Lecture24

Saturday, December 11, 2021 4:23 PM

Lecture24

Linear Algebra

Samira Hossein Ghorban
s.hosseinghorban@ipm.ir

Fall, 2021

Triangularizable matrices

$\mathbb{F} = \mathbb{C} \;\; \mathbb{R}$

Theorem

Let T be a linear function over V with dimension $n < \infty$ over $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. The linear function T is triangularizable if and only if the minimal polynomial of T splits in $\mathbb{F}(x)$ into linear factors.

برهان (⇐) فرض کنید T مثلثی شدنی باشد، پس پایه B موجود است که

$$[T]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \det(xI - [T]_B) = \det \begin{bmatrix} x-a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & x-a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= (x-a_{11}) \cdots (x-a_{nn})$$

$P_T \mid f(x)$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$A \in M_n(\mathbb{R})$

$P(x) \in \mathbb{R}[x]$

در اعداد مختلط

به ریشه‌های ساده تجزیه می‌شود

$P(x) = (x-c_1)\cdots(x-c_m)$

$c_i \in \mathbb{C}$

$P \in M_n(\mathbb{C})$ $\quad P^{-1}AP = \begin{bmatrix} c & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & c \end{bmatrix}$

$c_i \in \mathbb{C}$

Proof.

(⇒) $P_T(x) = (x-\lambda_1)^{r_1} \cdots (x-\lambda_k)^{r_k}$ چندجمله‌ای مینیمال T

با استقراء روی $\dim V = n$. $\quad n = 1$ ✓

$P_T(x) = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_k)$

با القا روی $\dim V = n$. $n=1$ ✓

بنابراین λ_1 یک مقدار ویژه T است. فرض کنیم بردار ویژه متناظر v_1 باشد

$$Tv_1 = \lambda_1 v_1$$

حال v_1 را به یک پایه برای V گسترش دهیم مانند $B=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$$[T]_B = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{array}\right] \qquad [Tv_1] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad [Tv_2]_B$$

ادعا: $P_T(A) = 0$

P_T ضرب | ضرب چندجمله‌ای مشخصه A

ضرب چندجمله‌ای مشخصه A بر این دو دسته بنابر فرض استقرا تجزیه می‌شود پس در چندجمله‌ای مشخصه حاصل ضرب عوامل خطی است

Proof.

ادعا: $P_T(A) = 0$.

$$[T]_B^2 = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \overbrace{* \cdots *}^{\omega^T} \\ \hline 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1^2 & \lambda_1 \omega^T + \omega^T A \\ \hline 0 & A^2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1^2 & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A^2 \\ 0 & \end{array}\right]$$

$$\forall i \quad [T]_B^i = \left[\begin{array}{c|c} \lambda_1^i & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & A^i \\ 0 & \end{array}\right] \Rightarrow \forall\ g(x) = \sum_{i=1}^{d} c_i x^i$$

$$g([T]_B^i) = \left[\begin{array}{c|c} g(\lambda_1) & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & g(A) \\ 0 & \end{array}\right] \Rightarrow 0 = P_T([T]_B^i) = \left[\begin{array}{c|c} P_T(\lambda_1) & * \cdots * \\ \hline 0 & \\ \vdots & P_T(A) \\ 0 & \end{array}\right] \Rightarrow P_T(A) = 0$$

$\Downarrow$

$P_T(A)$ | چندجمله‌ای مینیمال A

Review: Diagonalizable linear transformations

Theorem

Let $T: V \to V$ be a linear transformation where V is finite dimensional, and T has different eigenvalues $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Suppose that W_i is the null space of $\lambda_i I - T$ for each $1 \leqslant i \leqslant k$. Then the following statements are equivalent:

i. *T is diagonalizable.* $\Leftrightarrow$ $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$

$W_i = N(\lambda_i I - T)$

ii. *The characteristic polynomial of T is*

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{n_k},$$

and $\dim W_i = n_i$.

$\lambda_i - x$, $x - \lambda_i$, $T - \lambda_i I$

iii. $\sum_{i=1}^{k} \dim W_i = \dim V$.

$\Downarrow$

چندجمله‌ای مینیمال A به این دسته تجزیه می‌شود

$\Downarrow$

بنابر فرض استقرا در این حالت ماتریس معکوس‌پذیر $P \in M_{n-1}(F)$ که $P^{-1}AP$ ماتریس قطری است.

Q را به این شکل تعریف می‌کنیم: $Q^{-1}[T]_B Q$ قطری می‌شود

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & P \end{array}\right]$$

iii. $\sum_{i=1}^{k} \dim W_i = \dim V.$

Primary decomposition

$T : V \to V$ $\cancel{\mathbb{C}}$ $\mathbb{R}$ $p(x) = (x-\lambda_1)^{r_1} \cdots (x-\lambda_k)^{r_k}$ $\lambda_j \in \mathbb{C}$ $\bar{\lambda}_j \in \mathbb{C}$

$p_1(x) \cdots p_k(x)$

Theorem

Let T be a linear function over V with dimension $n < \infty$ whose minimal polynomial factorizes:

$$p(x) = p_1^{r_1}(x) \cdots p_k^{r_k}(x)$$

$v \in W_i = N(T - \lambda_i I)$

$Tv = \lambda_i v$

where the p_i's are monic and pairwise coprime (that is have no common factors). Let $W_i = N\left(p_i^{r_i}(T)\right)$ for each $1 \leqslant i \leqslant k$. Then

1. $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$.
2. *For each $1 \leqslant i \leqslant k$, $T(W_i) \subseteq W_i$* پایا
3. *The minimal polynomial $T_i = T\restriction_{W_i}$ is $p_i(x)$.*

$T^2 v = \lambda_i^2 v$

$\operatorname{span}(\{v\})$

$T : V \to V$

Lemma.

مثلثی بالا $= Q^{-1}[T]_B Q = [T]_{B'}$

B قدیمی B' = جدید

$B = \{v_1, \dots, v_n\}$

Lemma.

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & P \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & P^{-1} \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$Q^{-1}[T]_B Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & P^{-1} \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & w^T \\ 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & P \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & P^{-1} \\ 0 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & w^T A \\ 0 & AP \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 & w^T A \\ 0 & P^{-1}AP \end{bmatrix}$$

چون $P^{-1}AP$ بالا مثلثی است پس $Q^{-1}[T]_B Q$ نیز بالا مثلثی است. پایان (تشبیه)

$[T]_{B} = Q[T]Q^{-1}$

B = قدیمی جدید

ستون jام Q، مختصات بردار jام پایه جدید

در پایه قدیم است.

$\begin{bmatrix} \text{بردار } j\text{ام پایه جدید} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{ستون } j\text{ام} \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{1j} \\ \vdots \\ Q_{nj} \end{bmatrix}$

B = قدیمی

بردار jام پایه جدید $= Q_{1j} v_1 + \cdots + Q_{nj} v_n$

جدید $B' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$

تعریف

$v'_j = Q_{1j} v_1 + \cdots + Q_{nj} v_n$

$\Downarrow$

$Q^{-1}[T]_B Q = [T]_{B'} =$ ماتریس بالا مثلثی

Lemma.

کامیم $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$

تعریف

$$v'_j = Q_{1j} v_1 + \cdots + Q_{nj} v_n$$

$$\Downarrow$$

$$Q^{-1} [T]_B Q = [T]_{B'}$$ = ماتریس بلوکی شد.

Lemma.

Lemma.

Lemma.

Lemma.

Lemma.

Jordan Form

Suppose that T is a linear function on V with the characteristic polynomial is

$$f(x) = (x - \lambda_1)^{d_1} \dots (x - \lambda_k)^{d_k}$$

where $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ are distinct elements and $d_i \geqslant 1$.
Then the minimal polynomial for T will be

$$p(x) = (x - \lambda_1)^{r_1} \dots (x - \lambda_k)^{r_k}$$

where $1 \leqslant r_i \leqslant d_i$ based on the Cayley–Hamilton theorem.
If W_i is the null space of $(T - \lambda_i I)^{r_i}$, then the primary decomposition theorem tells us that

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$$

such that the linear function $T_i = T\restriction_{W_i} : W_i \to W_i$ has minimal polynomial $(x - \lambda_i)^{r_i}$.

Jordan Form

$$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$$

Suppose that B_i is a basis for W_i. It has been proved that $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ is a basis for V. Based on primary decomposition theorem,

$$T(W_i) \subseteq W_i.$$

Thus

$$[T]_B = \begin{bmatrix} [T_1]_{B_1} & & \\ & \ddots & \\ & & [T_k]_{B_k} \end{bmatrix}.$$

Jordan Form

$$V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

and

$$[T]_B = \begin{bmatrix} [T_1]_{B_1} & & \\ & \ddots & \\ & & [T_k]_{B_k} \end{bmatrix}.$$

- Let N_i be the linear function on W_i defined by $N_i = T - \lambda_i I$.
- Then N_i is nilpotent and has minimal polynomial x^{r_i}.
- Thus, T on W_i acts as N_i plus the scalar λ_i times the identity function I.
- Suppose we choose a basis for the subspace W_i and then find the representation matrix of N_i on W_i.

. . .

Thank You!