又是二等品，因此是不可能事件等等.

（1）设事件 $A_i=$“抽到 i 等品”　$(i=1,2,3)$.

由题意知A_1，A_2，A_3两两互不相容,且$P(A_1)=0.8$,　$P(A_2)=P(A_3)=0.1$.

易知，$P\{X_1=0,X_2=0\}=P(A_3)=0.1$,　$P\{X_1=0,X_2=1\}=P(A_2)=0.1$,

$P\{X_1=1,X_2=0\}=P(A_1)=0.8$,　$P\{X_1=1,X_2=1\}=P(\Phi)=0$.

（2）　$E(X_1)=0.8,E(X_2)=0.1$; $D(X_1)=0.8\times0.2=0.16,D(X_2)=0.1\times0.9=0.09$;

$$E(X_1X_2)=0\times0\times0.1+0\times1\times0.1+1\times0\times0.8+1\times1\times0=0$$

$$Cov(X_1,X_2)=E(X_1X_2)-E(X_1)\cdot E(X_2)=0-0.8\times0.1=-0.08,$$

$$\rho=\frac{Cov(X_1,X_2)}{\sqrt{D(X_1)\cdot(DX_2)}}=\frac{-0.08}{\sqrt{0.16\times0.09}}=-\frac{2}{3}.$$

26.（1）由数学期望的运算性质，知　$E(Z)=\frac{1}{3}E(X)+\frac{1}{2}E(Y)=\frac{1}{3}$

由 $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)$，有 $D(Z)=D(\frac{1}{3}X)+D(\frac{1}{2}Y)+2\operatorname{cov}(\frac{1}{3}X,\frac{1}{2}Y)$

$$=\frac{1}{9}D(X)+\frac{1}{4}D(Y)+2\times\frac{1}{6}\times\sqrt{D(x)}\cdot\sqrt{D(Y)}\rho_{XY}=1+4-\frac{1}{6}\times3\times4=3.$$

（2）因为　$Cov(X,Z)=\frac{1}{3}Cov(X,X)+\frac{1}{2}Cov(X,Y)=\frac{1}{3}D(X)+\frac{1}{2}\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$

$$=\frac{1}{3}\cdot3^2+\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot3\cdot4=0,$$

所以　$\rho_{XZ}=\dfrac{Cov(X,Z)}{\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Z)}}=0.$

（3）由于（X，Z）不一定服从二维正态分布，故由 $\rho_{XZ}=0$ 不能确定 X 与 Z 是否相互独立.

（二）补充题答案

1、平均利润就是销售利润 T 的数学期望 E(T), 而 T 是离散型随机变量,取值概率与 X 的概率分布有关,因此用标准正态分布函数 $\phi(x)$ 表示概率 P{X<10},P{$10\le X\le 12$}和 P{X>12}是解决问题的关键,写出 E(T)后,使 $\frac{dE(T)}{d\mu}=0$ 的点即为所求的 μ 值.

由条件知,平均利润为

$$E(T)=20P\{10\le X\le 12\}-P\{X<10\}-5P\{X>12\}$$

$$=20[\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu)]-\Phi(10-\mu)-5[1-\Phi(12-\mu)]=25\Phi(12-\mu)-21\Phi(10-\mu)-5.$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数. 设 $\Phi(x)$ 为标准正态密度. 令

$$\frac{dE(T)}{d\mu}=-25\varphi(12-\mu)+21\varphi(10-\mu)=0, \text{得} \frac{-25}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}}+\frac{21}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}=0,$$

即 $25e^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}}=21e^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}$. 由此得 $\mu=\mu_0=11-\frac{1}{2}\ln\frac{25}{21}\approx 10.9.$

即 当 $\mu=\mu_0\approx 10.9$ 毫米时，平均利润最大.

2、（1）$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=0,\qquad D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{\infty}x^2e^{-x}dx=2.$

（2）$E(X|X|)-E(X)\cdot E(|X|)=E(X|X|)=\int_{-\infty}^{\infty}x|x|f(x)=0,$ 故 X 与 $|X|$ 不相关.

（3）对给定 $0<a<+\infty$, 显然事件 $\{\,|X|<a\}$ 包含在事件 $\{X<a\}$ 内，且 $P\{X<a\}<1$,

$0<P\{\,|X|<a\}$, 故 $P\{X<a,|X|<a\}=P\{\,|x|<a\}$, 但 $P\{X<a\}\cdot P\{|X|<a\}<P\{|X|<a\}$,

所以 $P\{X<a,|X|<a\}\ne P\{X<a\}\cdot P\{\,|X|<a\}$. 因此，X 与 $|X|$ 不独立.

3、方法一：由于 X、Y 相互独立且服从正态分布，根据正态分布的性质知，服从正态分布的随机变量的线性组合也服从正态分布，令 $Z=X-Y$, 由于 $X\sim N(0,1/2), Y\sim N(0,1/2)$, 故易知 EZ=EX–EY=0，DZ=DX+DY=1，即 $Z\sim N(0,1)$.

因为 $D|X-Y|=D|Z|=E|Z|^2-(E|Z|)^2=E(Z^2)=E(Z^2)-(E|Z|)^2$，而 $EZ^2=DZ+(EZ)^2=1$,

$E|Z|=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Z^2}{2}}dz=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}ze^{-\frac{Z^2}{2}}dz=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$，　所以 $D|X-Y|=1-\frac{2}{\pi}$.

方法二：X、Y 的概率密度分别为 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$, $f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}$，由于 X、Y 相互独立，故 X、Y 的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi}e^{-(x^2+y^2)}, -\infty<x<+\infty, -\infty<y<+\infty, \text{因此}$$

$$E|X-Y|=[\frac{1}{\pi}\iint_{y<x}(x-y)e^{-(x^2+y^2)}dxdy+\iint_{y>x}(y-x)e^{-(x^2+y^2)}dxdy]$$

$$=\frac{1}{\pi}[\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}(x-y)e^{-(x^2+y^2)}dy+\int_{-\infty}^{+\infty}dy\int_{-\infty}^{y}(y-x)e^{-(x^2+y^2)}dx]$$

$$=\frac{2}{\pi}[\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{x}(x-y)e^{-(x^2+y^2)}dy]$$

$$=\frac{2}{\pi}[\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2}dy-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{x}ye^{-y^2}dy]=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

4、解法 1 三角形区域为 G={$(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1, x+y\ge 1$}；随机变量 X 和 Y 的联合密度

为 $f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\overline{\in} G.\end{cases}$

以 $f_1(x)$ 表示 X 的概率密度，则当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时，$f_1(x)=0$；当 0<x<1 时，有

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\int_{1-x}^{1}2dy=2x.$$

因此 $E(X)=\int_0^1 2x^2dx=\frac{2}{3}; E(X^2)=\int_0^1 2x^3dx=\frac{1}{2};\ D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18}$.

同理可得 $E(Y)=2/3$ 　D(Y)=1/18.

现在求 X 和 Y 的协方差. E(XY)=$\iint\limits_G 2xydxdy=2\int_0^1 xdx\int_{1-x}^1 ydy=\frac{5}{12}$, $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=5/12-4/9=-1/36.$ 　于是 $D(U)=D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2Cov(X,Y)$

$$=1/18+1/18-2/36=1/18.$$

解法 2 三角形区域为 G=$\{(x,y):0\le x\le 1, 0\le y\le 1, x+y\ge 1\}$；随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\overline{\in} G.\end{cases}$$

以 $f(u)$ 表示 U=X+Y 的概率密度，当 $u<1$ 或 $u>2$ 时，显然 $f(u)$=0.

设 $1\le u\le 2$, 当 $0\le x\le 1$ 且 $0\le u-x\le 1$ 时，$f(x,u-x)=2$，否则 $f(x,u-x)=0$. 由随机变量之和的概率密度公式，有 $f(u)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,u-x)dx=\int_{u-1}^{1}2dx=2(2-u)$.

因此
$$E(X+Y)=EU=\int_{-\infty}^{\infty} uf(u)du=2\int_1^2 u(2-u)du=4/3;$$

$$E(X+Y)^2=EU^2=\int_{-\infty}^{\infty} u^2 f(u)du=2\int_1^2 u^2(2-u)du=11/6;$$

$$DU=D(X+Y)=E(X+Y)^2-[E((X+Y)]^2=11/6-16/9=1/18.$$

5、U、V 为离散型随机变量，其联合分布（U、V）只有四个可能:（0,0)，(0,1)（1,0)，(1,1)，分别求出取这些值的概率即可.求相关系数 ρ，应分别计算 $Cov(U,V)$及 DU,DV,然后再用公式 $\rho=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{DU\cdot DY}}$. 由题设易知 $P\{X\le Y\}=1/4$，$P\{X>2Y\}=1/2$，$P\{X>2Y\}=1/2$，故有

(1) $P\{U=0,V=0\}=P\{X\le Y, X\le 2Y\}=P\{X\le Y\}1/4,\quad P\{U=0,V=1\}=P\{X\le Y, X>2Y\}=0,$
$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y, X\le 2Y\}=P\{Y<X\le 2Y\}=1/4, P\{U=,V=1\}=1-(1/4+1/4)=1/2.$

（2）以上可见 UV 以及 U 和 V 分布为

$$UV\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},\quad U\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix},\quad V\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

于是，有 $EU=3/4, DU=3/16; EV=1/2, DV=1/4; E(UV)=1/2$,

$$Cov(U,V)=E(UV)-EU.EV=1/8,\qquad 故\ \rho=\frac{Cov(U,V)}{\sqrt{DU.DV}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

6、(1) 由于二维正态密度函数的两个边缘密度都是正态密度函数，因此 $\varphi_1(x,y)$ 和 $\varphi_2(x,y)$ 的两个边缘密度为标准正态密度函数，故

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(x,y)dy+\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(x,y)dy]=\frac{1}{2}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

同理 $f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$. 由于 $X\sim N(0,1), Y\sim N(0,1)$, 可见 EX=EY=0，DY=DY=1，故

$$\rho=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\frac{1}{2}[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi_1(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\varphi_2(x,y)dxdy]=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{3})=0.$$

(2)由题设，知　$f(x,y)=\frac{3}{8\pi\sqrt{2}}[e^{-\frac{9}{16}(x^2-\frac{2}{3}xy+y^2)}+e^{-\frac{9}{16}(x^2+\frac{2}{3}xy+y^2)}]$，

而 $f_1(x)\cdot f_2(y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$，　显见　$f(x,y)\neq f_1(x)\cdot f_2(y)$，
所以 X 与 Y 不独立.

7、$\because E(X-Y)=EX-EY=0, D(X-Y)=DX+DY-2Cov(X,Y)=2(1-\rho),$

$\therefore X-Y\sim N\left(0,2(1-\rho)\right).\xi=(X-Y)\Big/\sqrt{2(1-\rho)}\sim N(0,1),$

$$\therefore E\left|\frac{X-Y}{\sqrt{2(1-\rho)}}\right|=E\quad(|\xi|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

即有 $E|X-Y|=\sqrt{2(1-\rho)}\cdot\sqrt{\frac{2}{\pi}}=2\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}$.而 $\max(X,Y)=\frac{1}{2}[X+Y+|X-Y|],$

故　$E\max(X,Y)=\frac{1}{2}[EX+EY+E|X-Y|]=\frac{1}{2}[0+0+2\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}]=\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}};$

$E\min(X,Y)=\frac{1}{2}[EX+EY-E|X-Y|]=\frac{1}{2}[0+0-2\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}]=-\sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}$.

8、不妨设 $EX_i=0,i=1,2,\cdots,n+m.$则$EY=EZ=0,DY=DZ=n\cdot EX_1^2.$

$Cov(Y,Z)=EY\cdot Z=E[(X_1+\cdots+X_n)\cdot(X_{m+1}+\cdots+X_{m+n})]$

$=E[\sum_{k=m+1}^{n}X_k^2+\sum_{\substack{i=1,\cdots,n,i\neq j\\ j=m+1,\cdots,m+n}}X_iX_j]=(n-m)\cdot EX_1^2.\quad \rho_{YZ}=\frac{Cov(Y,Z)}{\sqrt{DY}\cdot\sqrt{DZ}}=\frac{n-m}{n}.$

9、$DY=D(X_1+\cdots+X_n)=\sum_{i=1}^{n}DX_i+2\sum_{1\le i<j\le n}Cov(X_i,x_j)=n+n(n-1)\rho;$

同理$DZ=n+n(n-1)\rho.$

$Cov(Y,Z)=\mathrm{cov}(X_1+\cdots+X_n,X_{n+1},\cdots,X_{2n})=\sum_{1\le i\le n<j\le 2n}Cov(X_j,X_i)=n^2\cdot\rho$

$\rho_{Y,Z}=\frac{Cov(Y,Z)}{\sqrt{DY}\cdot\sqrt{DZ}}=\frac{n\rho}{1+(n-1)\rho}.$

10、设 $X\sim f(x)$，则有

$$P\{|X|>\varepsilon\}=\int_{|x|>\varepsilon}f(x)dx\le\int_{|x|>\varepsilon}\frac{|x|^r}{\varepsilon^r}f(x)dx\le\frac{1}{\varepsilon^r}\int_{-\infty}^{+\infty}|x|^rf(x)dx=\frac{1}{\varepsilon^r}E|x|^r.$$

11、$\because$ X 的概率密度为 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-x^2/2\sigma^2)\,(-\infty<x<+\infty),$

$\therefore E(X^n)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^np(x)dx.$　当 n 为奇数时，可以求得

$E(X^n)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^np(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x^n\exp(-x^2/2\sigma^2)dx=0$；当 n 为偶数时，有

$$E(X^n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x^n\exp(-x^2/2\sigma^2)\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\left(-\sigma^2x^{n-1}\exp(-x^2/2\sigma^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\sigma^2(n-1)\int_{-\infty}^{+\infty}x^{n-2}\exp(-x^2/2\sigma^2)\,dx\right)$$

$$=\sigma^2(n-1)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{n-2}\exp(-x^2/2\sigma^2)\,dx=\sigma^2(n-1)E\left(X^{n-2}\right)(n>2).$$

这样，当 n(>2)为偶数时，有递推式　$E(X^n)=\sigma^2(n-1)E(X^{n-2})$，

$E(X^{n-2})=\sigma^2(n-3)E(X^{n-4}),\cdots,\quad E(X^4)=\sigma^2(4-1)E(X^2)$.

考虑到 X~N$(0,\sigma^2)$，故 E（X）=0，并且$E(X^2)=D(X)=\sigma^2$.于是，由以上各式可得 $E(X^4)=\sigma^2(4-1)E(4-1)=\sigma^4\cdot 3$，$E(X^6)=\sigma^2(X^6)E(X^4)=\sigma^6\cdot 5\cdot 3,\cdots$.

一般地，有 $E(X^n)=\sigma^n(n-1)(n-1)\cdots\cdots 5\cdot 3$. 若记$(n-1)(n-3)\cdots 5\cdot 3=(n-1)!!$，则有$E(X^n)=\sigma^n(n-1)!!$. 两种情况综合，有 $E\left(X^n\right)=\begin{cases}0, & 当n为奇数,\\ \sigma^n(n-1)!!, & 当n为偶数.\end{cases}$

12、$E\left(X^n\right)=\int_0^{+\infty}x^n\lambda e^{-\lambda x}dx=-\int_0^{+\infty}x^n de^{-\lambda x}=-e^{-\lambda x}x^n\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}nx^{n-1}e^{-\lambda x}dx$

$$=-\frac{n}{\lambda}\int_0^{+\infty}x^{n-1}de^{-\lambda x}=\frac{n}{\lambda}x^{n-1}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\frac{\lambda}{n}\int_0^{+\infty}(n-1)x^{n-2}e^{-\lambda x}dx=\cdots=\frac{-n!}{\lambda^n}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{n!}{\lambda^n}.$$ 1

3、$E\sum_{k=1}^{Y}X_k=E[E(\sum_{k=1}^{Y}X_k|Y)]=\sum_{s=1}^{\infty}E(\sum_{k=1}^{s}X_k)\cdot P(Y=s)=\sum_{s=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{s}EX_k)P(Y=s)$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}EX_k[\sum_{s=k}^{\infty}P(Y=s)]=\sum_{k=1}^{\infty}EX_k[P(Y\ge k)].$$

第五章　极限定理（大数定律和中心极限定理）

1、由于 $X_1, X_2 \cdots$ 两两不相关，则

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n} COV(X_i, X_j)=\sum_{i=1}^{n} D(X_i)$$

由切比雪夫不等式，有 $\forall \varepsilon>0$，

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right|\ge\varepsilon\right)\le\frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\varepsilon^2}=\frac{\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)}{\varepsilon^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n} D(X_i)}{n^2\varepsilon^2}$$

$$\le\frac{nC}{n^2\varepsilon^2}=\frac{C}{n\varepsilon^2}\to 0\,(n\to\infty)$$

由此立得

$$\lim_{n\to\infty} p\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right|\ge\varepsilon\right\}=0$$

2、$\forall\varepsilon>0$，由于 $p\{X_n=\frac{1}{n}\}=1$，从而，当 $n>\frac{1}{\varepsilon}$ 时

$$P\{|X_n|\ge\varepsilon\}\le p\{X_n\ne\frac{1}{n}\}=0$$

于是当 $n>\frac{1}{\varepsilon}$ 时 $P\{|X_n-X|\ge\varepsilon\}=p\{|X_n-0|\ge\varepsilon\}=p\{|X_n|\ge\varepsilon\}=0$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} p\{|X_n-X|\ge\varepsilon\}=0$

从而知 $\{X_n\}$ 依概率收敛 X。

X_n 的分布函数为

$$F_{n(x)}=P\{X_n\le x\}=\begin{cases}0, & x<\frac{1}{n}\\ 1, & x\ge\frac{1}{n}\end{cases}$$

X 的分布函数为

$$F(x)=P\{X_n\le x\}=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} F_{n(x)}=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1, & x>0\end{cases}$

即当 $x=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} F_n(0)=0\ne F(0)$

即 X_n 的分布函数不收敛于 X 的分布函数。

3、设 n_A 表示使用终端的个数，则 $n_A\sim B(120, 0.05)$，于是所求概率是

$$P\{n_A\ge 10\}=P\{\frac{10-120\times0.05}{\sqrt{120\times0.05\times0.95}}\le\frac{n_A-120\times0.05}{\sqrt{120\times0.05\times0.95}}\le\frac{120-120\times0.05}{\sqrt{120\times0.05\times0.95}}\}$$

$$\approx\Phi\left(\frac{120-6}{\sqrt{5.7}}\right)-\Phi\left(\frac{4}{\sqrt{5.7}}\right)$$

$$\approx 1-\Phi(1.675)=1-0.953=0.047$$

4、 设 X_i 表示装运的第 i 箱的重量，$i=1,2,\cdots,n$，其中 n 是所求箱，数 $X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布，$E(X_1)=50$，$D(X_1)=5^2$，且承运总重量是

$$T = X_1 + X_2 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

由条件知，$P\{T \le 5000\} > 0.997$，由中心极限定理有

$$P\{T \le 5000\} = P\{\sum_{i=1}^{n} X_i \le 5000\}$$

$$= P\left\{ \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 50n}{\sqrt{25n}} \le \frac{5000-50n}{\sqrt{25n}} \right\} \approx \Phi\left(\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right)$$

即应有 $\Phi\left(\dfrac{5000-50}{5\sqrt{n}}\right) > 0.997$

查表有 $\dfrac{5000-50n}{5\sqrt{n}} > 2$，即 $n < 98.0199$，故最多可以装 98 箱。

5、以 X_i 表示第 i 个数的取整误差，则有

（1）此时 $i = 1, 2, \cdots, 1500$，且 $X_1, X_2, \cdots, X_{1500}$ 独立皆服从 $(-0.5, 0.5)$ 上的均匀分布，$E(X_i) = 0, D(X_i) = \dfrac{1}{12}$，于是所求概率是

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{1500} X_i\right| > 15\right\} = 1 - p\left\{ \frac{-15}{\sqrt{1500\times\frac{1}{12}}} \le \frac{\sum_{i=1}^{1500} X_i - 0}{\sqrt{1500\times\frac{1}{12}}} \le \frac{15}{\sqrt{1500\times\frac{1}{12}}} \right\}$$

$$\approx 1 - \left[\Phi\left(\frac{15}{\sqrt{125}}\right) - \Phi\left(\frac{15}{\sqrt{125}}\right)\right] = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)\right)$$

$$= 2\left(1 - \Phi(1.34)\right) = 2(1 - 0.9099) = 0.1802$$

（2）此时 $i = 1, 2, \cdots, n$ 其中 n 是所求的个数，$X_1, \cdots, X_n$ 独立皆服从 $(-0.5, 0.5)$ 上的均匀分布，由条件知，应有

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| < 10\right\} \ge 0.90$$

由独立同分布的中心极限定理，有

$$P\left\{\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| < 10\right\} = P\left\{ \frac{-10}{\sqrt{\frac{n}{12}}} < \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{\sqrt{\frac{n}{12}}} < \frac{10}{\sqrt{\frac{n}{12}}} \right\} \approx 2\Phi\left(\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) - 1$$

即有 $2\Phi\left(\dfrac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) - 1 \ge 0.9$，即 $\Phi\left(\dfrac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}}\right) \ge 0.95$

查表有：$\dfrac{20\sqrt{3}}{\sqrt{n}} \ge 1.645$，即 $n \le 443.45$

故最多有 443 个数相加，才能使误差总和的约对值小于 10 的概率不小于 0.90。

6、用 n_A 表示要使用外线的分机个数，则 $n_A \sim B(200, 0.5)$，设 n 表示外线数，则由题知应有

$P\{n_A \le n\} \ge 9$

由　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　于

$$P\{n_A \le n\} = P\left\{\frac{0-200\times 0.05}{\sqrt{200\times 0.05\times 0.95}} < \frac{n_A - 200\times 0.05}{\sqrt{200\times 0.05\times 0.95}} \le \frac{n-200\times 0.05}{\sqrt{200\times 0.05\times 0.95}}\right\} = \Phi\left(\frac{n-10}{\sqrt{9.5}}\right)$$

即应有 $\Phi\left(\frac{n-10}{\sqrt{9.5}}\right) \ge 0.9$，查表得 $\frac{n-10}{\sqrt{9.5}} \ge 1.39$，即 $n \ge 14.28$

故至少需要 15 条外线，才能满足需要。

7、设 n_A 表示开动的车床台数 n 表示供给的电能，则 $n_A \sim B(200, 0.6)$，且由题知，应有 $P\{n_A \le n\} \ge 0.999$

由于 $P\{n_A \le n\} = P\left\{\frac{0-200\times 0.06}{\sqrt{200\times 0.6\times 0.4}} < \frac{n_A - 200\times 0.06}{\sqrt{200\times 0.06\times 0.4}} \le \frac{n-200\times 0.06}{\sqrt{200\times 0.6\times 0.4}}\right\}$

$$\approx \Phi\left(\frac{n-120}{\sqrt{48}}\right) - \Phi\left(\frac{-120}{\sqrt{48}}\right) \approx \Phi\left(\frac{n-120}{4\sqrt{3}}\right)$$

即应有 $\Phi\left(\frac{n-120}{4\sqrt{3}}\right) \ge 0.999$，查表得 $\frac{n-120}{4\sqrt{3}} \ge 3.1$，即 $n \ge 141.48$

故至少供给 142E 的电能才能满足条件。

8、设 n_A 表示参加保险的人中死亡的人数，则 $n_A \sim B(10000, 0.006)$

（1）所求概率是

$$P\{1000 n_A > 120000\} = P\{n_A > 120\} = P\left\{\frac{n_A - 60}{\sqrt{60\times 0.994}} > \frac{120-60}{\sqrt{60\times 0.994}}\right\}$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{60}{0.994}}\right) = 1 - \Phi(7.77) \approx 0$$

（2）所求概率分别为

$$P\{120000 - 1000 n_A \ge 40000\} = P\{n_A \le 80\} = P\left\{\frac{n_A - 60}{\sqrt{60\times 0.994}} > \frac{80-60}{\sqrt{60\times 0.994}}\right\}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{20}{\sqrt{60\times 0.994}}\right) = \Phi(2.59) = 0.9952$$

$$P\{120000 - 1000 n_A \ge 60000\} = P\{n_A \le 60\} = P\left\{\frac{n_A - 60}{\sqrt{60\times 0.994}} > \frac{60-60}{\sqrt{60\times 0.994}}\right\}$$

$$\approx \Phi(0) = 0.5$$

$$P\{120000 - 1000 n_A \ge 80000\} = P\{n_A \le 40\} = P\left\{\frac{n_A - 60}{\sqrt{60\times 0.994}} > \frac{40-60}{\sqrt{60\times 0.994}}\right\}$$

$$\approx \Phi(-2.59) = 0.0048$$

第六章　数理统计的基本概念

1.设样本均值为 $\overline{X}$,则由题意,有 $\overline{X} \sim N(1.4, \frac{6^2}{n})$,或 $\frac{\overline{X}-1.4}{6/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,于是由

$$0.95 \le P\{1.4 < \overline{X} < 5.4\} = P\left\{\frac{1.4-3.4}{6/\sqrt{n}} < \frac{\overline{X}-3.4}{6/\sqrt{n}} < \frac{5.4-3.4}{6/\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{3})-1$$

$$\Rightarrow \quad \Phi(\frac{\sqrt{n}}{3}) \ge 0.975 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{n}}{3} \ge 1.96 \quad \Rightarrow \quad n \ge 34.5744$$

故样本容量至少应取 35.

2.由题意可知 $\frac{\overline{X}_n - a}{0.2/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,又

$$0.95 \le P\{|\overline{X}_n - a| < 0.1\} = P\left\{\left|\frac{\overline{X}_n - a}{0.2/\sqrt{n}}\right| < \frac{0.1}{0.2/\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)-1$$

故有 $\Phi(\frac{\sqrt{n}}{2}) \ge 0.975 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{n}}{2} \ge 1.96 \quad \Rightarrow \quad n \ge 15.3664$

因此 n 至少应等于 16.

3. 由正态分布的性质及样本的独立性知, $X_1 - 2X_2$ 和 $3X_3 - 4X_4$ 均服从正态分布,由于

$$E(X_1 - 2X_2) = 0,\ D(X_1 - 2X_2) = D(X_1) + 4D(X_2) = 20$$

以及

$$E(3X_3 - 4X_4) = 0,\ D(3X_3 - 4X_4) = 9D(X_3) + 16D(X_4) = 100$$

所以,有

$$X_1 - 2X_2 \sim N(0,20) \quad \Rightarrow \quad \frac{X_1 - 2X_2}{\sqrt{20}} \sim N(0,1)$$

$$3X_3 - 4X_4 \sim N(0,100) \quad \Rightarrow \quad \frac{3X_3 - 4X_4}{10} \sim N(0,1)$$

于是由 χ^2 分布的定义知,当 $a = \frac{1}{20},\ b = \frac{1}{100}$ 时,有

$$X = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2 = \left(\frac{X_1 - 2X_2}{\sqrt{20}}\right)^2 + \left(\frac{3X_3 - 4X_4}{10}\right)^2 \sim \chi^2(2)$$

4. 由正态分布的性质及样本的独立性知,

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_9 \sim N(0, 9^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{9}(X_1 + X_2 + \cdots + X_9) \sim N(0,1)$$

又 $\frac{Y_i}{3} \sim N(0,1),\ i = 1,2,\cdots,9$

所以 $\left(\frac{Y_1}{3}\right)^2 + \left(\frac{Y_2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{Y_9}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}(Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_9^2) \sim \chi^2(9)$

由于两个总体是 X 和 Y 相互独立的,所以其相应的样本也是相互独立的,故 $\frac{1}{9}(X_1 + X_2 + \cdots + X_9)$ 与 $\frac{1}{9}(Y_1^2 + Y_2^2 + \cdots + Y_9^2)$ 也相互独立,于是由 t 分布的定义知,

$$U=\frac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}=\frac{\frac{1}{9}(X_1+\cdots X_9)}{\sqrt{\frac{1}{9}(Y_1^2+\cdots+Y_9^2)/9}}\sim t(9)$$

5.由题意知,$\frac{X_i}{2}\sim N(0,1)$, $i=1,2,\cdots,15$,故有

$$U=\frac{1}{4}(X_1^2+\cdots X_{10}^2)=\left(\frac{X_1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2\sim\chi^2(10)$$

$$V=\frac{1}{4}(X_{11}^2+\cdots X_{15}^2)=\left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2\sim\chi^2(5)$$

利用样本的独立性以及 F 分布的定义,有

$$Y=\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}=\frac{U/10}{V/5}\sim F(10,5)$$

6.**解法 1** 考虑 $X_1+X_{n+1},X_2+X_{n+2},\cdots,X_n+X_{2n}$,将其视为取自正态总体 $N(2\mu,2\sigma^2)$ 的简单随机样本,则其样本均值为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2n}X_i=2\overline{X}$

样本方差为 $\frac{1}{n-1}Y$

由于 $E\left(\frac{1}{n-1}Y\right)=2\sigma^2$,所以 $E(Y)=(n-1)(2\sigma^2)=2(n-1)\sigma^2$

解法 2 记 $\overline{X}'=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $\overline{X}''=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{n+i}$,显然有 $2\overline{X}=\overline{X}'+\overline{X}''$，因此

$$E(Y)=E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i+X_{n+i}-2\overline{X})^2\right]=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\overline{X}')+(X_{n+i}-\overline{X}'')\right]^2\right\}$$

$$=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i-\overline{X}')^2+2(X_i-\overline{X}')(X_{n+i}-\overline{X}'')+(X_{n+i}-\overline{X}'')^2\right]\right\}$$

$$=(n-1)\sigma^2+0+(n-1)\sigma^2=2(n-1)\sigma^2$$

7.记 $D(X)=\sigma^2$（未知），易见 $E(Y_1)=E(Y_2)$， $D(Y_1)=\sigma^2/6$, $D(Y_2)=\sigma^2/3$

由于 Y_1,Y_2 相互独立，故有

$$E(Y_1-Y_2)=0,\qquad D(Y_1-Y_2)=\frac{\sigma^2}{6}+\frac{\sigma^2}{3}=\frac{\sigma^2}{2}$$

从而 $U=\frac{Y_1-Y_2}{\sigma/\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，又 $\chi^2=\frac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2)$

由于 Y_1 与 Y_2 相互独立,Y_1 与 S^2 独立,由定理 6.3.2,Y_2 与 S^2 独立,所以 Y_1-Y_2 与 S^2 独立,于是由 t 分布的定义,知

$$Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}=\frac{U}{\sqrt{\chi^2/2}}\sim t(2)$$

8.由 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,其中由题意知,$n=25$，$\sigma^2=100$,于是

$$P\{S^2>50\}=P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\frac{50(n-1)}{\sigma^2}\right\}=P\{\chi^2(25-1)>12\}$$

$$=P\{\chi^2(24)>12\}\geq 0.975$$

上式中的不等式是查表得到的,所以所求的概率至少为 0.975

9. 本题要用到这样一个结论,即 Γ 分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$ 关于第一个参数具有可加性,即若 $U\sim\Gamma(\alpha_1,\beta),V\sim\Gamma(\alpha_2,\beta)$,且 U 与 V 相互独立,则 $U+V\sim\Gamma(\alpha_1+\alpha_2,\beta)$,其中 $\Gamma(\alpha,\beta)$ 的概率密度为: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}, & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

可利用卷积公式证明.

回到本题,当 $\alpha=1,\ \beta=\dfrac{1}{\lambda}$,$\Gamma$ 分布就是参数为 λ 的指数分布,所以样本的独立性及 Γ 分布的可加性,有 $X_1+X_2+\cdots+X_n\sim\Gamma(n,\dfrac{1}{\lambda})$

即 $\sum_{i=1}^n X_i$ 的概率密度为 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$

因此 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ 的概率密度为 $h(y)=ng(ny)=\begin{cases}\dfrac{(n\lambda)^n}{(n-1)!}y^{n-1}e^{-\lambda ny}, & y>0\\ 0, & y\leq 0\end{cases}$

10. **(1)** 根据正态分布的性质,X_1+X_2 与 X_1-X_2 服从二维正态分布,所以要证明它们相互独立,只需它们不相关,由于

$$E[(X_1+X_2)(X_1-X_2)]=E(X_1^2)-E(X_2^2)=0$$

$$E(X_1+X_2)E(X_1-X_2)=0$$

所以　$Cov(X_1+X_2,X_1-X_2)=0$

即 X_1+X_2 与 X_1-X_2 相互独立

(2) 由于 $\mu=0$,所以

$$X_1+X_2\sim N(0,2\sigma^2)\quad\Rightarrow\quad\frac{X_1+X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\left(\frac{X_1+X_2}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$$

$$X_1-X_2\sim N(0,2\sigma^2)\quad\Rightarrow\quad\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}\sim N(0,1)\ \Rightarrow\ \frac{1}{2}\left(\frac{X_1-X_2}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(1)$$

由上面证明的独立性，再由 F 分布的定义知

$$F=\frac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}=\frac{\left(\dfrac{X_1+X_2}{\sigma}\right)^2/2}{\left(\dfrac{X_1-X_2}{\sigma}\right)/2}\sim F(1,1)$$

所以　$P\left\{\dfrac{(X_1+X_2)^2}{(X_1-X_2)^2}<4\right\}=P\{F<4\}<P\{F<5.83\}=0.25$

第七章　参数估计

(一)基本题

1　(1)　$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{1}(\theta+1)x^{\theta+1}dx=\frac{\theta+1}{\theta+2}$

令　$\frac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}$，得未知参数$\theta$的矩估计量为　$\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$

（2）因为$E(X)=\frac{1}{p}$,所以 p 的矩估计量为　$\hat{p}=\frac{1}{\overline{X}}$

(3)　$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,\theta)dx=\int_{\theta}^{\infty}2xe^{-2(x-\theta)}dx=\frac{1}{2}+\theta$

令　$\frac{1}{2}+\theta=\overline{X}$，解得$\theta$矩估计量为　$\hat{\theta}=\overline{X}-\frac{1}{2}$

（4）$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,\theta)dx=\int_{0}^{1}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}$，令$\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}=\overline{X}$，

解得θ矩估计量为　$\hat{\theta}=\left(\frac{\overline{X}}{1-\overline{X}}\right)^2$

（5）
$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x;\theta_1,\theta_2)dx=\int_{\theta_1}^{\infty}\frac{x}{\theta_2}\exp\left\{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right\}dx=\theta_1+\theta_2$$
$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x;\theta_1,\theta_2)dx=\int_{\theta_1}^{\infty}\frac{x^2}{\theta_2}\exp\left\{-\frac{x-\theta_1}{\theta_2}\right\}dx=(\theta_1+\theta_2)^2+\theta_2^2$$

令
$$\begin{cases}\theta_1+\theta_2=\overline{X}\\(\theta_1+\theta_2)^2+\theta_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\end{cases}$$

解得参数θ_1,θ_2的矩估计量为:　$\hat{\theta}_1=\overline{X}-\hat{\theta}_2,\quad \hat{\theta}_2=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\overline{X})^2}$

(6)　因为一阶矩$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,\sigma)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=0$,它与$\sigma$无关,所以还必须求二阶矩,$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x,\sigma)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}dx=\int_{0}^{\infty}\frac{x^2}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}dx=2\sigma^2$

令　$2\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，解得参数$\sigma$的矩估计量为　$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$

2　(1)设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是相应于$X_1,X_2,\cdots,X_n$的样本，则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}(\theta+1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta}, & 0<x_i<1,i=1,2,\cdots,n\\0, & \text{其它}\end{cases}$$

当$0<x_i<1,i=1,2,\cdots,n$时，$L(\theta)>0,$ 并且有

$$\ln L(\theta)=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

令 $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=\dfrac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，解得 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}$

从而 θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=-1-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i}$

(2) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本，则似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}p(1-p)^{x_i-1}=p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}x_i-n}$$

$$\ln L=n\ln p+(\sum_{i=1}^{n}x_i-n)\ln(1-p)$$

令 $\dfrac{d\ln L}{dp}=\dfrac{n}{p}+\dfrac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0$，解得 p 的极大似然估计值为 $\hat{p}=\dfrac{1}{\overline{x}}$

从而 θ 的极大似然估计量为 $\hat{p}=\dfrac{1}{\overline{X}}$

(3) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本，则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\begin{cases}2^n e^{-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, & x_i\ge\theta, i=1,2,\cdots,n\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

当 $x_i\ge\theta\ (i=1,2,\cdots)$ 时, $L(\theta)>0$,并且 $\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum_{i=1}^{n}(x_i-\theta)$

因为 $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=2n>0,$ 所以 $L(\theta)$ 单调递增.

因为必须满足 $x_i\ge\theta\ (i=1,2,\cdots)$,因此 $\theta=x_{(1)}=\min\{x_1,\cdots,x_{(n)}\}$ 时，$L(\theta)$ 取最大值,所以 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}=x_{(1)}$,极大似然估计量为

$$\hat{\theta}=X_{(1)}=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$$

(4) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本，则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\begin{cases}\theta^{\frac{n}{2}}(x_1x_2\cdots x_n)^{\sqrt{\theta}-1}, & 0\le x_i\le 1, i=1,2,\cdots,n\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

当 $0\le x_i\le 1, i=1,2,\cdots,n$ 时, $L(\theta)>0$,并且 $\ln L=\dfrac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$

令 $\dfrac{d\ln L}{d\theta}=\dfrac{n}{2\theta}+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{2\sqrt{\theta}}=0$，解得 θ 的极大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{n^2}{\left[\sum_{i=1}^{n}\ln x_i\right]^2}$

θ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{n^2}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i\right]^2}$

(5) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本，则似然函数为

$$L(\theta_1,\theta_2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta_2^n}\exp\left\{-\dfrac{1}{\theta_2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta_1)\right\}, & x_i>\theta_1, i=1,2,\cdots,n\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

所以当 $x_i>\theta_1, i=1,2,\cdots n$ 时, $L(\theta_1,\theta_2)>0$,并且

$$\ln L=-n\ln\theta_2-\frac{1}{\theta_2}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{n\theta_1}{\theta_2}$$

由于 $\dfrac{\partial\ln L}{\partial\theta_1}=\dfrac{n}{\theta_2}>0$,所以 $L(\theta_1,\theta_2)$ 是 θ_1 的单调递增函数，因为必须满足 $x_i>\theta_1, i=1,2,\cdots n$,所以对于任意给定的 θ_2 ， $L(x_{(1)},\theta_2)=\inf\limits_{\theta_1}L(\theta_1,\theta_2)$

令 $$\frac{\partial\ln L(x_{(1)},\theta_2)}{\partial\theta_2}=\frac{-n}{\theta_2}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i-nx_{(1)}}{\theta_2^2}=0$$

解得 $\hat{\theta}_2=\overline{x}-x_{(1)}$,所以 θ_1,θ_2 的极大似然估计值分别为 $\hat{\theta}_1=x_{(1)}$ $\hat{\theta}_2=\overline{x}-x_{(1)}$

θ_1,θ_2 的极大似然估计量分别为 $\hat{\theta}_1=X_{(1)}$ $\hat{\theta}_2=\overline{X}-X_{(1)}$

(6) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本，则似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\sigma)=\frac{1}{2}\sigma^{-n}e^{-\frac{1}{\sigma}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_1|}$$

取对数 $\ln L=\dfrac{-n}{2}\ln\sigma-\dfrac{1}{\sigma}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$ ，令 $\dfrac{d\ln L}{d\sigma}=\dfrac{-n}{2\sigma}+\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=0$

解得 σ 的极大似然估计值为 $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$

所以 σ 的极大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|$.

3　设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本，似然函数为

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n}P\{X=x_i\}=p^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}(1-p)^{mn-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}\binom{m}{x_i}$$

取对数,得 $$\ln L(p)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln p+(mn-\sum_{i=1}^{n}x_i)\ln(1-p)+\sum_{i=1}^{n}\ln\binom{m}{x_i}$$

令 $$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{mn-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0$$

得 p 的极大似然估计值为 $\hat{p}=\dfrac{1}{mn}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\dfrac{1}{m}\overline{x}$

所以 p 的极大似然估计量为 $\hat{p}=\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1}{m}\overline{X}$

4 (1)已知, λ 的极大似然估计值为 $\hat{\lambda}=\overline{x}$,又 $P\{X=0\}=e^{-\lambda}$,所以根据极大似然估计的性质, $P\{X=0\}$ 的极大似然估计值为 $e^{-\overline{x}}$

(2) 观察到的五年内每一扳道员引起的严重事故的平均次数为

$$\overline{x}=\frac{1}{122}(0\times44+1\times42+2\times21+3\times9+4\times4+5\times2)=\frac{137}{122}=1.123$$

所以一个扳道员在五年内未引起严重事故的概率 p 的极大似然估计值为

$$\hat{p}=e^{-1.123}=0.3253$$

5. (1) $E(X)=E(e^Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^z e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}dz$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(z^2-(2\mu+2\sigma^2)z+(\mu+\sigma^2)^2-2\mu\sigma^2-\sigma^4)\}dz$$

$$=\exp\{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(z-\mu-\sigma^2)\}dz \quad =\exp\{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\}$$

(2) 可以将 $\ln x_1,\ln x_2,\cdots,\ln x_n$ 视为取自总体 $Z=\ln X$ 的样本,则由于 $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$,因而可得参数 μ,σ^2 的极大似然估计值分别为

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,\qquad \hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\hat{\mu})$$

故由极大似然估计的性质,可得 $E(X)$ 的极大似然估计值为 $\hat{E(X)}=\exp\{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\}$

(3) 经计算得, $\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=3.0909$, $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\hat{\mu})=0.5115$,

所以，一个句子字数均值的极大似然估计值为 $\hat{E(X)}=\exp\{\hat{\mu}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}^2\}$ =28.4073

6.由正态分布的性质以及样本的独立性可知 $X_{i+1}-X_i\sim N(0,2\sigma^2)$

因此 $E(X_{i+1}-X_i)^2=D(X_{i+1}-X_i)=2\sigma^2$

欲使 $\sigma^2=E\left(c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2\right)=c\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}-X_i)^2=2(n-1)c\sigma^2$

必须 $c=\frac{1}{2(n-1)}$ ，因此，当 $c=\frac{1}{2(n-1)}$ 时，统计量 $c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计.

7. 由于 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 均为参数 θ 的无偏估计，所以 $E(a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2)=aE(\hat{\theta}_1)+bE(\hat{\theta}_2)=(a+b)\theta$

欲使 $a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2$ 是 θ 的无偏估计，必须 $a+b=1$ ，即 $b=1-a$.

从而由 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 的独立性以及题设条件,有

$$D(a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2)=a^2D(\hat{\theta}_1)+(1-a)^2D(\hat{\theta}_2)=[2a^2+(1-a)^2]D(\hat{\theta}_2)=(1-2a+3a^2)D(\hat{\theta}_2)$$

上式右边当 $a=\frac{1}{3}$ 时达到最小.

综上所述,当 $a=\frac{1}{3},b=\frac{2}{3}$ 时， $a\hat{\theta}_1+b\hat{\theta}_2$ 是 θ 的无偏估计,并且在所有这样的无偏估计中方差最小.

8.（1）由于总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，所以其数学期望和方差均为 λ，由于样本均值和样本方差是总体均值和方差的无偏估计，所以有

$$E(\overline{X}) = E(S^2) = \lambda$$

从而
$$E[\alpha\overline{X} + (1-\alpha)S^2] = \alpha E(\overline{X}) + (1-\alpha)E(S^2) = \lambda$$

所以 $\alpha\overline{X} + (1-\alpha)S^2$ 为 λ 的无偏估计量

（2）已知, λ 的极大似然估计量为 $\hat{\lambda}_M = \overline{X}$,所以由极大似然估计的性质, λ^2 的极大似然估计量为 $\hat{\lambda}_M^2 = (\overline{X})^2$.

(3) 由于
$$E(\hat{\lambda}_M^2) = E(\overline{X}^2) = D(\overline{X}) + [E(\overline{X})]^2 = \frac{\lambda}{n} + \lambda^2$$

因此 $\hat{\lambda}_M^2 = (\overline{X})^2$ 不是 λ^2 的无偏估计,令 $\hat{\lambda}^2 = (\overline{X})^2 - \dfrac{\overline{X}}{n}$

则有
$$E(\hat{\lambda}^2) = E(\overline{X}^2) - \frac{1}{n}E(\overline{X}) = \frac{\lambda}{n} + \lambda^2 - \frac{\lambda}{n} = \lambda^2$$

所以 $\hat{\lambda}^2 = (\overline{X})^2 - \dfrac{\overline{X}}{n}$ 是 λ^2 的一个无偏估计量.

注: λ^2 的无偏估计量不唯一,如统计量 $\hat{\lambda}_i^2 = (\overline{X})^2 - \dfrac{X_i}{n}$ $(i = 1,2,\cdots.n)$ 都是 λ^2 无偏估计量.

9. 由题意知, X 的概率密度和分布函数分别为

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \theta < x < \theta+1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x \le \theta \\ x-\theta, & \theta < x < \theta+1 \\ 1, & x \ge \theta+1 \end{cases}$$

因此,最大顺序统计量 $X_{(n)}$ 的概率密度为

$$f_{(n)}(x) = n[F(x)]^{n-1} f(x) = \begin{cases} n(x-\theta)^{n-1}, & \theta < x < \theta+1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

所以,
$$E(X_{(n)}) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{(n)}(x)dx = \int_{\theta}^{\theta+1} nx(x-\theta)^{n-1}dx \quad = n\int_0^1 (t+\theta)t^{n-1}dt = \frac{n}{n+1} + \theta$$

$$E(X_{(n)}^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_{(n)}(x)dx = \int_{\theta}^{\theta+1} nx^2(x-\theta)^{n-1}dx = n\int_0^1 (t+\theta)^2 t^{n-1}dt = \frac{n}{n+2} + \frac{2n}{n+1}\theta + \theta^2$$

$$D(X_{(n)}) = E(X_{(n)}^2) - [E(X_{(n)}^2] = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2}$$

于是
$$E(\hat{\theta}_1) = E(\overline{X}) - \frac{1}{2} = E(X) - \frac{1}{2} = \frac{\theta+\theta+1}{2} - \frac{1}{2} = \theta$$

$$E(\hat{\theta}_2) = E(X_{(n)}) - \frac{n}{n+1} = \frac{n}{n+1} + \theta - \frac{n}{n+1} = \theta$$

所以, $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 皆为参数 θ 的无偏估计,又

$$D(\hat{\theta}_1) = D(\overline{X}) = \frac{1}{n}D(X) = \frac{1}{12n}$$

$$D(\hat{\theta}_2) = D(X_{(n)}) = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} < \frac{1}{12n} \qquad (n > 1)$$

所以 $\hat{\theta}_2$ 比 $\hat{\theta}_1$ 有效.

10. (1) $\sigma^2=0.025^2$ 已知时 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

将 $\bar{x}=0.081,\sigma=0.025,z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$ 代入得 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

（0.0775，0.0845）

11. σ^2 已知时 μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$

欲使其区间长度不大于给定的 L,必须 $\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\le L$，即 $n\ge\dfrac{4z_{\alpha/2}\sigma^2}{L^2}$

12. 利用上题的结果,由于 $\sigma=0.05,\ z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96$，要使他对平均反应时间的估计误差不超过 0,01 秒,必须 $L=0.02$，所以　　$n\ge\dfrac{4z_{\alpha/2}\sigma^2}{L^2}$=49

13. 　σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为　$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\quad\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

在本题中，$\alpha=0.05,\ \ n=16$，经计算得，$s^2=0.00244,$ 查表得，$\chi^2_{0.975}(15)=6.262,\ \chi^2_{0.025}(15)=27.488,$ 最后得 σ^2 的置信度为 95%的置信区间为

(0.00133,0.00584)

14.此题为方差未知但相等时的两个总体均值差的区间估计问题，已知此时 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为　$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right)$

已知 $\bar{x}=1000,\ \bar{y}=980,\ n_1=5,\ n_2=7,\ \alpha=0.01,$ 查表得 $t_{0.005}(10)=3.1693$，

$$s_w=\sqrt{\frac{4\times28^2+6\times32^2}{4+6}}=30.463$$

最后得两个总体均值差的置信度为 0.99 的置信区间为　(-36.53, 76.53)

15.设 X，Y 分别为一、二号方案的单位面积产量，并设 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\ Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$ 为相应于总体 X,Y 的样本，令 $Z=X-Y$，则 $Z\sim N(\mu_1-\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$,令 $Z_i=X_i-Y_i$,于是,$\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right)$$

其中　$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(Z_i-\overline{Z})^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}[(X_i-Y_i)-(\overline{X}-\overline{Y})]^2$

已知 $n=8,\ \bar{z}=\bar{x}-\bar{y}=5.75$，$s=5.12$，$\alpha=0.05,\ t_{0.025}(7)=2.3646$，计算得 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 95%的置信区间为(1.47,10.03)

16. 方差比 σ_A^2/σ_B^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_A^2/S_B^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)},\quad\frac{S_A^2/S_B^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)}\right).$$

已 知 $s_A^2=0.5419$ ， $s_B^2=0.6065$ ， $n_1=n_2=10$ ， $\alpha=0.05,\quad F_{0.025}(9,9)=4.03,$ $F_{0.975}(9,9)=0.2481$，代入算得方差比σ_A^2/σ_B^2 的置信度为 0.95 的置信区间 (0.2217,3.601)

(二)补充题

1. (1)　设 $x_1,\cdots,x_n$ 是相应于 $X_1,\cdots,X_n$ 的一组样本值,则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}a_{x_i}\frac{\theta^{x_i}}{f(\theta)}=\theta^{\sum_{i=1}^{n}x_i}f^{-n}(\theta)\prod_{i=1}^{n}a_{x_i}$$

取对数得　$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}x_i\ln\theta-n\ln f(\theta)+\ln\prod_{i=1}^{n}a_{x_i}\quad \frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{nf'(\theta)}{f(\theta)}=0$

令　$$\frac{d\ln L}{d\theta}=\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{nf'(\theta)}{f(\theta)}=0$$

可得θ的极大似然估计值是方程　$\bar{x}=\dfrac{\theta f'(\theta)}{f(\theta)}$

的一个根,从而θ的极大似然估计量是方程

$$\bar{X}=\frac{\theta f'(\theta)}{f(\theta)}\tag{1}$$

的一个根.

由　$$\sum_{i=1}^{\infty}a_x\frac{\theta^x}{f(\theta)}=1\quad\Rightarrow\quad\sum_{i=1}^{\infty}a_x\theta^x=f(\theta)$$

故　$$E(X)=\sum_{x=1}^{\infty}a_x\frac{x\theta^x}{f(\theta)}=\frac{\theta}{f(\theta)}\sum_{x=1}^{\infty}a_x(\theta^x)'=\frac{\theta}{f(\theta)}\left(\sum_{x=1}^{\infty}a_x\theta^x\right)'=\frac{\theta f'(\theta)}{f(\theta)}$$

所以（1）也是θ的矩法方程.

(2) 对于泊松分布(参数为λ), $a_x=\dfrac{1}{x!}$, $f(\lambda)=e^{\lambda}$,因此 $f'(\lambda)=f(\lambda)$,故λ的极大似然估计满足方程　$\bar{X}=\lambda$

从而λ的极大似然估计为$\hat{\lambda}=\bar{X}$.

对于二项分布$B(n,p)$,令 $\dfrac{p}{1-p}=\theta$,则

$$P\{X=x\}=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}=\binom{n}{x}\left(\frac{p}{1-p}\right)^x(1-p)^n=\binom{n}{x}\frac{\theta^x}{(1+\theta)^n}$$

因此, $f(\theta)=(1+\theta)^x$,故θ的极大似然估计满足的方程为$\bar{X}=\dfrac{n\theta}{1+\theta}$

由极大似然估计的性质可知, $p=\dfrac{\theta}{1+\theta}$的极大似然估计满足的方程为　$\bar{X}=np$

2.　X 的概率密度为　$f(x,\theta)=\begin{cases}1, & \theta<x<\theta+1\\ 0, & 其它\end{cases}$

设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是相应的样本值，则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\begin{cases}1, & \theta<x_i<\theta+1, i=1,2,\cdots,n\\ 0, & 其它\end{cases}$$

因此，当 $\theta<x_i<\theta+1, i=1,2,\cdots,n$ 时，$L(\theta)=1$ 为常数，因此对于满足

$$\theta < x_{(1)} \le x_{(n)} < \theta + 1$$

的一切θ均为极大似然估计,因此θ的极大似然估计量不止一个.由于区间$(\theta, \theta+1)$的总长度为 1,因此由上述不等式知,如果θ尽可能的靠近$x_{(1)}$,或者$\theta+1$应尽量靠近$x_{(n)}$,则所得的估计显得更加合理,因此$\hat{\theta}_1 = X_{(1)}$，$\hat{\theta}_2 = X_{(n)} - 1$,都可以取为$\theta$的极大似然估计量. 由极大似然估计的性质,$\hat{\theta}_3 = \frac{1}{2}(X_{(1)} + X_{(n)}) - \frac{1}{2}$也可以作为极大似然估计.

3.此时 X 的概率密度为

$$f(x,\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0 \end{cases}$$

设$X_1, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$是相应的样本值，则似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \begin{cases} \theta^{-n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i}, & x_i > 0, i = 1, \cdots, n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

所以当$x_i > 0, i = 1, \cdots, n$时，$L(\theta) > 0,$ 并且

$$\ln L(\theta) = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

令
$$\frac{d \ln L}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

解得θ的极大似然估计值为　$\hat{\theta} = \bar{x}$

故其极大似然估计量为　$\hat{\theta} = \bar{X}$

由于$E(\hat{\theta}) = E(\bar{X}) = E(X) = \theta$，故$\hat{\theta} = \bar{X}$ 是θ无偏估计.

又
$$\ln f(x,\theta) = -\ln\theta - \frac{x}{\theta}; \quad \frac{\partial \ln f(x,\theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{x}{\theta^2}$$

故信息量
$$I(\theta) = E\left[\frac{\partial}{\partial\theta} f(X,\theta)\right]^2 = E\left(-\frac{1}{\theta} + \frac{X}{\theta^2}\right)^2 = \frac{1}{\theta^4} E(X-\theta)^2 = \frac{D(X)}{\theta^4} = \frac{1}{\theta^2}$$

由于
$$D(\hat{\theta}) = D(\bar{X}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{\theta^2}{n} = \frac{1}{nI(\theta)}$$

所以估计量$\hat{\theta}$是为θ的有效估计.

4. (1)由于
$$E\left(2^X\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k \lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{2\lambda} e^{-\lambda} = e^{\lambda}$$

所以如果$X_1, \cdots, X_n$是来自总体X的一个样本,则$2^{X_i}\,(i = 1,2,\cdots,n)$均为$e^{\lambda}$的无偏估计.

(2) 由于　$\hat{\theta} = (-1)^X$,所以有
$$E(\hat{\theta}) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^k}{k!} = e^{-2\lambda}$$

故$\hat{\theta} = (-1)^X$是$\theta = e^{-2\lambda}$的无偏估计.

5　(1)由本章基本题 5 知

$$b = E(X) = \exp\{\mu + \frac{1}{2}\}$$

(2)　由于$Y \sim N(\mu, 1)$,所以μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$(\overline{Y}-\frac{1}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\overline{Y}+\frac{1}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})\qquad \text{其中}\ \overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i$$

在本题中已知 $n=4$,经计算得 $\overline{y}=0$,查表得 $z_{0.025}=1.96$,所以 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为(-0.98,0.98).

(3) 由上面的结果,b 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\exp(\overline{Y}-\frac{1}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{2}),\exp(\overline{Y}+\frac{1}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{2}\right)$$

将 $n=4$, $\overline{y}=0$, $z_{0.025}=1.96$ 代入得 b 的置信度为 0.95 的置信区间为 $\left(e^{-0.48},e^{1.48}\right)$

6. (1) 由于 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1)$,所以有 $P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}>\chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\}=1-\alpha$

即 $P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}>\sigma^2\right\}=1-\alpha$

所以 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信上限为 $\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}$

(2) 由于 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

所以 $\log\sigma^2$ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $\left(\log\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\quad \log\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right)$

其区间长度为 $\log\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}$,因此要使其具有固定长度 L,必须选择样本容量 n 使其满足

$$\log\frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}=L,\ \text{即}\quad \frac{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}=e^L$$

7. (1) 由题意知,$X_i\sim N(\frac{\theta}{2}t_i^2,\sigma^2)$ $(i=1,2,\cdots,n)$,且相互独立,由于 $\hat{\theta}$ 是 X_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 线性组合,故也服从正态分布.

又 $$E(\hat{\theta})=\frac{2\sum_{i=1}^{n}t_i^2E(X_i)}{\sum_{i=1}^{n}t_i^4}=\theta,\quad D(\hat{\theta})=\frac{4\sum_{i=1}^{n}t_i^4D(X_i)}{(\sum_{i=1}^{n}t_i^4)^2}=\frac{4\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}t_i^4}$$

于是 $$U=\frac{\hat{\theta}-\theta}{\sqrt{\frac{4\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}t_i^4}}}\sim N(0,1),\ \text{由}\quad P\{z_{1-\alpha+\alpha_1}<U<z_{\alpha_1}\}=1-\alpha$$

可解得 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\hat{\theta}-\frac{2\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}t_i^4}}z_{\alpha_1},\hat{\theta}-\frac{2\sigma}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}t_i^4}}z_{1-\alpha+\alpha_1}\right)$$

因此,要是上面的区间具有固定长度,必须选择合适的α_1,使$\dfrac{2\sigma(z_{\alpha_1}-z_{1-\alpha+\alpha_1})}{(\sum_{i=1}^{n}t_i^4)^{1/2}}=L$

(2) 由于有限制 $0\le t_i\le 1, i=1,2,\cdots,n$,因此要是区间长度尽可能的短,必须使上式的分母$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}t_i^4}$尽可能的大,因此我们取$t_i=1, i=1,2,\cdots,n$.

8. 设 α_1,α_2 不相等,且 $\alpha_1<\dfrac{\alpha}{2}<\alpha_2$,则 $z_{\alpha_2}<z_{\frac{\alpha}{2}}<z_{\alpha_1}$,由于 $\alpha_1+\alpha_2=\alpha$,所以 $\alpha_2-\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\alpha}{2}-\alpha_1$,设标准正态分布的概率密度为$\varphi(x)$,则

$$\int_{z_{\alpha_2}}^{z_{\frac{\alpha}{2}}}\varphi(x)dx=\alpha_2-\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}-\alpha_1=\int_{z_{\frac{\alpha}{2}}}^{z_{\alpha_1}}\varphi(x)dx$$

由于$\varphi(x)$在$x>0$时是单调递减的,所以有 $z_{\alpha_1}-z_{\frac{\alpha}{z}}>z_{\frac{\alpha}{2}}-z_{\alpha_2}$,即 $z_{\alpha_1}+z_{\alpha_2}>2z_{\frac{\alpha}{2}}$

因此,区间$(\overline{X}-z_{\alpha_1}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha_2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$的长度为$\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{\alpha_1}+z_{\alpha_2})>\dfrac{2\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$,而右边即为$\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{\alpha}{2}$是置信区间的长度.

所以形如$(\overline{X}-z_{\alpha_1}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{X}+z_{\alpha_2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}})$的置信度为$1-\alpha$($\alpha_1+\alpha_2=\alpha$)的置信区间中,当$\alpha_1=\alpha_2=\dfrac{\alpha}{2}$时,区间长度最短.

9. (1) 设 $\overline{X}=\dfrac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}X_i$, $\overline{Y}=\dfrac{1}{n_2}\sum_{i=1}^{n_2}Y_i$,则有 $\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

则$\mu_1-\mu_2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-z_{\alpha-\alpha_1}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}},\quad \overline{X}-\overline{Y}+z_{\alpha_1}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

要使该区间具有固定长度 L,必须选择适当的α_1或样本容量n_1,n_2,使得

$$z_{\alpha-\alpha_1}+z_{\alpha_1}=\frac{L}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

(2)由于$L=\dfrac{2}{5}\sigma$, $n_1=n_2=n$,取$\alpha_1=\dfrac{\alpha}{2}$,则上式变为 $2z_{\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\frac{2}{5}\sigma}{\sqrt{\frac{2}{n}}\sigma}$

解得 $n=\left(5\sqrt{2}z_{\alpha/2}\right)^2$,又$\alpha=0.1$,故$z_{0.05}=1.645$,代入计算得$n=135.3$,由于容量为整数,故取$n=136$.

10. (1)　总体 X 的概率密度为　$f(x,\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2}$

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应的样本值，则似然函数为

$$L(\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2}}=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

取对数,得　$\ln L(\mu)=-\dfrac{n}{2}\ln(2\pi)-\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

令　$\dfrac{d\ln L(\mu)}{d\mu}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0$

解得 μ 的极大似然估计值为 $\hat{\mu}=\bar{x}$,从而 μ 的极大似然估计量为 $\hat{\mu}=\overline{X}$.

(2) 依据辛钦大数定律,当 $n\to\infty$ 时，$\hat{\mu}=\overline{X}$ 依概率收敛于 μ ,故 $\hat{\mu}=\overline{X}$ 是 μ 的一致估计量.

又　$E(\hat{\mu})=E(\overline{X})=E(X)=\mu$

故 $\hat{\mu}=\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计量.

由于　$\ln f(x,\mu)=-\dfrac{1}{2}\ln(2\pi)-\dfrac{1}{2}(x-\mu)^2$；　$\dfrac{\partial\ln f}{\partial\mu}=x-\mu$

信息量　$I(\mu)=E\left(\dfrac{\partial\ln f(X,\mu)}{\partial\mu}\right)^2=E(X-\mu)^2=D(X)=1$

由于　$D(\hat{\mu})=D(\overline{X})=\dfrac{D(X)}{n}=\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{nI(\mu)}$

综上所述, 所得的估计量为 μ 的一致的、无偏的达到罗-克拉美不等式下界的有效估计.

11. (1)　$E(X)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}xf(x,\theta)dx=\int_{0}^{\theta}\frac{2x^2}{\theta^2}dx=\frac{2}{3}\theta$

令 $\dfrac{2}{3}\theta=\overline{X}$ ，解得 θ 的矩估计量为　$\hat{\theta}=\dfrac{3}{2}\overline{X}$

（2）由于　$E(\hat{\theta})=\dfrac{3}{2}E(\overline{X})=\dfrac{3}{2}E(X)=\theta$ ，故 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

(3)　$\ln f(x,\theta)=\ln 2x-2\ln\theta$；　$\dfrac{\partial\ln f}{\partial\theta}=-\dfrac{2}{\theta}$

信息量　$I(\theta)=E\left(\dfrac{\partial\ln f(X,\theta}{\partial\theta}\right)^2=\dfrac{4}{\theta^2}$

又　$E(X^2)=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x,\theta)dx=\int_{0}^{\theta}\frac{2x^3}{\theta^2}dx=\frac{1}{2}\theta^2$

故　$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\dfrac{1}{18}\theta^2$

由于　$D(\hat{\theta})=\dfrac{9}{4}D(\overline{X})=\dfrac{9}{4n}D(X)=\dfrac{1}{8n}\theta^2<\dfrac{1}{4n}\theta^2=\dfrac{1}{nI(\theta)}$

所以 $D(\hat{\theta})$ 小于罗-克拉美不等式的下界。

第八章　假设检验

（一）基本题

1.此题是在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad \text{其中 } \mu_0 = 1600$$

检验统计量为 $u = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$, 拒绝域为 $|u| \geq z_{\frac{\alpha}{2}}$, 已知 $\sigma = 150$, $n = 26,\ \bar{x} = 1637,$ 查表得 $z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0.025} = 1.96,$ 计算得 $|u| = 1.258 < 1.96,$ 所以接受原假设 H_0,即认为这批产品的指标的期望值 μ 为 1600.

2.设该次考试的考生成绩为 X ,则 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,把从 X 中抽取的容量为 n 的样本均值记为 $\bar{x}$,样本标准差为 s ,本题是在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0 \quad \text{其中 } \mu_0 = 70$$

检验统计量为 $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$, 拒绝域为 $|t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$, 由 $n = 36,\ \bar{x} = 66.5,\ s = 15,$ $t_{0.025}(36-1) = 2.0301,$ 算得　$|t| = \dfrac{|66.5 - 70|\sqrt{36}}{15} = 1.4 < 2.0301$

所以接受原假设, 即可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.

3. 由题意知检验统计量为 $u = \dfrac{\bar{x} - 1000}{\sigma / \sqrt{n}}$, 拒绝域为 $u < -z_{\frac{\alpha}{2}}$, 由 $n = 25,\ \bar{x} = 950,\ \sigma = 100,\ \alpha = 0.05,\ z_{0.025} = 1.96,$ 算得

$$u = \frac{(950 - 1000)\sqrt{25}}{100} = -2.5 < -1.96$$

所以拒绝原假设, 即认为这批元件不合格.

4. (1) 检验统计量为 $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$, 拒绝域为 $|t| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$, 由 $n = 10,\ \mu_0 = 0.5\%,\ \bar{x} = 0.452\%,\ \ s = 0.037\%,\ \alpha = 0.05,\ t_{0.025}(9) = 2.2622,$ 算得

$$|t| = 3.8919 > 2.2622$$

所以拒绝原假设 H_0.

(2) 检验统计量为 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$（其中 $\sigma_0 = 0.04\%$）, 拒绝域为

$$\{\chi^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)\} \cup \{\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}$$

查表得 $\chi^2_{0.025}(9) = 19.023,\ \chi^2_{0.975}(9) = 2.7$, 算得 $\chi^2 = 7.701$, 它没有落在拒绝域中, 故接受原假设 H_0.

5.本题是在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma > \sigma_0^2 \quad \text{（其中 } \sigma_0 = 0.005\text{）}$$

检验统计量为 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$, 拒绝域为 $\{\chi^2 > \chi^2_{\alpha}(n-1)\}$, 由 $n = 9, s = 0.007,\ \chi^2_{0.05}(8) = 15.504$, 算得 $\chi^2 = 15.68 > 15.504,$ 因此拒绝原假设 H_0 , 即认为这批导线的标准差显著地偏大.

6　设枪弹甲、乙的速度分别为 x, y ,并设 $x \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

首先需在显著性水平$\alpha = 0.05$检验两种枪弹在均匀性方面有无显著差异,即需检验:

$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \leftrightarrow H_1:\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

检验统计量为$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}$, 拒绝域为 $C=\left\{F \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\text{或}F \ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-1,n_2-1)\right\}$

由

$n_1=n_2=110,\quad s_1=120.41$, $s_2=105.00$, $F_{0.025}(109,109)>F_{0.025}(120,120)=1.43$, $F_{0.975}(109,109)<0.6993$,可以算得,$F=1.315$,显然$0.6993<F=1.315<1.43$, 故检验没有落在拒绝域内,故可以认为两个总体的方差相等,即两种枪弹在均匀性方面没有差异.

其次我们需在显著性水平$\alpha = 0.05$检验两种枪弹在速度方面有无显著差异,即需检验:

$$H_0:\mu_1-\mu_2=0 \leftrightarrow H_1:\mu_1-\mu_2 \neq 0$$

由于可以认为两者的方差相等, 故可取检验统计量为 $t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$

其中 $s_w^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$, 拒绝域为$C=\left\{|t| \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right\}$.

由于n_1,n_2很大, 故有$t_{0.025}(218)\approx z_{0.025}=1.96$将$\bar{x}=2805,\ \bar{y}=2680$, 以上数据代入上式计算可得$|t|=8.206>1.96$,故拒绝原假设$H_0$,可以认为两个总体的平均值有显著差异,即两种枪弹在速度方面有显著差异.

综上所述,两种枪弹在速度方面有显著差异但在均匀性方面没有显著差异.

7.设马克吐温与思诺特格拉斯的小品文中由 3 个字母组成的词的比例分别为x,y,并且由题意可设$x\sim N(\mu_1,\sigma^2)$, $y\sim N(\mu_2,\sigma^2)$,本题是在显著性水平$\alpha = 0.05$下检验假设:

$$H_0:\mu_1-\mu_2=0 \leftrightarrow H_1:\mu_1-\mu_2 \neq 0$$

由于两个总体的方差相等, 故可取检验统计量为 $t=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{s_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}$

其中 $s_w^2=\frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$, 拒绝域为$C=\left\{|t| \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1+n_2-2)\right\}$.

已知$n_1=8,n_2=10$,查表得$t_{0.025}(16)=2.1199,$,经计算得, $\bar{x}=0.2319,s_1=0.01456,$ $\bar{y}=0.2097,s_2=0.00966$,代入检验统计量得$|t|=3.5336>2.1199$

故拒绝原假设,即可以认为两个作家所写的小品文中包含由 3 个字母组成的词的比例是否有显著的差异.

8.设两台机器所加工的零件的尺寸分别为x,y,并且由题意可设$x\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$,本题是要在显著性水平$\alpha = 0.05$下检验: $H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2 \leftrightarrow H_1:\sigma_1^2>\sigma_2^2$

检验统计量为$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}$, 拒绝域为 $C=\left\{F \ge F_{\alpha}(n_1-1,n_2-1)\right\}$

已知$n_1=8,\ n_2=9$,计算得$s_1=0.3092,\ s_2=0.16159$, $F_{0.05}(7,8)=3.5$,因此

$$F=\frac{s_1^2}{s_2^2}=3.6615>3.5$$

故拒绝原假设, 即可以认为第二台机器的加工精度比第一台机器的高.

9. 设没关禁闭和关禁闭的人的脑电波中的x,y,且设$x\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

(1)先在显著性水平下 $\alpha = 0.05$ 检验:　　$H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

检验统计量为 $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$, 拒绝域为 $C = \left\{ F \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) \text{或} F \ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) \right\}$

已知 $n_1 = n_2 = 10$, 经计算得 $\bar{x} = 10.58,\ \bar{y} = 9.78,\ s_1^2 = 0.21,\ s_2^2 = 0.36,\ F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2} = 0.5833$

查表得 $F_{0.025}(9,9) = 4.03, F_{0.975}(9,9) = 1 \big/ F_{0.025}(9,9) = 0.248$

由于检验统计量的观察值 0.5833 没有落在拒绝域中,故接受原假设 H_0,即可以认为两个总体的方差没有显著差异.

(2) 再在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设: $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \leftrightarrow H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

由于两个总体的方差相等, 故可取检验统计量为　　$t = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{s_w \sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}}$

其中　　$s_w^2 = \dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$，拒绝域为 $C = \left\{ |t| \ge t_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 2) \right\}$.

查表得 $t_{0.025}(18) = 2.093$,经计算得 $s_w = 0.5338,\ |t| = 3.35 > 2.093 = t_{0.025}(18)$

故拒绝 H_0, 即认为两个总体的均值有显著差异,即可以认为关紧闭对脑电波的影响显著.

10.设两台机器生产的部件的重量分别为 x, y, 且设 $x \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

由题意知，需在显著性水平下 $\alpha = 0.05$ 检验: $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \leftrightarrow H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

检验统计量为 $F = \dfrac{s_1^2}{s_2^2}$, 拒绝域为　　$C = \{F \ge F_\alpha(n_1 - 1, n_2 - 1)\}$

已知 $n_1 = 60$　, $n_2 = 40$, $F_{0.05}(59,39) = 1.65$,计算得　$F = \dfrac{15.46}{9.66} = 1.6 < 1.65$

故接受原假设 H_0 ,即不能认为第一台机器生产的部件重量的方差显著地大于第二台机器生产的部件重量的方差

11. 设一年内的暴雨次数为 X, 现在的问题是在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验假设:

$H_0: X$ 服从参数为 λ 泊松分布

首先来估计泊松分布中的参数 λ. λ 的极大似然估计值为

$$\hat{\lambda} = \bar{x} = \frac{1}{63}(0 \times 4 + 1 \times 8 + \cdots + 9 \times 0) = 2.8571$$

为利用 χ^2 拟合检验法则,将相关的计算结果列表表示(见下表).

i	v_i	$\hat{p}_i$	$n\hat{p}_i$	$v_i - n\hat{p}_i$	$(v_i - n\hat{p}_i)^2 / n\hat{p}_i$
0	4	0.0574	3.62	-1.96	0.2752
1	8	0.1641	10.34		
2	14	0.2344	14.77	-0.77	0.0401
3	19	0.2233	14.07	4.93	1.7274
4	10	0.1595	10.05	-0.05	0.0002
5	4	0.0911	5.74		
6	2	0.0434	2.73	-2.16	0.4592
7	1	0.0177	1.12		

8	1	0.0083	0.52		
≥ 9	0	0.0008	0.05		
$\sum$					$\chi^2 = 2.5021$

其中 $\hat{p}_i$ 为 $p_i = P\{X = i\}$ 的估计值: $\hat{p}_i = \dfrac{(2.8571)^i}{i!} e^{-2.8571}$ $i = 0,1,2,\cdots$

表中我们对于不满足 $np_i > 5$ 的组作了适当的合并,并组后, $k = 10 - 5 = 5$,而 $\alpha = 0.05$, $r = 1$, $\chi^2_{0.05}(5-1-1) = 7.815$, 因此有 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{5} \dfrac{(v_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} = 2.5021 < \chi^2_{0.95}(3)$,所以接受 H_0 ,即可以认为一年的暴雨次数服从泊松分布.

12. 设事故发生在星期 X ,则本题是要在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下检验:

$$H_0 : P\{X = i\} = \frac{1}{6}, i = 1,2,3,4,5,6$$

计算结果列表如下

i	v_i	p_i	np_i	$v_i - n\hat{p}_i$	$(v_i - n\hat{p}_i)^2 / n\hat{p}_i$
1	9	1/6	10.5	-1.5	0.2143
2	10	1/6	10.5	-0.5	0.02381
3	11	1/6	10.5	0.5	0.02381
4	8	1/6	10.5	-2.5	0.5952
5	13	1/6	10.5	2.5	0.5952
6	12	1/6	10.5	1.5	0.2143
$\sum$					1.6667

查表得 $\chi^2_{0.05}(6-1) = 11.071$,所以 $\chi^2 = \sum_{i=1}^{6} \dfrac{(v_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i} = 1.6667 < \chi^2_{0.05}(5)$,所以接受 H_0 ,所以可以认为事故的发生与星期几无关.

13. 设考试成绩为 X ,则由题意知需在显著性水平 $\alpha = 0.05)$ 下检验假设: $H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2)$

对正态分布中的参数 μ, σ^2 用极大似然估计法估计可得 μ, σ^2 的估计值为

$$\hat{\mu} = \bar{x} = 80.1 \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n} s^2 = 92.72$$

为利用 χ^2 拟合检验法则,将相关的计算结果列表表示(见下表).

区间	v_i	$\hat{p}_i$	$n\hat{p}_i$	$v_i - n\hat{p}_i$	$(v_i - n\hat{p}_i) / n\hat{p}_i$
$(-\infty,70)$	8	0.1469	8.14	-0.14	0.002
[70,75)	6	0.1512	9.072	-3.072	1.040
[75,80)	14	0.1979	11.874	2.126	0.381
[80,85)	13	0.1990	11.94	1.06	0.094
[85,90)	8	0.1535	9.21	-1.21	0.159
[90,100]	11	0.1515	9.09	1.91	0.401
$\sum$					2.077

表中区间的划分是按照每个区间 $[a_{i-1}, a_i)$ 至少要包含 5 个样本值的原则确立的,其中

$$\hat{p}_i = \Phi\left(\frac{a_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) - \Phi\left(\frac{a_{i-1} - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) \qquad i = 1,2,3,4,5,6$$

而 $k = 6$, 估计的参数为 $r = 2$, 故 $k - r - 1 = 3$, $\chi^2_{0.05}(3) = 7.815$,而检验统计量的值

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{m}\frac{(v_i-n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}=2.077<7.815$$

故接受原假设，即可以认为考试成绩服从正态分布

(二)补充题

1　设甲、乙两试验员对同样试样的分析结果分别为 x, y，令 $d=x-y$，则 $d_i=x_i-y_i$ 为取自总体 d 的样本，设 d 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，于是本题是要在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设：　$H_0:\mu=0\leftrightarrow H_1:\mu\neq 0$

检验统计量为　$u=\dfrac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$

其中 $\bar{d}$，s_d 分别是取自总体 d 的样本的样本均值和样本方差，拒绝域为　$C=\{|u|\geq z_{\frac{\alpha}{2}}\}$

已知 $n=8,$ 经计算得 $\bar{d}=-0.1, s_d=0727$，并且　$|u|=0.389<1.96=z_{0.025}$

故接受原假设 H_0，即认为甲、乙两试验员试验分析结果之间无显著差异.

2.设睡眠时间为 X ,且设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$, 由题意知需在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设:

$$H_0:\mu=\mu_0+3\leftrightarrow H_1:\mu\neq\mu_0+3,\text{其中 }\mu_0=20.8$$

检验统计量为　$u=\dfrac{\bar{x}-(\mu_0+3)}{\sigma/\sqrt{n}}$

拒绝域为　$|u|\geq z_{\frac{\alpha}{2}}$

已知 $n=7,\sigma=1.6$,计算得　$|u|=1.058<1.96=z_{0.025}$

故接受原假设,即可以认为新安眠药已达到新的疗效.

3.犯第一类错误的概率为

$$\alpha=P\{(x_1,x_2)\in C\mid H_0\text{为真}\}=P\left\{\frac{3}{4x_1}\leq x_2\mid\theta=1\right\}$$

当 $\theta=1$ 时，x_1,x_2 的联合概率密度为

$$f_{H_0}(x_1,x_2)=\begin{cases}1, & 0<x_1,x_2<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

令　$D=\{(x_1,x_2)\mid 0<x_1,x_2<1,\dfrac{3}{4x_1}\leq x_2\}$

所以　$$\alpha=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_{H_0}(x_1,x_2)dx_1dx_2=\iint_D dx_1dx_2=\int_{\frac{3}{4}}^{1}dx_1\int_{\frac{3}{4x_1}}^{1}dx_2$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\ln\frac{3}{4}$$

犯第二类错误的概率为

$$\beta=P\{(x_1,x_2)\notin C\mid H_0\text{为假}\}=P\left\{\frac{3}{4x_1}>x_2\mid\theta=2\right\}$$

当 $\theta=2$ 时，x_1,x_2 的联合概率密度为

$$f_{H_1}(x_1,x_2)=\begin{cases}4x_1x_2, & 0<x_1,x_2<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

令 $$D_1 = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1, x_2 < 1, \frac{3}{4x_1} > x_2\}$$

则 $$\beta = \iint_{D_1} f_{H_1}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 4x_1 x_2 dx_2 - \int_{\frac{3}{4}}^1 dx_1 \int_{\frac{3}{4x_1}}^1 4x_1 x_2 dx_2$$

$$= \frac{9}{16} - \frac{9}{8}\ln\frac{3}{4}$$

4.由题意知 $$\bar{x} - 2\bar{y} \sim N(\mu_1 - 2\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{4\sigma_2^2}{n_2})$$

取检验统计量为 $$u = \frac{\bar{x} - 2\bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{4\sigma_2^2}{n_2}}}$$

当 H_0 为真时，$u \sim N(0,1)$，而当 H_1 为真时，u 又偏大的倾向，故拒绝域的形式可取为 $\{u \ge k\}$，由

$$\alpha = P\{u \ge k \mid \mu_1 - 2\mu_2 = 0\}$$

可解得拒绝域为

$$C = \{u \ge z_\alpha\}$$

6. 设病人在服用 A, B 两种药后身体细胞内药的浓度分别为 x, y，并且设 $x \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$.由题意知，需在显著性水平下 $\alpha = 0.05$ 检验:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \frac{2}{3}\sigma_2^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma_1^2 \ne \frac{2}{3}\sigma_2^2$$

或 $$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{2}{3} \leftrightarrow H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \ne \frac{2}{3}$$

由于 $$\frac{(n_1 - 1)s_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1 - 1)，\frac{(n_2 - 1)s_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2 - 1)$$

所以 $$\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

于是取检验统计量为 $F = \frac{3s_1^2}{2s_2^2}$，当原假设 H_0 为真时，$F \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$，拒绝域为

$$C = \left\{ F \le F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) \text{或} F \ge F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1 - 1, n_2 - 1) \right\}$$

已知 $n_1 = 8, n_2 = 6$，$F_{0.025}(7,5) = 5.29,$ $F_{0.975}(7,5) = 0.189$ 计算得 $s_1^2 = 0.01918,\ s_2^2 = 0.0293$，并且 $F = 0.98202$. 由于检验统计量的值不在拒绝域中，故接受原假设，即认为 A 种药在病人身体内的浓度的方差是 B 种药在病人身体细胞内浓度方差的 $\frac{2}{3}$.