Notas de Procesos Estocásticos I
Proceso Poisson

Prof. Rafael Miranda Cordero

6 de noviembre 2023

1. Definiciones y Propiedades Elementales

Un proceso de conteo $\{N(t)|t \geq 0\}$ represeenta el total de eventos que han ocurrido hasta el tiempo t. Ejemplos

- El número de autos que pasan en un determinado punto a ciertas horas.
- El número de reclamaciones hechas a una empresa aseguradora en un determinado tiempo.
- El número de llamadas a un servidor.
- Número de goles anotados en un partido de futbol.
- Emisión de partículas debido a la desintegración radioactiva.

Definición 1. Sea $N : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbf{N}$ un proceso estocástico. Decimos que $\{N(t)|t \geq 0\}$ es un proceso de conteo si y sólo si

1. $N(t) \geq 0$.
2. Si $s < t$ entonces $N(s) \leq N(t)$.
3. Si $s < t$ entonces $N(t) - N(s)$ es el número de eventos que han ocurrido en el intervalo $(s, t]$.

Definición 2. Un proceso de conteo se dice tener incrementos independientes si los eventos que ocurren en intervalos ajenos son independientes, más precisamente, $N(t + s) - N(s)$ y $N(s)$ son variables aleatorias independientes para cada $s \geq 0$.

Definición 3. Un proceso de conteo se dice tener incrementos estacionarios si la distribución del número de eventos que ocurren en cada intervalo de tiempo depende sólo de su longitud, es decir, si $N(t_2) - N(t_1)$ y $N(t_2 + s) - N(t_1 + s)$ tienen la misma distribución para cada $s \geq 0$.

Definición 4. Un proceso de conteo $\{N(t)|t \geq 0\}$ se dice ser un proceso Poisson con tasa $\lambda > 0$ si

1. $N(0) = 0$.

2. El proceso tiene incrementos independientes.
3. El número de eventos en un intervalo de tamaño t se distribuye Poisson con media λt, es decir

$$\mathbf{P}\left(N(t+s)-N(s)=n\right)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \tag{1}$$

Definición 5. Un proceso de conteo $\{N(t)|t\geq 0\}$ es un proceso Poisson con tasa $\lambda>0$ si

1. $N(0)=0$.
2. El proceso tiene incrementos independientes y estacionarios.
3. $\mathbf{P}\left(N(h)=1\right)=\lambda h+o(h)$.
4. $\mathbf{P}\left(N(h)\geq 2\right)=o(h)$.

Recordemos que

$$f(x)=o\left(g(x)\right)$$

si y sólo si

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=0.$$

Teorema 1. *Las definiciones 4 y 5 son equivalentes.*

Demostración. Supongamos que un proceso de conteo $\{N(t)|t\geq 0\}$ satisface la definición 5, veamos que entonces se satisface las condiciones de la definición 4. Así, solo resta demostrar

$$\mathbf{P}\left(N(t+s)-N(s)=n\right)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Sea $P_n(t)=\mathbf{P}\left(N(t)=n\right)$, veamos que $P_n(t)$ es un función diferenciabl respecto a t.

$$\begin{aligned}P_0(t+h)=&\mathbf{P}\left(N(t+h)=0\right)\\=&\mathbf{P}\left(N(t)=0,N(t+h)-N(t)=0\right)\\=&\mathbf{P}\left(N(t)=0\right)\mathbf{P}\left(N(t+h)-N(t)=0\right)\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(N(t+h)-N(t)=0\right)=&1-\mathbf{P}\left(N(t+h)-N(t)\geq 1\right)\\=&1-\mathbf{P}\left(N(t+h)-N(t)=1\right)-\mathbf{P}\left(N(t+h)-N(t)\geq 2\right)\\=&1-\mathbf{P}\left(N(h)=1\right)-\mathbf{P}\left(N(h)\geq 2\right)\\=&1-\lambda h-o(h)-o(h)\\=&1-\lambda h+o(h)\end{aligned}$$

por consiguiente

$$P_0(t+h) = P_0(t)\left[1 - \lambda h + o(h)\right]$$

de esta forma

$$\begin{aligned}\frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h} &= -\lambda P_0(t) + \frac{P_0(t)o(h)}{h}\\ &= -\lambda P_0(t) + \frac{o(h)}{h}\end{aligned}$$

por ende

$$\begin{aligned}P_0'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{P_0(t+h) - P_0(t)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} -\lambda P_0(t) + \lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h}\\ &= -\lambda P_0(t)\end{aligned}$$

por lo tanto

$$P_0(t) = ke^{-\lambda t}$$

puesto que $P_0(0) = \mathbf{P}(N(0) = 0) = 1$, concluimos

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \tag{2}$$

Para el caso general procedemos de forma similar a lo antes hecho,

$$\begin{aligned}P_n(t+h) =& \mathbf{P}\left(N(t+h) = n\right)\\ =& \mathbf{P}\left(N(t) = n, N(t+h) - N(t) = 0\right)\\ &+ \mathbf{P}\left(N(t) = n-1, N(t+h) - N(t) = 1\right)\\ &+ \sum_{i=2}^{n} \mathbf{P}\left(N(t) = n-i, N(t+h) - N(t) = i\right)\\ =& \mathbf{P}\left(N(t) = n\right)\mathbf{P}\left(N(t+h) - N(t) = 0\right)\\ &+ \mathbf{P}\left(N(t) = n-1\right)\mathbf{P}\left(N(t+h) - N(t) = 1\right)\\ &+ \sum_{i=2}^{n} \mathbf{P}\left(N(t) = n-i\right)\mathbf{P}\left(N(t+h) - N(t) = i\right)\\ =& P_n(t)\mathbf{P}\left(N(h) = 0\right)\\ &+ P_{n-1}(t)\mathbf{P}\left(N(h) = 1\right)\\ &+ \sum_{i=2}^{n} P_{n-i}(t)\mathbf{P}\left(N(h) = i\right)\\ =& P_n(t)\left[1 - \lambda h + o(h)\right] + P_{n-1}(t)\left[\lambda h + o(h)\right] + \sum_{i=2}^{n} P_{n-i}(t)\mathbf{P}\left(N(h) = i\right),\end{aligned}$$

observe que

$$0 \leq \sum_{i=2}^{n} P_{n-i}(t)\mathbf{P}\left(N(h)=i\right) \leq \sum_{i=2}^{n} \mathbf{P}\left(N(h)=i\right) \leq \sum_{i=2}^{\infty} \mathbf{P}\left(N(h)=i\right) \leq \mathbf{P}\left(N(h)\geq 2\right) = o(h)$$

por lo que

$$0 \leq \frac{1}{h}\sum_{i=2}^{n} P_{n-i}(t)\mathbf{P}\left(N(h)=i\right) \leq \frac{o(h)}{h},$$

asi

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\sum_{i=2}^{n} P_{n-i}(t)\mathbf{P}\left(N(h)=i\right) = 0$$

por lo que

$$\sum_{i=2}^{n} P_{n-i}(t)\mathbf{P}\left(N(h)=i\right) = o(h),$$

de esta forma

$$P_n(t+h) = P_n(t) - \lambda h P_n(t) + \lambda h P_{n-1}(t) + o(h),$$

consecuentemente

$$\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h} = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \frac{o(h)}{h}$$

de este modo

$$P_n'(t) = -\lambda P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

por lo tanto

$$e^{\lambda t}P_n'(t) + \lambda e^{\lambda t}P_n(t) = \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)$$

por ende

$$\frac{d\left[e^{\lambda t}P_n(t)\right]}{dt} = \lambda e^{\lambda t}P_{n-1}(t)$$

integrando sobre $[0,s]$ (p.a. $s>0$) tenemos

$$e^{\lambda s}P_n(s) - P_n(0) = \lambda \int_0^s e^{\lambda t}P_{n-1}(t)dt$$

por lo cual

$$P_n(s) = \lambda e^{-\lambda s}\int_0^s e^{\lambda t}P_{n-1}(t)dt.$$

Empleando la formula anterior tenemos

$$\begin{aligned}
P_1(s) &= \lambda e^{-\lambda s}\int_0^s e^{\lambda t}P_0(t)dt = \lambda e^{-\lambda s}\int_0^s e^{\lambda t}e^{-\lambda t}dt = e^{-\lambda s}(\lambda s)\\
P_2(s) &= \lambda e^{-\lambda s}\int_0^s e^{\lambda t}P_1(t)dt = \lambda e^{-\lambda s}\int_0^s e^{\lambda t}e^{-\lambda t}\lambda t dt = e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^2}{2}\\
P_3(s) &= \lambda e^{-\lambda s}\int_0^s e^{\lambda t}P_2(t)dt = \lambda e^{-\lambda s}\int_0^s e^{\lambda t}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^2}{2}dt = e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^3}{3\cdot 2},
\end{aligned}$$

siguiendo el razonamiento recursivo concluimos que

$$P_n(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Para el regreso basta usar la expansión de taylor de la exponencial. $\square$

Observación 1. *El hecho que la definición 5 implique la definición 4,* id est*, que $N(t)$ tiene distribución Poisson(λt) se debe a la aproximación Poisson de la binomial. Para ver esto, divida el intervalo $[0,t]$ en k partes iguales; asi tenemos los subintervalos $[0,t/k)$,$[t/k,2t/k)$,$[2t/k,3t/k)$, etc. Cada uno con longitud $h = t/k$. Note que la probabilidad de tener 2 o mas eventos en cualquier subintervalo va a 0 como $k \to \infty$,*

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\textit{2 o más eventos en cualquier subintervalo}\right) \leq& \sum_{i=1}^{k}\mathbf{P}\left(\textit{2 o más eventos en el intervalo } i\right)\\
=&\sum_{i=1}^{k} o\left(t/k\right) = ko\left(t/k\right)\\
=&t\frac{o\left(t/k\right)}{t/k} \to 0 \textit{ como } k \to \infty.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, en el límite $N(t)$ será igual al número de subintervalos en el cuál hay un única ocurrencia. Sea B_j el evento que indica que en el intervalo j hay sólo una ocurrencia. Por la estacionaridad e independencia de los eventos de interes se tiene que $B_1,\ldots,B_k$ son independientes y con idéntica probabilidad para un k suficientemente grande. Bajo esta óptica, el número de $B_j's$ que ocurren tiene un distribución Binomial(k,p_k) con

$$p_k = \lambda\frac{t}{k} + o\left(t/k\right).$$

De este modo, al tender k a infinito se tendrá que $N(t)$ se distribuye Poisson con medial igual a

$$\lim_{k\to\infty} kp_k = \lim_{k\to\infty}\lambda t + \lim_{k\to\infty} t\frac{o\left(t/k\right)}{t/k} = \lambda t.$$

2. Distribución de Tiempos de Espera e Interarribo

Sea $\{N(t) : t \geq 0\}$ un proceso Poisson. Denotaremos por X_1 el tiempo de ocurrencia del primer evento y por X_n el tiempo que transcurre desde que el $(n-1)$-ésimo evento sucedió hasta que el n-ésimo sucede. $\{X_n : n \geq 1\}$ es llamada secuencia de tiempos interarribo.

Notemos que: $\mathbb{P}(X_1 > t) = \mathbb{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$ y

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 > t|X_1 = s) = \mathbb{P}(X_2 > t|N(s) = 1) =&\mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = 0|N(s) = 1)\\ =&\mathbb{P}(N(t+s) - N(s) = 0)\\ =&e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

Luego $\mathbb{P}(X_2 \leq t|X_1 = s) = 1 - e^{-\lambda t}$, por lo tanto

$$\int_0^t \frac{f_{X_1,X_2}(s,\tau)}{f_{X_1}(s)}\mathrm{d}\tau = 1 - e^{-\lambda t},$$

pues

$$\mathbb{P}(X_2 \leq t|X = s) = \int_0^t f_{X_2|X_1}(\tau|s)d\tau = \int_0^t \frac{f_{X_1,X_2}(s,\tau)}{f_{X_1}(s)}d\tau,$$

de este modo:

$$\mathbb{P}(X_2 \leq t|X = s) = \frac{1}{\lambda e^{-\lambda s}}\int_0^t f_{X_1,X_2}(s,\tau)\mathrm{d}\tau \Longrightarrow \int_0^t f_{X_1,X_2}(s,\tau)\mathrm{d}\tau = \lambda e^{-\lambda s} - \lambda e^{-\lambda t}e^{-\lambda s}$$

$$\Longrightarrow f_{X_1,X_2}(s,t) = \frac{d}{dt}[\lambda e^{-\lambda s} - \lambda e^{-\lambda t}e^{-\lambda s}] = \lambda^2 e^{-\lambda t}e^{-\lambda s}.$$

tomando la marginal,

$$f_{X_2}(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

es decir, X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con identica distribución $\exp(\lambda)$, con media $1/\lambda$.

Teorema 2. *Los tiempos interarribo $\{X_n : n \geq 1\}$ de un proceso Poisson son variables aleatorias independientes, identicamente distribuidas, con distribución común exp(λ).*

Demostración. Veamos que $\{X_1, ..., X_n\}$ son independientes e idénticamente distribuidas, con distribución común $\exp(\lambda)$, por inducción sobre n.

(B.I.) Ya demostramos que para $n = 2$ nuestra proposición es valida.

(H.I.) Supongamos que el resultado es válido para n, es decir, $X_i \backsim \exp(\lambda)$, $\forall i = 1, ..., n$ con $f_{X_1,...,X_n}(\xi_1, ..., \xi_n) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda\xi_i}$.

(P.I.) Sea $t_1 = s_1$ y

$$t_m = \sum_{i=1}^m s_i$$

para $m = 2\dots, n$. Note que:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X_{n+1} > t|X_n = s_n, ..., X_1 = s_1) =\\ &\mathbb{P}\left(N\left(t+t_n\right) - N\left(t_n\right) = 0|N(t_i) - N(t_{i-1}) = 1\ \forall\ 2 \leq i \leq n, N(t_1) = 1\right)\end{aligned}$$

puesto que los incrementos son independientes se tiene que

$$\mathbb{P}(X_{n+1} > t | X_n = s_n, ..., X_1 = s_1) = \mathbf{P}\left(N(t+t_n) - N(t_n) = 0\right) = \mathbf{P}\left(N(t) = 0\right) = e^{-\lambda t}.$$

Por otro lado

$$1 - e^{-\lambda t} = \mathbf{P}\left(X_{n+1} \leq t | X_n = s_n, \ldots, X_1 = s_1\right) = \frac{\int_0^t f_{X_1,\ldots,X_{n+1}}(s_1, \ldots, s_n, \tau) d\tau}{f_{X_1,\ldots,X_n}(s_1, \ldots, s_n)}$$

por ende

$$f_{X_1,\ldots,X_{n+1}}(s_1, \ldots, s_n, t) = \lambda e^{-\lambda t} f_{X_1,\ldots,X_n}\left(s_1, \ldots, s_n\right)$$

de donde,

$$f_{X_1,\ldots,X_n,X_{n+1}}(s_1, ..., s_n, t) = \lambda e^{-\lambda t} \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda s_i},$$

marginalizando tenemos que $f_{X_{n+1}}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ y por lo tanto la independencia de las variables. $\square$

Observación 2. *La proposición anterior no debe sorprendernos. La suposición de incrementos estacionarios e independientes es equivalente a asegurar que en cualquier punto del tiempo el proceso se reinicia asi mismo en un sentido probabilistico, es decir, el proceso en cualquier punto es independiente de todo lo que ocurrio previamente (por incrementos independientes) y además tiene la misma distribución que el proceso original (por incrementos estacionarios). En otras palabras, el proceso no tiene memoria.*

El tiempo de espera al $n-$ésimo evento se puede definir como

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, \quad \forall n \geq 1,$$

donde $X_i \backsim$exp(λ), $\forall i$ y son independientes. Tenemos que, $S_n \backsim$gamma(n, λ),

$$f_{S_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \forall t \geq 0.$$

Otra forma de ver esto es que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(t < S_n < t + \epsilon) =& \mathbb{P}(N(t) = n-1, N(t+\epsilon) - N(t) = 1) + o(\epsilon) \\
=& \mathbb{P}(N(t) = n-1)\mathbb{P}(N(t+\epsilon) - N(t) = 1) + o(\epsilon) \\
=& e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda \epsilon + o(\epsilon).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$f_n(t) = \frac{d\mathbb{P}(S_n \leq t)}{dt} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\mathbb{P}(t < S_n < t + \epsilon)}{\epsilon} = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

3. Distribución Condicional de los Tiempos de Arribo

Supongamos que exactamente un evento de un proceso Poisson tiene lugar en el intervalo de tiempo de $[0, t]$ y queremos determinar la ditribución del tiempo en el cual este ocurrira. Ya que un proceso Poisson tiene incrementos estacionarios e independientes es razonable pensar que cualquier intervalo de la misma longitud tiene la misma probabilidad de ocurrencia del evento, es decir, la distribución del tiempo de ocurrencia es uniforme sobre $[0, t]$. Formlamente esto es sencillo de ver pue

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_1 < s | N(t) = 1) =& \frac{\mathbf{P}\left(X_1 < s, N(t) = 1\right)}{\mathbf{P}\left(N(t) = 1\right)} \\
=& \frac{\mathbf{P}\left(\text{ocurra 1 evento en [0,s), ocurran 0 eventos en [s,t)}\right)}{\mathbf{P}\left(N(t) = 1\right)} \\
=& \frac{\mathbf{P}\left(\text{ocurra 1 evento en [0,s)}\right)\mathbf{P}\left(\text{ocurran 0 eventos en [s,t)}\right)}{\mathbf{P}\left(N(t) = 1\right)} \\
=& \frac{\mathbf{P}\left(N(s) = 1\right)\mathbf{P}\left(N(t) - N(s) = 0\right)}{\mathbf{P}\left(N(t) = 1\right)} \\
=& \frac{\lambda s e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)}}{\lambda t e^{-\lambda t}} \\
=& \frac{s}{t}
\end{aligned}
$$

Teorema 3. *Dado que $N(t) = n$, los n tiempos de arribo $S_1, \ldots, S_n$ tienen la misma distribución conjunta que los estadísticos de orden correspondientes a n variables aleatorias independientes uniformes sobre el intervalo $(0, t)$.*

Demostración. Calcularemos la función de densidad conjunta de $(S_1, \ldots, S_n)$. Para ello obtendremos la n-ésima derivada parcial de la distribución conjunta usando la definición del límite. Considere $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1} = t$ y $h_i > 0$ y lo suficientemente pequeño para que $t_i + h_i < t_{i+1}$, con $i = 1, \ldots, n$. Luego

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(t_i \leq S_i \leq t_i+h_i, i=1,\ldots,n | N(t)=n\right) =& \frac{\mathbf{P}\left(1 \text{ evento en } [t_i, t_i+h_i), 0 \text{ eventos en } [t_i+h_i, t_{i+1})\right)}{\mathbf{P}\left(N(t)=n\right)} \\
=& \frac{\Pi_{i=1}^{n} \lambda h_i e^{-\lambda h_i} e^{-\lambda(t_{i+1}-t_i-h_i)}}{e^{-\lambda t}\left(\lambda t\right)^n / n!} \\
=& \frac{\lambda^n \Pi_{i=1}^{n} h_i e^{-\lambda(t_{i+1}-t_i)}}{e^{-\lambda t}\left(\lambda t\right)^n / n!} \\
=& \frac{\lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n} t_{i+1}-t_i\right)}{e^{-\lambda t}\left(\lambda t\right)^n / n!} h_1 \cdots h_n \\
=& \frac{\lambda^n e^{-\lambda t}}{\lambda^n t^n e^{-\lambda t}/n!} h_1 \ldots h_n \\
=& \frac{n!}{t^n} h_1 \ldots h_n.
\end{aligned}
$$

por ende

$$
\lim_{h_i \to 0} \frac{\mathbf{P}\left(t_i \leq S_i \leq t_i+h_i, i=1,\ldots,n | N(t)=n\right)}{h_1 \cdots h_n} = \frac{n!}{t^n}
$$

de este modo

$$
f(t_1,\ldots,t_n) = \frac{n!}{t^n}.
$$

□

Ejemplo. Suponga que los pasajeros que llegan a una estación de tren lo hacen de acuerdo a un proceso Poisson de tasa $\lambda > 0$. El tren llega a la estación al tiempo $t > 0$. Calcule el promedio del total de tiempo que esperan todos los pasajeros que llegaron a la estación durante el intervalo $(0, t)$.

El total de pasajero que llegan a la estación en hasta el tiempo $t > 0$ son $N(t)$. Si el pasajero i (con $1 \leq i \leq N(t)$) llega a la estación en el tiempo S_i ($0 < S_i < t$), entonces el tiempo que espera dicho pasajero es $t - S_i$. De esta forma, el total de tiempo que esperan todos los pasajeros juntos es

$$
\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)
$$

y estamos interesado en calcular

$$
\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)} (t - S_i)\right]. \tag{3}
$$

Note que

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)|N(t)=n\right] =& nt-\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{n}S_i|N(t)=n\right]\\
=& nt-\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{n}U_{(i)}\right]\\
=& nt-\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{n}U_i\right]=nt-n\mathbf{E}[U_1]=nt-\frac{nt}{2}=\frac{nt}{2}
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)|N(t)\right]=\frac{N(t)t}{2}$$

consecuentemente

$$\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)\right]=\mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N(t)}(t-S_i)|N(t)\right]\right]=\mathbf{E}\left[\frac{N(t)t}{2}\right]=\frac{\lambda t^2}{2}.$$

4. Clasificación de Eventos de un Proceso Poisson

Suponga que los eventos de un procesos Poisson $\{N(t)|t\geq 0\}$ de tasa $\lambda>0$ pueden ser claisificados en dos tipos, tipo 1 y tipo 2, independientemente uno del otro. Le probabilidad de que un evento ocurrido en el tiempo $s\geq 0$ sea clasificado como de tipo 1 es $P_1(s)$ y como de tipo 2 es $P_2(s)$ $(P_1(s)+P_2(s)=1)$. Bajo este contexto podemos definir los procesos

$$\begin{aligned}
N_1(t) &= \text{núm. eventos de tipo 1 ocurridos al tiempo t.}\\
N_2(t) &= \text{núm. eventos de tipo 2 ocurridos al tiempo t.}
\end{aligned}$$

Es claro que $N_1(t)+N_2(t)=N(t)$ y dado que cada evento se clasifica en algún tipo independientemente de cualquier otro, se tiene que los procesos $N_1(t)$ y $N_2(t)$ son también Poisson.

Teorema 4. *Los procesos $\{N_1(t)|t\geq 0\}$ y $\{N_2(t)|t\geq 0\}$ son Poisson de tasa*

$$\lambda_i(t)=\lambda\int_0^t P_i(s)ds \tag{4}$$

para $i=1,2$ respectivamente. Es decir

$$\mathbf{P}\left(N_i(t)=n\right)=\frac{(\lambda_i(t))^n}{n!}e^{-\lambda_i(t)}=\frac{(\lambda t p_i)^n}{n!}e^{-\lambda p_i t} \tag{5}$$

con

$$p_i=\frac{1}{t}\int_0^t P_i(s)ds. \tag{6}$$

Demostración. Primeramente calcularemos la distribución conjunta de $N_1(t)$ y $N_2(t)$ condicionada a $N(t)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(N_1(t)=n, N_2(t)=m\right) =& \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\left(N_1(t)=n, N_2(t)=m|N(t)=k\right)\mathbf{P}\left(N(t)=k\right)\\ =&\mathbf{P}\left(N_1(t)=n, N_2(t)=m|N(t)=n+m\right)\mathbf{P}\left(N(t)=n+m\right)\\ =&\mathbf{P}\left(N_1(t)=n|N(t)=n+m\right)\mathbf{P}\left(N(t)=n+m\right)\end{aligned}$$

Note que como $N(t)=n+m$ si $N_1(t)=n$ necesariamente $N_2(t)=m$, de este modo, sabemos que el total de eventos que ocurren en el intervalo $[0,t]$ son $n+m$, estos ocurren independientemente unos de otro y exactamente n son de tipo I. Si pensamos en que el evento sea de tipo I como un éxito y que sea de tipo II como un fracaso, por lo antes dicho, $N_1(t)$ se comporta como una variable binomial de parámetros $n+m$ y p; donde p es la probabilidad de que ocurra un evento de tipo I en el intervalo $[0,t]$. Sabemos que

$$\mathbf{P}\left(\text{Evento tipo I}|S_1=s\right)=P_1(s)$$

con $s\in[0,t]$, por lo cual

$$p=\int_0^t P_1(s)f_{S_1}(s)ds=\frac{1}{t}\int_0^t P_1(s)ds$$

pues sabemos que S_1 se distribuye uniformemente sobre el intervalo $[0,t]$.

Por consiguiente

$$\mathbf{P}\left(N_1(t)=n|N(t)=n+m\right)=\binom{n+m}{n}p^n(1-p)^m$$

de este modo

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(N_1(t)=n, N_2(t)=m\right) =&\binom{n+m}{n}p^n(1-p)^m e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}\\ =&\frac{(n+m)!}{n!m!}p^n(1-p)^m e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}\\ =&\frac{p^n\lambda^n t^n}{n!}\frac{(1-p)^m\lambda^m t^m}{m!}e^{-\lambda t(p+1-p)}\\ =&\frac{(\lambda tp)^n}{n!}e^{-\lambda tp}\frac{(\lambda t(1-p))^m}{m!}e^{-\lambda t(1-p)}\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

5. Procesos Poisson No Homogeneo

Definición 6. Un procesos de conteo $\{N(t)|t\geq 0\}$ se dice ser un procesos Poisson **no Homogeneo** con función de intensidad $\lambda(t)$ si

1. $N(0)=0$.

2. Tiene incrementos independientes.
3. $\mathbf{P}\left(N(t+h)-N(t)\geq 2\right)=o(h)$.
4. $\mathbf{P}\left(N(t+h)-N(t)=1\right)=\lambda(t)h+o(h)$.

Teorema 5. *Si* $\{N(t)|t\geq 0\}$ *es un procesos Poisson No Homogeneo con función de intensidad* $\lambda(t)$ *entonces*

$$\mathbf{P}\left(N(t+s)-N(t)=n\right)=\frac{[m(t+s)-m(t)]^n}{n!}\exp\left\{-\left[m(t+s)-m(t)\right]\right\}, \tag{7}$$

donde

$$m(t)=\int_0^t \lambda(s)ds. \tag{8}$$

Demostración. Definimos

$$P_n(s)=\mathbf{P}\left(N(t+s)-N(t)=n\right)$$

observe que

$$\begin{aligned}P_0(s+h)=&\mathbf{P}\left(N(t+s+h)-N(t)=0\right)\\ =&\mathbf{P}\left(N(t+s)-N(t)=0, N(t+s+h)-N(t+s)=0\right)\\ =&\mathbf{P}\left(N(t+s)-N(t)=0\right)\mathbf{P}\left(N(t+s+h)-N(t+s)=0\right)\\ =&P_0(s)\left[1-\lambda(t+s)h+o(h)\right]\end{aligned}$$

por ende

$$\frac{P_0(s+h)-P_0(s)}{h}=-\lambda(t+s)P_0(s)+\frac{o(h)}{h}$$

por lo tanto

$$P_0'(s)=-\lambda(t+s)P_0(s)$$

consecuentemente

$$\ln\left(P_0(s)\right)=-\int_0^s \lambda(t+u)du,$$

si tomamos $v=t+u$ tenemos que

$$\int_0^s \lambda(t+u)du=\int_t^{t+s}\lambda(v)dv=\int_0^{t+s}\lambda(v)dv-\int_0^t\lambda(v)dv=m(t+s)-m(t),$$

lo que implica que

$$P_0(s)=\exp\left\{-\left[m(t+s)-m(t)\right]\right\}.$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
P_n(s+h) =& \mathbf{P}\left(N(t+s+h)-N(t)=n\right)\\
=& \mathbf{P}\left(N(t+s+h)-N(t+s)=0, N(t+s)-N(t)=n\right)\\
&+\mathbf{P}\left(N(t+s+h)-N(t+s)=1, N(t+s)-N(t)=n-1\right)\\
&+\sum_{i=2}^{n}\mathbf{P}\left(N(t+s+h)-N(t+s)=i, N(t+s)-N(t)=n-i\right)\\
=& \mathbf{P}\left(N(t+s+h)-N(t+s)=0\right)\mathbf{P}\left(N(t+s)-N(t)=n\right)\\
&+\mathbf{P}\left(N(t+s+h)-N(t+s)=1\right)\mathbf{P}\left(N(t+s)-N(t)=n-1\right)+o(h)\\
=& \left[1-\lambda(t+s)h+o(h)\right]P_n(s)+\left[\lambda(t+s)h+o(h)\right]P_{n-1}(s)+o(h)
\end{aligned}
$$

por consiguiente

$$
P_n(s+h)=P_n(s)-\lambda(t+s)hP_n(s)+\lambda(t+s)hP_{n-1}(s)+o(h) \tag{9}
$$

de esta forma

$$
\frac{P_n(s+h)-P_n(s)}{h}=-\lambda(t+s)P_n(s)+\lambda(t+s)P_{n-1}(s)+\frac{o(h)}{h}
$$

por lo cual

$$
P_n'(s)+\lambda(t+s)P_n(s)=\lambda(t+s)P_{n-1}(s). \tag{10}
$$

Le ecuación anterior la podemos resolver de manera relativamente simple usando factor integrante, tomamos

$$
\mu(s)=\exp\left\{\int_0^s \lambda(t+u)du\right\},
$$

multiplicando ambos lados de la ecución (10) por $\mu(s)$ tenemos

$$
\frac{d\mu(s)P_n(s)}{ds}=\mu(s)\lambda(t+s)P_{n-1}(s). \tag{11}
$$

Utilizando de manera recursiva la ecuación anterior obtenemos el resultado deseado. □

Observación 3. *La importancia del proceso Poisson no Homogeneo reside en el hecho que no tiene incrementos estacionarios por lo que estamos permitiendo la posibilidad de que los eventos pueden ser más probables de ocurrir en ciertos tiempos que en otros.*

Si la función de intesidad $\lambda(t)\geq 0$ es acotada entonces es posible pensar que el procesos Poisson no homogeneo es una muestra a leatoria de un procesos Poisson homogeneo, especificamente si $\lambda(t)\leq\lambda$ para todo $t\geq 0$, consideramos $\{M(t)|t\geq 0\}$ un proceso Poisson homogeneo de tasa $\lambda>0$ y suponga que un evento ocurrido en el tiempo t de este procesos es contado con probabilidad

$$
P(t)=\frac{\lambda(t)}{\lambda} \tag{12}
$$

independientemente de cualquier otro evento. Entonces, de acuerdo al teorema 4 el procesos $\{N(t)|t \geq 0\}$ que cuenta el número de eventos contados al tiempo t del procesos $\{M(t)|t \geq 0\}$ es un procesos Poisson con tasa

$$\Lambda(t) = \lambda \int_0^t P(s)ds = \lambda \int_0^t \frac{\lambda(s)}{\lambda} ds = \int_0^t \lambda(s)ds \tag{13}$$

por lo tanto la función de intesidad del procesos $\{N(t)|t \geq 0\}$ es justamente $\lambda(t)$.

6. Proceso Poisson Compuesto

Considere una suceción de variables aleatorias i.i.d $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ con distribución común F y suponga que esta secuencia es independiete de una v.a. $N \sim Poisson(\lambda)$. La v.a.

$$W = \sum_{i=1}^{N} X_i \tag{14}$$

se dice ser una v.a. Poisson compuesta con media $\lambda > 0$ y distribución componente F.

La función generadora de momentos de W esta dada como

$$\begin{aligned}
\phi_W(t) =& \mathbf{E}\left[e^{Wt}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\left[e^{tW}|N = n\right] \mathbf{P}(N = n) \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\left[\exp\left\{t\sum_{i=1}^{n} X_i\right\}|N = n\right] \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\left[\prod_{i=1}^{n} e^{tX_i}\right] \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left[e^{tX_i}\right] \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \\
=& e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} (\phi_X(t))^n \frac{\lambda^n}{n!} \\
=& e^{-\lambda} \exp\{\lambda\phi_X(t)\} \\
=& \exp\{\lambda[\phi_X(t) - 1]\}.
\end{aligned}$$

Con la funcióngeneradora de momentos podemos calcualr la esperanza y la varianza de una variable aleatorio Poisson compuesta. Observe que

$$\phi'_W(t) = \lambda\phi'_X(t)\exp\{\lambda[\phi_X(t) - 1]\}$$

por lo tanto

$$\mathbf{E}[W] = \phi'_W(0) = \lambda\phi'_X(0)\exp\{\lambda[\phi_X(0) - 1]\} = \lambda\mathbf{E}[X]. \tag{15}$$

Similarmente, tenemos que

$$\phi_W''(t) = \lambda\phi_X''(t)\exp\left\{\lambda\left[\phi_X(t)-1\right]\right\} + \lambda^2\left(\phi_X'(t)\right)^2\exp\left\{\lambda\left[\phi_X(t)-1\right]\right\} \tag{16}$$

por lo que

$$\mathbf{E}\left[W^2\right] = \phi_W''(0) = \lambda E[X^2] + \lambda^2\left(\mathbf{E}[X]\right)^2 \tag{17}$$

consecuentemente

$$\mathbf{Var}\left[W\right] = \lambda\mathbf{E}\left[X^2\right]. \tag{18}$$

Definición 7. Un proceso Estocástico $\{X(t)|t \geq 0\}$ se dice ser un proceso Poisson compuesto si puede ser representadoc como

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \tag{19}$$

donde $\{N(t)|t \geq 0\}$ es un proceso Poisson y $\{X_i|i \in \mathbf{N}\}$ es una familia de variables aleatorias i.i.d. e independientes del proceso Poisson. Esto no dice que cada $X(t)$ es una variable Poisson compuesta.

Teorema 6. *Sea W una v.a. Poisson compuesta (λ, F), si F es una distribución discreta que proviene de la función de probabilidad $\rho(j) = p_j$ con $j = 1, \ldots, k$, entonces W se puede representar como*

$$W = \sum_{j=1}^{k} jN_j \quad \textit{en distribución} \tag{20}$$

con $N_j \sim Poisson(\lambda p_j)$ y las variables $N_1, N_2, \ldots, N_k$ son independientes.

Demostración. Basta con demostrar que la v.a. W y la v.a. de la derecha de (20) tienen la misma función generadora de momentos. Sea V igual al lado derecho de la ecuación (20), entonces la función generado de momentos de V esta dada como

$$\begin{aligned}\phi_V(t) =& \mathbf{E}\left[\exp\left\{t\sum_{j=1}^{k} jN_j\right\}\right] \\ =& \prod_{j=1}^{k}\mathbf{E}\left[\exp\left\{tjN_j\right\}\right]\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\exp\left\{tjN_j\right\}\right] =& \sum_{k=0}^{\infty} e^{tjk}\mathbf{P}\left(N_j = k\right) \\ =& \sum_{k=0}^{\infty} e^{tjk}\frac{\left(\lambda p_j\right)^k}{k!}e^{-\lambda p_j} \\ =& \exp\left\{\lambda\left(e^{tj}-1\right)p_j\right\},\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\phi_V(t) = \prod_{j=1}^{k} \exp\left\{\lambda\left(e^{tj} - 1\right) p_j\right\}. \tag{21}$$

Por otro lado

$$\phi_W(t) = \exp\left\{\lambda\left(\phi_X(t) - 1\right)\right\}$$

y además

$$\phi_X(t) = \mathbf{E}\left[e^{tX}\right] = \sum_{j=1}^{k} e^{tj} p_j$$

de donde

$$\begin{aligned}\phi_W(t) &= \exp\left\{\lambda\left(-1 + \sum_{j=1}^{k} e^{tj} p_j\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\lambda\left(\sum_{j=1}^{k} e^{tj} p_j - p_j\right)\right\} \\ &= \exp\left\{\sum_{j=1}^{k} \lambda(e^{tj} - 1) p_j\right\} \\ &= \prod_{i=1}^{k} \exp\left\{\lambda(e^{tj} - 1) p_j\right\}\end{aligned}$$

pues $\sum_{j=1}^{k} p_j = 1$. Por ende $\phi_V(t) = \phi_W(t)$, de donde W y V son iguales en distribución. □

Teorema 7. *Sea X una v.a. con distribución F que es independiente de W. Entonces para cualquier funcion h medible se tiene que*

$$\mathbf{E}\left[Wh(W)\right] = \lambda \mathbf{E}\left[Xh\left(W + X\right)\right] \tag{22}$$

Demostración. Note que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[Wh(W)\right] =& \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[Wh(W)|N\right]\right] \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\left[Wh(W)|N=n\right]\mathbf{P}\left(N=n\right) \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) h\left(\sum_{i=1}^{n} Xi\right)|N=n\right] e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\
=& \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left[X_i h\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\
=& \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbf{E}\left[X_n h\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\right] e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \\
=& \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[X_n h\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i + X_n\right)|X_n\right]\right] \\
=& \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int \mathbf{E}\left[X_n h\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i + X_n\right)|X_n = x\right] dF(x) \\
=& \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int x\mathbf{E}\left[h\left(\sum_{i=1}^{n-1} X_i + x\right)\right] dF(x) \\
=& \lambda\int x\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!}\mathbf{E}\left[h\left(\sum_{i=1}^{m} X_i + x\right)\right] dF(x) \\
=& \lambda\int x\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{E}\left[h\left(\sum_{i=1}^{m} X_i + x\right)|N=m\right]\mathbf{P}\left(N=m\right) dF(x) \\
=& \lambda\int x\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{E}\left[h\left(W+x\right)|N=m\right]\mathbf{P}\left(N=m\right) dF(x) \\
=& \lambda\int x\mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[h(W+x)|N\right]\right] dF(x) \\
=& \lambda\int x\mathbf{E}\left[h(W+x)\right] dF(x) \\
=& \lambda\int \mathbf{E}\left[Xh(W+X)|X=x\right] dF(x) \\
=& \lambda\mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[Xh(W+X)|X\right]\right] \\
=& \lambda\mathbf{E}\left[Xh(W+X)\right].
\end{aligned}
$$

□

Corolario 7.1. *Si W es una v.a. Poisson compuesta (λ, F) se tiene que*

$$\mathbf{E}\left[W^n\right] = \lambda\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\mathbf{E}\left[W^j\right]\mathbf{E}\left[X^{n-j}\right]. \tag{23}$$

Demostración. En el teorema anterior tomamos $h(x) = x^{n-1}$, de este modo

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[W^n\right] =& \mathbf{E}\left[WW^{n-1}\right] = \mathbf{E}\left[Wh(W)\right] \\
=& \lambda\mathbf{E}\left[Xh(W+X)\right] = \lambda\mathbf{E}\left[X(W+X)^{n-1}\right] \\
=& \lambda\mathbf{E}\left[X\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}W^jX^{n-1-j}\right] \\
=& \lambda\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\mathbf{E}\left[W^jX^{n-j}\right] \\
=& \lambda\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}\mathbf{E}\left[W^j\right]\mathbf{E}\left[X^{n-j}\right].
\end{aligned}$$

□

Corolario 7.2. *Suponga que W es una v.a. Poisson compuesta (λ, F) y que las X_i que constituyen los sumandos de W toman valores enteros positivos. Sean*

$$\alpha_j = \mathbf{P}\left(X_i = j\right) \quad j \geq 1 \tag{24}$$

$$P_j = \mathbf{P}\left(W = j\right) \quad j \geq 0 \tag{25}$$

entonces

$$P_0 = e^{-\lambda} \tag{26}$$

$$P_n = \frac{\lambda}{n}\sum_{j=1}^{n} j\alpha_j P_{n-j}, \quad n \geq 1. \tag{27}$$

Demostración. Como las variables X_i toman valores enteros positivos, la única forma de que $W = 0$ es que $N = 0$ por lo tanto

$$P_0 = \mathbf{P}(W = 0) = \mathbf{P}(N = 0) = e^{-\lambda}.$$

Para $n > 0$ definimos

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq n \\ 1/n & \text{si } x = n \end{cases}$$

entonces $Wh(W) = \mathbb{I}_{\{W=n\}}$ por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(W = n) =& \mathbf{E}\left[Wh(W)\right] = \lambda \mathbf{E}\left[Xh(W+X)\right] \\
=& \lambda \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{E}\left[Xh(W+X)|X=j\right]\alpha_j \\
=& \lambda \sum_{j=1}^{\infty} j\alpha_j \mathbf{E}\left[h(W+j)\right] \\
=& \lambda \sum_{j=1}^{\infty} j\alpha_j \frac{1}{n}\mathbf{P}(W+j=n) \\
=& \frac{\lambda}{n}\sum_{j=1}^{n} j\alpha_j P_{n-j}.
\end{aligned}$$

□