Examen Parcial II
Procesos Estocásticos I

Prof. Rafael Miranda Cordero Aydte. Fernando Avitúa Varela

26 de octubre 2023

Responda 3 de los siguientes problemas. Argumente cuidadosamente sus respuestas.

1. Dé un ejemplo de una cadena de Markov irreducible y transitoria.
2. Diga si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos. Argumente su respuesta.
   a) Una cadena de Markov con espacio de estados finito puede tener todos sus estados transitorios.
   b) Una cadena de Markov con espacio de estados finito siempre tiene al menos un distribución estacionaria.
   c) Los estados recurrentes nulos solo pueden existir en cadenas de Markov con espacio de estados infinito.
3. Considere una cadena de Markov sobre $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ con matriz de transición dada por
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$
   determine las clases de comunicación de la cadena.
   a) Determine cuales clases son de transitorios y cuales son de recurrentes.
   b) Calcule las probabilidades de absorición de los estados transitorios.
   c) Calcule las distribuciones estacionarias concentradas en las clases de comunicación de recurrentes.
4. (Repair Chain). Una maquina tiene tres piezas que son críticas para su funcionamiento y son susceptibles a fallar, no obstante la maquina puede continuar funcionando siempre y cuando

dos de estas piezas continúen trabajando. Cuando dos pieza se rompen, ellas son reemplazadas y la maquina regresa a sus funciones usuales al día siguiente. Considere X_n la variable aleatoria que nos dice cuales piezas están rotas en el día n, es decir, si las piezas las numeramos como 1,2 y 3, entonces X_n toma el valor 0 si ninguna pieza esta fallando, el valor i si la pieza rota es la pieza $i = 1, 2, 3$ y es la única pieza rota ese día, el valor 12 (entiéndase como 1-2) si las piezas 1 y 2 están fallando ese día y lo análogo para los valores 13 (1-3) y 23 (2-3). Asumimos que las piezas 1, 2 y 3 pueden fallar con probabilidad 0.01, 0.02 y 0.04 respectivamente, pero que no pueden fallar dos el mismo día. En este contexto, la colección $\{X_n : n \geq 0\}$ puede ser considerada una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{0, 1, 2, 3, 12, 13, 23\}$ y matriz de transición como la de la figura 1. Si operaremos la máquina por 1,800 días (cerca de 5 años) ¿aproximadamente cuantas piezas del tipo 1, 2 y 3 usaremos?

Sugerencia: Utilice el hecho que $N_n(y)/n \to 1/m_y$ c.s. como $n \to \infty$ si y es recurrente positivo.

	0	**1**	**2**	**3**	**12**	**13**	**23**
0	0.93	0.01	0.02	0.04	0	0	0
1	0	0.94	0	0	0.02	0.04	0
2	0	0	0.95	0	0.01	0	0.04
3	0	0	0	0.97	0	0.01	0.02
12	1	0	0	0	0	0	0
13	1	0	0	0	0	0	0
23	1	0	0	0	0	0	0

Figura 1: