1. Кольцо многочленов

Вспомним материал первого семестра (без доказательств).

Мотивация:

Многочлены вообще довольно часто используемое понятие, и мы хотим аккуратно построить теорию.

Далее R - кольцо с единицей. Упорядоченные н-ки из элементов этого кольца, где почти все элементы равны нулю (или другими словами все, кроме конечного числа):

$$R[x] = \{(a_0, a_1, a_2, \ldots) \mid a_i \in R; \text{почти все } a_i \text{ нули}\}$$

- **кольцо многочленов**. R - **кольцо коэффициентов**.

#Многочлен - элемент кольца многочленов: $(a_0, a_1, \ldots)$

$\deg(a_0, \ldots, a_n, \ldots)$ - **степень** многочлена, если $a_n \neq 0$ и $\forall m > n\ a_m = 0$.

Многочлены можно **складывать**:

> $+ : R[x] \times R[x] \to R[x]$
> $(a_0, a_1, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots)$

Лемма 1. $\deg(a+b) \leq \max(\deg a, \deg b)$

(а если $\deg a \neq \deg b$, то $\deg(a+b) = \max(\deg a, \deg b)$)

Многочлены можно **перемножать**:

> $\bullet : R[x] \times R[x] \to R[x]$
> $a \cdot b = c = (c_0, c_1, \ldots)$
> $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$

Лемма 2. $\deg ab \leq \deg a + \deg b$

(а если R - кольцо без делителей нуля, то $\deg ab = \deg a + \deg b$)

Теорема. Если R - кольцо с единицей, то $R[x]$ - тоже кольцо с единицей. Если R коммутативно, то и $R[x]$ тоже коммутативно.

Рассмотрим следующее отображение:

$$\varphi : R \to R[x]$$

$$r \to (r, 0, 0, \ldots)$$

$\varphi(r_1 + r_2) \to \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$
$\varphi(r_1 r_2 = \varphi(r_1)\varphi(r_2))$
φ - гомоморфизм колец.

Отождествим $\varphi(R)$ и R. Вместо $(r, 0, 0, \ldots)$ пишем r. Это **константные** многочлены.

Отсюда традиционная запись многочленов:

$$
\begin{aligned}
a = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots) \\
= \\
(a_0, 0, \ldots) + (0, a_1, 0, \ldots) + \ldots + (0, \ldots, 0, a_n, 0, \ldots) \\
= \\
(a_0, 0, \ldots) \cdot (1, 0, \ldots) + \\
(a_1, 0, \ldots) \cdot (0, 1, \ldots) + \\
(a_2, 0, \ldots) \cdot (0, 0, 1, 0, \ldots) + \\
\ldots + (a_n, 0, \ldots) \cdot (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \\
= \\
a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i
\end{aligned}
$$

Оглавление   2. Биномиальные коэффициенты