# 法律声明

- 本课件包括演示文稿、示例、代码、题库、视频和声音等内容，小象学院和主讲老师拥有完全知识产权的权利；只限于善意学习者在本课程使用，不得在课程范围外向任何第三方散播。任何其他人或机构不得盗版、复制、仿造其中的创意及内容，我们保留一切通过法律手段追究违反者的权利。

- 课程详情请咨询
  - 微信公众号：小象
  - 新浪微博：ChinaHadoop

# 动态规划(上)


邹博

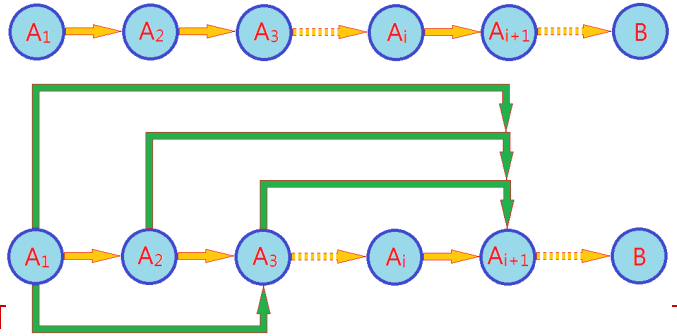
# 主要内容

- 动态规划和贪心的认识
  - 工具：马尔科夫过程
- 动态规划
  - 最长递增子序列LIS
  - 股票最大收益
  - 任务安排问题
  - 操作最少次数
  - 格子取数/走棋盘问题及应用
  - 带陷阱的走棋盘
  - 两次走棋盘问题
  - 字符串的交替连接
  - 词典划分/分割词汇问题

# 认识论

- 认识事物的方法：概念、判断、推理
- 推理中，又分为归纳、演绎。
- 重点考察归纳推理的具体方法。
- 形式化表述：
  - 已知：问题规模为n的前提A
  - 求解/求证：未知解B/结论B
  - 记号：用$A_n$表示“问题规模为n的已知条件”

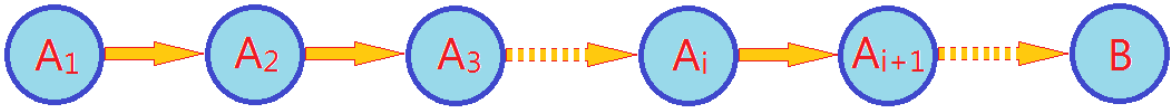
# 对归纳推理的理解



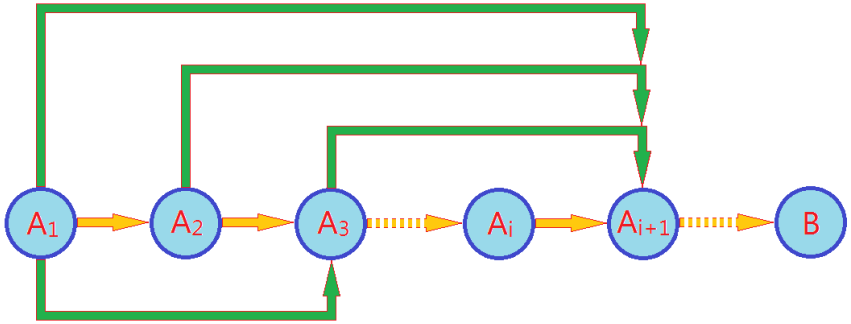

- 若将问题规模降低到0，即已知$A_0$，很容易计算或证明B，则有：$A_0 \rightarrow B$
- 同时，考察从$A_0$增加一个元素，得到$A_1$的变化过程。即：$A_0 \rightarrow A_1$；
  - 进一步考察$A_1 \rightarrow A_2$，$A_2 \rightarrow A_3$ ……$A_i \rightarrow A_{i+1}$
  - 这种方法是(严格的)归纳推理，常常被称作**数学归纳法**。
  - 此时，由于上述推导往往不是等价推导($A_i$和$A_{i+1}$不是互为充要条件)，导致随着i的增加，有价值的前提信息越来越少；为避免这一问题，采取如下方案：
  - $\{A_1\} \rightarrow A_2$，$\{A_1A_2\} \rightarrow A_3$ …… $\{A_1A_2 \ldots A_i\} \rightarrow A_{i+1}$
  - 相对应的，修正后的方法依然是(严格的)归纳推理，有时被称作**第二数学归纳法**。

# 对归纳推理的理解

- 基本归纳法：对于$A_{i+1}$，只需考察前一个状态$A_i$即可完成整个推理过程，它的特点是只要状态$A_i$确定，则计算$A_{i+1}$时不需要考察更前序的状态$A_1 \ldots A_{i-1}$，我们将这一模型称为马尔科夫模型；

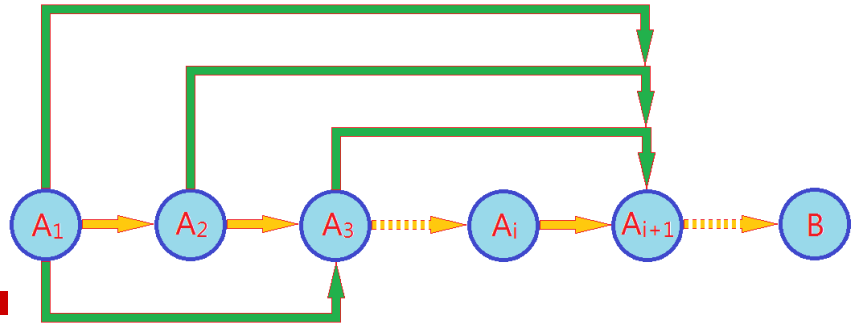



- 高阶归纳法：相应的，对于$A_{i+1}$，需考察前i个状态集$\{A_1 A_2 \ldots A_{i-1} A_i\}$才可完成整个推理过程，往往称之为高阶马尔科夫模型；




- 在计算机算法中，高阶马尔科夫模型的推理，叫做“动态规划”，而马尔科夫模型的推理，对应“贪心法”。

# 以上理解的说明




- 无论动态规划还是贪心法，都是根据A[0...i]计算A[i+1]的过程
  - 计算A[i+1]不需要A[i+2]、A[i+3]……，
  - 一旦计算完成A[i+1]，再后面计算A[i+2]、A[i+3]……时，不会更改A[i+1]的值。
  - 这即无后效性。
- 亦可以如下理解动态规划：计算A[i+1]只需要知道A[0...i]的值，无需知道A[0...i]是通过何种途径计算得到的——只需知道它们当前的状态值本身即可。如果将A[0...i]的全体作为一个整体，则可以认为动态规划法是马尔科夫过程，而非高阶马尔科夫过程。

# 最长递增子序列LIS

- Longest Increasing Subsequence
- 给定长度为N的数组A，计算A的最长的单调递增的子序列(不一定连续)。
  - 如：给定数组A{5,6,7,1,2,8}，则A的LIS为{5,6,7,8}，长度为4。

# 附：使用LCS解LIS问题

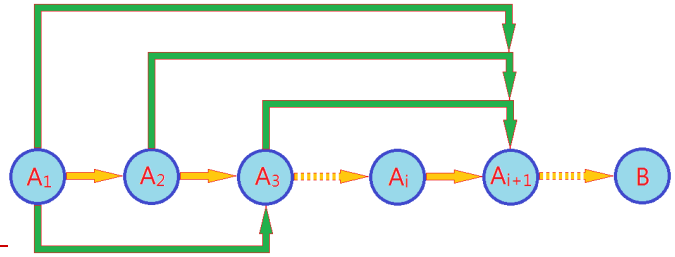
- 原数组为A {5， 6， 7， 1， 2， 8}
- 排序后：A’{1， 2， 5， 6， 7， 8}
- 因为，原数组A的子序列顺序保持不变，而且排序后A’本身就是递增的，这样，就保证了两序列的最长公共子序列的递增特性。如此，若想求数组A的最长递增子序列，其实就是求数组A与它的排序数组A’的最长公共子序列。

# 前缀分析

| Array | 1 | 4 | 6 | 2 | 8 | 9 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LIS | 1 | 2 | 3 | 2 | 4 | 5 | 4 |

- 0： “1”：1
- 1： “14”：2
- 2： “146”：3
- 3： “12”：2
- 4： “1468”：4
- 5： “14689”：5
- 6：？

# 最长递增子序列LIS记号




- 长度为N的数组记为A=$\{a_0a_1a_2...a_{n-1}\}$；
- 记A的前i个字符构成的前缀串为$A_i$=$a_0a_1a_2...a_{i-1}$，以$a_i$结尾的最长递增子序列记做$L_i$，其长度记为b[i]；
- 假定已经计算得到了b[0,1…,i-1]，如何计算b[i]呢？
  - 已知$L_0$ $L_1$…… $L_{i-1}$的前提下，如何求$L_i$？

# 求解LIS

| Array | 1 | 4 | 6 | 2 | 8 | 9 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LIS | 1 | 2 | 3 | 2 | 4 | 5 | 4 |

- 根据定义，$L_i$必须以$a_i$结尾；
- 如果将$a_i$分别缀到$L_0$ $L_1$…… $L_{i-1}$后面，是否允许呢？
  - 如果$a_i \geq a_j$，则可以将$a_i$缀到$L_j$的后面，得到比$L_j$更长的字符串。
- 从而：$b[i]=\{\max(b[j])+1, 0 \leq j < i \text{且} a_j \leq a_i\}$
  - 计算b[i]：遍历在i之前的所有位置j，找出满足条件$a_j \leq a_i$的最大的b[j]+1；
  - 计算得到b[0…n-1]后，遍历所有的b[i]，找出最大值即为最大递增子序列的长度。
- 时间复杂度为$O(N^2)$。

# Code1

```
int LIS1(const int* p, int length)
{
    int* longest = new int[length];
    int i,j;

    for(i = 0; i < length; i++)
        longest[i] = 1;

    int nLis = 1;
    for(i = 1; i < length; i++)
    {
        for(j = 0; j < i; j++)
        {
            if(p[j] <= p[i])
            {
                longest[i] = max(longest[i], longest[j]+1);
            }
        }
        nLis = max(nLis, longest[i]);
    }
    delete[] longest;
    return nLis;
}
```

# LIS的思考

- 思考：如何求最大递增子序列本身？
  - 记录前驱

| Array | 1 | 4 | 6 | 2 | 8 | 9 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| LIS | 1 | 2 | 3 | 2 | 4 | 5 | 4 |

# LIS Code split

```
int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
    int array[] = {1,4,5,6,2,3,8,9,10,11,12,12,1};
    int size = sizeof(array)/sizeof(int);
    int* pre = new int[size];
    int nIndex;
    int max = LIS(array, size, pre, nIndex);
    vector<int> lis;
    GetLIS(array, pre, nIndex, lis);
    delete[] pre;
    cout << max << endl;
    Print(&lis.front(), (int)lis.size());
    return 0;
}
```

```
void GetLIS(const int* array, const int* pre,
            int nIndex, vector<int>& lis)
{
    while(nIndex >= 0)
    {
        lis.push_back(array[nIndex]);
        nIndex = pre[nIndex];
    }
    reverse(lis.begin(), lis.end());
}
```

```
#include <vector>
#include <algorithm>
using namespace std;

int LIS(const int* p, int length, int* pre, int& nIndex)
{
    int* longest = new int[length];
    int i,j;

    for(i = 0; i < length; i++)
    {
        longest[i] = 1;
        pre[i] = -1;
    }

    int nLis = 1;
    nIndex = 0;
    for(i = 1; i < length; i++)
    {
        for(j = 0; j < i; j++)
        {
            if(p[j] <= p[i])
            {
                if(longest[i] < longest[j]+1)
                {
                    longest[i] = longest[j]+1;
                    pre[i] = j;
                }
            }
        }
        if(nLis < longest[i])
        {
            nLis = longest[i];
            nIndex = i;
        }
    }

    delete[] longest;

    return nLis;
}
```

```
void Print(int* p, int size)
{
    for(int i = 0; i < size; i++)
        cout << p[i] << '\t';
    cout << '\n';
}
```

# O(NlogN)的最长递增子序列算法

- 对于数组A={1,4,6,2,8,9,7}
- 1
- 1,4
- 1,4,6
- 1,2,6
- 1,2,6,8
- 1,2,6,8,9
- 1,2,6,7,9

# Code2

```
int LIS(const int* a, int size)
{
    int* b = new int[size];
    int s = 0;
    int i;
    for(i = 0; i < size; i++)
        Insert(b, s, a[i]);
    delete[] b;
    return s;
}

int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
    int a[] = {5,6,7,1,2,8};
    int size = sizeof(a) / sizeof(int);
    int len = LIS(a, size);
    cout << len << endl;
    return 0;
}
```

```
void Insert(int* a, int& size, int x)
{
    if(size <= 0)
    {
        a[0] = x;
        size++;
        return;
    }
    int low = 0;
    int high = size-1;
    int mid;
    while(low <= high)
    {
        mid = (low+high)/2;
        if(x < a[mid])
            high = mid-1;
        else if(x >= a[mid])
            low = mid+1;
    }

    if(low >= size)
    {
        a[size] = x;
        size++;
    }
    else
    {
        if(a[low] < x)
            a[low+1] = x;
        else
            a[low] = x;
    }
}
```

# 进一步思考

- 如果使用该贪心法，如何计算LIS本身？
- 方案：仍然是记录前驱。

# Code3

```
int LIS(const int* a, int size)
{
    int* b = new int[size];     //足够大的缓冲区
    int s = 0;                  //缓冲区有效长度
    int* pre = new int[size];   //前驱
    int i;
    for(i = 0; i < size; i++)
        Insert2(b, s, a, i, pre);

    //计算LIS本身
    int cur = b[s-1];   //LIS的最后一个元素
    i = 0;
    while(cur != -1)
    {
        b[i] = a[cur];  //b被挪用于计算LIS
        cur = pre[cur];
        i++;
    }
    reverse(b, b+s);
    Print(b, s);
    delete[] b;
    delete[] pre;
    return s;
}

int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
    int a[] = {1,4,6,2,8,9,7};
    int size = sizeof(a) / sizeof(int);
    int len = LIS(a, size);
    cout << len << endl;
    return 0;
}
```

```
//在缓冲区b[0...size-1]中插入元素a[i]
void Insert2(int* b, int& size, const int* a, int i, int* pre)
{
    if(size <= 0)
    {
        b[0] = i;
        size++;
        pre[i] = -1;
        return;
    }
    int low = 0;
    int high = size-1;
    int mid;
    while(low <= high)
    {
        mid = (low+high)/2;
        if(a[i] < a[b[mid]])
            high = mid-1;
        else if(a[i] >= a[b[mid]])
            low = mid+1;
    }

    if(low >= size)
    {
        b[size] = i;
        pre[i] = b[size-1];
        size++;
    }
    else
    {
        if(a[b[low]] < a[i])
        {
            b[low+1] = i;
            pre[i] = b[low];
        }
        else
        {
            b[low] = i;
            pre[i] = (low==0) ? -1 : b[low-1];
        }
    }
}
```

# 股票最大收益

- 给定数组A[0…N-1]，其中A[i]表示某股票第i天的价格。如果允许最多只进行一次交易(先买一次，再卖一次)，请计算何时买卖达到最大收益，返回最大收益值。
  - 如：[7,1,5,3,6,4]，则最大收益为6-1=5。
  - 如：[7,6,4,3,1]，则最大收益为0。
    - 一路下跌，则最好的方法是不进行交易。

# 思路分析

- 若在第i天卖出，则应该在哪天买入更好？
- 答：在A[0...i-1]的最小值处买入。

# Code

```
int MaxProfit(const int* prices, int size)
{
    int p = 0;
    int mn = prices[0];
    for(int i = 1; i < size; i++)
    {
        mn = min(mn, prices[i-1]);  //p[0...i-1]最小值
        p = max(p, prices[i] - mn);
    }
    return p;
}

int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
    int prices[] = {7, 1, 5, 3, 6, 4};
    cout << MaxProfit(prices, sizeof(prices)/sizeof(int)) << endl;
    return 0;
}
```

# 股票最大收益II

- 给定数组A[0…N-1]，其中A[i]表示某股票第i天的价格。如果允许最多只进行K次交易(先买一次再卖一次算一次交易)，请计算何时买卖达到最大收益，返回最大收益值。
  - 规定买卖不能嵌套，即：买入后，要先卖出才可再买。
- 如：A=[7,1,5,3,6,4]，K=3，则在1,3处买入，5,6处卖出，最大收益为7。

# 算法分析

- dp[k,i]表示最多k次交易在第i天的最大收益。
- 在第i天，有两种选择：要么卖出股票，要不不卖出股票，从而得到状态转移方程：

$$dp[k][i] = \max\left(\begin{array}{c} dp[k][i-1] \\ dp[k-1][j] + prices[i] - prices[j],\ \ j \in [0, i-1] \end{array}\right)$$

# Code

```
int MaxProfitK(const int* prices, int size, int K)
{
    vector<vector<int> > dp(K+1, vector<int>(size, 0));
    int k,i,j;
    for(k = 1; k <= K; k++)
    {
        for(i = 1; i < size; i++)
        {
            dp[k][i] = dp[k][i-1];
            for(j = 0; j < i; j++)
            {
                dp[k][i] = max(dp[k][i], dp[k-1][j] + prices[i]-prices[j]);
            }
        }
    }
    return dp[K][size-1];
}

int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
    int prices[] = {7, 1, 5, 3, 6, 4};
    cout << MaxProfitK(prices, sizeof(prices)/sizeof(int), 3) << endl;
    return 0;
}
```

# 进一步分析

- 代码实现中，交易次数K固定，在计算dp[k][i]时，需要计算i次循环；而状态转移方程可以进一步简化：

$$dp[k][i] = \max\begin{pmatrix} dp[k][i-1] \\ dp[k-1][j] + prices[i] - prices[j], \quad j \in [0, i-1] \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow dp[k][i] = \max\begin{pmatrix} dp[k][i-1] \\ prices[i] + \max\limits_{j \in [0,i-1]} \left( dp[k-1][j] - prices[j] \right) \end{pmatrix}$$

# Code2

```
int MaxProfitK2(const int* prices, int size, int K)
{
    vector<vector<int> > dp(K+1, vector<int>(size, 0));
    int k,i;
    int mx;
    for(k = 1; k <= K; k++)
    {
        mx = dp[k-1][0]-prices[0];
        for(i = 1; i < size; i++)
        {
            dp[k][i] = max(dp[k][i-1], mx+prices[i]);
            mx = max(mx, dp[k-1][i]-prices[i]);
        }
    }
    return dp[K][size-1];
}
```

# 股票最大收益小结

- 时间复杂度是如何从$O(kN^2)$降为$O(kN)$的？
- 如果需要得到最大收益的买卖时间，如何修改代码？

# 任务安排

- 给定一台有m个储存空间的单进程机器；现有n个请求：第i个请求计算时需要占用R[i]个空间，计算完成后，储存计算结果需要占用O[i]个空间(其中O[i]<R[i])。问如何安排这n个请求的顺序，使得所有请求都能完成。
  - 如：m=14，n=2，R[1,2]=[10,8]，O[1,2]=[5,6]。可以先运行第一个任务，计算时占用10个空间，计算完成后占用5个空间，剩余9个空间执行第二个任务；但如果先运行第二个任务，则计算完成后仅剩余8个空间，第一个任务的计算空间就不够了。

# 算法分析

- 第k个任务的计算占用空间加上前面k-1个任务的空间占用量之和，越小越好。从而：

$$\begin{cases} O_1 + O_2 + \cdots + O_j + \cdots + O_{k-1} + R_k \\ O_1 + O_2 + \cdots + O_k + \cdots + O_{k-1} + R_j \end{cases}$$

$$\Rightarrow O_j + R_k \le O_k + R_j$$

$$\Rightarrow R_k - O_k \le R_j - O_j$$

- 得：将任务按照R[i]-O[i]降序排列即可。

# Code

```
int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
    const int N = 2;    //任务数目
    const int M = 14;   //内存数目
    int R[N] = {10,8};
    int O[N] = {5,6};
    bool b = IsTaskable(N, M, R, O);
    cout << (b ? "Yes\n" : "No\n");
    return 0;
}
```

```
typedef struct tagTask
{
    int taskID;
    int RO;

    static bool Compare(const tagTask& t1, const tagTask& t2)
    {
        return t1.RO > t2.RO;
    }
}STask;

bool IsTaskable(int N, int M, const int* R, const int* O)
{
    STask* st = new STask[N];
    int i;
    for(i = 0; i < N; i++)
    {
        st[i].taskID = i;
        st[i].RO = R[i] - O[i];
    }
    sort(st, st+N, STask::Compare);

    int occupy = 0;
    bool bOK = true;
    int k;
    for(i = 0; i < N; i++)
    {
        k = st[i].taskID;
        if(occupy + R[k] > M)
        {
            bOK = false;
            break;
        }
        occupy += O[k];
    }
    delete[] st;
    return bOK;
}
```

# 操作最少次数

- 变量x从1开始变化，规则是：要么变成x+1，要么变成2*x，问：若想将x变成整数2015，最少需要多少次变化？
  - 一种可行的操作变化：
    1,2,3,6,7,14,15,30,31,62,124,125,250,251,502,503,1006,1007,2014,2015
    - 如何思考？
  - 任何一个数字都可以，如：20161006
    - 1001100111010000111101110

# 考察n可以如何得到

- 设dp(n)表示从1到n的最少操作步数
  - 若n为奇数，则n的前一步只能是n-1
  - 若n为偶数，则n的前一步是n-1和n/2的操作步数的小者

$$dp(n)=\begin{cases} dp(n-1)+1, & n\text{是奇数} \\ \min(dp(n-1),dp(n/2))+1, & n\text{是偶数} \end{cases}$$

# Code

```
int CalcCount(int n, int* pCount, int* pPre)
{
    if(n == 1)
        return 0;
    if(n % 2 == 1)  //奇数
    {
        if(pCount[n-1] == 0)
            pCount[n-1] = CalcCount(n-1, pCount, pPre);
        pPre[n] = n-1;
        pCount[n] = pCount[n-1] + 1;
    }
    else    //偶数
    {
        int n2 = n / 2;
        if(pCount[n2] == 0)
            pCount[n2] = CalcCount(n2, pCount, pPre);
        if(pCount[n-1] == 0)
            pCount[n-1] = CalcCount(n-1, pCount, pPre);

        if(pCount[n2] < pCount[n-1])
        {
            pPre[n] = n2;
            pCount[n] = pCount[n2] + 1;
        }
        else
        {
            pPre[n] = n-1;
            pCount[n] = pCount[n-1] + 1;
        }
    }
    return pCount[n];
}
int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
    int N = 2015;
    int* pCount = new int[N+1];
    int* pPre = new int[N+1];
    memset(pCount+1, 0, sizeof(int)*N);
    memset(pPre+1, 0, sizeof(int)*N);
    cout << "2015:\t" << CalcCount(N, pCount, pPre) << endl;

    //求2015的变化过程
    int n = N;
    while(n != 1)
    {
        cout << pPre[n] << '\t';
        n = pPre[n];
    }
    return 0;
}
```

# Code *split*

```
int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
    int N = 2015;
    int* pCount = new int[N+1];
    int* pPre = new int[N+1];
    memset(pCount+1, 0, sizeof(int)*N);
    memset(pPre+1, 0, sizeof(int)*N);
    CalcCount(N, pCount, pPre);

    //求2015的变化过程
    int n = N;
    while(n != 1)
    {
        cout << pPre[n] << '\t';
        n = pPre[n];
    }
    return 0;
}
```

```
int CalcCount(int n, int* pCount, int* pPre)
{
    if(n == 1)
        return 0;
    if(n % 2 == 1)  //奇数
    {
        if(pCount[n-1] == 0)
            pCount[n-1] = CalcCount(n-1, pCount, pPre);
        pPre[n] = n-1;
        pCount[n] = pCount[n-1] + 1;
    }
    else    //偶数
    {
        int n2 = n / 2;
        if(pCount[n2] == 0)
            pCount[n2] = CalcCount(n2, pCount, pPre);
        if(pCount[n-1] == 0)
            pCount[n-1] = CalcCount(n-1, pCount, pPre);

        if(pCount[n2] < pCount[n-1])
        {
            pPre[n] = n2;
            pCount[n] = pCount[n2] + 1;
        }
        else
        {
            pPre[n] = n-1;
            pCount[n] = pCount[n-1] + 1;
        }
    }
    return pCount[n];
}
```

# 思考贪心法

$$dp(n)=\begin{cases} dp(n-1)+1, & n是奇数 \\ \min(dp(n-1),dp(n/2))+1, & n是偶数 \end{cases}$$

- 1,2,3,6,7,14,15,30,31,62,124,125,250,251,502,503,1006,1007,2014,2015
- 从后向前看：
  - 如果当前数是奇数，则减一
  - 如果是偶数，则折半——没有发生减一的情况
- 若n为偶数
  - 选择减一操作，则n-1为奇数，对n-1的操作必然只能减一得到n-2，若此刻选择折半，则变成(n/2)-1：经历了3步；
  - 选择折半操作，然后再选择减一操作，则变成(n/2)-1：经历了2步；
- 结论：若n为偶数，则折半肯定能得到更少的步数

# Code2

$$dp(n)=\begin{cases} dp(n-1)+1, & n\text{是奇数} \\ dp(n/2)+1, & n\text{是偶数} \end{cases}$$

```
int CalcCount2(int n)
{
    if(n == 1)
        return 0;
    list<int> path;
    while(n > 1)
    {
        if(n % 2 == 0)  //偶数
            n /= 2;
        else            //奇数
            n--;
        path.push_back(n);
    }
    path.reverse();

    //输出
    int s = (int)path.size();
    cout << s << ":\n";
    list<int>::const_iterator iEnd = path.end();
    for(list<int>::const_iterator i = path.begin(); i != iEnd; i++)
        cout << *i << '\t';
    cout << endl;
    return s;
}
```

# 贪心思想的手动计算方案

- 原则：奇数减一、偶数折半
  - 是奇数，则减一以后是偶数
- 2015的二进制：11111011111
  - 对于1：减一成0，然后右移扔掉；
    - 共9个，(除了最高位1以外)，每个1需要2次操作
  - 对于0：右移扔掉；
    - 共1个，每个0需要1次操作
  - n==1则停止
- 9*2 + 1*1= 19次

# 再进一步思考

- 如果将1换成100，贪心法应该如何修改？
  - 变量x从100开始变化，规则是：要么变成x+1，要么变成2*x，问：若想将x变成整数2015，最少需要多少次变化？
  - 提示：若将100改成1949，显然，2015只能依次减一——一旦折半，将小于1949。

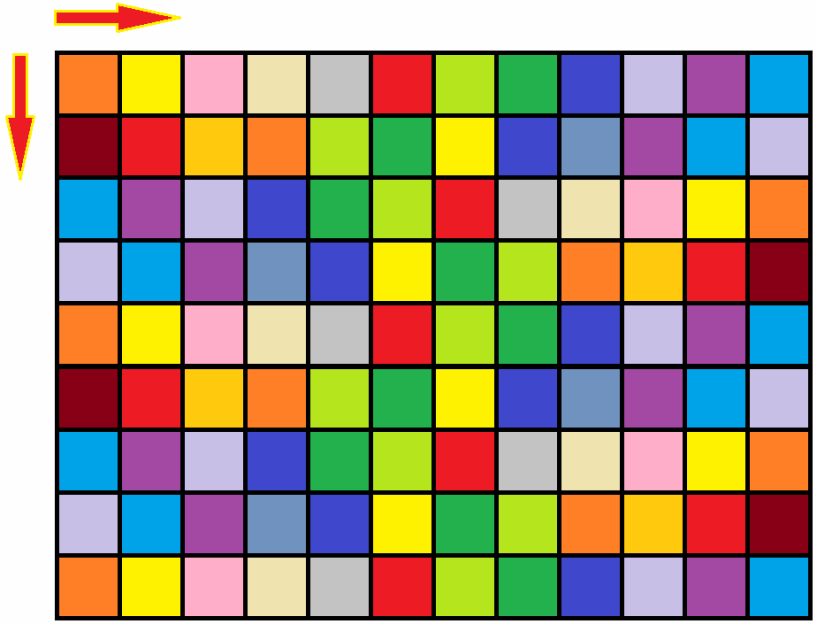
# 附：Code

```
int CalcCount4(int n, list<int>& path)
{
    if(n == stop)
        return 0;
    while(n > stop)
    {
        if((n % 2 == 0) && (n/2 > stop))
            n /= 2;
        else    //n为奇数，或者比较小
            n--;
        path.push_back(n);
    }

    path.reverse();
    return (int)path.size();
}
```

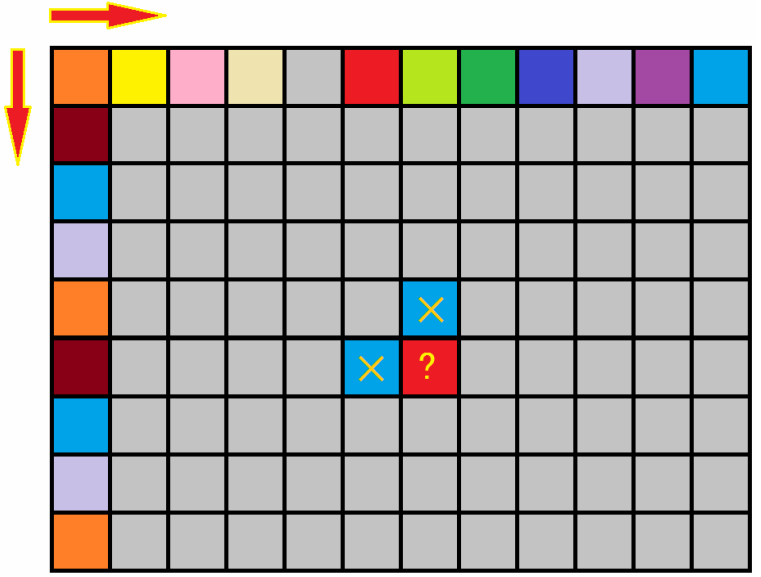
```
int stop = 100;
int CalcCount3(int n, int* pCount, int* pPre)
{
    if(n == stop)
    {
        pCount[n] = 0;
        return 0;
    }
    if(n % 2 == 1)  //奇数
    {
        if(pCount[n-1] == 0)
            pCount[n-1] = CalcCount3(n-1, pCount, pPre);
        pPre[n] = n-1;
        pCount[n] = pCount[n-1] + 1;
    }
    else    //偶数
    {
        int n2 = n / 2;
        if((n2 >= stop) && (pCount[n2] == 0))
            pCount[n2] = CalcCount3(n2, pCount, pPre);
        if(pCount[n-1] == 0)
            pCount[n-1] = CalcCount3(n-1, pCount, pPre);

        if((n2 >= stop) && (pCount[n2] < pCount[n-1]))
        {
            pPre[n] = n2;
            pCount[n] = pCount[n2] + 1;
        }
        else
        {
            pPre[n] = n-1;
            pCount[n] = pCount[n-1] + 1;
        }
    }
    return pCount[n];
}
```

# 走棋盘/格子取数

- 给定m×n的矩阵，每个位置是一个非负整数，在左上角放一机器人，它每次只能朝右和下走，直到右下角，求所有路径中，总和最小的那条路径。

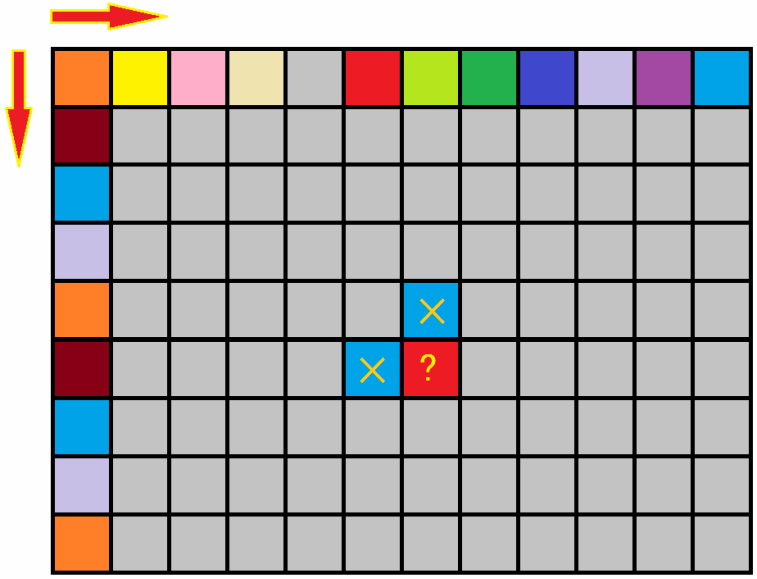


# 状态转移方程




- 走的方向决定了同一个格子不会经过两次。
  - 若当前位于(x,y)处，它来自于哪些格子呢？
  - dp[0,0]=a[0,0] / 第一行(列)累积
  - dp[x,y] = min(dp[x-1,y]+a[x,y],dp[x,y-1]+a[x,y])
  - 即：dp[x,y] = min(dp[x-1,y],dp[x,y-1]) +a[x,y]
- 思考：若将上述问题改成“求从左上到右下的最大路径”呢？

# 状态转移方程



- 状态转移方程：

$$\begin{cases} dp(i,0)=\sum_{k=0}^{i} chess[k][0] \\ dp(0,j)=\sum_{k=0}^{j} chess[0][k] \\ dp(i,j)=\min(dp(i-1,j),dp(i,j-1))+chess[i][j] \end{cases}$$

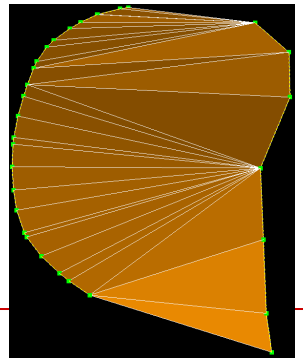
- 滚动数组：

$$\begin{cases} dp(j)=\sum_{k=0}^{j} chess[0][k] \\ dp(j)=\min(dp(j),dp(j-1))+chess[i][j] \end{cases}$$

# Code

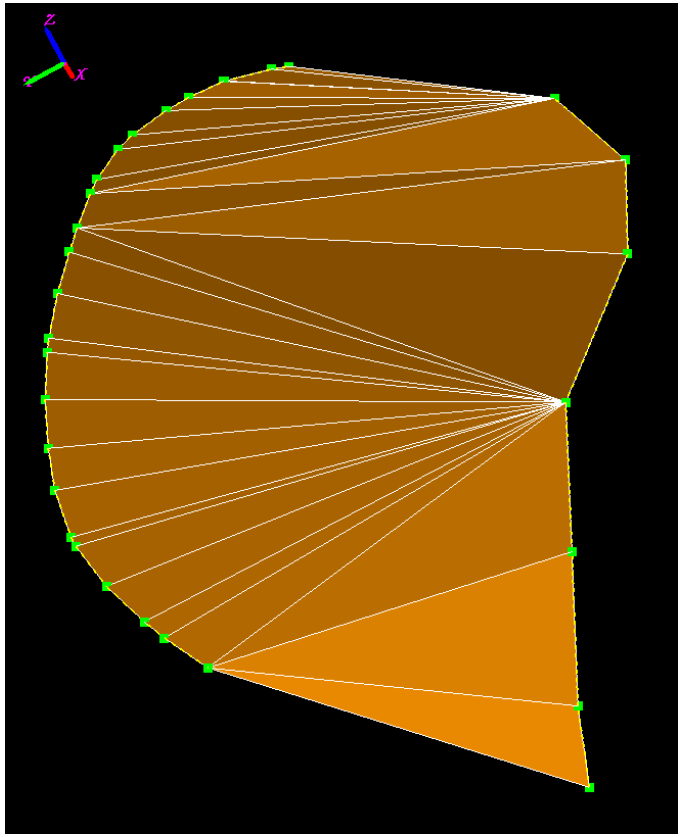
```
int MinPath(vector<vector<int> >& chess, int M, int N)
{
    vector<int> pathLength(N);
    int i,j;

    //初始化
    pathLength[0] = chess[0][0];
    for(j = 1; j < N; j++)
        pathLength[j] = pathLength[j-1] + chess[0][j];

    //依次计算每行
    for(i = 1; i < M; i++)
    {
        pathLength[0] += chess[i][0];
        for(j = 1; j < N; j++)
        {
            if(pathLength[j-1] < pathLength[j])
                pathLength[j] = pathLength[j-1] + chess[i][j];
            else
                pathLength[j] += chess[i][j];
        }
    }
    return pathLength[N-1];
}

int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
    const int M = 10;
    const int N = 8;
    vector<vector<int> > chess(M, vector<int>(N));

    //初始化棋盘：(随机给定)
    int i,j;
    for(i = 0; i < M; i++)
    {
        for(j = 0; j < N; j++)
            chess[i][j] = rand() % 100;
    }
    cout << MinPath(chess, M, N) << endl;
    return 0;
}
```

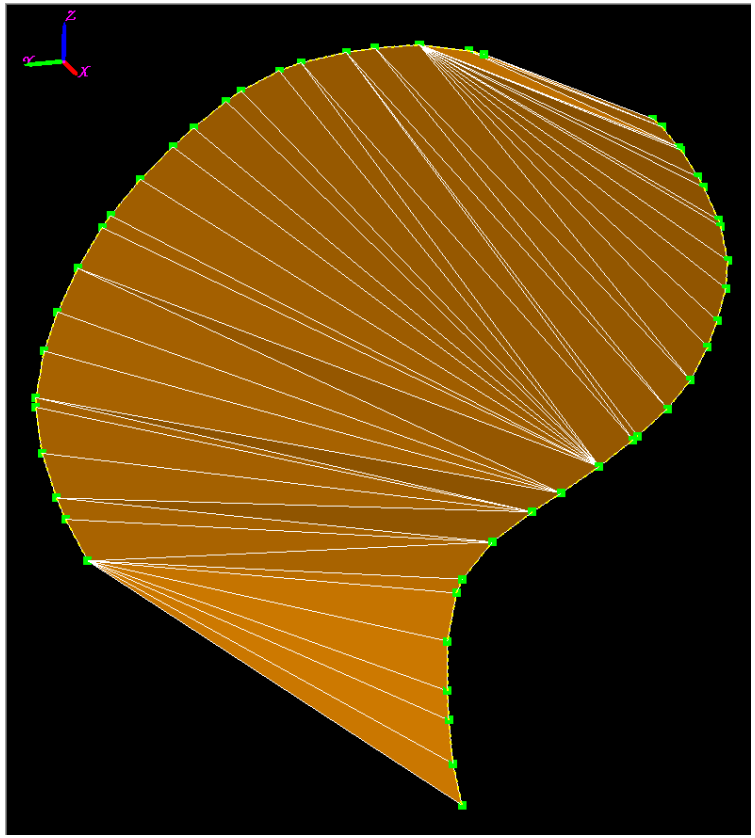
# 实践应用



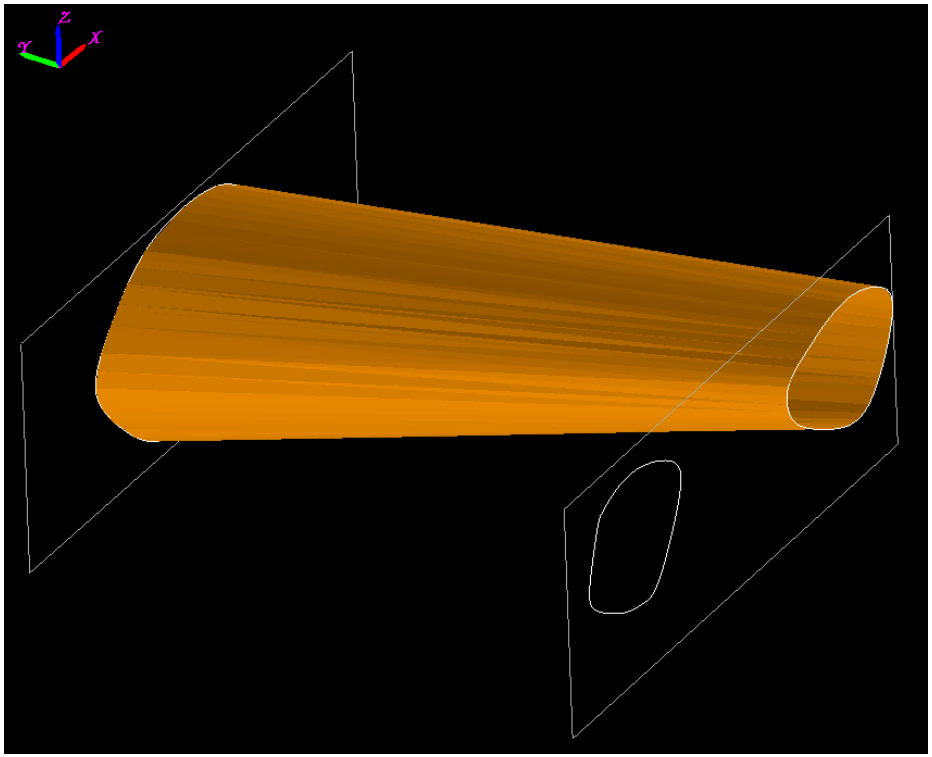
- 给定空间两条曲线，设计经过这两条曲线的曲面，使得该曲面是“最合理”的。
  - 探讨如下方案：两条曲线上的点序列，记做P1[0…N-1]和P2[0…M-1]，计算P1[i]和P2[j]的距离，从而得到二维表格T[N][M]。从T[0][0]开始出发，只能向右和向下走(曲面不能自相交)，从(0,0)到(N-1,M-1)的最短路径，就是曲面的一种“合理连接”。

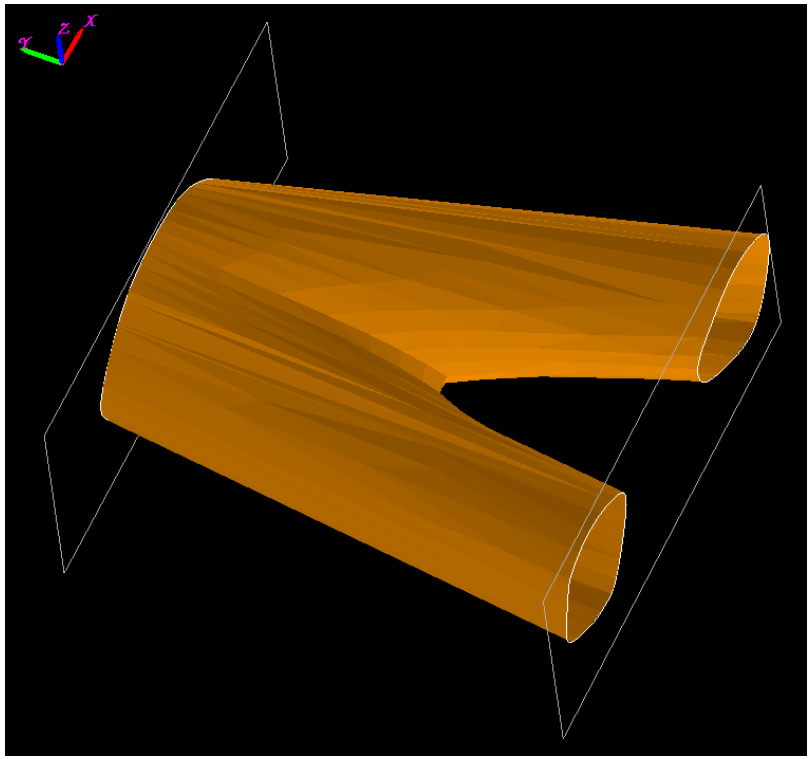
# 实践：实践中的应用



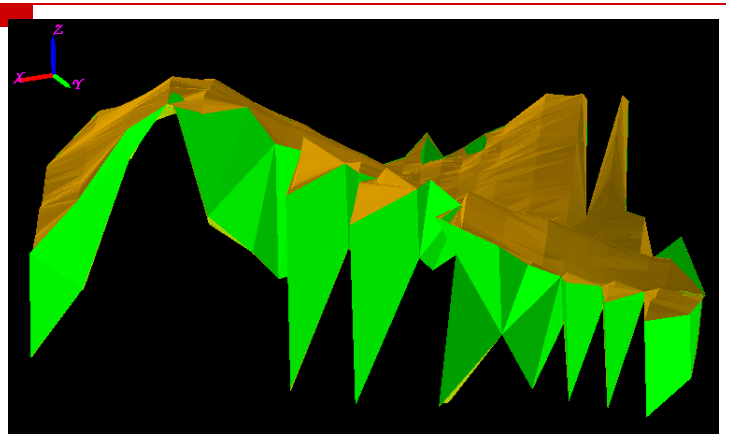
# 如果三维曲线是封闭线...

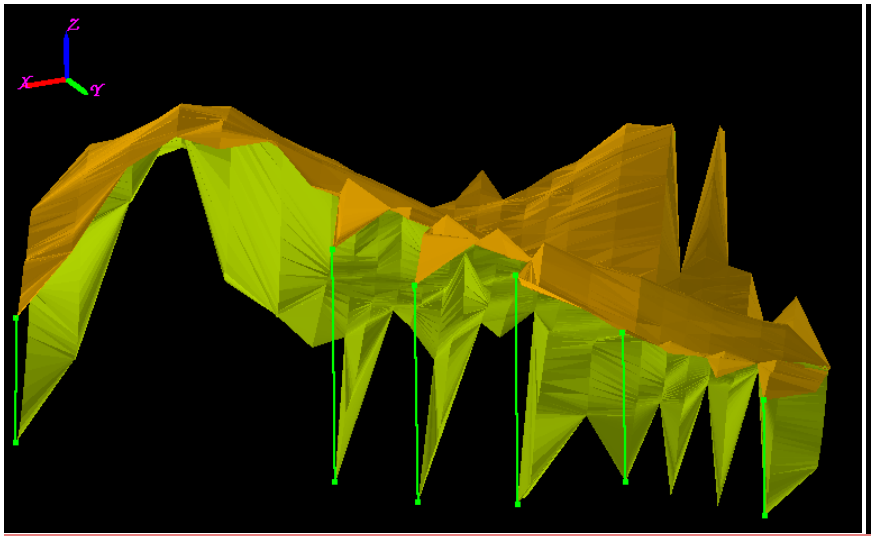


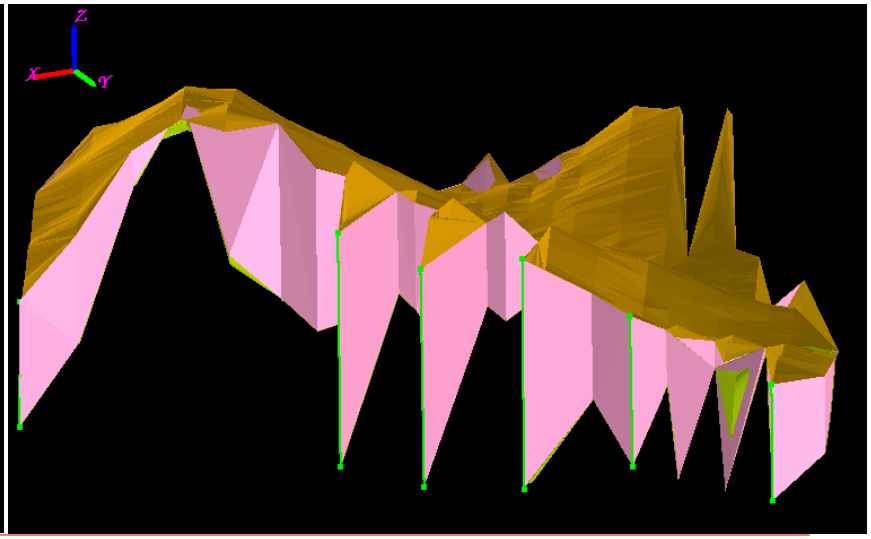


# 经过引导线的曲面——带约束的走棋盘

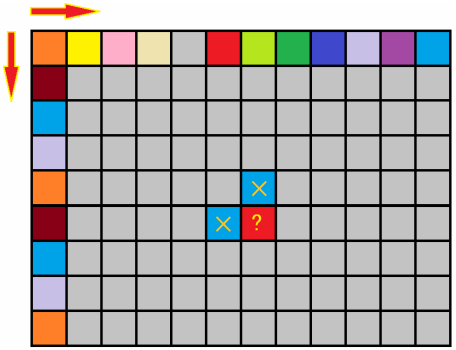
- 右上：未使用引导线
- 左下：输入的引导线
- 右下：过引导线的曲面







# 动态规划递推式可以得到？




- 令dp(x,y)为当前位于(x,y)时有多少种可行路径，则：dp(x,y)=dp(x-1,y)+dp(x,y-1)

$$dp(x,y)=dp(x-1,y)+dp(x,y-1)$$

增加“两个坐标值加和” $\longrightarrow dp(x+y,x,y)=dp(x+y-1,x-1,y)+dp(x+y-1,x,y-1)$

删除最后一维 $\longrightarrow dp(x+y,x)=dp(x+y-1,x-1)+dp(x+y-1,x)$

令$t=x+y$ $\longrightarrow dp(t,x)=dp(t-1,x-1)+dp(t-1,x)$

换个表达方式 $\longrightarrow C_t^x=C_{t-1}^{x-1}+C_{t-1}^x$

令$n=t,m=x$ $\longrightarrow C_n^m=C_{n-1}^{m-1}+C_{n-1}^m$

# 带陷阱的走棋盘

- 有一个n*m的棋盘网格，机器人最开始在左上角，机器人每一步只能往右或者往下移动。棋盘中有些格子是禁止机器人踏入的，该信息存放在二维数组blocked中，如果blocked[i][j]为true，那么机器人不能踏入格子(i,j)。请计算有多少条路径能让机器人从左上角移动到右下角。

# 状态转移方程

- dp[i][j]表示从起点到(i,j)的路径条数。
- 只能从左边或者上边进入一个格子
- 如果(i,j)被占用
  - dp[i][j]=0
- 如果(i,j)不被占用
  - dp[i][j]=dp[i-1][j]+dp[i][j–1]

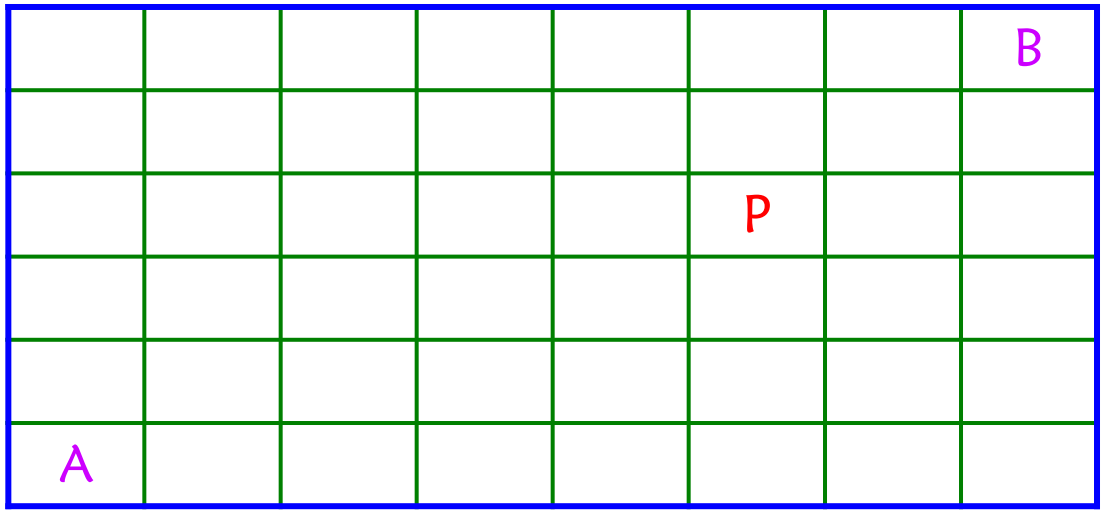
# Code

```
int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
    const int M = 4;
    const int N = 5;
    vector<vector<bool> > chess(M, vector<bool>(N));

    int i,j;
    for(i = 0; i < M; i++)
    {
        for(j = 0; j < N; j++)
            chess[i][j] = ((rand() % 5) != 0);
    }
    cout << PathNumber(chess) << endl;
    return 0;
}
```

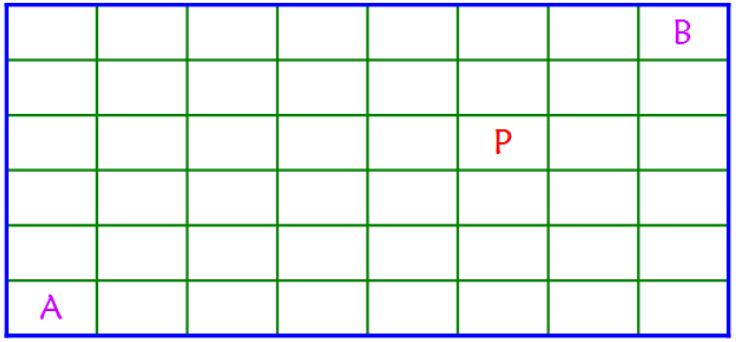
```
int PathNumber(vector<vector<bool> >& chess)
{
    int M = (int)chess.size();      //行
    int N = (int)chess[0].size();   //列
    vector<int> pathNumber(N, 0);
    int i,j;
    pathNumber[0] = chess[0][0] ? 1 : 0;
    for(j = 1; j < N; j++)
    {
        //当前未阻断，并且前一个值可达
        if(chess[0][j] && (pathNumber[j-1] == 1))
            pathNumber[j] = 1;
    }

    for(i = 1; i < M; i++)
    {
        if(!chess[i][0])
            pathNumber[0] = 0;
        for(j = 1; j < N; j++)
        {
            if(!chess[i][j])    //当前被阻断
                pathNumber[j] = 0;
            else                //Cur=Left+Top
                pathNumber[j] += pathNumber[j-1];
        }
    }
    return pathNumber[N-1];
}
```

# 陷阱走棋盘

- 在8×6的矩阵中，每次只能向上或向右移动一格，并且不能经过P。试计算从A移动到B一共有多少种走法。

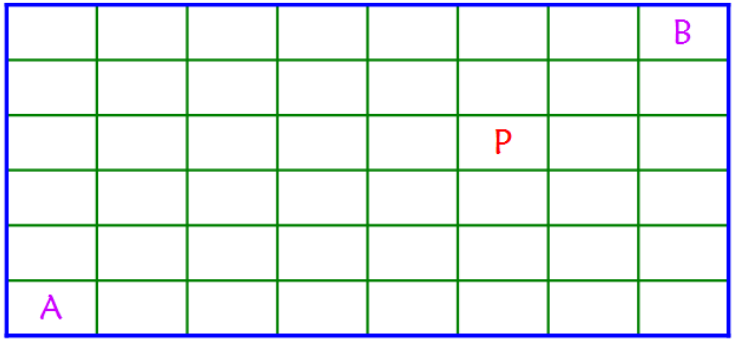


# 解题过程




- 从A到B共需要移动12步，其中7步向右，5步向上，可行走法数目为 $C_{12}^{5}=792$
- 从A到P共需要8步，其中5步向右，3步向上，可行走法数目为 $C_{8}^{5}=56$
- 从P到B共需要4步，其中2步向右，2步向上，可行走法数目为 $C_{4}^{2}=6$
- 则，从A到B经过P的路线有56*6=336种；
- 从A到B不经过P的路线有792-336=456种。

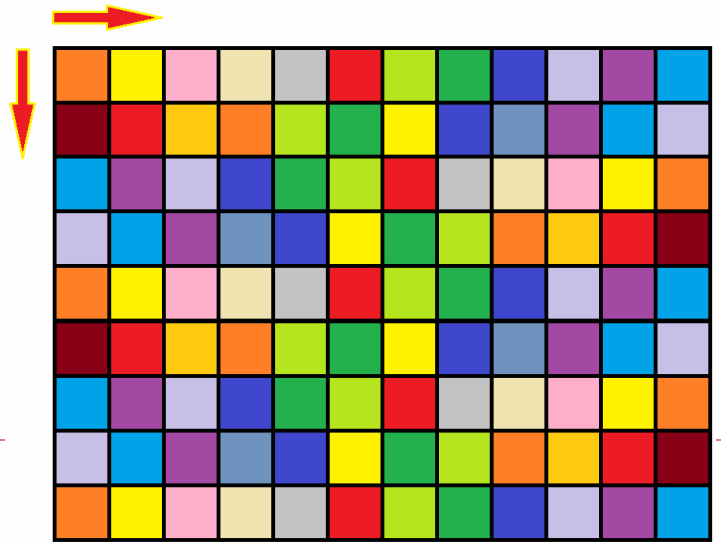
# 方格的可行路径数目




| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 196 | 294 | 456 |
| 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 70 | 98 | 162 |
| 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 0 | 28 | 64 |
| 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

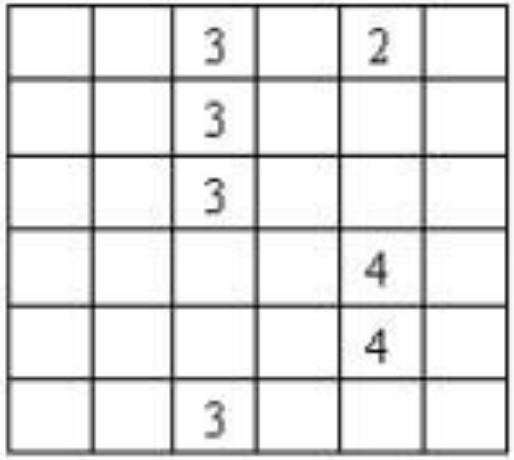
# 两次走棋盘

- 给定m×n的矩阵，每个位置为非负权值，机器人从左上角开始，每次只能朝右和下，走到达右下角。然后每次只能朝左和朝上，走回左上角。求权值总和最大的路径。
  - 若相同格子走过两次，则该位置权值只算一次。

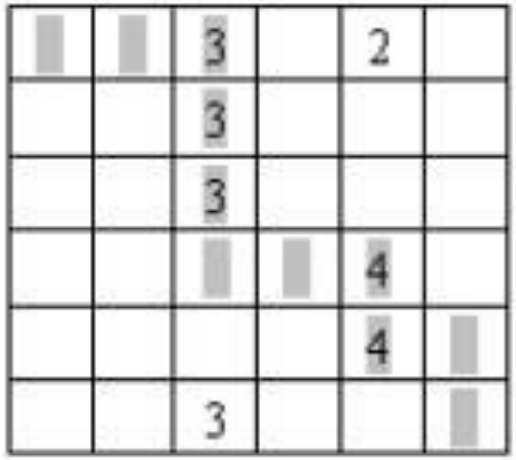


# 分析

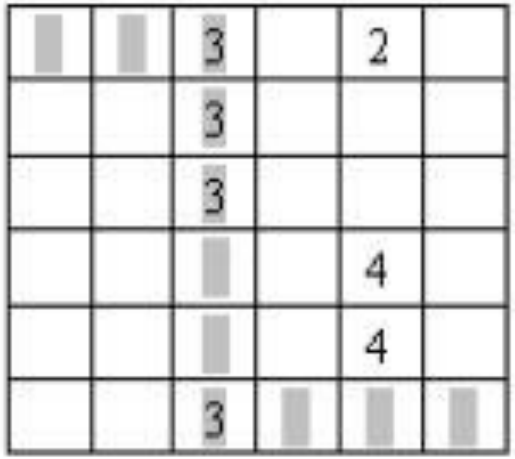
- 贪心不能解决问题




图一




图二




图三

# 分析格网棋盘的特点

- 考察5×7的矩阵棋盘C，其中，C[i,j]表示的值v表示第v步能够到达的位置。

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | X |

# 举例说明状态的定义

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | X |

- 在经过8步后，肯定处于C中编号为8的位置。而C中共有3个编号为8的，它们分别是C的第2、3、4行。故假设第1次经过8步走到了C中的第2行，第2次经过8步走到了C中的第3行，用dp[8,2,3]表示。
- 用dp[s,i,j]记录两次所走的路径获得的最大值，其中s表示走的步数，i和j表示在s步后第1次走的位置和第2次走的位置。由于s=m+n-2，$0 \le i < n$，$0 \le j < m$，所以共有$O(n^3)$个状态。

# 状态转移函数的定义

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | X |

# 状态转移函数的定义

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | X |

# 完整的状态转移函数

- if(i!=j)
  - DP[s,i,j]=Max(
    - DP[s-1,i-1,j-1],
    - DP[s-1,i-1,j],
    - DP[s-1,i,j-1],
    - DP[s-1,i,j])
    - + W[i,s-i] + W[j,s-j]

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | X |

- Else
  - DP[s,i,j]=Max(
    - DP[s-1,i-1,j-1],
    - DP[s-1,i-1,j],
    - DP[s-1,i,j])
    - +W[i,s-i]

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | X |

- 其中W[x,y]表示棋盘位置(x,y)的权值。

# Code

```
const int N = 202;
const int inf = 1000000000;  //无穷大
int dp[N * 2][N][N];
bool IsValid(int step, int x1, int x2, int n)
{
    int y1 = step - x1, y2 = step - x2;
    return ((x1 >= 0) && (x1 < n) && (x2 >= 0) && (x2 < n) && (y1 >= 0) && (y1 < n) && (y2 >= 0) && (y2 < n));
}

int GetValue(int step, int x1, int x2, int n)
{
    return IsValid(step, x1, x2, n) ? dp[step][x1][x2] : (-inf);
}

//dp[step][i][j]表示在第step步两次分别在第i行和第j行的最大得分
int MinPathSum(int a[N][N], int n)
{
    int P = n * 2 - 2; //最终的步数
    int i, j, step;

    //不能到达的位置 设置为负无穷大
    for(i = 0; i < n; ++i)
    {
        for(j = i; j < n; ++j)
        {
            dp[0][i][j] = -inf;
        }
    }
    dp[0][0][0] = a[0][0];

    for(step = 1; step <= P; ++step)
    {
        for(i = 0; i < n; ++i)
        {
            for(j = i; j < n; ++j)
            {
                dp[step][i][j] = -inf;
                if(!IsValid(step, i, j, n))    //非法位置
                    continue;
                //对于合法的位置进行dp
                if(i != j)
                {
                    dp[step][i][j] = max(dp[step][i][j], GetValue(step - 1, i - 1, j - 1, n));
                    dp[step][i][j] = max(dp[step][i][j], GetValue(step - 1, i - 1, j, n));
                    dp[step][i][j] = max(dp[step][i][j], GetValue(step - 1, i, j - 1, n));
                    dp[step][i][j] = max(dp[step][i][j], GetValue(step - 1, i, j, n));
                    dp[step][i][j] += a[i][step - i] + a[j][step - j];  //不在同一个格子，加两个数
                }
                else
                {
                    dp[step][i][j] = max(dp[step][i][j], GetValue(step - 1, i - 1, j - 1, n));
                    dp[step][i][j] = max(dp[step][i][j], GetValue(step - 1, i - 1, j,  n));
                    dp[step][i][j] = max(dp[step][i][j], GetValue(step - 1, i, j,  n));
                    dp[step][i][j] += a[i][step - i]; // 在同一个格子里，只能加一次
                }
            }
        }
    }
    return dp[P][n - 1][n - 1];
}
```

# Code *split*

```
int MinPathSum(int a[N][N], int n)
{
    int P = n * 2 - 2; //最终的步数
    int i, j, step;

    //不能到达的位置 设置为负无穷大
    for(i = 0; i < n; ++i)
    {
        for(j = i; j < n; ++j)
        {
            dp[0][i][j] = -inf;
        }
    }
    dp[0][0][0] = a[0][0];
```

```
for(step = 1; step <= P; ++step)
{
    for(i = 0; i < n; ++i)
    {
        for(j = i; j < n; ++j)
        {
            dp[step][i][j] = -inf;
            if(!IsValid(step, i, j, n))    //非法位置
                continue;
            //对于合法的位置进行dp
            if(i != j)
            {
                dp[step][i][j] = max(dp[step][i][j], GetValue(step - 1, i - 1, j - 1, n));
                dp[step][i][j] = max(dp[step][i][j], GetValue(step - 1, i - 1, j, n));
                dp[step][i][j] = max(dp[step][i][j], GetValue(step - 1, i, j - 1, n));
                dp[step][i][j] = max(dp[step][i][j], GetValue(step - 1, i, j, n));
                dp[step][i][j] += a[i][step - i] + a[j][step - j];
            }
            else
            {
                dp[step][i][j] = max(dp[step][i][j], GetValue(step - 1, i - 1, j - 1, n));
                dp[step][i][j] = max(dp[step][i][j], GetValue(step - 1, i - 1, j,  n));
                dp[step][i][j] = max(dp[step][i][j], GetValue(step - 1, i, j,  n));
                dp[step][i][j] += a[i][step - i]; // 在同一个格子里，只能加一次
            }
        }
    }
}
return dp[P][n - 1][n - 1];
```

# 字符串的交替连接

- 输入三个字符串s1、s2和s3，判断第三个字符串s3是否由前两个字符串s1和s2交错而成，即不改变s1和s2中各个字符原有的相对顺序，例如当s1=“aabcc”，s2=“dbbca”，s3=“aadbbcbcac”时，则输出true，但如果s3=“accabdbbca”，则输出false。
- 换个表述：
  - s1和s2是s3的子序列，且s1∪s2=s3

# 问题说明

- 若s1和s2没有字符重复：遍历s3的同时，考察是否是s1和s2的字符即可；
- 若字符重复：可以用压栈的方式解决；
- 此外，还能用动态规划，代码更为简洁。

# 状态转移函数

- 为算法表述方便，从1开始数：
- 令dp[i,j]表示s3[1...i+j]是否由s1[1...i]和s2[1...j]的字符组成：即dp[i,j]取值范围为true/false
  - s1[i]==s3[i+j]且dp[i-1,j]为真，则dp[i][j]为真；
  - s2[j]==s3[i+j]且dp[i,j-1]为真，则dp[i][j]为真；
  - 其它情况，dp[i][j]为假。
- 可以使用滚动数组降低空间复杂度。

# Code

```
bool IsInterlace(const char* str1, const char* str2, const char* str)
{
    int M = (int)strlen(str1);
    int N = (int)strlen(str2);
    int S = (int)strlen(str);
    if(M+N != S)
        return false;
    vector<vector<bool> > p(M+1, vector<bool>(N+1));
    int i,j;
    p[0][0] = true;
    for(i = 1; i <= M; i++)      //首列
        p[i][0] = (p[i-1][0] && (str1[i-1] == str[i-1]));
    for(j = 1; j <= N; j++)      //首行
        p[0][j] = (p[0][j-1] && (str2[j-1] == str[j-1]));

    for(i = 1; i <= M; i++)
    {
        for(j = 1; j <= N; j++)
        {
            p[i][j] = (p[i-1][j] && (str[i+j-1] == str1[i-1]))
                || (p[i][j-1] && (str[i+j-1] == str2[j-1]));
        }
    }
    return p[M][N];
}
```

# Code2

```
bool IsInterlace2(const char* str1, const char* str2, const char* str)
{
    int M = (int)strlen(str1);
    int N = (int)strlen(str2);
    int S = (int)strlen(str);
    if(M+N != S)
        return false;
    if(M < N)
        return IsInterlace2(str2, str1, str);
    vector<bool> p(N+1);
    int i,j;
    p[0] = true;
    for(j = 1; j <= N; j++)      //首行
        p[j] = (p[j-1] && (str2[j-1] == str[j-1]));

    for(i = 1; i <= M; i++)
    {
        p[0] = (p[0] && (str1[i-1] == str[i-1]));
        for(j = 1; j <= N; j++)
        {
            p[j] = (p[j] && (str[i+j-1] == str1[i-1]))
                || (p[j-1] && (str[i+j-1] == str2[j-1]));
        }
    }
    return p[N];
}
```

# Word Break

- 分割词汇
- 给定一组字符串构成的字典dict和某字符串str，将str增加若干空格构成句子，使得str被分割后的每个词都在字典dict中。返回满足要求的分割str后的所有句子。如：
  - str="catsanddog",
  - dict=["cat","cats","and","sand","dog"]
  - 返回：["cats and dog","cat sand dog"]。

# 分割词汇问题分析

- 记长度为i的前缀串str[0...i-1]有至少一个可行划分，用布尔变量dp[i]表示，则：

$$dp[i]=\exists j\left(dp[j]\&\&str[j\cdots i-1]\in dict,0\le j\le i-1\right)$$

- catsanddog
- 初始条件dp[0]=true；
  - 若划分到最后是空串，则说明该划分是有效的；即默认空串即在字典中。
- 若只需要计算str是否可以划分成句子，直接返回dp[size]即可；该题目还需要返回所有的划分，所以，需要保存“前驱”。
  - 代码中将其记录为棋盘chess。

# Code1

- DP

```
bool WordBreak1(const set<string>& dict, const string& str)
{
    int size = (int)str.length();
    vector<bool> f(size+1); //f[i]: str[0...i-1]是否在词典中

    f[0] = true;
    int i,j;
    for(i = 1; i <= size; i++) //str[0...i-1]: 长度为i
    {
        for(j = i-1; j >= 0; j--)
        {
            if(f[j] && (dict.find(str.substr(j, i-j)) != dict.end()))   //str[j...i-1]
            {
                f[i] = true;
                break;
            }
        }
    }
    return f[size];
}

int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
    set<string> dict;
    dict.insert("cat");
    dict.insert("cats");
    dict.insert("and");
    dict.insert("sand");
    dict.insert("dog");
    dict.insert("dog");
    string str = "catsanddog";
    if(WordBreak1(dict, str))
        cout << "Break is TRUE\n";
    else
        cout << "Break is FALSE\n";
    return 0;
}
```

# Code2 递归

```
bool WordBreak2(const set<string>& dict, const string& str)
{
    int size = (int)str.length();
    if(size == 0)
        return true;

    for(int i = size-1; i >= 0; i--)
    {
        if(WordBreak2(dict, str.substr(0,i))
        &&(dict.find(str.substr(i, size-i)) != dict.end()))
            return true;
    }
    return false;
}
```

# Code3

暂存空间的递归

```
int WordBreak3(const set<string>& dict, const string& str, vector<int>& f)
{
    int size = (int)str.length();
    for(int i = size-1; i >= 0; i--)
    {
        if(f[i] == 0)
            f[i] = WordBreak3(dict, str.substr(0,i), f);

        if((f[i] == 1) && (dict.find(str.substr(i, size-i)) != dict.end()))
            return 1;
    }
    return -1;
}

int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
    set<string> dict;
    dict.insert("cat");
    dict.insert("cats");
    dict.insert("and");
    dict.insert("sand");
    dict.insert("dog");
    dict.insert("dog");
    string str = "catsandsdog";
    int size = (int)str.length();
    vector<int> f(size+1);  //f[i]: str[0...i-1]是否在词典中
    memset(&f.front() + 1, 0, sizeof(int)*size);
    f[0] = 1;
    if(WordBreak3(dict, str, f) == 1)
        cout << "Break is TRUE\n";
    else
        cout << "Break is FALSE\n";
    return 0;
}
```

# Last Code

```
void AddAnswer(const string& str, const vector<int>& oneBreak, vector<string>& answer)
{
    int s = (int)oneBreak.size();
    int size = (int)str.length();
    answer.push_back(string());
    string& sentence = answer.back();
    sentence.reserve(size+s);   //申请足够的内容长度
    int start = 0, end = 0;
    for(int i = s-2; i >= 0; i--)  //oneBreak[size-1]==0, 特殊处理
    {
        end = oneBreak[i];  //别忘了, k=oneBreak[i]的值表示在string[k]的前面添加break
        sentence += str.substr(start, end-start);
        sentence += ' ';
        start = end;
    }
    sentence += str.substr(start, size-start);  //最后一个break
}

//计算str[0...cur-1]的wordbreak有哪些
void FindAnswer(const vector<vector<bool> >& chess, const string& str, int cur, vector<int>& oneBreak, vector<string>& answer)
{
    if(cur == 0)    //叶子
    {
        AddAnswer(str, oneBreak, answer);
        return;
    }
    int size = (int)str.length();
    for(int i = 0; i < cur-1; i++)
    {
        if(chess[cur][i])   //str[i...cur]在词典中
        {
            oneBreak.push_back(i);
            FindAnswer(chess, str, i, oneBreak, answer);
            oneBreak.pop_back();
        }
    }
}

void WordBreak(const set<string>& dict, const string& str, vector<string>& answer)
{
    int size = (int)str.length();
    //chess[i][j]: str[0...i-1]中, 是否可以在第j号元素的前面加break
    vector<vector<bool> > chess(size+1, vector<bool>(size));
    vector<bool> f(size+1); //f[i]: str[0...i-1]是否在词典中

    int i,j;
    f[0] = true;    //空串在词典中
    for(i = 1; i <= size; i++) //str[0...i-1]: 长度为i
    {
        for(j = i-1; j >= 0; j--)
        {
            if(f[j] && (dict.find(str.substr(j, i-j)) != dict.end()))   //str[j...i-1]
            {
                f[i] = true;
                chess[i][j] = true;
            }
        }
    }
    vector<int> oneBreak;   //一种可行的划分
    FindAnswer(chess, str, size, oneBreak, answer); //计算str[0...size-1]的wordbreak有哪些
}

void Print(const vector<string>& answer)
{
    vector<string>::const_iterator itEnd = answer.end();
    for(vector<string>::const_iterator it = answer.begin(); it != itEnd; it++)
        cout << *it << endl;
    cout << endl;
}

int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
    set<string> dict;
    dict.insert("下雨天");
    dict.insert("留客");
    dict.insert("留客天");
    dict.insert("天留");
    dict.insert("留我不");
    dict.insert("我不留");
    dict.insert("留");
    dict.insert("dog");
    string str = "下雨天留客天留我不留";
    vector<string> answer;
    WordBreak(dict, str, answer);
    Print(answer);
    return 0;
}
```

# Main Code

```
//计算str[0...cur-1]的wordbreak有哪些
void FindAnswer(const vector<vector<bool> >& chess, const string& str, int cur,
                vector<int>& oneBreak, vector<string>& answer)
{
    if(cur == 0)    //叶子
    {
        AddAnswer(str, oneBreak, answer);
        return;
    }
    int size = (int)str.length();
    for(int i = 0; i < cur-1; i++)
    {
        if(chess[cur][i])   //str[i...cur]在词典中
        {
            oneBreak.push_back(i);
            FindAnswer(chess, str, i, oneBreak, answer);
            oneBreak.pop_back();
        }
    }
}

void WordBreak(const set<string>& dict, const string& str, vector<string>& answer)
{
    int size = (int)str.length();
    //chess[i][j]: str[0...i-1]中，是否可以在第j号元素的前面加break
    vector<vector<bool> > chess(size+1, vector<bool>(size));
    vector<bool> f(size+1); //f[i]: str[0...i-1]是否在词典中

    int i,j;
    f[0] = true;    //空串在词典中
    for(i = 1; i <= size; i++) //str[0...i-1]：长度为i
    {
        for(j = i-1; j >= 0; j--)
        {
            if(f[j] && (dict.find(str.substr(j, i-j)) != dict.end()))   //str[j...i-1]
            {
                f[i] = true;
                chess[i][j] = true;
            }
        }
    }
    vector<int> oneBreak;   //一种可行的划分
    FindAnswer(chess, str, size, oneBreak, answer); //计算str[0...size-1]的wordbreak有哪些
}
```

# Aux Code

```
void AddAnswer(const string& str, const vector<int>& oneBreak, vector<string>& answer)
{
    int s = (int)oneBreak.size();
    int size = (int)str.length();
    answer.push_back(string());
    string& sentence = answer.back();
    sentence.reserve(size+s);    //申请足够的内容长度
    int start = 0, end = 0;
    for(int i = s-2; i >= 0; i--)   //oneBreak[size-1]==0, 特殊处理
    {
        end = oneBreak[i];  //别忘了, k=oneBreak[i]的值表示在string[k]的前面添加break
        sentence += str.substr(start, end-start);
        sentence += ' ';
        start = end;
    }
    sentence += str.substr(start, size-start);  //最后一个break
}
```

下雨天.留客.天留.我不留

下雨天.留客天.留.我不留

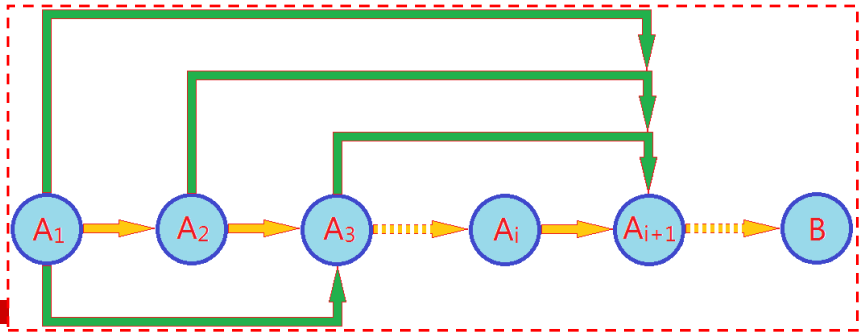
下雨天.留客天.留我不.留

```
void Print(const vector<string>& answer)
{
    vector<string>::const_iterator itEnd = answer.end();
    for(vector<string>::const_iterator it = answer.begin();
        it != itEnd; it++)
        cout << *it << endl;
    cout << endl;
}

int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
    set<string> dict;
    dict.insert("下雨天");
    dict.insert("留客");
    dict.insert("留客天");
    dict.insert("天留");
    dict.insert("留我不");
    dict.insert("我不留");
    dict.insert("留");
    dict.insert("dog");
    string str = "下雨天留客天留我不留";
    vector<string> answer;
    WordBreak(dict, str, answer);
    Print(answer);
    return 0;
}
```

# 进一步思考

- 通过递推关系，很容易写出递归代码或动态规划代码。一般的说，动态规划即利用空间存放小规模问题的解，以期便于总问题的求解。递归的过程中，可以借鉴这种方案，保存中间解的结果，避免重复计算。
- 因为递归计算的中间结果必然是最终结果所需要的，有些情况下，可以避免动态规划中计算所有小规模解造成的浪费。
  - 为什么？
- 如果需要通过计算具体解，则需要回溯；如果需要计算所有解，则需要深度/广度优先搜索。

# 总结




- 动态规划是方法论，是解决一大类问题的通用思路。事实上，很多内容都可以归结为动态规划的思想。
  - KMP中求next数组：已知next[0…i-1]，求next[i]；
  - 最长回文子串Manacher算法中，已知P[0…i-1]求P[i]
  - 隐马尔科夫HMM前向-后向算法、Viterbi算法
- 何时可以考虑使用动态规划：
  - 初始规模下能够方便的得出结论
    - 空串、长度为0的数组、自身等
  - 能够得到问题规模增大导致的变化
    - 递推式——状态转移方程

# 我们在这里

- http://wenda.ChinaHadoop.cn
  - 视频/课程/社区
- 微博
  - @ChinaHadoop
  - @邹博_机器学习
- 微信公众号
  - 小象学院
  - 大数据分析挖掘

感谢大家！

恳请大家批评指正！