数值计算方法

(第二版)

吕同富 康兆敏 方秀男 编著 马富明 审定

清华大学出版社

二0一二年六月

内容简介

本书介绍了数值计算方法.内容涉及数值计算方法的数学基础、数值计算方法在工程、科学和数学问题中的应用以及MATLAB程序,涵盖了经典数值分析的全部内容:包括非线性方程的数值解法;线性方程组的数值解法;矩阵特征值与特征向量的数值算法;插值方法;函数逼近;数值积分;数值微分;常微分方程数值解等.基于MATLAB是本书的特色,对书中所有的数值方法都给出了MATPAB程序,有大量详实的应用实例可供参考,有相当数量的习题可供练习.

本书取材新颖、阐述严谨、内容丰富、重点突出、推导详尽、思路清晰、深入浅出、富有启发性,便于教学与自学.

本书可作为理工科本科生研究生数值计算方法课程教材或参考书,也可作为科技人员使用数值计算方法和MATLAB的参考手册.

第二版前言

从2008年《数值计算方法》出版以来,得到了很多老师的关注,收到了很多读者 的Email,给了很多的肯定和鼓励,同时也对书中的内容、体系、讲法等方面提出了很多 宝贵的修改意见,借此再版之机,向关心和支持作者工作的广大读者朋友表示深切谢意.此次 再版,根据广大读者的建议,对原《数值计算方法》的内容作了适当的增删,在保持原《数值 计算方法》特色的前提下,对体例、格式、叙述、内容等方面作了较大的修改,力求使原《数 值计算方法》的优点得到发展,缺点得到克服.其中很多章节和例题都重写了,修改后的内容 更符合现代《数值计算方法》教学改革实际,即便于教学,又有利于培养学生解决实际问题的 能力. 此次再版包括: 非线性方程的数值解法: 线性方程组的数值解法: 矩阵特征值与特征向 量的数值算法:插值方法:函数逼近:数值积分:数值微分:常微分方程数值解等内容.由于 课时体系等原因,删除了一些过时的内容,还有对部分过难的例题和习题作了修改和替换,新 增了数字教学资源电子教案(PPT版由方秀男制作,PDF版吕同富制作),MATLAB实验等内容 供师生参考(相关数字教学资源可到清华大学出版社网上下载,也可以给作者发Email索取).本 次再版由吕同富教授执笔. 另外还有康兆敏副教授,方秀男副教授编写了部分内容及习题和答 案. 全书由吕同富教授统稿. 清华大学出版社佟丽霞编辑, 几年来自始至终给作者以支持和鼓 励,还有XXXXX编辑用高度的责任感认真地编辑审校了书稿,纠正了原稿中的很多不妥和 疏漏,这里向他们及本书所列参考文献的作者们,以及为本书再版给予热心支持和帮助的朋友 们,表示衷心的感谢.

本书可作为理工科本科生研究生数值计算方法课程教材或参考书,也可作为科技人员使用数值计算方法和MATLAB的参考手册.

吕同富 ltongfu@126.com 2012年08月

第一版前言

数值计算方法与计算机相结合是本书的特点,也是科学计算发展的需要.随着计算机的不断发展和进步,优秀的数学软件MATLAB应运而生,MATLAB一问世就以它强大的功能,被广大科技工作者公认为科学计算最好的软件之一.为使数值分析与MATLAB更好地结合,我们以最新版MATLAB为平台,编写了新版《数值计算方法》,这也是数值计算方法教材发展进步的必然结果.

本书介绍了数值计算方法. 内容涉及数值计算方法的数学基础、数值计算方法在工程、科学和数学问题中的应用以及MATLAB程序等,涵盖了经典数值分析的全部内容:包括非线性方程的数值解法;线性方程组的数值解法;矩阵特征值与特征向量的数值算法;插值方法;函数逼近;数值积分;数值微分;常微分方程数值解等. 重点讲述数值分析方法的思想和原理,尽可能避免过深的数学理论和过于繁杂的算法细节. 基于MATLAB是本书的特色. 数值计算方法与科学计算软件MATLAB相结合,有助于读者更有效地利用MATLAB的超强功能,来处理科学计算问题,有助于避免那种学过数值计算方法但不能上机解决实际问题的现象发生.

在编写过程中,参考了国内已出版的同类教材(参考文献[1]~[23]),吸收了他们的许多精华和优点,在题材的选取上作了一些变动,适当地增加了一些新内容,对书中所有的数值方法都给出了MATLAB程序,有大量详实的应用实例可供参考,有相当数量的习题可供练习.

本书取材新颖、阐述严谨、内容丰富、重点突出、推导详尽、思路清晰、深入浅出、富有启发性,便于教学与自学.

全书内容由吕同富教授主持编写.具体分工:方秀男编写第1章和第2章;康兆敏编写第3章;吕同富编写第4章至第9章.吉林大学周蕴时教授,哈尔滨工业大学吴勃英教授,认真地阅读了本书,纠正了书中很多错误,并提出了许多保贵的修改意见;吉林大学马富明教授审定了书稿.这里向他们及本书所列参考文献的作者们,清华大学出版社的佟丽霞和王海燕,以及为本书出版给予热心支持和帮助的朋友们,表示衷心地感谢.

本书可作为理工科本科生研究生数值计算方法课程教材或参考书,也可作为科技人员使用数值计算方法和MATLAB的参考手册.

出好书, 使千百万莘莘学子受益, 一直是作者追求的目标. 但由于水平所限, 尽管作了很

大努力,可能还会有很多不妥甚至是错误,望广大读者给予批评指正,谢谢.

吕同富 ltongfu@126.com 2008年03月

目录

第一章 序论	1	1.2.2 数值计算方法的特点	3
1.1 科学计算的一般过程		1.3 计算过程中的误差及其控制	6
1.1.1 对实际工程问题进行数学	1	1.3.1 误差的来源与分类	6
建模	1	1.3.2 误差与有效数字	7
1.1.2 对数学问题给出数值计算		1.3.3 误差的传播	10
方法	2	1.3.4 误差的控制	11
1.1.3 对数值计算方法进行程序		1.3.5 数值算法的稳定性	13
设计	2	1.3.6 病态问题与条件数	13
1.1.4 上机计算并分析结果	2	习题一	14
1.2 数值计算方法的研究内容与特点	2	部分习题答案	15
1.2.1 数值计算方法的研究内容	2	参考文献	21

.Ⅱ. 目录

第一章 序论

学习目标与要求

- 1. 了解科学计算的一般过程.
- 2. 了解数值计算方法的研究内容和特点.
- 3. 理解数值计算误差的有关概念.
- 4. 掌握数值计算误差的控制方法.

§ 1.1 科学计算的一般过程

科学计算是人类从事科学研究和工程技术活动不可缺少的手段之一,在科学计算与计算机 飞速发展的今天,为使计算机能更好地应用于科学研究和工程技术领域,必须按照下面的步骤 进行:实际问题→数学模型→数值方法→程序设计→上机计算→分析结果.

1.1.1 对实际工程问题进行数学建模

应用有关学科知识和数学理论,将实际工程问题,用精练准确的数学语言对其核心部分进行描述并给出数学模型,这一过程常称为数学建模.一个好的数学模型须符合以下两方面要求:一是数学模型要能真实而准确地反映实际工程问题的本质;二是数学模型所用的数学算法能在计算机上实现,这两者缺一不可.工程中的数学模型,按数学性质,可分为确定型与随机型;按表达形式,可分为连续型与离散型.这些数学模型,有的能用确定的数学解析式描述,有的不能用确定的数学解析式描述,数值计算方法,主要讨论能用确定的数学解析式描述的实际工程计算问题.

1.1.2 对数学问题给出数值计算方法

计算机无论如何先进,它所能执行的计算也不过是简单的算术运算和逻辑运算,要想使计算机能够解决科学和工程计算问题,需把从科学和工程实际问题中建立的数学模型数值化,也就是根据不同的数学问题,寻求不同的数值计算方法.数值计算方法只能用算术运算和逻辑运算,否则计算机将无法计算,这将直接关系到能否把计算机用于实际问题.可见,数值计算方法在现代科学研究和工程技术计算中具有重要地位.数值计算方法的优劣,显然速度和精度是两个重要的指标,一个好的数值计算方法不仅精度高而且速度快.速度快,虽然就适当规模的问题而言,这一优势因计算机的能力而被削弱殆尽,但对于规模大的问题,速度仍是重要的因素,慢的数值计算方法由于不实用而被淘汰.

1.1.3 对数值计算方法进行程序设计

一个好的数值计算方法要通过程序设计才能在计算机上实现.程序设计要求用最简练的计算机语言、最快的速度、最少的存储空间来实现某种要求的计算结果.要达到这样的要求,程序设计者不仅要掌握数值计算方法,而且要熟悉并能熟练使用计算机语言,准确无误地描述每一个算法,并能以最快的速度发现和解决计算过程中出现的各种问题.

1.1.4 上机计算并分析结果

前面三个阶段工作的结果如何?还需上机实验后才能得出结论.上机计算的结果是否与工程实际相符合?所作研究是否具有推广价值?都是必须关注的问题.若与工程实际不相符合,则需找出原因,回到前面三个阶段,继续研究,直到得出正确结论为止.

§ 1.2 数值计算方法的研究内容与特点

1.2.1 数值计算方法的研究内容

科学技术发展到今天,计算机的应用已渗透到社会生活的各个领域.而数值计算方法是计算机处理实际问题的一种重要手段,从宏观天体运动学到微观分子细胞学,从工程系统到非工程系统,无一能离开数值计算方法.数值计算方法这门学科的诞生,使科学发展产生了巨大飞跃,它使各学科领域从定性分析阶段走向定量分析阶段,从粗糙走向精密.

数值计算方法是数学的一个分支,它以计算机为工具,以数值代数(线性方程组、矩阵特征值特征向量、非线性方程与方程组的数值解法),数值逼近(各种函数逼近问题数值解、数

值积分、数值微分),常微分方程数值解,偏微分方程数值解、最优化理论与方法等为研究内容.

1.2.2 数值计算方法的特点

先来看几个实例.

例 1.1 线性方程组Ax = b的行列式解法Cramer法则,理论上可用来求解线性方程组,用这种方法解一个n元线性方程组,要计算n+1个n阶行列式的值,按Laplace展开法计算n阶行列式,总共要计算

$$n! \left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!}\right)$$

次乘法,不计加法,解一个n元线性方程组,需计算n!(n+1)次乘法。当n充分大时,计算量是很大的,如一个20元的线性方程组,大约要算 $21! \approx 5.1 \times 10^{19}$ 次以上的乘法,每秒可做百万次乘法的计算机,每年可做 $365 \times 24 \times 360~0 \times 10^6 \approx 3.15 \times 10^{13}$ 次乘法,所以,在每秒可做上百万次乘法的计算机上,用Cramer法则解20元的线性方程组,所需的计算时间是 $(5.11 \times 10^{19}) \div (3.15 \times 10^{13}) = 1.62 \times 10^6 \approx 162$ 万年,这当然是没有实际意义的。其实解线性方程组有很多方法,如Gauss消去法,一个20元的线性方程组乘法次数不超过300~0次,即使用一台微型计算机,只需几秒钟就能完成计算,这个例子说明研究数值计算方法很有必要,因为数值计算方法所研究的正是在计算效率上最佳的或近似最佳的方法,而不是像Cramer法则这样的方法。

例 1.2 计算积分
$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+5} dx$$
.

解 通过直接计算可产生递推公式

$$I_n = -5I_{n-1} + \frac{1}{n}, I_0 = \ln\frac{6}{5} \approx 0.182322$$
 (1.1)

由经典积分知识可推得 I_n 具有如下性质:

- (1) $I_n > 0$;
- (2) I_n 单调递减;
- $(3) \lim_{n\to\infty} I_n = 0;$
- (4) $\frac{1}{6n} < I_n < \frac{1}{5n}, (n > 1).$

下面用两种算法计算 I_n

算法A: 递推关系, $I_n = -5I_{n-1} + \frac{1}{n}$, $I_0 = \ln \frac{6}{5} \approx 0.182322$

按算法A自n = 1计算到n = 20产生如下计算结果(见表1.1) 由表1.1可见,该算法产生的数值解

			10.1.	1 /	一开印不		
n	I_n	n	I_n	n	I_n	n	I_n
1	0.088 4	6	0.034 4	11	-31.392 5	16	9.814 5e+4
2	0.581 0	7	-0.029 0	12	157.045 7	17	-4.907 3e+5
3	0.043 1	8	0.270 1	13	-785.151 6	18	2.453 6e+6
4	0.347 0	9	-1.239 3	14	3.925 8e+3	19	-1.226 8e+7
5	0.026 5	10	0.2967	15	-1.962 9e+4	20	6.134 1e+7

表 1.1 计算结果

自n = 7开始出现负值,且绝对值逐渐增加,这显然与 I_n 固有的性质相矛盾,因此本算法所得的数值解不符合问题的要求.究其原因,在构造算法时未能充分考虑原积分模型的性态,即由公式(1.1),其计算从 I_{n-1} 到 I_n 每向前推进一步,其计算值的舍入误差(见1.3节内容)便增长5倍,误差由此积蓄传播导致最终数值解与原问题相悖的结果.为了克服这一缺点改进算法A为算法B:

算法B: 递推关系:
$$I_{n-1}=-\frac{1}{5}I_n+\frac{1}{5n}, I_{20}\approx \frac{\frac{1}{6\times21}+\frac{1}{5\times21}}{2}=0.008\,730\,16$$

Matlab程序 1.2 计算定积分

$$x=0.008$$
 730 16
for $n=20:-1:1$
 $n-1$
 $x=-(1/5)*x+1/(5*n)$
end

第二步用递推公式

$$I_{n-1} = -\frac{1}{5}I_n + \frac{1}{5n} \tag{1.2}$$

自n = 20计算到n = 1. 由于该算法每向后推一步,其舍入误差便减少5倍,因此获得符合原积分模型性态的数值结果(见表1.2) 对例1.2采用的是由原模型解的递推关系来实现计算机求解,这种方法称为**直接法**. 在大多数情况下,只能获得原模型的近似关系,即将连续系统离散化,这种解法称为**离散变量法**.

				1 21 -	H 214		
n	I_n	n	I_n	n	I_n	n	I_n
19	0.008 3	14	0.011 2	9	0.016 9	4	0.034 3
18	0.008 9	13	0.012 0	8	0.018 8	3	0.043 1
17	0.009 3	12	0.013 0	7	0.021 2	2	0.058 0
16	0.009 9	11	0.014 1	6	0.024 3	1	0.088 4
15	0.010 5	10	0.015 4	5	0.028 5	0	0.182 3

表 1.2 计算结果

上面两个例子表明,数值计算方法与纯数学有明显不同,这种不同主要是由于数值计算方法是纯数学与科学工程实际和计算机相结合而形成的一门数学分支.它既有纯数学高度抽象性、严密科学性的特点,又有应用的广泛性与实际实验的高度技术性的特点,是一门与计算机使用密切结合的实用性很强的学科.一个好的数值计算方法,概括起来有以下特点:

第一,面向计算机数值计算方法理论的发展,与计算机技术的发展密切相关.要根据计算机的特点,提供行之有效的数值计算方法.算法只能包括算术运算和逻辑运算,这些运算是计算机能直接处理的运算.在数值计算方法中,评价一种算法会随着计算机技术的发展而改变.比如,人们普遍认为解线性方程组的超松弛迭代法(SOR)优于Jacobi迭代,这是因为SOR法有更高的收敛速度.但在并行计算发展起来之后,人们发现Jacobi迭代法有很好的并行性,而SOR法却不具备可并行性,从而在使用并行计算机解大规模线性方程组时,经典的SOR法不及Jacobi法优越.

第二,数值计算方法的理论分析.所设计的数值计算方法应能任意逼近并达到精度要求,对近似算法要保证收敛性和数值稳定性,还要对误差进行分析,这些都是建立在相应的数学理论基础之上.

第三,一个好的数值算法不仅要节省运算时间,而且要节省计算机的存储空间.这是建立数值算法所要研究的内容,也是数值算法在计算机上实现必须满足的条件.也可以称之为数值计算方法的可行性.

有时,所研究的问题,数学上有明确的求解的方法,象前面提到的用Cramer法则解线性方程组的例子,Cramer法则不仅给出了解的存在性,而且给出了求解的数学公式,似乎只要在计算机上实现这个公式即可得方程组的解,但实际上,既使一个规模不大的线性方程组,用Cramer法则求解,其计算量仍然是大的惊人,使用一般的计算机在人们可以接受的时间内,几乎不可能得到方程组的解.因此,如何使用合理的计算量,求解一个线性方程组的解,就成了数值计算方法的一个重要课题.除此之外还有方法的稳定性问题.有些数学方法对于计算过程中误差太敏感,使其无法在计算机上实现.这些问题的研究是数值计算方法理论区别一般数学理论的重要特征.

第四,实际验证数值计算方法.任何一个好的数值计算方法除了理论上要满足上述三点之外,还要通过数值计算实际验证,看是否行之有效.

根据数值计算方法的上述特点,在学习数值计算方法课程时,首先要掌握构造方法的原理、思想,注意算法的技巧与计算机的实现相结合,也要注重数值计算方法基础和数学理论的学习,其次要重视实践,通过实例和动手计算,学会怎样使用数值计算方法在计算机上解决各类科学工程技术计算问题,避免那种学过数值计算方法,但不能上机解决实际问题的现象发生,为了掌握本课程的内容,需要做一定量的习题和上机计算题.

另外,由于本课程内容涉及微积分、线性代数、常微分方程、偏微分方程、泛函分析等内容,因此需读者了解这几门课程的基本内容.

§ 1.3 计算过程中的误差及其控制

1.3.1 误差的来源与分类

从科学研究和实际工程技术问题计算的全过程看,误差的来源主要有四个方面.

(1)模型误差

对实际工程技术问题建立数学模型时,总是在一定条件下抓主要因素,忽略次要因素,这样得到的数学模型是理想化的数学模型,它包含了对实际问题进行近似的数学描述时所引起的误差,这种误差称为模型误差.

(2)观测误差

在数学模型或计算公式中包含着一些已知数据(称为原始数据),这些数据往往是由观测实验得到,它们和实际的数据大小之间有误差,这种误差称为观测误差.

(3)截断误差

许多数学运算理论上的精确值往往需用无限的过程才能求出,如微分、积分、无穷级数求和等都是通过无限的极限过程来定义的,然而实际问题的计算在计算机上只能用有限次的算术运算和逻辑运算来完成,因此需要将问题的解决方案加工成算术运算和逻辑运算的有限序列,这种加工常常表现为无穷过程的截断,由此产生的误差称为截断误差.

例 1.3 计算函数 e^x 在某点的值时,由于 e^x 的幂级数展开式为

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$
 (1.3)

但是用计算机求解时,不能直接得出无穷项的和,只能截取有限项,求出

$$S_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!},$$
 (1.4)

用 $S_n(x)$ 作为 e^x 的值必然会有误差,根据taylor展开式得其截断误差为

$$e^x - S_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1!} e^{\theta x} \quad 0 < \theta < 1.$$
 (1.5)

(4)舍入误差

由于计算机数系是离散的有限集,计算机在接收和运算数据时,总是将位数较多的数舍入成一定位数的机器数,这样产生的误差称为舍入误差.每一步的舍入误差是微不足道的,但是经过计算过程的传播和积累,舍入误差甚至可能会"淹没"所要的真解,如例1.2就是这种情况.

模型误差和观测误差也称固有误差,一般来讲不是计算工作者所能独立解决的;截断误差和舍入误差也称计算误差,是数值计算方法要讨论的内容.

1.3.2 误差与有效数字

在数值计算中,误差是不可避免的,但人们总希望计算结果能足够准确,这就需要对误差 进行估计,为了从不同的侧面表示近似数的精确程度,通常运用绝对误差、相对误差和有效数 字的概念。

定义 1.1 绝对误差

设 x^* 是某量的精确值,x是 x^* 的近似值,则称差 $e=x^*-x$ 为近似值x的**绝对误差**,简称**误差**.

由于精确值 x^* 在实际中未知,因而误差e通常是无法确定的,人们只能通过测量工具或计算过程,设法估计出它们的取值范围,即误差绝对值的一个上界。

定义 1.2 绝对误差限

设存在一个 $\varepsilon > 0$ 使

$$|e| = |x^* - x| \leqslant \varepsilon,\tag{1.6}$$

则称 ε 是近似值x的**绝对误差限**,简称误**差限或精度**.

若近似值x的误差限为 ε ,则 $x-\varepsilon \leqslant x^* \leqslant x+\varepsilon$,这表明 x^* 落在[$x-\varepsilon,x+\varepsilon$]上,在实际应用中常采用 $x=x^*\pm\varepsilon$ 的写法,来表示x 近似的精度或精确值 x^* 所在的范围.例如: $x=15\pm2,y=1000\pm5$.

绝对误差限的大小不能完全刻画近似值的精确程度. 例如某量的精确值为 $x^* = 1000$, 其近似值为 $x_1 = 999$,另一个量的精确值为 $x^* = 10$,相应的近似值为 $x_2 = 9$,这两个量的绝对误差限都是 $\varepsilon = 1$,显然 x_1 的精度比 x_2 的精度好,为反映这种近似程度,引入相对误差的概念.

定义 1.3 相对误差

$$\Re e_r = rac{e}{x^*} = rac{x^* - x}{x^*}$$
为近似值 x 的相对误差.

相对误差是一个无量纲量,通常用百分数表示,相对误差的绝对值越小,近似值的精度越高. 例如前面两个量 x_1 和 x_2 ,它们的相对误差限分别为 $e_r(x_1) = 0.1\%$ 和 $e_r(x_2) = 10\%$,所以近似值 x_1 的精度比 x_2 的精度好. 同样由于精确值 x^* 通常是未知的,一般不能给出 e_r 的精确值,只能估计它的大小范围.

定义 1.4 相对误差限

相对误差可正可负,它的绝对值上界叫做相对误差限,记作 ε_r ,即

$$|e_r| = \left| \frac{x^* - x}{x^*} \right| = \left| \frac{e}{x^*} \right| \leqslant \varepsilon_r. \tag{1.7}$$

相对误差限 ε_r 不如绝对误差限 ε 容易得到,在实际计算应用中常用式 $\varepsilon_r = |\frac{\varepsilon}{x}|$ 计算相对误差限.

为了给出一种近似数的表示方法,使之既能表示其大小又能表示其精确程度,引进有效数字的概念.例如:设

$$x^* = \pi = 3.1415926...$$

经四舍五入取其三位近似值得 $\pi \approx 3.14$, π 的绝对误差限 $\pi \pm 0.002$; 若取其五位近似值得 $\pi \approx 3.141$ 6. $\pi \pm 0.000$ 008.它们的绝对误差限都不超过末位数字的半个单位,即

$$|\pi - 3.14| \le \frac{1}{2} \times 10^{-2}, \quad |\pi - 3.141 \ 6| \le \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

称它们精确到了末位.

定义 1.5 有效数字

设精确值 x^* 的近似值 $x = \pm 0.a_1a_2...a_n \times 10^m$,其中 $a_1 \neq 0$,诸 $a_i \in \{0,1,2,...,9\}, m$ 为整数,如果

$$|e| = |x^* - x| < \frac{1}{2} \times 10^{m-n} \tag{1.8}$$

则称近似值x具有n位有效数字或称x精确到 10^{m-n} 位,其中, $a_1, a_2, ... a_n$ 都是x的有效数字,也称x为有n位有效数字的近似值.

由定义1.5知 $\pi = 3.14$ 和 $\pi = 3.1416$ 分别有3位和5位有效数字. 由式(1.8)知,有效数字越 8,绝对误差越小,至于有效数字与相对误差的关系有如下结论.

定理 1.1 设近似值 $x = \pm 0.a_1a_2...a_n \times 10^m$ (其中 $a_1 \neq 0$),有n位有效数字,则x 相对误

差限为 $\varepsilon_r \leqslant \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$

证明 由x有n位有效数字知 $|e|=|x^*-x|<\frac{1}{2}\times 10^{m-n}$,而 $|x|>a_1\times 10^{m-1}$,故有

$$|e_r| = \left| \frac{x^* - x}{x} \right| \leqslant \frac{\frac{1}{2} \times 10^{m-n}}{a_1 \times 10^{m-1}} = \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1} = \varepsilon_r$$

即相对误差限为 $\varepsilon_r = \frac{1}{2a_1} \times 10^{-n+1}$. 证毕.

定理 1.2 设近似值 $x=\pm 0.a_1a_2\dots a_n\times 10^m$ (其中 $a_1\neq 0$),相对误差限为 $\varepsilon_r=\frac{1}{2(a_1+1)}\times 10^{-n+1}$,则x至少有n位有效数字.

证明 由于 $\varepsilon = |x|\varepsilon_r$,而 $|x| \leq (a_1 + 1) \times 10^{m-1}$,所以,

$$\varepsilon \leqslant (a_1 + 1) \times 10^{m-1} \times \frac{1}{2(a_1 + 1)} \times 10^{-n+1} = \frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

因此,x至少有n位有效数字. 证毕.

例 1.4 设x = 2.72表示e具有3位有效数字的近似值,求此近似值的相对误差限.

解 $x=2.72=0.272\times 10^1, a_1=2, n=3$,由定理1.1有 $\varepsilon_r\leqslant \frac{1}{2a_1}\times 10^{-(n-1)}$ $=\frac{1}{2\times 2}\times 10^{-(3-1)}=0.25\times 10^{-2}$

例 1.5 要使 $\sqrt{20}$ 的近似值的相对误差限小于0.1%, 要取几位有效数字?

解 因 $4 < \sqrt{20} < 5$,故可在定义1.5中取 $a_1 = 4$.若相对误差限满足 $\varepsilon_r < 0.001$,由定理1.2有,

$$\varepsilon_r \leqslant \frac{1}{2(a_1+1)} \times 10^{-n+1}$$

可见n位有效数字应满足

$$\frac{1}{2(4+1)} \times 10^{-n+1} \leqslant 0.001$$

由此解出n=4,即应取4位有效数字.

1.3.3 误差的传播

在科学研究和工程计算中每步都可能产生误差,而一个问题的解决往往要经过成千上万次的运算,不可能每一步都加以分析.只能通过对误差的某些传播规律进行分析,指出在数值计算中应遵循的几条原则,这将有助于鉴别计算结果的可靠性并防止误差危害现象的产生.

(1)误差分析的重要性

在例1.2中,算法A用精确的计算公式却产生了一个错误的结果,分析原因是因为:初值 I_0 有误差 $e(I_0)$,由此引起以后各步计算的误差 $e(I_n)$,满足关系

$$e(I_n) = -5e(I_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots,$$

从而有

$$e(I_n) = (-5)^n e(I_0), \quad n = 1, 2, \dots,$$

这说明 I_0 有误差 $e(I_0)$,则 $e(I_n)$ 就有误差 $e(I_0)$ 的 $(-5)^n$ 倍.

而例1.2算法B是将递推公式倒过来使用,由式(1.2)得 $e(I_{n-1}) = -\frac{1}{5}e(I_n)(n=20,19,...,1)$ 尽管初值 $I_{20} = 0.008$ 7误差 $e(I_{20})$ 很大,但因为误差传播逐渐缩小, I_n 的误差为 $e(I_n)$,则 I_0 的 误差是 $e(I_{20})$ 的($-\frac{1}{5}$)²⁰ 倍.也就是每计算一步,误差就会缩小前一步的 $-\frac{1}{5}$ 倍,故计算结果可靠.此例说明,在数值计算中不注意误差分析,用了类似于例1.2算法A的公式,就会出现"差之毫厘,谬之千里"的错误结果.

(2)误差的传播

计算机的数值运算主要是加、减、乘、除四则运算,带有误差的数据经过四则运算后误差 怎样变化,用微分可以描述.由于精确值与近似值通常很接近,其差可以认为是较小的增量, 即可以把误差看作微分,由此可得误差的微分近似关系

$$e = x^* - x = \mathrm{d}x$$

$$e_r = \frac{e}{x^*} = \frac{\mathrm{d}x}{x} = \mathrm{d}\ln x$$

即x的微分表示x的绝对误差, $\ln x$ 的微分表示它的相对误差. 利用这两个关系式及微分运算可以得到一系列有关四则运算的误差结果,例如:

由 $d(x \pm y) = dx \pm dy$ 可得两数之和(差)的误差等于两数的误差之和(差);

由 $d(\ln xy) = d \ln x + d \ln y$ 可得两数之积的相对误差等于两数相对误差之和;

由d
$$\left(\ln \frac{x}{y}\right)$$
 = d $\ln x$ - d $\ln y$ 可得两数商的相对误差等于两数相对误差之差.

一般地, 设变量u由变量 x_1, x_2, \ldots, x_n 经某种运算得到, 可设 $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 则绝

对误差为

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial .x_i} dx$$

要得到更准确的误差估计,一般可利用函数的Taylor展开式进行估计.

1.3.4 误差的控制

(1)简化计算步骤,减少运算次数

同一个计算问题,如果能减少运算次数不但可节省计算时间,提高计算速度,而且还能减少误差的积累.

计算 x^{255} 的值,如果逐个乘要做254次乘法,但若写成

$$x^{255} = x \cdot x^2 \cdot x^4 \cdot x^8 \cdot x^{16} \cdot x^{32} \cdot x^{64} \cdot x^{128}$$

只要做14次乘法运算即可,又如计算多项式

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

的值,若直接计算 $a_k x^k$ 再逐次相加,一共要做

$$n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

次乘法和n次加法, 若采用秦九韶算法

$$\begin{cases} S_n = a_n \\ S_k = xS_{k+1} + a_k, & k = n - 1, n - 2, \dots, 1, 0, \\ P_n(x) = S_0 \end{cases}$$

只要n次乘法和n次加法即可算出 $P_n(x)$ 的值.

(2)避免两相近数相减

在数值计算中两相近数相减有效数字会严重损失.

例如x = 618.45和y = 618.32都是5位有效数字,但x - y = 0.13只有两位有效数字,所以最好改变计算方法,避免这类运算的发生。

如当 x_1 和 x_2 较接近时,则

$$\ln x_1 - \ln x_2 = \ln \frac{x_1}{x_2}$$

右端算式有效数字不损失. 当x很大时,按

$$\sqrt{x+a} - \sqrt{x} = \frac{a}{\sqrt{x+a} + \sqrt{x}}$$

计算结果较好. 当计算 $f(x) - f(x_0)$ 的近似值时,可用Taylor展开式

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \cdots$$

取右端有限项近似左端. 如果无法改变算式,则采用增加有效位数进行运算.

(3)防止大数吃掉小数

在数值运算中有时数量级相差很大,而计算机字长有限,如不注意运算次序就有可能出现大数吃掉小数的现象,影响计算结果的可靠性. 例如在8位10进制计算机上计算x=54~272~401+0.6,由于在计算机内计算时,要写成浮点形式,且要先对阶,对阶时 $x=54~272~401=0.542~724~01\times10^8$, $0.6=0.000~000~006\times10^8$ 在8位机上表示0,因此

$$x = 54\ 272\ 401 + 0.6 = 0.542\ 724\ 01 \times 10^8 + 0.000\ 000\ 00 \times 10^8$$
$$= 0.542\ 724\ 01 \times 10^8 = 54\ 272\ 401$$

(4)绝对值太小的数不宜作除数

绝对值很小的数作除数也会影响数值计算结果的精度,由

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2},$$

可得商的误差关系式

$$e\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ye(x) - xe(y)}{y^2},$$

其中 $e\left(\frac{x}{y}\right)$, e(x), e(y)分别表示 $\frac{x}{y}$, x, y的绝对误差.

显然当|y|充分小时, $e\left(\frac{x}{y}\right)$ 会很大. 避免这种情况发生的方法也是将其化为其他等价的形式来处理.

例如,当x接近于0时, $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ 的分子、分母都接近于0,为了避免绝对值较小的数作除数,也为了避免分子两个相近数相减,可将原式变为:

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}.$$

(5)控制误差的传播积累,选取数值稳定的计算公式

利用递推公式进行计算时,运算过程比较规律化,但大多数递推公式必须注意误差的积累.如果递推过程中误差积累增大,多次递推会产生错误结果;如果递推过程中误差减少,则得到的结果比较可靠.

1.3.5 数值算法的稳定性

所谓**数值算法**是指利用计算机,按着某数学计算公式规定的运算次序,对已知数据进行有限次四则算术运算和逻辑运算,求出所关心数学问题近似解的方法.一个数值算法,在计算过程中,如果误差的传播对计算结果的影响很小,或者说,在计算过程中,误差传播是可控的,则称这个算法**数值稳定**,否则一个数值算法,在计算过程中,如果误差的传播对计算结果的影响很大,或者说,在计算过程中,误差传播是不可控的,则说这个数值算法**数值不稳定**.

例如例1.2中的算法A,在计算过程中误差逐渐增大,是不稳定的,而算法B在计算过程中误差逐渐减少,是稳定的.

1.3.6 病态问题与条件数

在实际数值计算过程中,有些问题对数值扰动非常敏感,有些问题对数值扰动不敏感,为 了区别和研究这些问题,定义问题的条件数和病态问题的概念.

定义 1.6 条件数

问题输出变量的相对误差与输入变量的相对误差的商称为该问题的条件数cond(condition number).

例 1.6 对给定的x,计算函数值y = f(x) 时,若有扰动 $\Delta x = x - x^*$,其相对误差为 $\frac{\Delta x}{x}$,函数值 $f(x^*)$ 的相对误差为 $\frac{f(x) - f(x^*)}{f(x)}$.则问题的条件数为

$$cond = \left| \frac{f(x) - f(x^*)}{f(x)} \right| / \left| \frac{\Delta x}{x} \right| \approx \left| \frac{xf'(x)}{f(x)} \right|$$
 (1.9)

定义 1.7 数值问题的性态

对于一个数值问题,如果输入数据有微小扰动(误差),则引起输出数据的相对误差(问题的条件数)很大,称这个数值问题是病态的.

式(1.9)称为计算函数值问题的条件数. 自变量相对误差一般不会太大,如果条件数cond很大,将引起函数值相对误差很大,出现这种情况的问题就是病态问题. 一般认为Cond越大病态越严重(在文献[3]中,认为Cond > 1时,问题是病态. 在文献[9]中,认为Cond > 10时,问题是病态). 其他问题也要分析是否病态. 例如线性方程组的数值解也要讨论问题的条件数及是否病态,这将在相应章节进行介绍.

.14. 习题一

习题一

1.古代数学家祖冲之曾以 $\frac{355}{113}$ 作为圆周率的近似值,问此近似值具有多少位有效数字?

2.按四舍五入原则,将下列各数舍成5位有效数字.

816.856 7, 6.000 015, 17.322 50, 1.235 651, 93.182 13, 0.015 236 23

3.下列各数是按四舍五入原则得到的近似值,它们各有几位有效数字?

81.897, 0.008 13, 6.320 05, 0.180 0

 $4. \pm \frac{1}{4}$ 用0.25 表示,问它有多少位有效数字?

5.计算 $\sqrt{10} - \pi$ 的值,精确到5位有效数字.

6.若 $a^* = 1.106$ $2, b^* = 0.947$ 是经过四舍五入得到的近似值,问 $a^* + b^*, a^*b^*$ 有几位有效数字?

7.设 $x_1^* = 0.986$ $3, x_2^* = 0.006$ 2是经过四舍五入得到的近似值,问 $\frac{1}{x_1^*}, \frac{1}{x_2^*}$ 的计算值和真值的相对误差限及 x_1^*, x_2^* 和真值的相对误差限.

8.改变下列各式,使计算结果比较准确:

(1)
$$\ln x_1 - \ln x_2, x_1 \approx x_2$$
;

(2)
$$\frac{1}{1-x} - \frac{1-x}{1+x}, |x| \ll 1;$$

(3)
$$\sqrt{x+\frac{1}{x}} - \sqrt{x-\frac{1}{x}}, 1 \ll x;$$

(4)
$$\frac{1-\cos x}{x}, x \neq 0, |x| \ll 1;$$

(5)
$$\frac{1}{x} - \cot x, x \neq 0, |x| \ll 1;$$

(6)
$$\int_{n}^{n+1} \frac{1}{1+x^2} dx, n$$
充分大时.

9.计算 $f = (\sqrt{2} - 1)^6$,取 $\sqrt{2} = 1.4$,利用下列各式计算,哪一个得到的计算结果最好?

(1)
$$\frac{1}{(\sqrt{2}+1)^6}$$
;

(2)
$$(3-2\sqrt{2})^3$$
;

(3)
$$\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^3}$$
;

(4)
$$99 - 70\sqrt{2}$$
;

部分习题答案

习题一

- 1.有7位有效数字
- 2. 816.96, 6.0000, 17.323, 1.2357, 93.182, 0.015236.
- 3. 5位, 3位, 6位, 4位.
- 4. 2位有效数字.
- 5. 0.020685.
- 6. 3位, 3位.
- 7. 0.5×10^{-4} , 0.8×10^{-2} .
- 8.

(1)
$$\ln \frac{x_1}{x_2}, x_1 \approx x_2;$$

(3)
$$\frac{2}{x\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}}$$
, $1 \ll x$;

(5)
$$\frac{x}{3}, x \neq 0, |x| \ll 1;$$

(2)
$$\frac{3x-x^2}{1-x^2}$$
, $|x| \ll 1$;

(4)
$$\frac{x}{1+\cos x}, x \neq 0, |x| \ll 1;$$

(6)
$$\arctan \frac{1}{1+n(n+1)}$$
, n 充分大时.

习题二

- 1. (1)3.6320, (3)1.3247, (4)1.2599, (5)0.6412, (6)0.2575.
- 10. $x_2 = 1.365230013$. 14. 0.257530286.

$$2.x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0.5.$$

$$4.x_1 = 0.8333333, x_2 = 0.6666666, x_3 = 0.4999999, x_4 = 0.3333333, x_5 = 0.1666666$$
5, 30.

6.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 0 & 10 & -32 \\ 0 & 0 & -76 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

习题四

$$1.(1)5, \left(-\frac{13}{50}, 1, -\frac{6}{25}\right)^{\mathrm{T}}; (2)\frac{17}{5}, \left(\frac{10}{17}, \frac{3}{17}, 1\right)^{\mathrm{T}}$$

 $(3)9.6058, (1, 0.6056, -0.3945)^{\mathrm{T}}; (4)8.86951, (-0.50422, 1, 0.15094)^{\mathrm{T}}.$

$$2.\frac{252}{101}$$
.

$$3. \left(\begin{array}{ccc} 2 & \sqrt{2} & 0\\ \sqrt{2} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right), \quad 0, 3, 3.$$

$$4. \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

$$6. \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & \frac{7}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{3} & \frac{7}{6} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

 $7.7.288, (1, 0.5229, 0.2422)^{\mathrm{T}}.$

$$9.\boldsymbol{A}_{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_{2} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ -5 & \frac{77}{25} & \frac{14}{25} \\ 0 & \frac{14}{25} & -\frac{23}{25} \end{pmatrix}.$$

$$10.(1)\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{33}}{2}2, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{33}}{2}; (2)2 + \sqrt{3}, 2, 2 - \sqrt{3}.$$

习题五

习题六 .17.

$$10.\frac{5x^2}{6} + \frac{3x}{2} - \frac{7}{2}.$$

11.-0.620219,-0.616839.

习题六

$$\begin{aligned} &1.B_1(f,x)=x, B_3(f,x)=1.5x-0.402x^2-0.098x^3.\\ &3.(1)\frac{3}{4}, \frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}x;(2)P_2(x)=-1.1430+1.3828x-0.2335x^2.\\ &5.P_1(x)=(e-1)x+\frac{1}{2}(e-(e-1)\ln(e-1)).\\ &6.P(x)=3x^3+x^2+\frac{3}{4}.\\ &7.P_3^*(x)=5x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{129}{128}.\\ &8.P(x)=\frac{1}{45}+\frac{4}{5}x.\\ &9.(1)s_1=-0.2958x+1.1410;(2)s_1=0.1878x+1.6244;(3)s_1=-0.24317x+1.2159;(4)s_1=0.6822x-0.6371.\\ &10.(2)P_2(x)=-1.1430+1.3828x-0.2335x^2.\\ &11.S_3^*(x)=1.5531913x-0.5622285x^3.\\ &12.\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{2}x.\\ &13.P_3(x)=0.20183(x-0.38268)(x+0.38268)(x+0.92388)\\ &+0.23877(x-0.92388)(x+0.38268)(x+0.92388)\\ &+0.23877(x-0.92388)(x-0.38268)(x+0.92388)\\ &+0.20183(x-0.92388)(x-0.38268)(x+0.38268).\\ &14.P_2(x)=-0.2320x^2+1.3823x-1.1459.\\ &15.R_{22}(x)=2-\frac{4}{x+0.5}+\frac{1.25}{x+1.5}.\\ &16.\frac{2}{\pi}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{j-1}}{(2j-1)(2j+1)}T_j(x).\\ &17.1-\frac{\pi}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2}{j^2\pi}((-)^{j-1}+1)T_j(x).\\ &18.y=2.014+2.25x,y=1.9983+2.25x+0.0314x^2.\\ &19.y=11.436e^{0.2912x}.\\ &20.y=0.050035+0.972555x^2,||r||_2=0.1226. \end{aligned}$$

$$21.y = \frac{x}{2.0158x + 1.0061}.$$
$$22.y = 2.973 + 0.531 \ln x.$$

习题七

$$1.(1)T_8 = 0.11140, S_4 = 0.11157; (2)T_{10} = 1.39148, S_5 = 1.45471;$$

$$(3)T_4 = 17.222774, S_2 = 17.32222; (4)S_1 = 0.63233$$
,误差为 0.00035 .

$$2.(1)T_8 = 0.8347, S_4 = 0.8357, (2):T_6 = 1.6355, S_3 = 1.6360.$$

3.(1)0.9461;(2)0.7468245.

4.(1)0.843;(2):0, (3)10.1517434.

8.n = 2, I = 10.9484; n = 3, I = 10.95014;精确值I = 10.9517032.

11.

$$a_0 = \frac{5}{9}, a_1 = \frac{8}{9}, a_2 = \frac{5}{9},$$

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx \approx \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right),$$

$$x = 2\left(t - \frac{1}{2}\right),$$

$$\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2} dt = \sqrt{2} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1+x}}{(x+3)^2} dx$$

$$\approx \sqrt{2} \left(\frac{5}{9} \frac{\sqrt{-\sqrt{\frac{3}{5}} + 1}}{\left(-\sqrt{\frac{3}{5}} + 3\right)^2} + \frac{8}{9} \frac{1}{3^2} + \frac{5}{9} \frac{\sqrt{\sqrt{\frac{3}{5}} + 1}}{\left(\sqrt{\frac{3}{5}} + 3\right)^2}\right)$$

$$= 0.2885$$

12.
$$\int_{-1}^{1} f(x) dx \approx f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad I \approx 1.3987.$$

习题八

1.三点公式: -0.247,-0.217,-0.187,

2. 五点公式: 2.644225.

习题九

习题九 .19.

1.

表 1.3 第1题计算结果

	\boldsymbol{x}	0.1	0.2	0.3	•••	0.8	0.9	1.0
(1)	y	1.0000	0.2005	0.3022	•••	0.8458	0.9625	1.0815
				1.0000				
								53.8920
(4)	y	1.8000	1.6200	1.4580	•••	0.8609	0.7748	0.6974

2.(2)

表 1.4 第2题(2)计算结果

	x	0.1	0.2	0.3	•••	0.8	0.9	1.0
Euler显式	y	1.0000	1.0100	1.0304	•••	1.3601	1.5081	1.7129
改进Euler	y	1.0050	1.0204	1.0470	•••	1.4684	1.6758	1.9881
梯形方法	y	1.0051	1.0205	1.0474	•••	1.4766	1.6926	2.0264

3.(1)-(4)

表 1.5 第3题(1)(3)计算结果

	x	1.1	1.2	1.3	•••	1.8	1.9	2.0
(1)	y	1.0000	1.0363	1.0714	•••	1.2540	1.2793	1.3030
(3)	y	1.0000	1.2401	1.5873	•••	18.0306	34.4383	72.8124

表 1.6 第3题(2)(4)计算结果

	x	0.1	0.2	0.3	•••	0.8	0.9	1.0
(2)	y	1.0000	1.1052	1.2214	•••	1.8221	2.0137	2.2255
(4)	y	1.0000	1.1103	1.2428	•••	2.6511	3.0192	3.4366

4.

表 1.7 第4题计算结果

x	-1.0000	-0.9000	-0.8000	•••	-0.2000	-0.1000	0
y	0	0.0900	0.1607	•••	0.2882	0.2823	0.2749

表 1.8 第5题计算结果

	y_n	
x_n	Adams显式方法	预估-校正法
-0.6	0.2506	0.2505
-0.5	0.2741	0.2739
-0.4	0.2866	0.2863

6.

表 1.9 第6题计算结果

r		y_n	
x_n	Euler方法	预估-校正法	精确解
0	1	1	
0.1	1.1	1.11	1.11
0.2	1.22	1.24205	1.11
0.3	1.362	1.39847	1.24381
0.4	1.5282	1.58181	1.39971
0.5	1.72102	1.79490	1.58365
0.6	1.94312	1.04086	1.79744
0.7	2.19743	1.32315	2.04424
0.8	2.48718	1.64558	2.32751
0.9	2.81589	1.01237	3.01921
1.0	3.18748	1.42817	3.43656

8.

表 1.10 第8题计算结果

\boldsymbol{x}	0	0.5000	1.0000	1.5000	2.0000
y	0	0.5000	1.1420	2.5012	7.2450

14.中点公式的稳定区间是(-2,0), 改进Euler公式的稳定区间是(-2,0)

$$15.0 < h < \frac{1}{5}$$

参考文献

- [1] 魏毅强,张建国,张洪斌等,数值计算方法,北京;科学出版社,2004.8
- [2] 黄铎,陈兰平,王风,数值分析,北京:科学出版社,2004.3
- [3] 华中理工大学数学系.计算方法.北京:高等教育出版社.1999.9
- [4] 姜健飞,胡良剑,唐俭.数值分析及其MATLAB实验.北京:科学出版社,2004.6
- [5] 薛毅.数值分析与实验.北京:北京工业大学出版社,2005,3
- [6] 张可村,赵英良.数值计算的算法与分析.北京:科学出版社,2004.6
- [7] 石瑞民,许志刚,孙靖,数值计算,北京:高等教育出版社,2004.6
- [8] 黄明游,刘播,徐涛,数值计算方法,北京:科学出版社,2005.8
- [9] 李庆杨.王能超.易大义.数值分析.北京:清华大学出版社,2001.8
- [10] 沈剑华.数值计算基础.上海:同济大学出版社,1999.5
- [11] 李庆扬,关治,白峰山,数值计算原理,北京:清华大学出版社,2000.9
- [12] 吴勃英,王德明,丁效华,李道华,数值分析原理,北京:科学出版社,2004.2
- [13] 林成森.数值计算方法.北京:科学出版社.2005.1
- [14] 蔺小林, 蒋耀林.现代数值分析.北京:国防工业出版社,2004.9
- [15] 崔国华.计算方法.武汉:华中理工大学出版社.2001.3
- [16] 合肥工业大学数学与信息科学系.数值计算方法.合肥: 合肥工业大学出版社,2004.3

. 22. 参考文献

- [17] 张铮,杨文平,石博强等.MATLAB程序设计与实行应用.北京:中国铁道出版社,2003,11
- [18] 张志涌等.精通MATLAB.北京:北京航空航天大学出版社,2003,8
- [19] 清源计算机工作室.MATLAB高级应用.北京:机械工业出版社,2000.6
- [20] 马富明等.数值分析(上).北京:高等教育出版社,2007,5
- [21] 马富明等.数值分析(下).北京:高等教育出版社,2008,2
- [22] 张平文,陈铁军.数值分析.北京:北京大学出版社,2007,1
- [23] 易大义,陈道琦.数值分析引论.杭州:浙江大学出版社,1998.9