Tarea 1
Procesos Estocásticos I

Prof. Rafael Miranda Cordero   Aydte. Fernando Avitúa Varela

28 de agosto del 2023

Entrega: 4 de septiembre

1. Analiza algún fenómeno aleatorio que ocurra en tu vida desglosando todas las partes desde el espacio muestral, alguna sigma álgebra ,alguna variable aleatoria, el cáclulo de la esperanza de alguna cantidad, el cálculo de la probabilidad de algún evento que te interese, el cálculo de una probabilidad condicional, una aplicación del teorema de Bayes.

   Ejemplo: Canciones en Spotify al azar

2. En la clase vimos que la sucesión de eventos crecientes $E_n \subseteq E_{n+1}$ mantiene cierta noción de continuidad. Es decir:

   Si definimos el límite de la sucesión como

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

   entonces la función de probabilidad tiene "saca"límites de la función $\mathbb{P}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[E_i\right] &= \mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} E_i\right] && (1)\\
&= \mathbb{P}\left[\lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right] && (2)\\
& && (3)
\end{aligned}$$

   Realiza la prueba análoga para una sucesión de eventos decrecientes $E_n \subseteq E_{n-1}$ con el límite definido como la intersección infinita y da un ejemplo de un espacio muestral y un subconjunto de eventos que satisfacen esta propiedad.

3. En clase estudiamos el siguiente escenario sobre un dado y una moneda.

Una persona tira un dado, observa el número que cae hacia arriba y después tira ese mismo número de volados. Vimos en clase que podíamos definir muchas variables aleatorias y que la definición de la variable aleatoria ayudaba dependiendo del problema a resolver.

Una manera de entender cuándo puede ser útil esta situación se podría interpretar como sigue: Imagina que estas diseñando un juego en el que quieres una dinámica en la que la recompensa de un jugador tenga que ver con dos eventos aleatorios para aumentar la emoción del juego. Primero tiras un dado y después viendo qué número cae tiras el mismo número de volados. Quieres asignar una recompensa a cada uno que no sea tan grande para desbalancear el juego, pero tampoco tan pequeña como para que se deje de sentir emocionante.

a) Primero definamos dos variables aleatorias dadas por $X =$ numero que salió en el dado, $Y = \{numerodesolesenlosvolados\}$. Vimos en clase que la probabilidad conjunta estaba dada por

$$f_{XY}(X = x, Y = y) = \frac{1}{6} \cdot f_{\text{Binomial}(p=0.5, N=X)}(Y = y)$$

¿Estas variables aleatorias son independientes? ¿Porqué?

b) Definiendo otra variable aleatoria de interés, podemos tomar

$$Z = a * \text{numero del dado} + b * \{\text{numero de soles}\} = a * X + b * Y$$

esta variable aleatoria nos permite calcular cuánto va a ganar el jugador en promedio y cuál será su varianza. Calcula tanto la media como la varianza y determina una buena combinación de a, b de acuerdo algún criterio que decidas.

4. Para la cadena de Markov de dos estados vista calcule las probabilidades de transición en dos pasos y las densidades conjuntas de las primeras dos y tres variables, es decir, debe calcular:

- $\mathbf{P}(X_2 = y | X_0 = x)$ para toda $n \in \mathbf{N}$ y cualesquiera $x, y \in S = \{0, 1\}$.
- $\mathbf{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1)$ con $x_0, x_1 \in S$.
- $\mathbf{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2)$ con $x_0, x_1, x_2 \in S$.

además calcule $\mathbf{P}(X_1 \neq X_2)$.

5. Demuestre que para una caminata aleatoria simple ($r = 0$), la varianza tiene la siguiente expresión

$$\mathbf{Var}\left[X_n | X_0 = 0\right] = 4npq. \tag{4}$$

a) ¿Para que valores de p y q la varianza es máxima?

b) ¿Cuando la varianza es mínima?, ¿que puede decir respecto a la dinámica de la cadena en este casos?

6. Siguiendo el análisis realizado en clase demuestre que para una caminata aleatoria simple $(r = 0)$ se tiene que

$$\mathbf{P}\left(X_n = m | X_0 = j\right) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+m-j)} p^{\frac{1}{2}(n+m-j)} q^{\frac{1}{2}(n-m+j)} \tag{5}$$

siempre que $n + m - j$ sea par.

7. ¿Como sería $\mathbf{P}\left(X_n = m | X_0 = j\right)$ para una caminata aleatoria no simple $(r > 0)$?

8. Considere un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, sea I un conjunto de índices finito o a lo más numerable y asume que los conjuntos a continuación mencionados pertenecen a $\mathscr{F}$.

   a) Muestre que si $(D_i)_{i \in I}$ es una sucesión de conjuntos ajenos dos a dos tales que $\mathbf{P}(C | D_i) = p$ independientemente de $i \in I$ entonces $\mathbf{P}(C | \bigcup_i D_i) = p$.

   b) Muestre que si $(E_i)_{i \in I}$ es una partición de Ω, entonces:

   $$\mathbf{P}(C | D) = \sum_i \mathbf{P}(E_i | D) \mathbf{P}(C | E_i \cap D).$$

   c) Demuestre que si $(C_i)_{i \in I}$ es una sucesión de conjuntos ajenos dos a dos y $\mathbf{P}(A | C_i) = \mathbf{P}(B | C_i)$ para toda i, entonces $\mathbf{P}(A | \bigcup_i C_i) = \mathbf{P}(B | \bigcup_i C_i)$.

9. Demuestre que para una cadena de Markov estacionaria se tiene que

   $$\mathbf{P}\left(X_{n+m} = y_m, \ldots, X_{n+1} = y_1 | X_n = x, X_{n-1} \in A_{n-1} \ldots, X_0 \in A_0\right) = P(x, y_1) \cdots P(y_{m-1}, y_m).$$

   para cualesquiera $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1} \subseteq S$ no vacios.

   Sugerencia: Use la ecuación (18) de las notas y el ejercicio anterior.

10. Se dice que un proceso estocástico a tiempo discreto $\{X_n : n \in \mathbf{N}\}$ tiene incrementos independientes si para cualesquiera $0 \leq n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ las variables aleatorias $X_{n_1}, X_{n_2} - X_{n_1}, X_{n_3} - X_{n_2}, \ldots, X_{n_k} - X_{n_{k-1}}$ son independientes. Demuestre que cualquier proceso estocástico a tiempo discreto con incrementos independientes satisface la propiedad de Markov. Demuestre ahora que una caminata aleatoria (definida como en el ejemplo 1 de la sección 1.3 del libro de Hoel, Port, Stone) tiene incrementos independientes y concluya que es por ende una cadena de Markov. ¿Una caminata aleatoria tiene probabilidades de transición en un paso estacionarias?.