Tarea 0
Probabilidad II

Prof. Rafael Miranda Cordero

Aydte. Fernando Avitúa Varela

5 de febrero del 2024

Entrega: 13 de febrero

1. Delegados de 10 países incluyendo Rusia, Francia, Inglaterra y Estados Unidos están en una reunión donde serán sentados en una fila. ¿Cuántos arreglos distintos son posibles si los delegados de Francia e Inglaterra se sentarán uno junto al otro y los delegados de Rusia y Estados Unidos no se sentarán juntos?.

2. **La Apuesta interrumpida**. Dos jugadores A y B juegan lanzando una moneda justa, apostando a cara y cruz respectivamente. El primer jugador que gane 5 veces gana el juego y se lleva un monto x como premio. Sin embargo, el juego se ve interrumpido cuando A lleva 4 victorias y B 3 victorias. Bajo estas circunstancias, ¿cuál es la forma justa de repartir el monto x entre A y B?.

3. El juego de una feria consiste en pedirle a un jugador que arroje al azar 4 monedas equilibradas, indistinguibles, todas ellas de una misma unidad monetaria y marcadas con "cara" y "cruz". Cada moneda que caiga "cara" es recogida por el jugador y se le entrega una moneda adicional de la misma denominación como premio. Por otro lado, el jugador pierde cualquier moneda que caiga "cruz".

   a) Determine todos los posibles montos de ganancias y pérdidas para este juego.

   b) Construya un espacio muestral para este experimento.

   c) Calcule las probabilidades de todos los posible montos.

   d) ¿El espacio muestral que ha indicado es equiprobable?, es decir, ¿aplica el modelo de probabilidad clásica para este experimento?

4. Un experimento aleatorio consiste en lanzar a un mismo tiempo dos dados equilibrados indistinguibles.

   a) Determine si a este experimento aleatorio se le puede asignar un espacio muestral finito y equiprobable.

   b) Calcule la probabilidad de que la suma de los dados sea igual a $i = 1, \ldots, 12$.

5. Sea $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ un espacio de probabilidad y $E, F, E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathscr{F}$. Demuestre que

   a) *Desigualdad de Bonferroni-I.* $\mathbf{P}(E \cap F) \geq \mathbf{P}(E) + \mathbf{P}(F) - 1$.

   b) Concluya que si $\mathbf{P}(E) = 0.9$ y $\mathbf{P}(F) = 0.8$ entonces $\mathbf{P}(E \cap F) \geq 0.7$.

   c) *Desigualdad de Bonferroni-II.* Generalice la desigualdad del inciso *a*) para n eventos, esto es
   $$\mathbf{P}\left(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(E_i) - (n-1).$$

   d) *Desigualdad de Boole.* $\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(E_i)$.

   Sugerencia: Para los incisos *c*) y *d*) demuestre para el caso $n = 2$ y luego use inducción sobre el número de eventos.

6. Sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medible, i.e., $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra. Sea $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ tal que $\mathbf{P}(\Omega) = 1$ y $\mathbf{P}\left(\bigcup_{1 \leq k \leq n} A_k\right) = \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbf{P}(A_k)$ para una sucesión finita $\{A_k : 1 \leq k \leq n\}$ de elementos disjuntos en $\mathcal{F}$. Demuestra que$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ es un espacio de probabilidad si se cumple:

   a) $\lim_k \mathbf{P}(A_k) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$ es válido para cualquier sucesión monótona creciente de elementos en $\mathcal{F}$, es decir, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_k \subset \ldots$ y $\{A_k\} \subset \mathcal{F}$.

   b) $\mathbf{P}$ es continua en el vacío, es decir, $\lim_k \mathbf{P}(A_k) = 0$ para cualquier sucesión $\{A_k\}$ de elementos en $\mathcal{F}$ que decrece al vacío, i.e, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_k \supset \ldots$ y $\bigcap_k A_k = \varnothing$.

   c) $\mathbf{P}$ es numerablemente subaditiva, es decir, para cualquier sucesión $\{A_k\}$ de elementos en $\mathcal{F}$ se cumple que $\mathbf{P}\left(\bigcup_k A_k\right) \leq \sum_k \mathbf{P}(A_k)$.

7. Imagina que estas en un juego con 3 puertas. Detrás de una puerta está un automóvil y en las otras hay dos cabras. Tu escoges una puerta. Después el conductor del juego abre alguna de las puertas que no escogiste y en ella hay una cabra (el conductor saber donde está el carro; si tu escoges el carro él escoge arbitrariamente con la misma probabilidad alguna de las otras puertas). Él entonces te ofrece la opción de cambiar tu elección a la otra puerta cerrada. ¿Qué es mejor? ¿Cambiarías de puerta?.

8. Para cada uno de los siguientes casos: ¿cuales funciones X son variables aleatorias, cuales no y por qué?.

   a) $(\Omega, \mathcal{F}) = (\{1,2,3,4,5,6\}, S(\{\{1,2\},\{5,6\}\}))$ y $X : \Omega \to \mathbb{R}$ definida como $X(\omega) = \omega + 1$.

   b) $(\Omega, \mathcal{F}) = ([0,1), S(\{[0,1/3),[1/2,1)\}))$ y $X : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por $X(\omega) = \mathbb{1}_{[0,1/4)}(\omega)$.

   c) Mismo espacio muestral y espacio de eventos que en (b) pero con $X : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por $X(\omega) = \mathbb{1}_{[0,1/2)}(\omega)$.

9. Recordemos que $F : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ se dice ser una función de distribución si y solo si

- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$.
- F es no decreciente, i.e. si $x < y$ entonces $F(x) \leq F(y)$.
- F es continua por la derecha, es decir, si $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ es una sucesión de números reales que es decreciente y converge a $x \in \mathbf{R}$ entonces $F(x_n) \to F(x)$ como $n \to \infty$.

a) Demuestre que una función de distribución es tal que $0 \leq F(x) \leq 1$ para toda $x \in \mathbf{R}$.

b) Diga si las siguientes funciones son o no de distribución

$$\text{(A) } F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \text{(B) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ 1/3 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 2/3 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

$$\text{(C) } F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1/x & 1 \leq x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \text{(D) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \\ x/4 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1/2 + (x-1)/4 & \text{si } 1 \leq x < \\ 4/5 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si } 3 \leq x \end{cases}$$

10. Suponga que se realizan una infinidad (numerable) de ensayos independientes. Se obtiene éxito con probabilidad p y fracaso con probabilidad $1 - p$. Calcule:

    a) la probabilidad de obtener exactamente k éxitos en los primeros n ensayos ($0 \leq k \leq n$).

    b) la probabilidad de que se requieran n ensayos antes de obtener el primer éxito (el éxito se obtiene en el ensayo $n + 1$).

    c) la probabilidad de que se requieran r ensayos ($r \geq n$) para obtener exactamente n éxitos (el n-ésimo éxito se obtiene en el ensayo r).

11. Dos jugadores, A y B, realizan un juego con una moneda. A gana un punto si cae sol y B gana un punto si cae águila, el jugador A gana el jugo si obtiene $n \geq 1$ puntos y el jugador B gana si obtiene $m \geq 1$ puntos. Si la probabilidad de que caiga sol es p y la probabilidad de que caiga águila es $1 - p$, ¿cuál es la probabilidad de que gane A?

12. Una maquina tiene 3 componentes que determinan su funcionamiento. Cada componente se rompe independientemente uno de otro y el tiempo en días en que se rompe cada componente tiene distribución $\exp(1/100)$. Si la máquina continuará funcionado siempre y cuando al menos uno de sus componente no se rompa

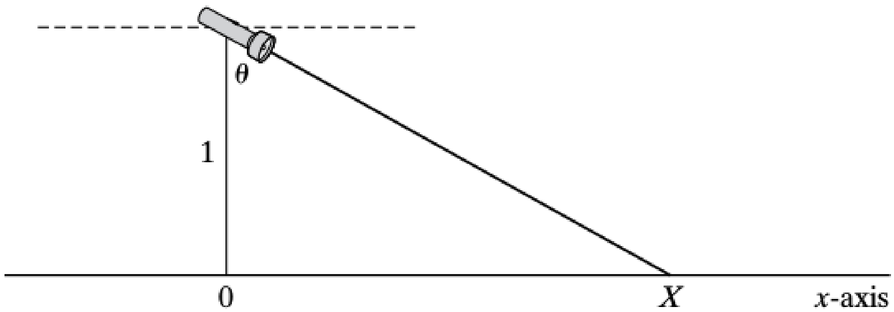
    a) ¿cuál es la probabilidad de que la maquina funcione sin fallar por al menos 100 días consecutivos?

b) ¿cuál es la probabilidad de que la máquina falle después de 90 días dado que no fallo durante los primeros 10 días?

13. Decimos que una variable aleatoria (absolutamente) continua tiene una distribución Cauchy con parámetro $\theta \in \mathbb{R}$, si su función de densidad está dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x+\theta)^2} \text{ con } -\infty < x < \infty.$$

Suponga que una linterna que emite un haz de luz continuamente es girada alrededor de su centro, el cuál esta localizado a una unidad de distancia del eje x. Considere el punto X en el que el haz intersecta al eje x (ver la figura).



Si suponemos que el ángulo θ en la figura se distribuye unif$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, demuestre que X tiene una distribución Cauchy. ¿Cuál es la esperanza de X?, ¿Cuál es la varianza de X? y ¿Cuál es el n-ésimo momento de X?.

14. Calcule $\mathbf{E}[X]$ y $\mathbf{Var}[X]$ si

a) $X \sim \text{dunif}(n)$

b) $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

c) $X \sim \text{Geo}(p)$

d) $X \sim \text{Binomneg}(r, p)$

e) $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

f) $X \sim \text{Hypergeo}(N, n, m)$

g) $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

h) $X \sim \text{Gamma}(k, \lambda)$

15. Sean X y Y variables aleatorias independientes. ¿Como se distribuye $X + Y$ si:

a) $X, Y \sim exp(\lambda)$?

b) $X \sim gama(n, \lambda)$ y $Y \sim gama(m, \lambda)$?

c) $X, Y \sim Geo(p)$?

d) $X \sim Binomneg(n, p)$ y $Y \sim Binomneg(m, p)$?

16. Se desea diseñar un estacionamiento de coches para un conjunto de 200 departamentos que se encuentran en construcción. Suponga que para cada departamento , el número de coches será de 0,1 o 2, con probabilidades 0.1, 0.6 y 0.3 respectivamente. Se desea que con una certeza del 95 %, haya espacio disponible para todos los coches cuando los departamentos se vendad. ¿Cuántos espacios de estacionamiento deben construirse?.

17. Demuestre que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{e^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

Sugerencia: Sea $X_1, X_2, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $Poisson(\lambda)$. Use un valor de λ adecuado y el teorema del límite central para concluir lo que se pide.

18. La ley fuerte de los grandes números establece que con probabilidad 1, los sucesivos promedios aritméticos de una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas convergen a su media común μ. ¿A que convergen las sucesivas medias geométricas?, es decir, ¿cuál es el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\prod_{i=1}^{n} X_i \right)^{1/n} \quad ?$$