Introducción

Prof. Rafael Miranda Cordero

Facultad de Ciencias, UNAM

Procesos Estocásticos I

Semestre 2022-2

¿Que son los procesos estocásticos?

“Definición de Matemático”

Es una sucesión de variables aleatorias $(X_i)_{i \in I}$ indicadas en el tiempo discreto o continuo.

¿Que son los procesos estocásticos?

“Definición de Matemático”

Es una sucesión de variables aleatorias $(X_i)_{i \in I}$ indicadas en el tiempo discreto o continuo.

Lo que el matemático quiso decir...

Son objetos matemáticos que permiten modelar fenómenos aletatorios a través del tiempo.

¿Que son los procesos estocásticos?

“Definición de Matemático”

Es una sucesión de variables aleatorias $(X_i)_{i \in I}$ indicadas en el tiempo discreto o continuo.

Lo que el matemático quiso decir...

Son objetos matemáticos que permiten modelar fenómenos aletatorios a través del tiempo.

Lo que todos estamos pensando...

¡Necesito un ejemplo!

Ejemplito de Libro

1. **La Ruina del Jugador**.Considera un juego de apuestas sucesivas en el cuál en cada turno puedes ganar \$ 1 con probabilidad $p = 0.4$ y perder \$ 1 con probabilidad $1 - p = 0.6$. Además adoptas la regla que si tu fortuna llega a $\$N$ abandonas el juego y si llegas a \$ 0 obviamente estas obligado a parar.

Sea $X_n =$ tu fortuna en la n-ésima apuesta, entonces $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es un proceso estocástico.

Ejemplos más interesantes

1. *Page Rank* de Google-Cadenas de Markov.
2. Máquinas de Boltzmann-Redes Neuronales- Markov.
3. El número de goles anotados en un partido de fútbol-Proceso de Conteo (Poisson).
4. El número de sismos registrados en una ciudad a través del tiempo-Poisson.
5. El precio de una acción a lo largo de un día de operaciones-Proceso continua (Browniano).
6. El movimiento de una particula de polen en un medio liquido-Browniano.

¿Que es lo que haremos en el curso?

1. Entender el formalismo matemático de los procesos estocásticos.
2. Profundizar en los ejemplos de procesos estocásticos que han sido más relevantes a través de la historia y que aun siguen siendo empleados.
3. Entender la parte teórica de algunas aplicaciones y como estas se pueden llevar a cabo.
4. Realizar simulaciones computacionales de algunos procesos.

¿Que es lo que haremos en el curso?

1. Entender el formalismo matemático de los procesos estocásticos.
2. Profundizar en los ejemplos de procesos estocásticos que han sido más relevantes a través de la historia y que aun siguen siendo empleados.
3. Entender la parte teórica de algunas aplicaciones y como estas se pueden llevar a cabo.
4. Realizar simulaciones computacionales de algunos procesos.

Nota

Probabilidad es a Estadística como Procesos Estocásticos es a Series de Tiempo.

Temario

El temario esta dividido en 4 grandes rubros.

1. **Cadenas de Markov.** Procesos con estados discretos a tiempo discreto en donde el futuro sólo depende del presente.
2. **Proceso Poisson.** Porcesos con estasos discretos a tiempo continuo que cuentan eventos.
3. **Movimiento Browniano.** Procesos con estados continuos a tiempo continuo-movimiento aleatorio en el espacio-precios de una acción.
4. **Martingalas.** Procesos generales con aplicaciones en finanzas.

Bibliografía

- Ross, S. M. (1996). Stochastic processes (2a ed.).New York:Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc.
- Hoel, P. G., Port, S. C., &Stone, C. J. (1972).Introduction to stochastic processes. Houghton Mifflin Co., Boston, Mass.
- Rincón, L.(2012).Introducción a los procesos estocásticos. Las Prensas de Ciencias, UNAM.
- Durrett, R. (2012). Essentials of Stochastic Processes, Second Edition. Springer.
- Durrett, R. (2019). Probability: Theory and Examples Fith Edition. Cambridge University Press.

Evaluación

Le evaluación esta ponderada de la siguiente forma

1. Exámenes (al menos 3) y Exposiciones (al menos 1) 40 %.
2. Tareas (al menos 4) y similares 60 %.

Para aprobar el curso es necesario.

1. Tener promedio aprobatorio.
2. Tener a lo más un examen reprobado.

Además de ello debes considerar que

1. Sólo puedes reponer 2 de los 3 exámenes.
2. No es posible reponer tareas ni exposiciones.
3. Las tareas y exposiciones son en equipos de al menos 2 personas y a lo mas 4.
4. Se otorga un punto extra en cada tarea por entregarla en LaTeX.
5. Las prácticas en R pueden considerarse como puntos extras a discreción de los profesores.

Definiciones

Definición 1

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ y un conjunto de índices I[a]. Decimos que una función $\mathbf{X} : \Omega \times I \to S \subseteq \mathbb{R}$ es un proceso estocástico si $X_i := \mathbf{X}(\cdot, i)$ es una variable aleatoria para cada $i \in I$.

[a] Tipicamente $I \subseteq \mathbb{N}$ o $I \subseteq [0, \infty)$ es un intervalo

Definiciones

Definición 1

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ y un conjunto de índices I[a]. Decimos que una función $\mathbf{X} : \Omega \times I \to S \subseteq \mathbb{R}$ es un proceso estocástico si $X_i := \mathbf{X}(\cdot, i)$ es una variable aleatoria para cada $i \in I$.

[a] Tipicamente $I \subseteq \mathbb{N}$ o $I \subseteq [0, \infty)$ es un intervalo

Definición 2

Dado un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ y un conjunto de índices I. Decimos que una sucesión de variables aleatorias $\{X_i : \Omega \to \mathbb{R}\}_{i \in I}$ es un proceso estocástico.

Entendiendo la Definición

Recordemos que un espacio de probabilidad esta constituido de 3 objetos

1. **Espacio Muestral.** $\Omega \neq \emptyset$.

Entendiendo la Definición

Recordemos que un espacio de probabilidad esta constituido de 3 objetos

1. **Espacio Muestral.**$\Omega \neq \emptyset$.
2. **Espacio de Eventos.** (Sigma-álgebra). $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$.

Entendiendo la Definición

Recordemos que un espacio de probabilidad esta constituido de 3 objetos

1. **Espacio Muestral.**$\Omega \neq \emptyset$.
2. **Espacio de Eventos.** (Sigma-álgebra). $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$.
3. **Medida de Probabilidad.** $\mathrm{P} : \mathscr{F} \to [0, 1]$.

Entendiendo la Definición

Recordemos que un espacio de probabilidad esta constituido de 3 objetos

1. **Espacio Muestral.**$\Omega \neq \emptyset$.
2. **Espacio de Eventos.** (Sigma-álgebra). $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$.
3. **Medida de Probabilidad.** $\mathbf{P} : \mathscr{F} \to [0, 1]$.

Por otro lado, una función $X : \Omega \to \mathbb{R}$ se denomina variable aleatoria (v.a.) siempre que

$$X^{-1}[(-\infty, c]] \in \mathscr{F} \text{ para toda } c \in \mathbb{R} \tag{1}$$

De esta forma, bajo la primera definición, tenemos que $\mathbf{X} : \Omega \times I \to S \subseteq \mathbb{R}$ es un procesos estocástico si y solo si

$$\mathbf{X}(\cdot, i)^{-1}\left[(-\infty, c]\right] =: X_i^{-1}\left[(-\infty, c]\right] \in \mathscr{F} \text{ para toda } c \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

para la definición 2 se entiende de forma análoga y además ambas definiciones son equivalentes.

- Si tomamos un proceso estocástico bajo la definición 1 tenemos que $\{X_i := \mathbf{X}(\cdot, i) : \Omega \to S \subseteq \mathbb{R} | i \in I\}$ es un proceso estocástico bajo la definición 2.
- Si tomamos un proceso bajo la definición 2 entonces la función $\mathbf{X} : \Omega \times I \to S \subseteq \mathbb{R}$ definida como $\mathbf{X}(\omega, i) = X_i(\omega)$ es un procesos estocástico bajo la definición 1.

Las definiciones antes mencionadas formalizan la noción de proceso estocástico, en el entendido de que los procesos estocásticos son objetos matemáticos que permiten modelar fenomenos aleatorios a través del tiempo. El conjunto de índices representa el pasar del tiempo, el cuál puede ser considerado discreto o continuo, mientras que la exigencia de que en cada instante $i \in I$ la función asociada X_i sea una variable aleatoria refleja el hecho de que en cada instante del tiempo la naturaleza intrínseca del fenómeno o experimento en cuestión es azarosa; pues las variables aleatorias son el formalismo matemático asociado a los fenómenos aleatorio.

Continuamos con la Definición

Espacio Parametral y de Estados

Al conjunto de índices I de un proceso estocástico se le denomina espacio parametral y al conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$ que contiene la imagen de cada variable aleatoria se denomina espacio de estados.

Ejemplos

- **La Ruina del Jugador**.Considera un juego de apuestas sucesivas (lanzar una moneda) en el cuál en cada turno puedes ganar \$ 1 con probabilidad $p = 0.4$ y perder \$ 1 con probabilidad $1 - p = 0.6$. Además adoptas la regla que si tu fortuna llega a $\$N$ abandonas el juego y si llegas a \$ 0 obviamente estas obligado a parar.
  Si tomamos $X_n =$ tú fortuna en el n-ésimo juego es natural pensar que $(X_n)_{n \in N}$ es un proceso estocástico.

Ejemplos

- **La Ruina del Jugador**.Considera un juego de apuestas sucesivas (lanzar una moneda) en el cuál en cada turno puedes ganar \$ 1 con probabilidad $p = 0.4$ y perder \$ 1 con probabilidad $1 - p = 0.6$. Además adoptas la regla que si tu fortuna llega a $\$N$ abandonas el juego y si llegas a \$ 0 obviamente estas obligado a parar.
  Si tomamos $X_n =$ tú fortuna en el n-ésimo juego es natural pensar que $(X_n)_{n \in N}$ es un proceso estocástico.
  1. **Espacio de Parámetros.** $I = \mathbb{N}$.

Ejemplos

- **La Ruina del Jugador.** Considera un juego de apuestas sucesivas (lanzar una moneda) en el cuál en cada turno puedes ganar \$ 1 con probabilidad $p = 0.4$ y perder \$ 1 con probabilidad $1 - p = 0.6$. Además adoptas la regla que si tu fortuna llega a $\$N$ abandonas el juego y si llegas a \$ 0 obviamente estas obligado a parar.
  Si tomamos $X_n =$ tú fortuna en el n-ésimo juego es natural pensar que $(X_n)_{n \in N}$ es un proceso estocástico.
  1. **Espacio de Parámetros.** $I = \mathbb{N}$.
  2. **Espacio de Estados.** $S = \{0, 1, \ldots, N\}$.

Ejemplos

- **La Ruina del Jugador**.Considera un juego de apuestas sucesivas (lanzar una moneda) en el cuál en cada turno puedes ganar \$ 1 con probabilidad $p = 0.4$ y perder \$ 1 con probabilidad $1 - p = 0.6$. Además adoptas la regla que si tu fortuna llega a $\$N$ abandonas el juego y si llegas a \$ 0 obviamente estas obligado a parar.
  Si tomamos $X_n =$ tú fortuna en el n-ésimo juego es natural pensar que $(X_n)_{n \in N}$ es un proceso estocástico.
  1. **Espacio de Parámetros.** $I = \mathbb{N}$.
  2. **Espacio de Estados.** $S = \{0, 1, \ldots, N\}$.
  3. **Espacio de Probabilidad?**

- **El Precio de una Acción**.Considere que el precio de una acción para una determinada empresa a lo largo de un día de operaciones se mueve de forma continua pero aleatoria.
  Si tomamos $X_t =$ el precio de la acción al tiempo t es natural pensar que $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico.

- **El Precio de una Acción**.Considere que el precio de una acción para una determinada empresa a lo largo de un día de operaciones se mueve de forma continua pero aleatoria. Si tomamos $X_t =$ el precio de la acción al tiempo t es natural pensar que $(X_t)_{t \geq 0}$ es un proceso estocástico.
    1. **Espacio de Parámetros.** $I = [0, 5000]$.

- **El Precio de una Acción**.Considere que el precio de una acción para una determinada empresa a lo largo de un día de operaciones se mueve de forma continua pero aleatoria. Si tomamos $X_t =$ el precio de la acción al tiempo t es natural pensar que $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico.
  1. **Espacio de Parámetros.** $I = [0, 5000]$.
  2. **Espacio de Estados.** $S = [0, \infty)$.

- **El Precio de una Acción**.Considere que el precio de una acción para una determinada empresa a lo largo de un día de operaciones se mueve de forma continua pero aleatoria. Si tomamos $X_t =$ el precio de la acción al tiempo t es natural pensar que $(X_t)_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico.
  1. **Espacio de Parámetros.** $I = [0, 5000]$.
  2. **Espacio de Estados.** $S = [0, \infty)$.
  3. **Espacio de Probabilidad?**