Tarea 5
Procesos Estocásticos I

Prof. Rafael Miranda Cordero

Aydte. Fernando Avitúa Varela

13 de octubre del 2023

Entrega: 19 de octubre

1. Considere una cadena de Markov con espacio de estados S y $y \in S$ un estado. Para cada $r \in \mathbf{N}_{\geq 1}$ definimos el tiempo de la r-ésima visita como

$$T_y^r = \text{mín}\{n \geq 1 : N_n(y) = r\}$$

y definimos los tiempos "inter-arrivo" como $W_y^r = T_y^r - T_y^{r-1}$ si $r > 1$ y $W_y^1 = T_y^1 = T_y$ si $r = 1$. Demuestre que las variables $\left\{W_y^r : r \geq 1\right\}$ son independientes e idénticamente distribuidas.

2. Para la cadena de Ehrenfest

   a) Demuestre que existe una única distribución estacionario y indique cual es.

   b) Suponga que en la cadena de Ehrenfest todas las bolas inicialmente están en la segunda caja (la cadena empieza en $X_0 = 0$). Encuentre la cantidad de tiempo esperada para que la cadena vuelva a dicho estado.

3. Una partícula se mueve de acuerdo a una cadena de Markov sobre $S = \{1, 2, 3, \ldots, c + d\}$, donde c y d son enteros positivos. Al iniciar en cualquiera de los primeros c estados, la partícula salta en una transición a un estado elegido uniformemente entre los últimos d estados. Similarmente, si la partícula se encuentra en alguno de los últimos d estados, la partícula salta en una transición a un estado elegido uniformemente entre los primeros c.

   a) Muestre que la cadena es irreducible.

   b) Encuentre la distribución estacionaria.

4. Suponga que una cadena de Markov con espacio de estados finito tiene un matriz de transición doblemente estocástica. Si la cadena es irreducible, ¿cuál es su distribución estacionaria?.

5. Considere una cadena de Markov sobre $S = \{0, 1, 2, 3\}$ con matriz de transición dada por

$$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

claramente esta cadena está conformada solo por dos clases cerradas irreducibles, $C_0 = \{0, 1\}$ y $C_1 = \{2, 3\}$.

   a) Encuentre una distribución estacionaria π_0 tal que $\pi_0(x) = 0$ si $x \notin C_0$.

   b) Encuentre una distribución estacionaria π_1 tal que $\pi_1(x) = 0$ si $x \notin C_1$.

   c) Concluya que esta cadena tiene una infinidad de distribuciones estacionarias.

6. (Repair Chain). Una maquina tiene tres piezas que son críticas para su funcionamiento y son susceptibles a fallar, no obstante la maquina puede continuar funcionando siempre y cuando dos de estas piezas continúen trabajando. Cuando dos pieza se rompen, ellas son reemplazadas y la maquina regresa a sus funciones usuales al día siguiente. Considere X_n la variable aleatoria que nos dice cuales piezas están rotas en el día n, es decir, si las piezas las numeramos como 1,2 y 3, entonces X_n toma el valor 0 si ninguna pieza esta fallando, el valor i si la pieza rota es la pieza $i = 1, 2, 3$ y es la única pieza rota ese día, el valor 12 (entiéndase como 1-2) si las piezas 1 y 2 están fallando ese día y lo análogo para los valores 13 (1-3) y 23 (2-3). Asumimos que las piezas 1, 2 y 3 pueden fallar con probabilidad 0.01, 0.02 y 0.04 respectivamente, pero que no pueden fallar dos el mismo día. En este contexto, la colección $\{X_n : n \geq 0\}$ puede ser considerada una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{0, 1, 2, 3, 12, 13, 23\}$ y matriz de transición como la de la figura 1. Si operaremos la máquina por 1,800 días (cerca de 5 años) ¿aproximadamente cuantas piezas del tipo 1, 2 y 3 usaremos?

   Sugerencia: Utilice el hecho que $N_n(y)/n \to 1/m_y$ c.s. como $n \to \infty$ si y es recurrente positivo.

	0	**1**	**2**	**3**	**12**	**13**	**23**
0	0.93	0.01	0.02	0.04	0	0	0
1	0	0.94	0	0	0.02	0.04	0
2	0	0	0.95	0	0.01	0	0.04
3	0	0	0	0.97	0	0.01	0.02
12	1	0	0	0	0	0	0
13	1	0	0	0	0	0	0
23	1	0	0	0	0	0	0

Figura 1: