Probabilidades I

Introdução

Prof. Me. Lineu Alberto Cavazani de Freitas

CE003 – Estatística II

Departamento de Estatística
Laboratório de Estatística e Geoinformação

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Introdução

- Lidamos diariamente com a ideia de **chance**.
- A todo momento estamos avaliando situações que envolvem algum tipo de **incerteza**.
- **Probabilidade** é uma forma de avaliar matematicamente possibilidades ou chances de ocorrências de eventos.
- Associaremos **chance** à uma ideia, **probabilidade** à um valor.

Tipos de fenômenos

Tipos de fenômenos

- Antes de entrar em probabilidades precisamos caracterizar os tipos de fenômenos que podem ocorrer.
- Os fenômenos podem ser classificados como **determinísticos** e **aleatórios**, dependendo de como ocorre seu desfecho em diversas tentativas.

Fenômenos determinísticos

- Algo que, quando repetido diversas vezes, tem sempre o mesmo desfecho, isto é, o mesmo resultado.
- Não há variabilidade, portanto não se faz necessário usar Estatística.

Exemplo

- Repita o experimento de soltar um peso de um determinada altura pré especificada por diversas vezes. O tempo até o solo vai se alterar?

Fenômenos aleatórios

- Algo que, quando repetido diversas vezes, pode apresentar diferentes desfechos.
- É tratado como aleatório pois antes da execução não há como saber qual dos possíveis resultados será observado.
- Em geral sabemos quais são os possíveis desfechos, mas qual destes desfechos será visto não há como prever.
- Como existe incerteza e variabilidade, Estatística pode ser usada.

Exemplo

- Exemplos clássicos: lançar um dado ou uma moeda.
- Exemplo não trivial: peso de um recém nascido.

Teoria das Probabilidades

Teoria das Probabilidades

- Ramo da matemática que desenvolve e avalia **modelos** para descrever **fenômenos de natureza aleatória**.
- É a base teórica para o desenvolvimento das técnicas estatísticas.
- Tem como objetivo descrever de forma matematicamente adequada o que acontece com fenômenos aleatórios.

Teoria das Probabilidades

- Os métodos de probabilidade fornecem uma forma de estudar e avaliar a chance de ocorrência de eventos e ferramentas para avaliar incerteza.
- Consiste em:
  1. Descrever o conjunto de resultados possíveis do fenômeno.
  2. Atribuir pesos a cada possível resultado.
- Estes pesos refletem as chances de ocorrência e são chamados de probabilidades.

Algumas definições

Algumas definições

- **Experimento aleatório**: procedimento com múltiplos possíveis desfechos em que o resultado não pode ser previsto.
- **Espaço amostral**: conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. Denotaremos por Ω.
  - Possíveis espaços amostrais: $\Omega = \{0,1,2,\ldots\}$; $\Omega = \mathbb{R}$; $\Omega = \mathbb{R}^+$; $\Omega = [0, \infty)$; $\Omega = \{0,1\}$; $\Omega = \mathbb{N}$; $\Omega = \mathbb{N}^+$; $\Omega = [0,1]$; etc.
- **Pontos amostrais**: são os elementos que compõem o espaço amostral (Ω). Denotaremos por ω.
- **Eventos**: todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento aleatório.
  - Um evento simples é qualquer evento constituído por um único elemento do espaço amostral, ou seja, um ponto amostral.

Exemplo

Considere um dado comum, com seis faces numeradas de um a seis, e perfeitamente balanceado. Considere que o experimento aleatório consiste em lançar o dado e registrar o valor da face voltada para cima.

a) Qual é o espaço amostral?
b) O que representa o evento A: face 3 voltada para cima?
c) O que representa o evento B: face par voltada para cima?
d) O que representa o evento C: face maior que 4 voltada para cima?
e) Algum dos eventos solicitados configura um evento simples?

Exemplo

a) Qual é o espaço amostral?
   - $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

b) O que representa o evento A: face 3 voltada para cima?
   - $A = \{3\}$.

c) O que representa o evento B: face par voltada para cima?
   - $B = \{2,4,6\}$.

d) O que representa o evento C: face maior que 4 voltada para cima?
   - $C = \{5,6\}$.

e) Algum dos eventos solicitados configura um evento simples?
   - O evento A é composto por apenas um ponto amostral.

Operações com eventos

Operações com eventos

- Diferentes eventos podem ser definidos com base num único espaço amostral.
- Para definir e efetuar operações que envolvem probabilidades de ocorrência de eventos usa-se a **teoria dos conjuntos**.
- Como ferramenta, pode ser usados os **Diagramas de Venn**.

Figura 1. Diagrama de Venn. Extraído de pixabay.com.

Operações com eventos - união

- **União**: evento que consiste da união de todos os pontos amostrais dos eventos que a compõem.
- Representa a ocorrência de, pelo menos, um dos eventos.
- Considerando dois eventos A e B, a união é representada por $A \cup B$.

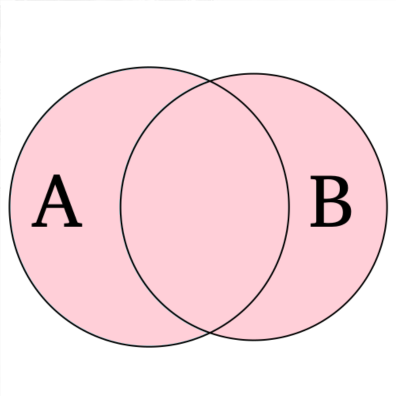

Figura 2. Representação da união de 2 eventos.

Operações com eventos - interseção

- **Interseção**: evento composto pelos pontos amostrais comuns aos eventos que a compõem.
- Representa a ocorrência simultânea dos eventos.
- Considerando dois eventos A e B, a união é representada por $A \cap B$.

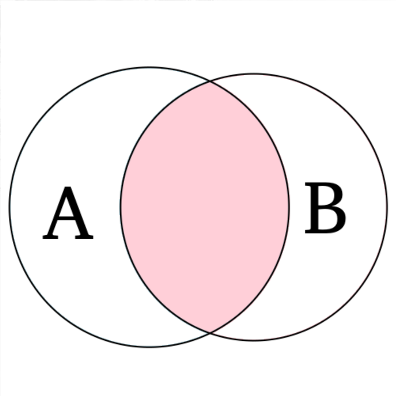

Figura 3. Representação da interseção de 2 eventos.

Alguns tipos especiais de eventos

- **Conjunto vazio**: o conjunto sem elementos.
  - Denotaremos por ϕ.
- **Eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos**:
  - Eventos que possuem interseção nula.
  - Considerando dois eventos A e B, estes eventos são disjuntos se $A \cap B = \phi$.

Cuidado!

- Eventos disjuntos e eventos independentes são coisas diferentes!
- Pode existir dependência entre eventos disjuntos!
- Eventos mutualmente exclusivos são aqueles que não podem ocorrer ao mesmo tempo.
- Eventos independentes ocorrem quando a ocorrência de um não afeta a ocorrência de outro.

Alguns tipos especiais de eventos - eventos complementares

Eventos complementares

- Eventos disjuntos cuja união resulta no espaço amostral.
- Considerando um evento A: $A \cap A^c = \phi$ e $A \cup A^c = \Omega$.

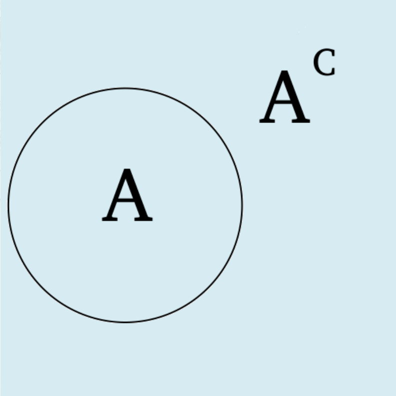

Figura 4. Representação de 2 eventos complementares.

Outros resultados

Com estas operações, vários outros resultados surgem:

- $A \cap \Omega = A$
- $A \cup \Omega = \Omega$
- $A \cap A^c = \phi$
- $A \cup A^c = \Omega$
- $A \cap \phi = \phi$
- $A \cup \phi = A$

- $(A \cap B^c) = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $(A^c \cup B^c)^c = (A \cap B)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

- Foram apresentadas apenas ilustrações e representações de operações envolvendo dois eventos.
- Contudo todas elas se estendem para um número maior de eventos, inclusive infinitos eventos.

Exemplo

Retomando o exemplo do dado. Em que definimos os eventos:

- A: face 3 voltada para cima.
- B: face par voltada para cima.
- C: face maior que 4 voltada para cima.

Quais são as uniões, interseções e complementos?

Exemplo

- $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$
- $A \cup C = \{3, 5, 6\}$
- $B \cup C = \{2, 4, 5, 6\}$
- $A \cap B = \{\phi\}$
- $A \cap C = \{\phi\}$
- $B \cap C = \{6\}$

- $A^c = \{1, 2, 4, 5, 6\}$
- $B^c = \{1, 3, 5\}$
- $C^c = \{1, 2, 3, 4\}$

Definição axiomática de probabilidade

Definição axiomática de probabilidade

- **Probabilidade** é uma **função** que atribui valores numéricos aos eventos do espaço amostral.
- Denotaremos a probabilidade de um evento A por $P(A)$ para qualquer evento A definido num espaço amostral Ω.

1. $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \Omega$.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. $P(\cup_{j=1}^{n})A_j = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$, desde que os A_j's sejam disjuntos.

Definição axiomática de probabilidade

Em outras palavras:

1. A probabilidade de um evento sempre é um valor entre 0 e 1.
2. A probabilidade do espaço amostral é igual a 1.
3. A probabilidade da união de eventos é dada pela soma das probabilidades desde que os eventos sejam disjuntos.

Atribuição de probabilidades aos elementos do espaço amostral

Como atribuir probabilidades aos elementos do espaço amostral?

Existem algumas possibilidades, algumas delas são:

1. Forma clássica.
2. Forma frequentista.
3. Forma subjetiva.

Como atribuir probabilidades aos elementos do espaço amostral?

Forma clássica

- Baseia-se nas características teóricas da realização do fenômeno.

Forma frequentista

- Baseia-se nas frequências (relativas) de ocorrência do fenômeno.
- Repete-se o experimento muitas vezes, registra-se o resultado, avalia-se a frequência, usa esta frequência como valor candidato a probabilidade.

Forma subjetiva

- Baseia-se no julgamento pessoal ou experiência própria sobre a plausibilidade/chance de algo ocorrer.

O que foi visto:

- Introdução à probabilidades.
  - Tipos de fenômenos.
  - Definições.
  - Operações com eventos.
  - Definição axiomática de probabilidade.
  - Atribuição de probabilidades a elementos do espaço amostral.

Próximos assuntos:

- Operações com probabilidades.
  - Regra da adição.
  - Regra do complementar.
  - Probabilidade condicional.
  - Regra do produto.
  - Independência.