

Teorema de Bayes

Partição do espaço amostral, teorema da probabilidade total e teorema de Bayes

Prof. Me. Lineu Alberto Cavazani de Freitas

Departamento de Estatística
Laboratório de Estatística e Geoinformação



Teorema de Bayes

- ▶ Uma das relações mais importantes envolvendo probabilidades condicionais é dada pelo **Teorema de Bayes**, proposto pelo reverendo Thomas Bayes no século XVIII.
- ▶ O teorema de Bayes permite efetuar o **cálculo de probabilidades condicionais** em situações em que o espaço amostral é composto por eventos mutuamente exclusivos e existe um evento que é composto por partes destes elementos.
- ▶ Permite o cálculo da **probabilidade** de um evento ocorrer **com base em uma informação a priori**.



Partição do espaço amostral

Partição do espaço amostral

- ▶ Dizemos que eventos formam uma partição do espaço amostral, se eles não tem interseção entre si, e se sua união é igual ao espaço amostral.
- ▶ Considere os eventos $C_1, C_2, C_3, \dots, C_k$.
- ▶ $C_i \cap C_j = \phi$, para qualquer $i \neq j$. E $\cup_{i=1}^k C_i = \Omega$.

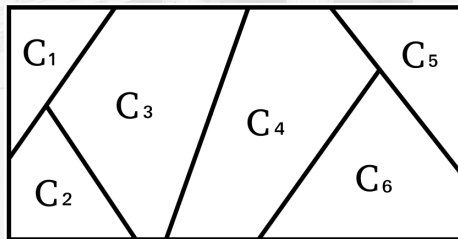


Figura 1. Exemplo de partição de um espaço amostral.

Exemplo

- ▶ Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda F1, 30% de uma outra fazenda F2 e 50% de F3.
- ▶ Suponha que 60% dos chips do computador de uma companhia sejam produzidos pela fábrica A e 40% pela fábrica B.
- ▶ Um hotel obtém carros para seus hóspedes de três agências locadoras: 20% da agência X, 40% da agência Y e 40% da agência Z.
- ▶ Uma companhia produz circuitos em três fábricas, I II e III. A fábrica I produz 40% dos circuitos, enquanto a II e a III produzem 30% cada uma.



Teorema da probabilidade total

Teorema da probabilidade total

- ▶ Suponha um espaço amostral dividido em partições.
- ▶ Suponha um evento A dentro deste espaço que seja formado por pedaços das partições.

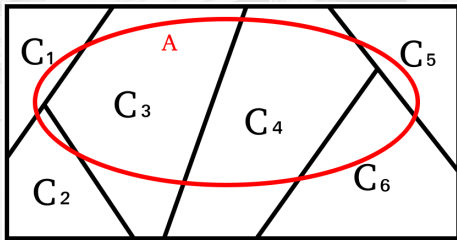


Figura 2. Exemplo de partição de um espaço amostral.

Teorema da probabilidade total

- O evento A pode ser escrito como:

$$A = (A \cap C_1) \cup (A \cap C_2) \cup \dots \cup (A \cap C_n).$$

- A probabilidade do evento A pode ser obtida da seguinte forma:

$$P(A) = P(A \cap C_1) + P(A \cap C_2) + \dots + P(A \cap C_n).$$

Teorema da probabilidade total

- Reescrevendo usando a regra do produto:

$$P(A) = [P(A|C_1) \times P(C_1)] + [P(A|C_2) \times P(C_2)] + \dots + [P(A|C_n) \times P(C_n)].$$

- Generalizando:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(C_i) \times P(A|C_i).$$

Exemplo

Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda F1, 30% de uma outra fazenda F2 e 50% de F3.

Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por F1 estava adulterado por adição de água, enquanto para F2 e F3, essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente.

Na indústria de sorvetes os galões de leite são armazenados em um refrigerador sem identificação das fazendas.

Para um galão escolhido ao acaso, qual a probabilidade do leite estar adulterado?

Exemplo

Eventos

- ▶ F1: leite da fazenda 1.
- ▶ F2: leite da fazenda 2.
- ▶ F3: leite da fazenda 3.
- ▶ A: leite adulterado.
- ▶ $P(F1) = 0,20$
- ▶ $P(F2) = 0,30$
- ▶ $P(F3) = 0,50$
- ▶ $P(A|F1) = 0,20$
- ▶ $P(A|F2) = 0,05$
- ▶ $P(A|F3) = 0,02$
- ▶ $P(A) = ?$

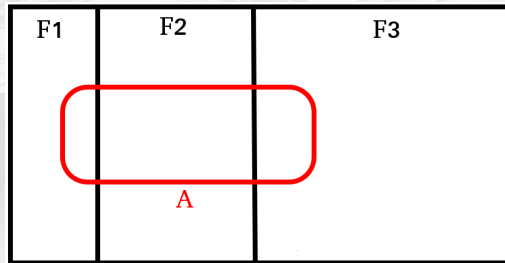


Figura 3. Partição do espaço amostral: problema do leite adulterado.

Exemplo

- O evento A pode ser escrito como:

$$A = (A \cap F1) \cup (A \cap F2) \cup (A \cap F3).$$

- A probabilidade do evento A pode ser obtida da seguinte forma:

$$P(A) = P(A \cap F1) + P(A \cap F2) + P(A \cap F3).$$

Exemplo

- Reescrevendo usando a regra do produto:

$$P(A) = [P(A|F1) \times P(F1)] + [P(A|F2) \times P(F2)] + [P(A|F3) \times P(F3)].$$

$$P(A) = [0,2 \times 0,2] + [0,05 \times 0,3] + [0,02 \times 0,5] = 0,065.$$

A probabilidade do leite estar adulterado é de 0,065.



Teorema de Bayes

Teorema de Bayes

- ▶ Suponha um conjunto de eventos (C_1, C_2, \dots, C_k) forma uma partição do espaço amostral e as probabilidades são conhecidas.
- ▶ Suponha que para um evento A dentro desta partição, se conheçam as probabilidades condicionais $P(A|C_i)$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots, k$.
- ▶ Em diversas situações saberemos $P(A|C_i)$ para todo $i = 1, 2, 3, \dots, k$, mas estaremos interessados em $P(C_i|A)$.
- ▶ Para este tipo de situação, usa-se o teorema de Bayes.

Teorema de Bayes

- Usando as regras de probabilidade condicional:

$$P(C_i|A) = \frac{P(C_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap C_i)}{P(A)} = \frac{P(A|C_i) \times P(C_i)}{P(A)}.$$

- $P(A)$ pode ser calculada usando o teorema da probabilidade total.
- De forma mais geral:

$$P(C_j|A) = \frac{P(C_j) \times P(A|C_j)}{\sum_{i=1}^k P(C_i) \times P(A|C_i)}.$$

Exemplo

Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda F1, 30% de uma outra fazenda F2 e 50% de F3.

Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por F1 estava adulterado por adição de água, enquanto para F2 e F3, essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente.

Na indústria de sorvetes os galões de leite são armazenados em um refrigerador sem identificação das fazendas.

Qual é a probabilidade de uma amostra adulterada ter sido obtida a partir da fazenda F1?

Exemplo

Eventos

- ▶ F1: leite da fazenda 1.
- ▶ F2: leite da fazenda 2.
- ▶ F3: leite da fazenda 3.
- ▶ A: leite adulterado.
- ▶ $P(F1) = 0,20$
- ▶ $P(F2) = 0,30$
- ▶ $P(F3) = 0,50$
- ▶ $P(A|F1) = 0,20$
- ▶ $P(A|F2) = 0,05$
- ▶ $P(A|F3) = 0,02$
- ▶ $P(A) = 0,065$
- ▶ $P(F1|A) = ?$

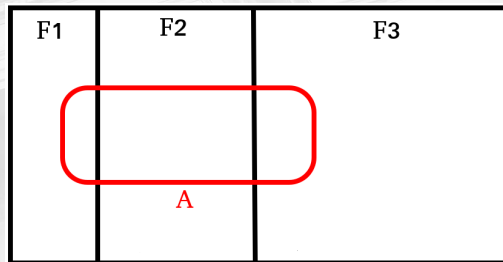


Figura 4. Partição do espaço amostral: problema do leite adulterado.

Exemplo

- ▶ Perceba a ideia de “inversão de probabilidades”.
- ▶ Temos $P(A|F1)$, mas estamos interessados em $P(F1|A)$.
- ▶ Podemos resolver usando o teorema de Bayes.

$$P(F1|A) = \frac{P(F1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap F1)}{P(A)} = \frac{P(A|F1) \times P(F)}{P(A)} = \frac{0,20 \times 0,20}{0,065} = 0,615$$

Outro exemplo

Um estabilizador pode provir de três fabricantes: I, II e III com probabilidades de 0,25, 0,35 e 0,40, respectivamente.

As probabilidades de que durante determinado período de tempo, o estabilizador não funcione bem são, respectivamente, 0,10; 0,05 e 0,08 para cada um dos fabricantes.

Qual é a probabilidade de que um estabilizador escolhido ao acaso não funcione bem durante o período de tempo especificado.

Dado que um estabilizador escolhido ao acaso não funciona bem durante o período de tempo especificado, qual a probabilidade de que tenha sido produzido pelo fabricante I?

Outro exemplo

- ▶ $C1$: estabilizador do fabricante I.
- ▶ $C2$: estabilizador do fabricante II.
- ▶ $C3$: estabilizador do fabricante III.
- ▶ A : estabilizador não funcionar bem.
- ▶ $P(C1) = 0,25$.
- ▶ $P(C2) = 0,35$.
- ▶ $P(C3) = 0,40$.
- ▶ $P(A|C1) = 0,1$.
- ▶ $P(A|C2) = 0,05$.
- ▶ $P(A|C3) = 0,08$.
- ▶ $P(A) = ?$
- ▶ $P(C1|A) = ?$

Outro exemplo

$$P(A) = [P(A|C1) \times P(C1)] + [P(A|C2) \times P(C2)] + [P(A|C3) \times P(C3)]$$

$$P(A) = [0,1 \times 0,25] + [0,05 \times 0,35] + [0,08 \times 0,4] = 0,0745$$

$$P(C1|A) = \frac{P(C1) \times P(A|C1)}{P(A)} = \frac{0,25 \times 0,1}{0,0745} = 0,335$$

O que foi visto:

- ▶ Partição do espaço amostral.
- ▶ Teorema da probabilidade total.
- ▶ Teorema de Bayes.

Próximos assuntos:

- ▶ Variáveis aleatórias discretas.
- ▶ Variáveis aleatórias contínuas.
- ▶ Esperança de variáveis aleatórias.
- ▶ Variância de variáveis aleatórias.