Tarea 3
Probabilidad II

Prof. Rafael Miranda Cordero

Aydte. Fernando Avitúa Varela

3 de abril del 2024

Entrega: 11 de abril

1. Investigue si las siguientes funciones son de distribución o no.

   a) $F(x,y) = G(x)H(y)$ donde G y H son funciones de distribución univariadas.

   b) $F(x,y) = \text{mín}\{1, \text{máx}\{x,y\}\}$ con $x, y > 0$, $F(x,y) = 0$ en otro caso.

   c) $F(x,y) = \text{máx}\{0, G(x) + H(y) - 1\}$ donde G y H son funciones de distribución univariadas.

   d) $F(x,y) = \text{mín}\{G(x), H(y)\}$.

   Para cada uno de los casos afirmativos verifica si son independientes, es decir, si F se puede expresar como el producto de sus distribuciones marginales.

2. Un hombre y una mujer deciden citarse en cierto lugar. Si cada uno de ellos llega independientemente en un tiempo uniforme entre las 12 y 13 hrs., encuentre la probabilidad de que el primero que llegue tenga que esperar mas de 10 minutos.

3. Suponga que X y Y son variables aleatorias absolutamente continuas. ¿Si la función de densidad conjunta de X y Y es

   a) $f(x,y) = 6e^{-2x}e^{-2y}$ si $x > 0$, $y > 0$, cero en otro caso, o

   b) $f(x,y) = 24xy$ si $0 < x < 1$, $0 < y < 1$ y $0 < x + y < 1$, cero en otro caso

   son X y Y independientes?

4. Sean X y Y variables aleatorias absolutamente continuas e independientes. Calcula la densidad de $X + Y$ usando la formula de convolución cuando

   a) $X \sim \exp(\lambda_1)$ y $Y \sim \exp(\lambda_2)$ con $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

   b) $X \sim gamma(t, \lambda)$ y $Y \sim gamma(s, \lambda)$ con $s, t, \lambda > 0$

   c) $X \sim normal(0,1)$ y $Y \sim normal(0, \sigma^2)$.

5. Use el problema anterior para demostrar que si $X \sim normal(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $Y \sim normal(\mu_2, \sigma_2^2)$ son independientes entonces $X + Y \sim normal(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

   Sugerencia: Reescale X y Y de modo que tomen la forma de las distribuciones en el inciso *c*) del problema anterior.

6. Haga lo que se le solicita.

   a) Si X se distribuye binomial negativa con parámetro (r, p) y Y tiene distribución binomial negativa (s, p). ¿Como se distribuye $X + Y$ si X e Y son independientes?.

   b) Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con distribución geo(p). Diga cual es la distribución de $X_1 + \cdots + X_n$.

   c) Calcula $\mathbb{P}(X = k | X + Y = n)$ si $X, Y \sim$ geo(p) e independientes.

7. Decimos que un vector aleatorio (X, Y) tiene distribución normal bivariada si su función de densidad conjunta esta dada por:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]\right\}$$

   donde $\sigma_x, \sigma_y > 0$ y $-1 < \rho < 1$. ¿Como se distribuye X?, ¿Como se distribuye Y?. Demuestre que $\mathbf{E}[X] = \mu_x$, $Var[X] = \sigma_x^2$, $\mathbf{E}[Y] = \mu_y$, $Var[Y] = \sigma_y^2$ y $\mathbf{Cov}(X, Y) = \rho\sqrt{Var[X]Var[Y]}$.

8. Sea $(X_1, \ldots, X_k)$ un vector con distribución multinomial de parámetros $(n, p_1, \ldots, p_k)$. Demuestre que cada coordenada X_i tiene distribución marginal $Binom(n, p_i)$, para $i = 1, \ldots, k$.

9. Calcule la esperanza y la varianza del vector multinomial del ejercicio anterior. ¿Que nos dice la covarianza de X_i y X_j con $i \neq j$ respecto a estas 2 variables?.

10. Sean X y Y variables aleatorias independientes y Bernoulli de parámetro $p = 1/2$.

    a) Demuestre que $U = X + Y$ y $V = |X - Y|$ no son independientes.

    b) Calcule la $\mathbf{Cov}(U, V)$

    c) ¿Que es lo que concluye de este ejemplo?

11. Sea X una variable aleatoria normal estandar. Demuestre que $\mathbf{Cor}(X, X^2) = 0$ y sin embargo estas variables no son independientes.

12. Calcule la covarianza y el coeficiente de correlación de X y Y con función de densidad como en la siguiente tabla:

x/y	1	2	3
2	2/18	1/18	2/18
4	3/18	2/18	3/18
6	2/18	2/18	1/18