Teorema de Bayes

Partição do espaço amostral, teorema da probabilidade total e teorema de Bayes

Prof. Me. Lineu Alberto Cavazani de Freitas

Departamento de Estatística
Laboratório de Estatística e Geoinformação

Teorema de Bayes

- Uma das relações mais importantes envolvendo probabilidades condicionais é dada pelo **Teorema de Bayes**, proposto pelo reverendo Thomas Bayes no século XVIII.

- O teorema de Bayes permite efetuar o **cálculo de probabilidades condicionais** em situações em que o espaço amostral é composto por eventos mutuamente exclusivos e existe um evento que é composto por partes destes elementos.

- Permite o cálculo da **probabilidade** de um evento ocorrer **com base em uma informação a priori**.

Partição do espaço amostral

Partição do espaço amostral

- Dizemos que eventos formam uma partição do espaço amostral, se eles não tem interseção entre si, e se sua união é igual ao espaço amostral.
- Considere os eventos $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_k$.
- $C_i \cap C_j = \phi$, para qualquer $i \neq j$. E $\cup_{i=1}^{k} C_i = \Omega$.

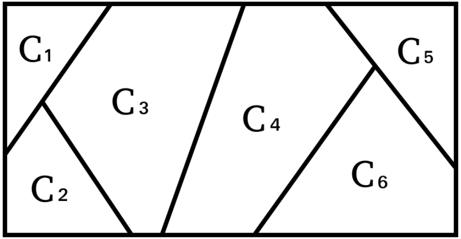

Figura 1. Exemplo de partição de um espaço amostral.

Exemplo

- Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda F1, 30% de uma outra fazenda F2 e 50% de F3.

- Suponha que 60% dos chips do computador de uma companhia sejam produzidos pela fábrica A e 40% pela fábrica B.

- Um hotel obtém carros para seus hóspedes de três agências locadoras: 20% da agência X, 40% da agência Y e 40% da agência Z.

- Uma companhia produz circuitos em três fábricas, I II e III. A fábrica I produz 40% dos circuitos, enquanto a II e a II produzem 30% cada uma

Teorema da probabilidade total

Teorema da probabilidade total

- Suponha um espaço amostral dividido em partições.
- Suponha um evento A dentro deste espaço que seja formado por pedaços das partições.

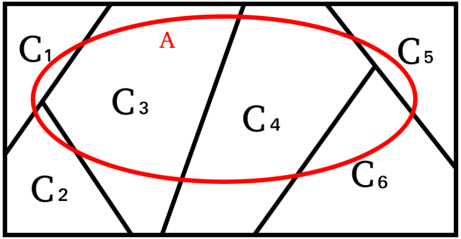

Figura 2. Exemplo de partição de um espaço amostral.

Teorema da probabilidade total

- O evento A pode ser escrito como:

$$A = (A \cap C_1) \cup (A \cap C_2) \cup \ldots \cup (A \cap C_n).$$

- A probabilidade do evento A pode ser obtida da seguinte forma:

$$P(A) = P(A \cap C_1) + P(A \cap C_2) + \ldots + P(A \cap C_n).$$

Teorema da probabilidade total

- Reescrevendo usando a regra do produto:

$$P(A) = [P(A|C_1) \times P(C_1)] + [P(A|C2) \times P(C_2)] + \ldots + [P(A|C_n) \times P(C_n)].$$

- Generalizando:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(C_i) \times P(A|C_i).$$

Exemplo

Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda F1, 30% de uma outra fazenda F2 e 50% de F3.

Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por F1 estava adulterado por adição de água, enquanto para F2 e F3, essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente.

Na indústria de sorvetes os galões de leite são armazenados em um refrigerador sem identificação das fazendas.

Para um galão escolhido ao acaso, qual a probabilidade do leite estar adulterado?

Exemplo

Eventos

- F1: leite da fazenda 1.
- F2: leite da fazenda 2.
- F3: leite da fazenda 3.
- A: leite adulterado.
- $P(F1) = 0,20$
- $P(F2) = 0,30$
- $P(F3) = 0,50$
- $P(A|F1) = 0,20$
- $P(A|F2) = 0,05$
- $P(A|F3) = 0,02$
- $P(A) = ?$

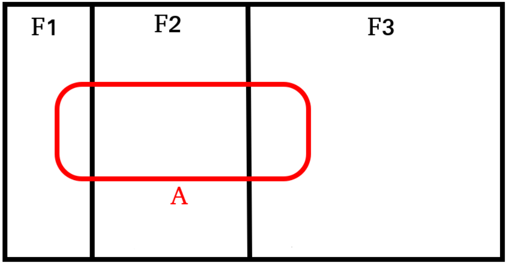

Figura 3. Partição do espaço amostral: problema do leite adulterado.

Exemplo

- O evento A pode ser escrito como:

$$A = (A \cap F1) \cup (A \cap F2) \cup (A \cap F3).$$

- A probabilidade do evento A pode ser obtida da seguinte forma:

$$P(A) = P(A \cap F1) + P(A \cap F2) + P(A \cap F3).$$

Exemplo

- Reescrevendo usando a regra do produto:

$$P(A) = [P(A|F1) \times P(F1)] + [P(A|F2) \times P(F2)] + [P(A|F3) \times P(F3)].$$

$$P(A) = [0{,}2 \times 0{,}2] + [0{,}05 \times 0{,}3] + [0{,}02 \times 0{,}5] = 0{,}065.$$

A probabilidade do leite estar adulterado é de 0,065.

Teorema de Bayes

Teorema de Bayes

- Suponha um conjunto de eventos $(C_1, C_2, \ldots, C_k)$ forma uma partição do espaço amostral e as probabilidades são conhecidas.
- Suponha que para um evento A dentro desta partição, se conheçam as probabilidades condicionais $P(A|C_i)$ para todo $i = 1,2,3,..,k$.
- Em diversas situações saberemos $P(A|C_i)$ para todo $i = 1,2,3,..,k$, mas estaremos interessados em $P(C_i|A)$.
- Para este tipo de situação, usa-se o teorema de Bayes.

Teorema de Bayes

- Usando as regras de probabilidade condicional:

$$P(C_i|A) = \frac{P(C_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap C_i)}{P(A)} = \frac{P(A|C_i) \times P(C_i)}{P(A)}.$$

- $P(A)$ pode ser calculada usando o teorema da probabilidade total.

- De forma mais geral:

$$P(C_j|A) = \frac{P(C_j) \times P(A|C_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(C_i) \times P(A|C_i)}.$$

Exemplo

Suponha que um fabricante de sorvetes recebe 20% de todo o leite que utiliza de uma fazenda $F1$, 30% de uma outra fazenda $F2$ e 50% de $F3$.

Um órgão de fiscalização inspecionou as fazendas de surpresa e observou que 20% do leite produzido por $F1$ estava adulterado por adição de água, enquanto para $F2$ e $F3$, essa proporção era de 5% e 2%, respectivamente.

Na indústria de sorvetes os galões de leite são armazenados em um refrigerador sem identificação das fazendas.

Qual é a probabilidade de uma amostra adulterada ter sido obtida a partir da fazenda $F1$?

Exemplo

Eventos

- F1: leite da fazenda 1.
- F2: leite da fazenda 2.
- F3: leite da fazenda 3.
- A: leite adulterado.
- $P(F1) = 0{,}20$
- $P(F2) = 0{,}30$
- $P(F3) = 0{,}50$
- $P(A|F1) = 0{,}20$
- $P(A|F2) = 0{,}05$
- $P(A|F3) = 0{,}02$
- $P(A) = 0{,}065$
- $P(F1|A) = ?$

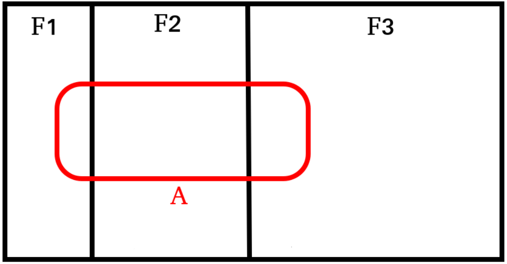

Figura 4. Partição do espaço amostral: problema do leite adulterado.

Exemplo

- Perceba a ideia de "inversão de probabilidades".
- Temos $P(A|F1)$, mas estamos interessados em $P(F1|A)$.
- Podemos resolver usando o teorema de Bayes.

$$P(F1|A) = \frac{P(F1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap F1)}{P(A)} = \frac{P(A|F1) \times P(F)}{P(A)} = \frac{0{,}20 \times 0{,}20}{0{,}065} = 0{,}615$$

Outro exemplo

Um estabilizador pode provir de três fabricantes: I, II e III com probabilidades de 0,25, 0,35 e 0,40, respectivamente.

As probabilidades de que durante determinado período de tempo, o estabilizador não funcione bem são, respectivamente, 0,10; 0,05 e 0,08 para cada um dos fabricantes.

Qual é a probabilidade de que um estabilizador escolhido ao acaso não funcione bem durante o período de tempo especificado.

Dado que um estabilizador escolhido ao acaso não funciona bem durante o período de tempo especificado, qual a probabilidade de que tenha sido produzido pelo fabricante I?

Outro exemplo

- $C1$: estabilizador do fabricante I.
- $C2$: estabilizador do fabricante II.
- $C3$: estabilizador do fabricante III.
- A: estabilizador não funcionar bem.
- $P(C1) = 0{,}25$.
- $P(C2) = 0{,}35$.
- $P(C3) = 0{,}40$.

- $P(A|C1) = 0{,}1$.
- $P(A|C2) = 0{,}05$.
- $P(A|C3) = 0{,}08$.
- $P(A) = ?$
- $P(C1|A) = ?$

Outro exemplo

$$P(A) = [P(A|C1) \times P(C1)] + [P(A|C2) \times P(C2)] + [P(A|C3) \times P(C3)]$$

$$P(A) = [0{,}1 \times 0{,}25] + [0{,}05 \times 0{,}35] + [0{,}08 \times 0{,}4] = 0,0745$$

$$P(C1|A) = \frac{P(C1) \times P(A|C1)}{P(A)} = \frac{0{,}25 \times 0{,}1}{0{,}0745} = 0{,}335$$

O que foi visto:

- Partição do espaço amostral.
- Teorema da probabilidade total.
- Teorema de Bayes.

Próximos assuntos:

- Variáveis aleatórias discretas.
- Variáveis aleatórias contínuas.
- Esperança de variáveis aleatórias.
- Variância de variáveis aleatórias.