Многочлены база

Вспомним материал первого семестра (без доказательств).

Необходимые знания: аксиоматика теории групп, аксиомы колец и поля, комплексные числа

Мотивация:

Многочлены вообще довольно часто используемое понятие, и мы хотим аккуратно построить теорию.

---

1. Кольцо многочленов

Далее R - кольцо с единицей. Упорядоченные н-ки из элементов этого кольца, где почти все элементы равны нулю (или другими словами все, кроме конечного числа):

$$R[x] = \{(a_0, a_1, a_2, \ldots) \mid a_i \in R; \text{почти все } a_i \text{ нули}\}$$

- **кольцо многочленов**. R - **кольцо коэффициентов**.

Многочлен - элемент кольца многочленов: $(a_0, a_1, \ldots)$

$\deg(a_0, \ldots, a_n, \ldots)$ - **степень** многочлена, если $a_n \neq 0$ и $\forall m > n\ a_m = 0$.

Многочлены можно **складывать**:

> $+ : R[x] \times R[x] \to R[x]$
> $(a_0, a_1, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots)$

Лемма 1. $\deg(a+b) \le \max(\deg a, \deg b)$

(а если $\deg a \neq \deg b$, то $\deg(a+b) = \max(\deg a, \deg b)$)

Многочлены можно **перемножать**:

> $\bullet : R[x] \times R[x] \to R[x]$
> $a \cdot b = c = (c_0, c_1, \ldots)$
> $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$

Лемма 2. $\deg ab \le \deg a + \deg b$

(а если R - кольцо без делителей нуля, то $\deg ab = \deg a + \deg b$)

Теорема. Если R - кольцо с единицей, то $R[x]$ - тоже кольцо с единицей. Если R коммутативно, то и $R[x]$ тоже коммутативно.

Рассмотрим следующее отображение:

$$\varphi : R \to R[x]$$

$$r \to (r, 0, 0, \ldots)$$

$\varphi(r_1 + r_2) \to \varphi(r_1) + \varphi(r_2)$
$\varphi(r_1 r_2 = \varphi(r_1)\varphi(r_2))$
φ - гомоморфизм колец.

Отождествим $\varphi(R)$ и R. Вместо $(r, 0, 0, \ldots)$ пишем r. Это **константные** многочлены.

Отсюда традиционная запись многочленов:

$$a = (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots) = (a_0, 0, \ldots) + (0, a_1, 0, \ldots) + \ldots + (0, \ldots, 0, a_n, 0, \ldots) = (a_0, 0, \ldots) \cdot (1, 0, \ldots) + (a_1, 0, \ldots) \cdot (0, 1, \ldots) + (a_2, 0, \ldots) \cdot (0, 0, 1, 0, \ldots) + \ldots + (a_n, 0, \ldots) \cdot (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

2. Биномиальные коэффициенты и биномиальная формула

Факториал: $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n,\ n \geq 1;\ 0! = 1$

Биномиальные коэффициенты:

$$\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Доопределим для $k < 0$ и $k > n : \binom{n}{k} = 0$

Свойства биномиальных коэффициентов:

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}\ \ n \geq 1$

4. $\binom{n}{k} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Биномиальная формула:

Теорема. R - кольцо с 1; $a, b \in R$; a, b коммутируют.
Тогда

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$$

Следствие.

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

3. Теорема о делении с остатком в кольце многочленов

R - кольцо с 1.

R^* - множество всех обратимых элементов R.

$a \in R^* \iff \exists b \in R : ab = ba = 1$

Теорема. $f, g \in R[x],\ g = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m,\ \underline{b_i \in R^*}$.
Тогда

$$\exists! q, r \in R[x] : f = g \cdot q + r \quad \deg r < \deg g$$

q - **неполное частное**, r - **остаток**.

4. Значение многочлена в точке

$R \subseteq L$ - кольца.
$f \in R[x]$
$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$
$c \in L$

$f(c) = a_0 + a_1 c + \ldots + a_n c^n$ - **значение** $f(c)$ в точке c.

c - **корень** f, если $f(c) = 0$.

$h, f \in R[x]$
h **делит** f, если $\exists s \in R[x] : f = h \cdot s$. Пишут $h \mid f,\ f \vdots h$

Теорема Безу. R - коммутативное кольцо с 1.
$f \in R[x],\ c, r \in R$
$f = (x - c) \cdot q + r$
Тогда

$$\underline{f(c)} = (c - c) \cdot q(c) + r = \underline{r}$$

Следствие. c - корень $f \iff (x - c) \mid f$

5. Характеристика поля

K - поле. $m \in \mathbb{N}$.

$$m \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{m}$$

Если $\exists m \in \mathbb{N} : m \cdot 1 = 0$, то $\min m =: \mathrm{char} K$ - **характеристика поля**.

Если такого m не существует, то $\mathrm{char} K = 0$.

> $\mathrm{char}\mathbb{R} = \mathrm{char}\mathbb{Q} = \mathrm{char}\mathbb{C} = 0$

$m \in \mathbb{N} \neq 1$ называется **простым числом**, если все делители в $\mathbb{Z}$ - $\pm 1, \pm m$.
В случае, если есть другие делители, число называется **составным**.

Теорема. Если $\mathrm{char} K = 0$ или простое, то K- поле.

6. Производная многочлена

R - кольцо с 1.
$m \in \mathbb{N}, \; r \in R$
$m \cdot r = (m \cdot 1) \cdot r$

$f = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$
Производная многочлена f :

$$f' = a_1 + 2a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot a_k x^{k-1}$$

Производная высшего порядка:
$f^{(k)} = (f^{(k-1)})', \quad f^{(0)} = f$

Свойства производной:

1. $(f+g)' = f' + g'$

2. $c \in R$ $(cf)' = c(f')$
3. $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
4. Формула Лейбница: $(fg)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$
5. $\mathrm{char} K = 0 \quad f' = 0 \iff f \in K$
   $\mathrm{char} K = p > 0 \quad f' = 0 \iff f \in K[x^p]$

7. Кратные корни многочленов

K - поле.
$K[x]$ - область целостности (коммутативное кольцо с 1 без делителей 0).
$f \neq 0 \in K[x]$
$c \in K$ - **<u>корень f кратности</u>** d, если $(x-c)^d \mid f$ и $(x-c)^{d+1} \nmid f$.

Предложение.
c - корень f кратности $d \iff f = (x-c)^d \cdot g, \quad g(c) \neq 0$

Предложение.
$f, g \neq 0 \in K[x]$
c - корень f и g кратностей k и c соответственно.
Тогда c - корень fg кратности $k + c$.

Теорема. $f \neq 0 \in K[x]$
$c_1, \ldots, c_m$ - попарно различные корни f кратностей $d_1, \ldots, d_m$ сответственно.
Тогда $(x-c_1)^{d_1} \cdot \ldots \cdot (x-c_m)^{d_m} \mid f$

Следствие $f \neq 0 \in K[x]$.
Число корней f с учётом их кратности $\leq \deg f$.
$f = (x-c_1)^{d_1} \ldots (x-c_m)^{d_m} \cdot g$

$$\deg f = d_1 + \ldots + d_m + \deg g \geq d_1 + \ldots + d_m$$

Но это неверно для некоммутативного и содержащего нули кольца коэффициентов.

8. Кратные корни и производная

K - поле, $\mathrm{char} K = 0$.
$0 \neq f \in K[x]$
c - корень f.
Как определить кратность корня?

Теорема. c - корень f кратности $d \implies c$ - корень f' кратности $d-1$.

Теорема. $d \geq 1$. c - корень f кратности d
$\iff f(c) = f'(c) = \ldots = f^{(d-1)}(c) = 0$. А $f^{(d)}(c) \neq 0$

9. Формальное и функциональное равенство многочленов

K - поле.
$f, g \in K[x]$
Формальное равенство многочленов:
$f = g$, если совпадают последовательности их коэффициентов.

$f \doteq g$, если $\widetilde{f} = \tilde{g}$ (как отображения), где $\widetilde{f} : K \to K[x],\ c \to f(c)$, $\tilde{g}$ аналогично. Это **функциональное равенство многочленов**.

Теорема. $f, g \in K[x]$. $|K| > \max(\deg f, \deg g)$.
Тогда $f \doteq g \implies f = g$

Следствие. В бесконечном поле стрелка вправо есть всегда.

10. Интерполяционная задача

K - поле.

Даны точки $c_1, \ldots, c_n$ - **узлы интерполяции**, и значения в этих точках: $y_1, \ldots, y_n \in K$.
Надо найти $f \in K[x] : f(c_i) = y_i \ \forall i \in \{1, \ldots, n\}$.

Но если f - решение, то $f + (x - c_1)\ldots(x - c_n) \cdot h$ - тоже решение. Нам интересно искать многочлен наименьшей степени.

Теорема. Существует единственный многочлен $f : \deg f < n$, решающий интерполяционную задачу.

Метод Ньютона.
Метод Лагранжа.