Tarea 2
Procesos Estocásticos I

Prof. Rafael Miranda Cordero

Aydte. Fernando Avitúa Varela

4 de septiembre del 2023

Entrega: 11 de septiembre

1. Describe un problema de tu vida que se pueda modelar a través de una cadena de Markov estacionaria y uno que se pueda modelar con una no estacionaria. Describe la función de transición de la estacionaria.

   Ejemplo para la no estacionaria: X_n representa el número de minutos que falta para llegar a la escuela y cada variable aleatorio va de un modo de transporte al que sigue.

2. Para una caminata con parámetros $1 > p, q, r > 0$ de su elección realice lo siguiente.

   a) Usa el Teorema Central del límite (o la desigualdad de Markov para dar una cota) para calcular la probabilidad de que su cadena se encuentre a una desviación estándar del origen para $X_{1,000}$.

   b) Realice $10,000$ simulaciones de tu cadena, graficalas y observa para cada una en que estado se encuentra $X_{1,000}$.

   c) Contrasta el valor teórico del primer inciso contra el obtenido con las $10,000$ simulaciones del segundo inciso. ¿Que tan buena es la aproximación?

3. Supón que tenemos un proceso estocástico parecido al de la cadena de dos estadmos que vimos en las notas, sólo que ahora cada paso se cambian las probabilidades de pasar de un estado a otro de acuerdo a si la n es par o impar. Es decir tenemos la siguiente matriz de transición

$$M_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}\left[X_{n+1} = 0 | X_n = 0\right] & \mathbb{P}\left[X_{n+1} = 0 | X_n = 1\right] \\ \mathbb{P}\left[X_{n+1} = 1 | X_n = 0\right] & \mathbb{P}\left[X_{n+1} = 1 | X_n = 1\right] \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - p_n & q_n \\ p_n & 1 - q_n \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$p_n = \begin{cases} p_0 \text{ Si n es par} \\ p_1 \text{ Si n es impar} \end{cases} \qquad q_n = \begin{cases} q_0 \text{ Si n es par} \\ q_1 \text{ Si n es impar} \end{cases} \tag{3}$$

donde $p_0, p_1, q_0, q_1 \in (0, 1)$.

a) ¿Este proceso es estacionario?

b) Considera las siguientes variables:

1) $Y_n = X_{2(n+1)} - X_{2n}$

2) $Z_n = X_{2n+3} - X_{2n+1}$

¿Describen procesos estacionarios? ¿Cuál es su matriz de transición?

c) Responde las mismas preguntas de las siguientes variables

1) $W_n = X_n - X_{n-1}, n > 1$

2) $V_n = X_n - X_{n-2}, n > 2$

4. Supón que tienes un ratón que está atrapado en un laberinto con cuatro cámaras como se puede observar en la Figura. El ratón tiene la misma probabilidad de moverse a cada una de las cámaras que están a su lado, es decir, no en diagonal.

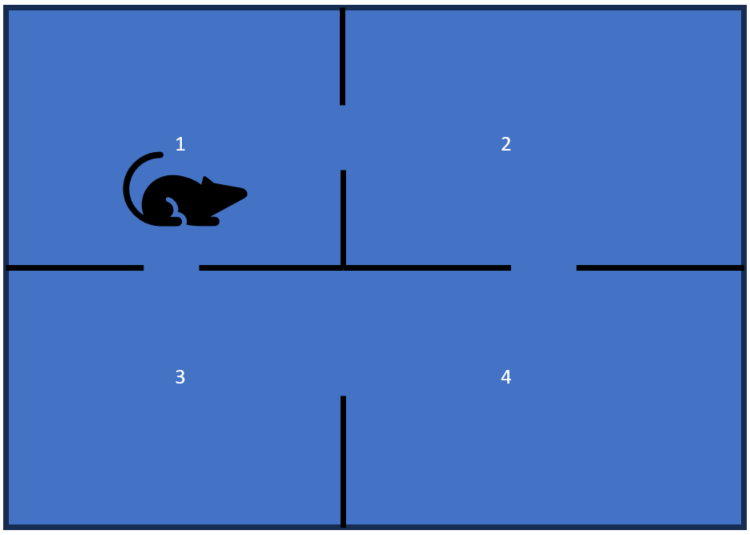

Figura 1: Ratón encerrado en el laberinto. Notar que de la cámara 1 sólo se puede acceder a la 2 y a la 3, pero no a la 4 y así para todas las cámaras, no se puede acceder a la que está en diagonal

a) ¿Cuál es su matriz de transición M_{ij}?

b) ¿Existe un vector de probabilidad $\vec{pi}$ (que suma uno) tal que al multiplicarlo por la matriz se quede igual? Es decir ¿La siguiente ecuación se cumple para algún vector? $\vec{p_i} = \vec{p_i} \cdot M$. ¿Qué podría significar este vector?

5. Suponga que tiene dos cajas y $2d$ bolas, de las cuales d son negras y d son rojas. Inicialmente, d de las bolas son puestas en la caja 1 y el resto en la caja 2. En cada ensayo una bola es elegida de cada una de las cajas y cada una de ellas son colocadas en la caja opuesta. Sea X_0 el número de bolas negras que se encuentran inicialmente en la caja 1, y para $n \geq 1$, sea X_n el número de bolas negras en la caja 1 después de n ensayos. Encuentre la función de transición de la cadena de Markov $\{X_n : n \geq 0\}$. ¿Este proceso es una caminata aleatoria?, ¿puede usted determinar la función de densidad de X_n?.

6. Un algoritmo aleatorio de búsqueda del estado cero opera del siguiente modo: si se encuentra en el estado k en algún momento, entonces el estado del algoritmo al siguiente paso es aleatorio con distribución uniforme en el conjunto $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Encuentre el número esperado de pasos en los que el algoritmo alcanza el estado cero cuando inicia en el estado k.

7. Decimos que una matriz cuadrada P es doblemente estocástica si tanto ella como su matriz transpuesta son matrices estocásticas.

   a) Si P y Q dos matrices estocásticas (o doblemente estocásticas) de la misma dimensión, entonces PQ también es estocástica (o doblemente estocástica).

   b) Si la matriz de transición de una cadena de Markov es simétrica, ¿Cómo es la función de transición de la cadena? y ¿Cómo es la función de transición de n pasos de la cadena?.

   c) Demuestre que una matriz estocástica simétrica es doblemente estocástica. ¿Es cierto el recíproco?.

   d) Demuestre que toda matriz estocástica tiene siempre al número uno como valor propio.

8. Sea $\{X_n : n \in \mathbf{N}\}$ una cadena de Markov con espacio de estados $S \subseteq \{0, 1, 2 \ldots\}$ y cuya función de transición P es tal que:

$$\sum_y yP(x,y) = Ax + B \text{ con } x \in S$$

   para algunas constantes A y B.

   a) Muestre que $\mathbf{E}[X_{n+1}] = A\mathbf{E}[X_n] + B$.

   b) Si $A \neq 1$, entonces

$$\mathbf{E}[X_n] = \frac{B}{1-A} + A^n \left(\mathbf{E}[X_0] - \frac{B}{1-A} \right).$$

9. Sea $\{X_n : n \in \mathbf{N}\}$ una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{0, 1, 2\}$ y con matriz de probabilidades de transición

$$P = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.3 & 0.3 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \\ 0.7 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}.$$

Calcule

a) $\mathbf{P}(X_2 = 0, X_1 = 0 | X_0 = 1)$.

b) $\mathbf{P}(X_3 = 1, X_2 = 1 | X_1 = 2)$.

10. Demueste que

a) $\mathbf{P}_x\left(T_y = n + 1\right) = \sum_{z \neq y} P(x, z) \mathbf{P}_z\left(T_y = n\right)$.

b) $\mathbf{P}_x\left(T_y \leq n + 1\right) = P(x, y) + \sum_{z \neq y} P(x, z) \mathbf{P}_z\left(T_y \leq n\right)$.

c) $\rho_{xy} = P(x, y) + \sum_{z \neq y} P(x, z) \rho_{zy}$.

Donde $\rho_{xy} = \mathbf{P}_x\left(T_y < \infty\right)$.