Assignment1-Exercise

1、a、$t(n) \in O(g(n)) \Rightarrow \exists\, c>0,\ n_0 \in N^*,\ \forall n \geq n_0,\ t(n) \leq c\,g(n)$，即$g(n) \geq \frac{1}{c} t(n)$

正确

$\Rightarrow \exists\, c' = \frac{1}{c},\ n_0 \in N^*,\ \forall n \geq n_0\ \ g(n) \geq c' t(n)$

$\Rightarrow g(n) \in \Omega(t(n))$

b、错误、反例：$g(n)=n^2,\ \alpha=1$

$\Theta(\alpha g(n)) = \Theta(n^2)$.

$n \notin \Theta(n^2)$，$n \in O(n^2)$

$\therefore \Theta(\alpha g(n)) = O(g(n))$ 不成立.

C. 正确、证明：$O(g(n)) = \{t(n) \mid \exists c_1>0,\ n_1 \in N,\ \forall n \geq n_1,\ t(n) \leq c_1 g(n)\}$

$\Omega(g(n)) = \{t(n) \mid \exists c_2>0,\ n_2 \in N,\ \forall n \geq n_2,\ t(n) \geq c_2 g(n)\}$

$\therefore O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$

$= \{t(n) \mid \exists c_1>0, c_2>0,\ n_0 \in N,\ \forall n \geq n_0\ \ c_2 g(n) \leq t(n) \leq c_1 g(n)\} = \Theta(g(n))$

其中$n_0 = \max\{n_1, n_2\}$

d. 错误：反例：$t(n) = \sin n + 1$，$g(n) = 1$.

2. a. 输入规模：n

基本操作：while中的比较.

$$C(n)=\sum_{i=0}^{\sqrt{n}-1}1=\sqrt{n}\in\Theta(\sqrt{n})$$

b. 输入规模：n

基本操作：最内层循环的加法

$$C(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{j}1=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}j=\sum_{i=1}^{n}\frac{(i+1)i}{2}\approx n^3+n^2\in\Theta(n^3)$$

3. a. 输入规模：n

基本操作：乘法.

基本操作次数递推式：$M(n)=M(\frac{n}{2})+1 \quad for\ (n>0)$

$M(0)=0$. 其中 $\frac{n}{2}$ 为 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$ 即 $M(1)=M(0)+1$

$$\because M(n)=[M(n)-M(\tfrac{n}{2})]+[M(\tfrac{n}{2})-M(\tfrac{n}{4})]+\cdots+[M(1)-M0]$$

$$=1+1+\cdots1=\log_2 n\in\Theta(\log_2 n)$$

b. 输入规模：数组大小 high-low+1. 记为n.

基本操作：对序列段进行划分

最佳情况：每次划分完后左侧子序列与右侧子序列的长度相同.

即每次恰好子序列长度减半,这样划分次数最少,为$\frac{n}{2}$.

设每次待划分序列长度i,每次划分需遍历i个元素

$$\therefore 总的操作次数\ C_{best}(n)=1\times n+\underset{\downarrow\atop 划分次数}{2}\times\underset{划分长度}{\frac{n}{2}}+4\times\frac{n}{4}+\cdots+2^k\times\frac{n}{2^k}$$

又 $1+2+2^2+\cdots+2^k=\frac{n}{2}$. 解得 $k=\log_2(\frac{n}{2}+1)-1$

$$\therefore C_{best}(n)=(k+1)n=n\log_2(\tfrac{n}{2}+1)\in O(n\log_2 n)$$

最差情况：数组已有序.需执行 n-1 次 Sort. 每第i次Sort.待排序序列长度为 n-i

$$\therefore C_{worst}(n)=\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)=\frac{n(n-1)}{2}\in\Theta(n^2)$$

平均情况：设 pivot 在第k个位置.则

$$C_{avg}(n)=\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\underset{左排序用时}{C(k-1)}+\underset{右排序用时}{C(n-k)})}_{子排序平均用时}+\underset{本层partition用时}{n}=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}C(k)+n$$

$$\Rightarrow nC(n)-(n-1)C(n-1)=n(n-1)+2\sum_{k=1}^{n-1}C(k)-(n-1)(n-2)-2\sum_{k=1}^{n-2}C(k)$$

$$\Rightarrow nC(n)=(n+1)C(n-1)+2(n-1)\Rightarrow\frac{C(n)}{n+1}=\frac{C(n-1)}{n}+\frac{2(n-1)}{n(n+1)}$$

令 $B(n)=\frac{C(n)}{n+1}$、则 $B(n)=B(n-1)+\frac{2(n-1)}{n(n+1)}$. $B(1)=B(0)=0$

$B(n)=B(n-1)+\frac{4}{n+1}-\frac{2}{n} \Rightarrow B(n)-\frac{2}{n+1}=B(n-1)-\frac{2}{n}+\frac{2}{n+1}$

令 $A(n)=B(n)-\frac{2}{n+1}$，则 $A(n)=A(n-1)+\frac{2}{n+1}$. $A(1)=-1$. $A(0)=-2$.

$\therefore A(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+1} \in O(\log_2 n)$ $\therefore B(n) \in O(\log_2 n)$

$\therefore C(n)=(n+1)B(n) \in O(n\log_2 n)$

$t(n) < c\Omega(n)$ 即 $q(n) \geq \frac{1}{c}t(n)$

4. a. $T(n)=1+1+2+\cdots+n=\frac{(1+n)n}{2}+1=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}+1$

b. $T(n)=4^{n-1}T(1)=5\cdot 4^{n-1}$

c. $T(n)=T(1)+3+3^2+\cdots+3^k=1+3+3^2+\cdots+3^k=\frac{3^{k+1}-1}{2}=\frac{3n-1}{2}$

Assignment One-Programming 思路+结果

我将 Q1、Q2 两个问题放在一个程序里，首先选择执行版本，然后进入对应的版本求解并输出结果。整个程序由一个 main()函数和一个求组合数的函数组成，都是非递归求解，具体算法思路如下：

Q1
```
{ m<0
  m>n      return 0

  else :   t ← min{m/2, n/3}, ans ← 0 //t为跨两步的个数,
           while(t>0) do                ans记录可行方案数.
           { s ← m-2t  //s为走一步的个数
            if(s+3t<=n)//该方案消耗的卡路里不超过n, ans加组合数 C_{s+t}^t
                ans+= C_{s+t}^t ;

           t--; }

           cout<<ans;
```

Q2
```
{ m<0
  m>n      return 0

  else :   t ← min{m/2, n/3}, ans ← 0
           while(t>0) do
                s ← m-2t
                if(s+3t<=n)//找到第一个符合的s,t,就求组合数输出,退出,
                    ans += C_{s+t}^t
                    cout<<ans
                    break
                t--
```

经分析两个问题的时间复杂度都为 O(n^2)，占用空间都为常数个临时变量。
程序的运行结果如下：

- Q1

Test case 1：

```
请输入数字1/2选择版本Q1/Q2：1
请输入步数m和卡路里数n（用空格间隔，按回车结尾）：6 6
1请按任意键继续. . .
```

Test Case 2:

```
请输入数字1/2选择版本Q1/Q2：1
请输入步数m和卡路里数n（用空格间隔，按回车结尾）：3 6
3请按任意键继续. . .
```

Test Case 3:

```
请输入数字1/2选择版本Q1/Q2：1
请输入步数m和卡路里数n（用空格间隔，按回车结尾）：-5 7
0请按任意键继续. . .
```

- Q2

Test case 1:

```
请输入数字1/2选择版本Q1/Q2：2
请输入步数m和卡路里数n（用空格间隔，按回车结尾）：7 6
0请按任意键继续. . .
```

Test case 2:

```
请输入数字1/2选择版本Q1/Q2：2
请输入步数m和卡路里数n（用空格间隔，按回车结尾）：3 6
2请按任意键继续. . .
```

Test case 3:

```
请输入数字1/2选择版本Q1/Q2：2
请输入步数m和卡路里数n（用空格间隔，按回车结尾）：2 2
1请按任意键继续. . .
```