Tarea 4
Procesos Estocásticos I

Prof. Rafael Miranda Cordero

Aydte. Fernando Avitúa Varela

5 de octubre del 2023

Entrega: 12 de octubre

1. Sea S el espacio de estados de una cadena de Markov. Demuestre que si $C \subseteq S$ es un conjunto cerrado, irreducible y finito entonces es una clase de comunicación recurrente.

2. Sea S el espacio de estados de una cadena de Markov, S_R la colección de estados recurrentes y S_T la colección de estados transitorios. Suponga que $S_R \neq \emptyset$ y que $S_T \neq \emptyset$ es finito. ¿Es cierto que $\mathbf{P}_x(T_{S_R} < \infty) = 1$ para cada $x \in S_T$?.

3. Dé un ejemplo de una cadena de Markov irreducible y transitoria.

4. Dé ejemplos de:

   a) Un conjunto irreducible que no sea cerrado.

   b) Un conjunto cerrado que no sea irreducible.

   c) Un conjunto irreducible que no sea clase de comunicación.

   d) Un conjunto cerrado que no sea clase de comunicación.

   e) Una clase de comunicación que no sea cerrada.

   f) Un conjunto cerrado e irreducible que sea transitorio.

5. Considere la cadena de fila de espera (*queuing chain*).

   a) Demuestre que si $f(0) = 0$ o $f(0) + f(1) = 1$ la cadena no es irreducible.

   b) Muestre que si $f(0) > 0$ y $f(0) + f(1) < 1$, la cadena es irreducible.

   Sugerencia: Primero verifique que $\rho_{xy} > 0$ para $0 \leq y < x$; luego si $x_0 \geq 2$ y $f(x_0) > 0$, entonces $\rho_{0,x_0+n(x_0-1)} > 0$ para $n \geq 0$

6. Determina cuales estados de la cadena de fila de espera son absorbentes, cuales son recurrente cuales son transitorios cuando la cadena no es irreducible. Considere los siguientes cuatro casos por separado

a) $f(1) = 1$.

b) $f(0) > 0$, $f(1) > 0$ y $f(0) + f(1) = 1$.

c) $f(0) = 1$.

d) $f(0) = 0$ y $f(1) < 1$.

7. Para la cadena de fila de espera, demuestre que

   a) Para $y \geq 2$ y m entero positivo

   $$\mathbf{P}_y(T_0 = m) = \sum_{k=1}^{m-1} \mathbf{P}_y(T_{y-1} = k)\mathbf{P}_{y-1}(T_0 = m - k).$$

   b) Sumando la ecuación anterior sobre $m = 1, 2, \ldots, n$ muestre que

   $$\mathbf{P}_y(T_0 \leq n) \leq \mathbf{P}_y(T_{y-1} \leq n)\mathbf{P}_{y-1}(T_{y_2} \leq n) \ldots \mathbf{P}_1(T_0 \leq n)$$

   con $y \geq 2$.

   c) Para $y \geq 2$ muestre que

   $$\rho_{y0} = \rho_{y,y-1}\rho_{y-1,y-2} \cdots \rho_{1,0}.$$

8. Para una cadena de nacimiento y muerte de condiciones para que

   a) La cadena sea irreducible.

   b) La cadena sea recurrente.

   c) La cadena sea transitoria.