Пространства со скалярным произведением

1. Билинейные и полуторалинейные формы

Билинейные формы

K - поле, V - векторное пространство над K.

Отображение $(\ ,\ ) : V \times V \to K$ - **билинейная форма**, если она линейна по каждому элементу: $\forall \alpha, \beta \in K, \forall v, w, u \in V$:
$(\alpha v + \beta w, u) = \alpha(v, u) + \beta(w, u) \quad (v, \alpha u + \beta w) = \alpha(v, u) + \beta(v, w)$

Билинейная форма **симметрична**, если $\forall u, v : (u, v) = (v, u)$.

Форма **кососимметрична**, если $\forall u : (u, u) = 0$.
Отсюда для кососимметричной формы $\forall u, v : (u, v) = -(v, u)$.
(если $\mathrm{char} K \neq 2$, то определение кососимметричной формы следует из предыдущего утверждения):
$(u, u) = -(u, u) \implies 2(u, u) = 0$

Билинейная форма **невырождена**, если
$\forall v \in V \setminus \{0\}\ \exists u, w : (v, u) \neq 0 \wedge (w, v) \neq 0$.
(другими словами, для каждого ненулевого вектора найдутся вектора, билинейная форма с которыми будет ненулевой)
(или не существует ненулевого вектора, который бы обнулял билинейную форму слева и справа)

Примеры:

1. $\mathbb{R}^n$, вектор-столбцы x, y.
   $(x, y) = x_1y_1 + \ldots, x_ny_n = x^Ty$ - симметричная билинейная форма.
2. K^n, вектор-столбцы x, y.
   $(x, y) = x^Ty = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$
   Рассмотрим $K = \mathbb{F}_2 = \{0, 1\},\ n = 2k$.
   x - столбец из 1.
   $(x, x) = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{2k} = 0$
3. $K^n,\ A \in M_n(K)$
   $(x, y) = x^TAy$
   Если $A = A^T$, то форма симметричная.
   $(y, x) = y^TAx = (y^TAx)^T = xA^Ty = xAy = (x, y)$
   Если A кососимметрична и $a_{ii} = 0$, то форма кососимметрична:
   x - вектор-столбец
   $(x, x) = x^TAx = \sum_{i,j} x_ia_{ij}x_i =$
   $\sum_i x_ia_{ii}x_i + \sum_{i<j}(x_i\underline{a_{ij}}x_j + x_j\underline{a_{ji}}x_i) = 0$
4. $V = C([0, 1] \to \mathbb{R})$
   $g \in C([0, 1] \to \mathbb{R})$
   $(f, g) = \int_0^1 \rho(x)f(x)g(x)dx$

Полуторалинейные формы

$K \leq L$.

$\dim_K L = 2$. L - **двумерное векторное поле** над K.

Введём операцию черту: $\overline{} : L \to L$ - автоморфизм L.

$\overline{}|_K = id_K$ - сужение черты на K.
$\overline{}|_L$ не тождественное.
$\forall l \in L : \overline{\overline{l}} = l$.

Пример:

Поле комплексных чисел и сопряжение.
$\mathbb{R} \le \mathbb{C}, \overline{}$ - комплексное сопряжение.

V - векторное пространство над $L,\ K \le L$.
Определено отображение (,) : $V \times V \to L$.

Отображение (,) называется **полуторалинейной формой**, если она линейна по первому и полулинейна по второму аргументу:
$\forall \alpha, \beta \in L, \forall u, v, w \in V :$
$(\alpha v + \beta u, w) = \alpha(v, w) + \beta(u, w)$
$(v, \alpha u + \beta w) = \overline{\alpha}(v, u) + \overline{\beta}(v, w)$

Полуторалинейная форма называется **эрмитово симметричной**, если $\forall u, v \in V : (u, v) = \overline{(v, u)}$.
В частности, $(u, u) = \overline{(u, u)} \implies (u, u) \in K,\ K \le L$.

Полуторалинейная форма **невырождена**, если
$\forall v \in V \setminus \{0\}\ \exists u, w : (w, v) \neq 0 \wedge (v, u) \neq 0$.
(не существует ненулевого вектора, который бы занулял полуторалинейную форму слева и справа)

Примеры:

1. $K = \mathbb{R},\ L = \mathbb{C}$. $V = \mathbb{C}^n$, рассматриваем x, y - вектор-столбцы.
   $(x, y) = x^T \bar{y} = x_1 \bar{y}_1 + \ldots + x_n \bar{y}_n$
2. $A \in M_n(\mathbb{C})$. $\bar{A}^T = A$ (эрмитово симметричная матрица)
   $(x, y) = x^T A \bar{y}$
   $(y, x) = y^t A \bar{x} = \bar{x}^T A^T y = \bar{x}^T \bar{A} y = \overline{\bar{x}^T \bar{A} y} = x^T A \bar{y} = (x, y)$
3. $C([0, 1] \to \mathbb{C})$
   $(f, g) = \int_0^1 f(x) \bar{g}(x) dx$
   $(f, g) = \bar{(}g, f)$

2. Квадратичные формы

$\mathrm{char} K \neq 2$
V - векторое пространство над K, $(\ ,\ )$ - симметричная билинейная форма на V.

Зададим отображение $Q : V \to K$.
$Q(u) = (u, u)$
$Q(\lambda u) = (\lambda u, \lambda u) = \lambda^2 Q(u)$

Такое Q - квадратичная форма, ассоциированная с билинейной формой.

Пример:

$Q(u) = u^T A u,\ A^T = A$

Узнаем, как связаны квадратичная и билинейная формы:

Лемма. Пусть Q - квадратичная форма, ассоциированная с симметричной билинейной формой.
Введём $B(u, v) = \frac{1}{2}Q(u+v) - Q(u) - Q(v)$.
Тогда $B(u, v) = (u, v)$ для любых $u, v \in V$.

D:

$$Q(u+v) - Q(u) - Q(v) = (u+v, u+v) - (u, u) - (v, v) =$$
$$(u, v) + (v, u) = 2(v, u) \implies B(u, v) = (u, v)$$

Отсюда связь квадратичной и билинейной формы:
$(u, v) = \frac{1}{2}Q(u+v) - Q(u) - Q(v)$

3. Положительно определённые формы. Евклидовы и унитарные пространства

Евклидово пространство

$K = \mathbb{R}$, (,) - симметричная билинейная форма.
Симметричная билинейная форма **положительно определена**, если $\forall v : (v, v) \geq 0$ и $\forall v : (v, v) = 0 \iff v = 0$.

Примеры:

1. $V = \mathbb{R}^n, \; (x, y) = x_1y_1 + \ldots x_ny_n$
   $(x, x) = x_1^2 + \ldots, x_n^2$ - положительно определённая.

2. $C([0,1] \to \mathbb{R})$
   $(f,g) = \int_0^1 \rho(x)f(x)g(x)dx$
   Если $\rho(x)$ всюду положительна, то $\int_0^1 \rho(x)f^2(x)dx \geq 0$ - положительная форма.

Зам. Из положительной определённости следует невырожденность.

Евклидово пространство - конечномерное в.п. над $\mathbb{R}$ с заданной на нём положительно определённой симметричной билинейной формой.

Унитарное пространство

$K = \mathbb{C}$, V - в.п. над $\mathbb{C}$.
$(\ , \ )$ - эрмитова симметричная полуторалинейная форма на V.
Эрмитова симметричная полуторалинейная форма **положительно определена**, если $\forall v \in V : (v,v) \geq 0$ и $(v,v) = 0 \iff v = 0$.

Из положительной определённости следует невырожденность.

Пример:

$V = \mathbb{C}^n,\ (x,y) = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_n\bar{y}_n$
$(x,x) = x_1\bar{x}_1 + \ldots x_n\bar{x}_n = |x_1|^2 + \ldots |x_n|^2 \geq 0$

Унитарное пространство - конечномерное в.п. над $\mathbb{C}$ с заданнымы на нём положительно определённой эрмитово симметричной полуторалинейной формой.

Скалярное произведение

Соответствующая форма в евклидовом пространстве и соответствующая форма в унитарном пространстве называется **скалярным произведением.**

Пусть V - евклидово пространство над $\mathbb{R}$ или унитарное над $\mathbb{C}$.
В случае евклидового пространства $\overline{}: id_{\mathbb{R}}$.
В случае унитарного $\overline{}$: комплексное сопряжение.

4. Матрица Грама

V - конечномерное в.п. над K.
$(\ ,\ )$ - билинейная/полуторалинейная форма.
$v_1, \ldots, v_n$ - базис V.
$\Gamma = \Big((v_i, v_j)\Big)_{i,j=1,\ldots,n}$
Γ - **матрица Грама** формы $(\ ,\ )$ в базисе $v_1, \ldots, v_n$.

$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$
$u = \beta v_1 + \ldots + \beta_n v_n$
$(v, u) = (\alpha_1 v_1 + \ldots \alpha_n v_n,\ \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n) =$
Для полуторалинейного случая:
$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \bar{\beta}_j (v_i, v_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i (v_i, v_j) \bar{\beta}_j =$
$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \Gamma (\bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_n)^T$.

$(v,u) = [v]^T_{\{v_i\}}\Gamma[\bar{u}]_{\{v_i\}}$ -

Форма симметрична, тогда $(v_j, v_i) = (v_i, v_j) \implies \Gamma^T = \Gamma$ - матрица Грама симметрична.
Форма кососимметрична, тогда
$(v_i, v_i) = 0,\ (v_i, v_j) = -(v_j, v_i),\ i \neq j$. $\Gamma^T = -\Gamma, (\Gamma)_{ii} = 0$ - матрица Грама кососимметрична.
Форма эрмитова, тогда $(v_i, v_j) = \overline{(v_j, v_i)},\ \Gamma^T = \bar{\Gamma}$ или $\bar{\Gamma}^T = \Gamma$.

Предложение. Форма невырождена $\iff$ Γ невырождена.

D:

$\boxed{\Rightarrow}$ $\forall v \neq 0 \in V\ \exists u : (v,u) \neq 0$.
$\forall(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0\ \exists \beta_1, \ldots, \beta_n : (\alpha_1\ \ldots, \alpha_n)\Gamma(\bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_n)^T \neq 0$.
Рассмотрим левую часть:
$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\Gamma = (c_1, \ldots, c_n)$
$c_1\bar{\beta}_1 + \ldots c_n\bar{\beta}_n \neq 0$
Если $c = 0$, то решений нет - противоречие.
Если какое-то $c_i \neq 0$, то $\beta_i = 1$ - решение есть.
$\forall(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0 : (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\Gamma \neq 0 \implies \Gamma$ обратима.
Т.е. система $\Gamma^T(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^T = 0$ имеет лишь тривиальное решение $\implies \det\Gamma = \det\bar{\Gamma} \neq 0$ - матрица обратима.
$\boxed{\Leftarrow}$ $\det\Gamma \neq 0$
$v \neq 0$. $[v]^T_{\{v_i\}} \neq 0$, $[v]^T\Gamma \neq 0 \implies \exists\beta_i : [v]^T\Gamma(\bar{\beta}_1, \ldots, \bar{\beta}_n)^T \neq 0$.
$u = (\beta_1, \ldots, \beta_n)(v_1, \ldots, v_n)^T$
$(u,v) = [u]^T_{\{v_i\}}\Gamma[\bar{v}]_{\{v_i\}}$
$v \neq 0, [\bar{v}] \neq 0,\ \Gamma[\bar{v}] \neq 0$
$\exists\beta_i : (\beta_1, \ldots, b_n)\Gamma[\bar{v}] \neq 0$
$u = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n,\ (u,v) \neq 0$ (что?)

Теорема. $v_i,\ v_i'$ - базисы унитарного/евклидового пространства. C - матрица преобразования координат. Тогда $\Gamma' = C^T\Gamma\overline{C}$.

D:

Докажем для унитарного. Берём произвольные u, v.
$(u,v) = [u]^T_{\{v_i\}}\Gamma[\bar{v}]_{\{v_i\}} = [u]^T_{\{v_i'\}}\Gamma[\bar{v}]_{\{v_i'\}}$
$[v]_{\{v_i\}} = C[v]_{\{v_i'\}}$
$[u]_{\{v_i\}} = C[u]_{\{v_i'\}}$
$u = v_i',\ v = v_j'$
$[u]_{\{v_i\}} = (0,\dots,\underset{i}{1},\dots,0)^T,\ [v]_{\{v_i\}} = (0,\dots,\underset{j}{1},\dots,0)^T$
$(C^T\Gamma\overline{C})_{ij} = (\Gamma')_{ij} \implies C^T\Gamma\overline{C} = \Gamma'$.
Для евклидового убрать $\overline{\quad}$.

5. Теорема Коши-Буняковского. Угол между векторами

Теорема. V - в.п. над $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$).
(,) - симметричная полуторалинейная положительно определённая форма.
Тогда $\forall u, v \in V : |(u,v)| \le \sqrt{(u,u)}\sqrt{(v,v)}$ - **неравенство Коши-Буняковского**

D:

$v = 0, 0 \leq 0$ тривиально.
Рассмотрим $v \neq 0$
$(u, v) = r \cdot \varepsilon, \quad r \geq 0,\ \varepsilon = \cos\varphi + i\sin\varphi,\ |\varepsilon| = 1,\ \ r = |(u, v)|$
(тригонометрическая форма комплексного числа).
$\bar{\varepsilon}(u, v) = \bar{\varepsilon}\varepsilon r = r.$
$\varepsilon(u, v) = \bar{\bar{\varepsilon}}\overline{(u, v)} = \overline{\bar{\varepsilon}(u, v)} = \bar{r} = r$
Рассмотрим $u + t\varepsilon v,\ t \in \mathbb{R}.$
$0 \leq (u + t\varepsilon v, u + t\varepsilon v) = (u, u) + t\varepsilon(v, u) + \overline{t\varepsilon}(u, v) + t^2\varepsilon\bar{\varepsilon}(v, v) =$
$(u, u) + 2rt + t^2(v, v) \geq 0 \implies D < 0$
$D/4 = r^2 - (u, u)(v, v) \leq 0$
$r^2 \leq (u, u)(v, v)$
$|r| \leq \sqrt{(u, u)}\sqrt{(v, v)}$
$|(u, v)| \leq \sqrt{(u, u)}\sqrt{(v, v)}$
Для евклидового убрать сопряжения, а $\varepsilon = \pm 1$.

Угол между векторами

Для $\mathbb{R}^n$ со скалярным произведением:
$x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$
$(v, v) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$
$\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$ - длина вектора v.
В общем случае с положительно определённой симметричной (эрмитовой) билинейной (полуторалинейной) формы:
$\sqrt{(v, v)}$ - **длина вектора** v.
Обозначают $\|v\|$ - норма вектора.

V - в.п. над $\mathbb{R}$.
$u, v \neq 0,\ \|u\| \neq 0 \neq \|v\|.$

$|(u,v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$
$$\frac{|(u,v)|}{\|u\|\|v\|} \leq 1$$
$-1 \leq \frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|} \leq 1.$
$\exists \varphi \in [0, \pi]:$
$\frac{(u,v)}{\|u\|\|v\|} = \cos\varphi$
φ - **угол между векторами**.

Над $\mathbb{C}$ интерпретируют $p = \frac{|(u,v)|}{\|u\|\|v\|}$ как некоторую вероятность.

Примеры:

1. $V = C([0,1] \to \mathbb{R})$
   $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$
   $\left|\int_0^1 f(x)g(x)dx\right| \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(x)dx}\sqrt{\int_0^1 g^2(x)dx}$

6. Ортогональные семейства

V - в.п. над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ с положительно определённым скалярным произведением.
Два вектора ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю: $u \perp v \iff (u,v) = 0 = (v,u)$.

Теорема. V - в.п. над $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ с положительно определённым скалярным произведением. $v_1, \dots, v_k$ - семейство попарно ортогональных ненулевых векторов. Тогда $v_1, \dots, v_k$ линейно независимы.

D:

$c_1 v_1 + \ldots + c_k v_k = 0$.
Поочерёдно скалярно умножаем на базисные вектора.
$c_1(v_1, v_i) + \ldots + c_i(v_i, v_i) + \ldots c_k(v_k, v_i) = c_i(v_i, v_i)$.
$v_i \neq 0 \implies (v_i, v_i) \neq 0 \implies c_i = 0\,\forall i = 1, \ldots, k$.

Понятие ортогональности можно вводить и для векторных пространств с билинейной или полуторалинейной формой над произвольными полями.

Пример пространства, где вектор ортогонален себе:

$K = \mathbb{F}_2,\ V = K^{2n}$
$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$
x - столбец из 1. $(x, x) = 0$
$x \perp x,\ x \neq 0$.

Положительная определённость важна для теоремы:
$V = \mathbb{R}^2$
$(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2,\ x$ - столбец из 1. $(x, x) = 0 \implies x \perp x$

7. Ортогональные и ортонормированные базисы. Грам-Шмидт

V - евклидово или унитарное пространство.
$v_1, \ldots, v_n$ - базис V.
$v_1, \ldots, v_n$ - **ортогональный базис**, если любые два вектора из

него перпендикулярны.
(матрица Грама диагональная)

Ортогональный базис **<u>ортонормирован</u>**, если длина каждого вектора равна единице. (матрица Грама единичная) (иногда сокращают до ОНБ)

Ортогонализация Грама-Шмидта

Теорема. Во всяком евклидовом (унитарном) пространстве есть ортонормированный базис.

D:

Доказываем в два этапа: сначала ортогонализуем, затем нормируем.
$u_1, \ldots, u_n$ - какой-то базис. Будем строить векторы $v_1, \ldots, v_n$ со свойствами:

1. v_i попарно ортогональны.
2. $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$

Строим по индукции. $v_1 = u_1$ $\langle v_1 \rangle = \langle u_1 \rangle$
Предположим, что уже построили $v_1, \ldots, v_i$.
Будем искать $v_{i+1} = u_{i+1} + c_{i+1,1}v_1 + \ldots + c_{i+1,i}v_i$.
$\langle v_1, \ldots, v_i, v_{i+1} \rangle = \langle v_1, \ldots, v_i, u_{i+1} \rangle =$
$\langle v_1, \ldots, v_i \rangle + \langle u_{i+1} \rangle = \langle u_1, \ldots, u_i \rangle + \langle u_{i+1} \rangle = \langle u_1, \ldots, u_{i+1} \rangle$.
Хотим, чтобы $v_{i+1} \perp v_j,\ j = 1, \ldots, i$:
$0 = (v_{i+1}, v_j) = (u_{i+1}, v_j) + c_{i+1,1}(v_1, v_j) + \ldots + c_{i+1,i}(v_i, v_j) =$
$(u_{i+1}, v_j) + c_{i+1,j}(v_j, v_j) = 0$
$c_{i+1,j} = -\frac{(u_{i+1}, v_j)}{(v_j, v_j)}$ $((v_i, v_i) \neq 0 \Leftarrow v_1, \ldots, v_i$ - л.н.).

При таком выборе $c_{i+1,j}$ вектора будут ортогональны.
Построили ортогональный базис.

Теперь нормируем их:
$v_1, \ldots, v_n$ - л.н., а значит ненулевые.
$(v_i, v_i) = \lambda_i > 0,\ \lambda_i \in \mathbb{R}.$
$w_i = v_i / \sqrt{(\lambda_i)}$
$(w_i, w_j) = (v_i/\sqrt{\lambda}_i, v_j/\sqrt{\lambda}_j) = 1/\sqrt{\lambda_i \lambda_j}(v_i, v_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$
$w_1, \ldots, w_n$ - ОНБ.

8. Следствие из процесса ортогонализации

в билетах нет всем пока.

$A \in M_n(\mathbb{C}),\ A^T = A$
A <u>**положительно определена**</u>
$\iff \ \forall v \in \mathbb{R}^n v^T A \bar{v} \geq 0,\ v^T A \bar{v} = 0 \iff v = 0.$
#todo

9-12 туду

13. Ортогональное дополнение

V - векторное пространство над K.
(,) - билинейная или полуторалинейная форма,

$(u,v)=0 \iff (v,u)=0.$

$S \subset V.$

Ортогональное дополнение S:

$S^{\perp}=\{v \in V \mid \forall s \in S : s \perp v \iff (s,v)=0\}$ - вектора из V, перпендикулярные **каждому** вектору из S.

Теорема. $K=\mathbb{R}$ (или $\mathbb{C}$). V - евклидово (или унитарное) пространство над K. Имеют место следующие свойства:

1. $S_1 \subseteq S_2 \implies S_2^{\perp} \subseteq S_1^{\perp}$
2. $S^{\perp}=\langle S\rangle^{\perp}$
3. $\{0\}^{\perp}=V$
4. $V^{\perp}=\{0\}$
5. $U,W \leq V : (U+W)^{\perp}=W^{\perp}\cap U^{\perp}$
6. $(U^{\perp})^{\perp}=U,\ U \leq V$
7. $U,W \leq V : (U\cap W)^{\perp}=U^{\perp}+W^{\perp}$
8. $V=U\oplus U^{\perp}$

   Свойства 1-5 верны и для бесконечномерного пространства с положительно определённым скалярным произведением. Для свойств 6-8 конечномерность существенна.

D:

1. $v \in S_2^{\perp},\ \forall u \in S_2\ v \perp u. \forall u \in S_1\ u \perp v \implies v \in S_1^{\perp}$
2. $S \subseteq \langle S\rangle,\ \langle S\rangle^{\perp} \subseteq S^{\perp}$ по 1ому свойству. Покажем обратное включение:

   $v \in S^{\perp}. \forall u \in \langle S\rangle\ u=c_1u_1+\ldots+c_ku_k,\ u_i \in S.$

   $(v,u)=0$ т.к. $(v \perp u_i) \implies v \perp u. \implies S^{\perp} \subseteq \langle S\rangle^{\perp}.$
3. $(v,0)=0\ \forall v \in V$:

$\cancel{(v,0)} = (v, 0+0) = \cancel{(v,0)} + (v,0) = 0.$

4. т.к. форма невырождена, то
   $\forall v \neq 0 \exists u : (v,u) \neq 0 \implies \forall v \neq 0\ v \notin V^{\perp} \implies V^{\perp} = \{0\}$
5. $U \subseteq U + W,\ W \subseteq U + W.$
   По первому свойству
   $(U+W)^{\perp} \subseteq U^{\perp},\ (U+W)^{\perp} \subseteq W^{\perp}.$
   $\implies (U+W)^{\perp} \subseteq U^{\perp} \cap W^{\perp}.$
   Обратное включение: $v \in U^{\perp} \cap W^{\perp}.$
   $\forall u \in U\ (u,v) = 0\ \forall w \in W\ (v,w) = 0.$
   $z \in U + W,\ z = u + w.$
   $(v,z) = (v, u+w) = 0$
   $\implies v \in (U+W)^{\perp} \implies U^{\perp} \cap W^{\perp} \subseteq U^{\perp} \cap W^{\perp}.$
   Чтобы доказать 6 пункт, докажем следующий факт:
   Для конечномерного V с невырожденной симметричной билинейной формой
   $U \leq V \implies \dim U^{\perp} = \dim V - \dim U.$
   Возьмём базис $u_1, \ldots, u_m$ - базис U. Дополним до $u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_m$ - базиса V.
   Ищем $v \in U^{\perp}$ в виде
   $c_1 u_1 + \ldots + c_m u_m + c_{m+1} u_{m+1} + \ldots + c_n v_n.$
   $u_1 \perp v, \ldots, u_m \perp v.$
   $$\begin{cases} c_1(u_1, u_1) + \ldots + c_n(u_1, v_n) = 0 \\ \vdots \\ c_1(u_m, u_1) + \ldots + c_n(u_m, v_n) = 0 \end{cases}$$
   m уравнений, n неизвестных. Матрица этой системы - подматрица матрицы Грама. Форма невырождена, значит матрица Грама

   невырождена. Значит строки матрицы системы

линейно независимы. Размерность пространства решений $= n - m$
$\implies \dim U^\perp = n - m = \dim V - \dim U$.

6. Рассмотрим $v \in U : \forall u \in U^\perp\ u \perp v$.
   Ортогональность симметрична, значит
   $v \perp u \implies v \in (U^\perp)^\perp$.
   По лемме $\dim U^\perp = \dim V - \dim U$
   $\dim (U^\perp)^\perp = \dim V - (\dim V - \dim U) = \dim U$.
   Размерности совпадают, значит имеет место равенство.
7. $U^\perp, W^\perp$.
   $(U^\perp + W^\perp)^\perp = U^{\perp^\perp} \cap W^{\perp^\perp}$ (по св-ву 5)
   $= U \cap W$ (по св-ву 6)
   $(U \cap W)^\perp = ((U^\perp + W^\perp)^\perp)^\perp = U^\perp + W^\perp$
8. $$u \in U \cap U^\perp \implies (u, u) = 0 \implies u = 0 \implies U \cap U^\perp = \{$$
   $U + U^\perp$ - прямая сумма, так как пересечение ноль.
   $(U \cap U^\perp)^\perp = U^\perp + U = U \oplus U^\perp = \{0\}^\perp = V$.

Пример пространства, не совпадающий со своим вторым ортогональным дополнением:

$\mathbb{R}$
$l^2 = \{(a_1, a_2, \dots) \mid a_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^\infty a_i^2 < \infty\}$
$l_0^2 = \{(a_1, a_2, \dots) \mid a_i \in \mathbb{R}, \text{ почти все } a_i = 0\}$

$l_0^2 \subseteq l_2$
Добавим операции:

сложение и умножение на скаляр покоординатно:
$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty \quad \sum_{i=1}^{\infty}(ca_i^2) < \infty$ - очевидно.
(далее индексы суммирования опускаются - такие же)
$\sum a_i^2 < \infty,\ \sum b_i^2 < \infty.$
$a = (a_1, a_2, \ldots),\ b = (b_1, b_2, \ldots)$
$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots)$
$\sum(a_i + b_i)^2$ сходится?
$(a_i + b_i)^2 = a_i^2 + 2a_ib_i + b_i^2 = 2a_ib_i + 2a_i^2 + 2b_i^2 - a_i^2 - b_i^2 =$
$2a_i^2 + 2b_i^2 - (a_i - b_i)^2 \leq 2a_i^2 + 2b_i^2.$
$\sum(a_i + b_i)^2 \leq 2\sum(a_i^2 + b_i^2) = 2\sum a_i^2 + 2\sum b_i^2 < \infty.$
Теперь определим скалярное произведение:
$(a, b) = \sum a_ib_i.$
Проверим абсолютную сходимость:
$|a_ib_i| < \frac{1}{2}(|a_i^2| + |b_i^2|) = \frac{1}{2}(a_i^2 + b_i^2)$
$\sum |a_ib_i| < \frac{1}{2}(\sum a_i^2 + \sum b_i^2) \leq \infty$ сх. абсолютно $\implies (a, b) \in \mathbb{R}.$

Посмотрим на $(l_0^2)^\perp$:
$e_i = (0, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, 0)$
$l_0^2 = \langle e_1, e_2, \ldots \rangle$
$v \perp e_i,\ i = 1, 2, \ldots$
$v = (v_1, v_2, \ldots),\ v_i \in \mathbb{R}$

$v \perp e_i \iff v_i \cdot 1 = 0,\ i = 1, 2, \ldots$
$\implies v = 0 \implies (l_0^2)^\perp = \{0\}$

$((l_0^2)^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = l^2 \neq l_0^2$
Осталось только доказать, что $l^2 \neq l_0^2$.
Посмотрим на $\sum 1/i^2$.
$v = (1,\ 1/2,\ 1/3, \ldots),\ v \in l^2,\ v \notin l_0^2.$

14. Ортогональная проекция

V - евклидово или унитарное пространство.
$U \leq V$
$V = U \oplus U^{\perp}$
$v \in V : v = u + w,\ u \in U,\ w \in U^{\perp}.$
Существуют единственные такие u, w.
u - **ортогональная проекция** на U.
w - **ортогональная составляющая** V

15. Метод наименьших квадратов

$\mathbb{R}^n,\ Ax = B$
Если система несовместна, то найдем такой x, чтобы $Ax - B$ было максимально близко к нулю. (в смысле расстояния в евклидовом пространстве)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

Минимизируем $\sum_{i=1}^{b}(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j - b_i)^2$ - это **метод наименьших квадратов**.

$A = (A_1|\ldots|A_m),\ B = (b_1, \ldots, b_n)^T.$
Минимизиреуем длину вектора $A_1x_1 + \ldots + A_mx_m - B$.
То есть находим вектор в $\langle A_1, \ldots, A_m \rangle$, минимизирующий расстояние до B.

$x_1, \ldots, x_m$ ищем так, чтобы $x_1 A_1 + \ldots + x_m A_m$ - ортогональная проекция B на $\langle A_1, \ldots, A_m \rangle$.

Метод решения: рассматриваем пространство, порождённое столбцами A. Находим в нём ОНБ, ищем ортогональную проекцию B на $\langle A_1, \ldots, A_m \rangle$.
Ортогональная проекция - линейная комбинация векторов ОНБ. Выражаем через исходные столбцы A.