Tarea 3
Procesos Estocásticos I

Prof. Rafael Miranda Cordero

Aydte. Fernando Avitúa Varela

18 de septiembre del 2023

Entrega: 25 de septiembre

1. Sea $\{X_n : n \in \mathbf{N}\}$ la cadena de Ehrenfest con espacio de estados $\{0, 1, \ldots, d\}$ (ejemplo 2 del capitulo 1 del libro de Hoel Port Stone, paginas 7 y 8). Demuestre que la suposición del ejercicio 8 de la tarea 2 es satisfecha por esta cadena. Calcule $\mathbf{E}[X_n]$.

2. Sea $\{X_n : n \in \mathbf{N}\}$ la cadena de Ehrenfest. Suponga que X_0 tiene una distribución binomial con parámetros d y $1/2$. Encuentre la distribución de X_n.

3. Para la cadena de Ehrenfest con espacio de estados $\{0, 1, \ldots, d\}$ calcule:

   a) La matriz de transición P.

   b) P^2,P^3 y P^4.

   c) Puede dar una forma general para P^n.

4. Sea $\{X_n : n \in \mathbf{N}\}$ una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{0, 1, 2\}$ y con matriz de probabilidades de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.7 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

   Existe algún estado que sea absorbente, recurrente o transitorio en esta cadena, en tal caso indique cuales (argumente cuidadosamente su respuesta). Determine las clases de comunicación de esta cadena.

5. Considere la cadena de Markov de la caminata aleatoria simple vista en clase, con probabilidades p y q de moverte un paso a la derecha o uno a la izquierda respectivamente $(p + q = 1)$.

   a) Demuestre que si $p, q > 0$ entonces el espacio de estados $S = \mathbf{Z}$ es irreducible (todos los estados se comunican entre si).

   b) Demuestre que si $p = q = 1/2$ entonces la cadena es recurrente.

c) ¿Existe alguna condición sobre $p, q > 0$ para que la cadena sea transitoria?

Sugerencia: Use la caracterización de estados recurrentes o transitorios dada por la función $G(x, y)$ y la aproximación de Stirling del factorial.

6. Sea y un estado transitorio. Demuestre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} P^n(x, y) \leq \sum_{n=0}^{\infty} P^n(y, y)$$

para cualquier $x \in S$.

Sugerencia: Use lo que sabe de la función $G(x, y)$ vista en clase.

7. Demuestre detalladamente que

$$\mathbf{P}_x(N(y) \geq m + 1 | N(y) \geq m) = \mathbf{P}_y(N(y) \geq 1).$$

8. Considere una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ y matriz de transición

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}.$$

a) Determine las clases de comunicación de esta cadena.

b) ¿Hay clases que pueden acceder a otras clases?

c) Determine cuales estados son transitorios y cuales son recurrentes.

9. De un ejemplo de una cadena de Markov con 2 estados absorbentes, 4 recurrentes (no absorbentes) y 3 transitorios.