Tarea 2
Probabilidad II

Prof. Rafael Miranda Cordero

Aydte. Miguel Hinojosa Medrano

20 de febrero del 2019

Entrega: 27 de febrero

Recordemos.

Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ definimos la función de distribución de $\mathbf{X}$ (o la conjunta $X_1, X_2, \ldots, X_n$) como

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, \ldots, x_n) = \mathbb{P}\left(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n\right) = \mathbb{P}\left(\mathbf{X}^{-1}\left(\prod_{i=1}^{n}(-\infty, x_i]\right)\right),$$

para el caso bidimensional solemos escribir

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}\left(X \leq x, Y \leq y\right)$$

y dicha función satisface las siguientes propiedades

1. $\lim_{x\to\infty} \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = 1$
2. $\lim_{x\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$ y $\lim_{y\to-\infty} F_{X,Y}(x,y) = 0$
3. $F_{X,Y}(x_1,y) \leq F_{X,Y}(x_2,y)$ si $x_1 < x_2$ y $F_{X,Y}(x,y_1) \leq F_{X,Y}(x,y_2)$ si $y_1 < y_2$, es decir, $F_{X,Y}$ es no decreciente en cada entrada
4. $\lim_{x\to x_0^+} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(x_0,y)$ y $\lim_{y\to y_0^+} F_{X,Y}(x,y) = F_{X,Y}(x,y_0)$, *id est*, $F_{X,Y}$ es continua por la derecha en cada entrada

4a. $0 \leq F_{X,Y}(x,y) \leq 1$ para toda $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

5. $F_{X,Y}(a_2,b_2) - F_{X,Y}(a_1,b_2) - F_{X,Y}(a_2,b_1) + F_{X,Y}(a_1,b_1) \geq 0$.

Si $\mathbf{X} = (X,Y)$ es discreta entonces su función de probabilidad se define como

$$\rho_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \mathbb{P}\left(X = x, Y = y\right) & \text{si } (x,y) \in \mathbf{X}\left(\Omega\right) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a partir de la cuál se puede obtener la distribución $F_{X,Y}$ mediante la siguiente formula

$$F_{X,Y}(x_0, y_0) = \sum_{x \leq x_0} \sum_{y \leq y_0} \rho_{X,Y}(x, y).$$

La función de probabilidad de un v.a discreto satisface

(I) $\rho_{X,Y}(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(II) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \rho_{X,Y}(x, y) \neq 0\}$ es a los más infinito numerable

(III) $\sum_x \sum_y \rho_{X_Y}(x, y) = 1$.

Si $\mathbf{X} = (X, Y)$ es un v.a. absolutamente continuo entonces existe $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$F_{X,Y}(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{y_0} f_{X,Y}(x, y) dy dx.$$

Denominamos a $f_{X,Y}$ como la función de densidad conjunta de X y Y. Esta tiene las siguientes propiedades

(a) $f_{X,Y}(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) dy dx = 1$.

Con base en lo anterior, decimos que una función $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es de distribución si verifica los puntos $1, 2, 3, 4$ y 5. Se define una función de probabilidad $\rho : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ como aquella que cumple los puntos $(I), (II)$ y (III). Se entiende que una función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es de densidad si satisface los incisos (a) y (b).

1. Suponga que la función de distribución $F_{\mathbf{X}}$ de un vector aleatorio $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase $C^n(\mathbb{R}^n)$. Demuestre que
$$f_{\mathbf{X}} = \frac{\partial^n F_{\mathbf{X}}}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}$$
es la función de densidad de $\mathbf{X}$ y por ende dicho vector aleatorio es absolutamente continuo. Enuncie el resultado para el caso bidimensional.

2. Sea F la función de distribución conjunta de las variables aleatorias X, Y y Z. Demuestre que si $a_1 < b_1$, $a_2 < b_2$ y $a_3 < b_3$ entonces
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2, a_3 < Z \leq b_3) =& F(b_1, b_2, b_3) - F(a_1, b_2, b_3) - F(b_1, a_2, b_3) \\ & - F(b_1, b_2, a_3) + F(a_1, a_2, b_3) + F(a_1, b_2, a_3) \\ & + F(b_1, a_2, a_3) - F(a_1, a_2, a_3).\end{aligned}$$
Interprete geométricamente.

3. (Punto Extra) Dado un vector aleatorio $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y su función de distribución $F_{\mathbf{X}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Para valores $a_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq b_n$ demuestre que
$$\sum_{x_i \in \{a_i, b_i\}} (-1)^{\sharp a} F(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$$

donde la suma se toma sobre todos los vectores distintos tales que la variable x_i toma el valor a_i o b_i (que en total son 2^n), $\sharp a$ es el número de veces que alguna de las variables x_i toma el valor a_i. Interprete geometricaménte. Con base en esto ¿como definiría una función de distribución $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$?,

[*Sugerencia:* Antes de empezar a demostrar la propiedad en cuestión escriba los casos para dos, tres y cuatro dimensiones e interprete geométricamente.]

4. Demuestre que la siguiente función no es de distribución.¿Que propiedad no satisface?, ¿cuales propiedades sí satisface?.

$$F(x,y,z) = \begin{cases} 1 & \text{si } x+y+z > 0 \\ 0 & \text{si } x+y+z \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Extienda el resultado para el caso n dimensional.

5. Diga si las siguientes funciones son de distribución y de ser el caso calcule las distribuciones marginales.

   a) $F(x,y) = (1-e^{-x})\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(y)\right)$ si $x > 0$ y $y \in \mathbb{R}$, cero en otro caso.

   b) $F(x,y) = 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y}$ si $x, y > 0$, cero en otro caso.

   c) $F(x,y) = 1 - e^{-xy}$ si $x, y > 0$, cero en otro caso.

   d) $F(x,y) = 1 - e^{-x-y}$ si $x, y > 0$, cero en otro caso.

6. Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias definidas sobre el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$. Demuestre que la función $\mathbb{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida como $\mathbb{X}(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ es un vector aleatorio. ¿Podemos decir que

$$F_{\mathbb{X}}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n) \text{ ?} \tag{2}$$

Si es así demuestrelo, sino de un contraejemplo.

[*Sugerencia:* Para la segunda parte piense en $n = 2$.]

7. Calcule la constante c que hace a f una función de densidad y posteriormente calcule las densidades marginales.

   a) $f(x,y) = c(x+y)$, para $0 \leq x, y, \leq 1$.

   b) $f(x,y) = cx(y-x)$ para $0 < x < y < 1$.

   c) $f(x,y) = c(x^2 + \frac{1}{2}xy)$ para $0 < x < 1$, $0 < y < 2$.

   d) $f(x,y) = cx/y^2$ para $0 < x < 1$ y $y > 1$.

   e) $f(x,y,z) = cx(y-x)(z-y)$ para $0 < x < y < z < 1$.

   f) $f(x_1, \ldots, x_n) = c(x_1 + \cdots + x_n)$ para $0 \leq x_1, \ldots, x_n \leq 1$.

8. Encuentre la función de densidad de un vector aleatorio (X, Y) cuya función de distribución es

   a) La función de distribución del inciso *a*) del problema 5.

   b) La función de distribución del inciso *b*) del problema 5.

   Además, calcule la función de distribución de (X, Y) cuando su función de densidad es

   c) $f(x, y) = 4xy$ para $0 < x, y < 1$.

   d) $f(x, y) = 2(4x + y)/5$ para $0 < x, y < 1$.

   e) $f(x, y) = 3/2$ para $0 < y < x^2 < 1$.

9. Considere el problema de la aguja de Buffon con una aguja larga, es decir, sobre una tabla marcada con lineas paralelas con una distancia de separación $D > 0$, se lanza en forma aleatoria una aguja con longitud $L \geq D$. Calcula la probabilidad de que la aguja intersecte a alguna de las lineas.