

# Introdução à Probabilidade

Tipos de fenômenos, operações, tipos de eventos

Prof. Me. Lineu Alberto Cavazani de Freitas

Departamento de Estatística  
Laboratório de Estatística e Geoinformação



# Introdução

- ▶ Lidamos diariamente com a ideia de **chance**.
- ▶ A todo momento estamos avaliando situações que envolvem algum tipo de **incerteza**.
- ▶ **Probabilidade** é uma forma de avaliar matematicamente possibilidades ou chances de ocorrências de eventos.
- ▶ Associaremos **chance** à uma ideia, **probabilidade** à um valor.
- ▶ Antes de entrar em probabilidades precisamos caracterizar os tipos de fenômenos que podem ocorrer.
- ▶ Os fenômenos podem ser classificados como **determinísticos** e **aleatórios**, dependendo de como ocorre seu desfecho em diversas tentativas.

# Fenômenos determinísticos

- ▶ Algo que, quando repetido diversas vezes, tem sempre o mesmo desfecho, isto é, o mesmo resultado.
- ▶ Não há variabilidade, portanto não se faz necessário estudar as probabilidades.

## Exemplo

- ▶ Repita o experimento de soltar um peso de uma determinada altura pré especificada por diversas vezes. O tempo até o solo vai se alterar?

# Fenômenos aleatórios

- ▶ Algo que, quando repetido diversas vezes, pode apresentar diferentes desfechos.
- ▶ É tratado como aleatório pois antes da execução não há como saber qual dos possíveis resultados será observado.
- ▶ Em geral sabemos quais são os possíveis desfechos, mas qual destes desfechos será visto não há como prever.
- ▶ Como existe incerteza e variabilidade, Estatística pode ser usada.

## Exemplo

- ▶ Exemplos clássicos: lançar um dado ou uma moeda.
- ▶ Exemplo não trivial: peso de um recém nascido.



# **Teoria das Probabilidades**

# Teoria das Probabilidades



- ▶ Ramo da matemática que desenvolve e avalia **modelos** para descrever **fenômenos de natureza aleatória**.
- ▶ É a base teórica para o desenvolvimento das técnicas estatísticas.
- ▶ Tem como objetivo descrever de forma matematicamente adequada o que acontece com fenômenos aleatórios.

# Teoria das Probabilidades

- ▶ Os métodos de probabilidade fornecem uma forma de estudar e avaliar a chance de ocorrência de eventos e ferramentas para avaliar incerteza.
- ▶ Consiste em:
  1. Descrever o conjunto de resultados possíveis do fenômeno.
  2. Atribuir pesos a cada possível resultado.
- ▶ Estes pesos refletem as chances de ocorrência e são chamados de probabilidades.



# Algumas definições



# Algumas definições

- ▶ **Experimento aleatório:** procedimento com múltiplos possíveis desfechos em que o resultado não pode ser previsto.
- ▶ **Espaço amostral:** conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório. Denotaremos por  $\Omega$ .
  - ▶ Possíveis espaços amostrais:  $\Omega = \{0,1,2,\dots\}$ ;  $\Omega = \mathbb{R}$ ;  $\Omega = \mathbb{R}^+$ ;  $\Omega = [0, \infty)$ ;  $\Omega = \{0,1\}$ ;  $\Omega = \mathbb{N}$ ;  $\Omega = \mathbb{N}^+$ ;  $\Omega = [0,1]$ ; etc.
- ▶ **Pontos amostrais:** são os elementos que compõem o espaço amostral ( $\Omega$ ). Denotaremos por  $\omega$ .  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$
- ▶ **Eventos:** todo resultado ou subconjunto de resultados de um experimento aleatório. Denotaremos por letras maiúsculas.
  - ▶ Um evento simples é qualquer evento constituído por um único elemento do espaço amostral, ou seja, um ponto amostral.

# Exemplo

Considere um dado comum, com seis faces numeradas de um a seis, e perfeitamente balanceado. Considere que o experimento aleatório consiste em lançar o dado e registrar o valor da face voltada para cima.

- a) Qual é o espaço amostral?
- b) O que representa o evento A: face 3 voltada para cima?
- c) O que representa o evento B: face par voltada para cima?
- d) O que representa o evento C: face maior que 4 voltada para cima?
- e) Algum dos eventos solicitados configura um evento simples?

# Exemplo

- a) Qual é o espaço amostral?
  - ▶  $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ .
- b) O que representa o evento A: face 3 voltada para cima?
  - ▶  $A = \{3\}$ .
- c) O que representa o evento B: face par voltada para cima?
  - ▶  $B = \{2,4,6\}$ .
- d) O que representa o evento C: face maior que 4 voltada para cima?
  - ▶  $C = \{5,6\}$ .
- e) Algum dos eventos solicitados configura um evento simples?
  - ▶ O evento A é composto por apenas um ponto amostral.



# Operações com eventos

# Operações com eventos

- ▶ Diferentes eventos podem ser definidos com base num único espaço amostral.
- ▶ Para definir e efetuar operações que envolvem probabilidades de ocorrência de eventos usa-se a **teoria dos conjuntos**.
- ▶ Como ferramenta, pode ser usados os **Diagramas de Venn**.

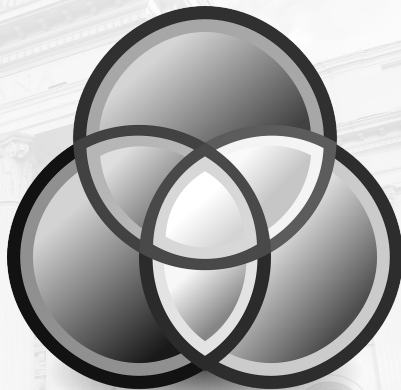


Figura 1. Diagrama de Venn. Extraído de pixabay.com.

# Operações com eventos - união

- ▶ **União:** evento que consiste da união de todos os pontos amostrais dos eventos que a compõem.
- ▶ Representa a ocorrência de, pelo menos, um dos eventos.
- ▶ Considerando dois eventos  $A$  e  $B$ , a união é representada por  $A \cup B$ .

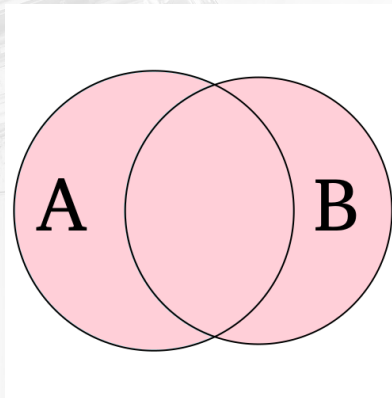


Figura 2. Representação da união de 2 eventos.

# Operações com eventos - interseção

- ▶ **Interseção:** evento composto pelos pontos amostrais comuns aos eventos que a compõem.
- ▶ Representa a ocorrência simultânea dos eventos.
- ▶ Considerando dois eventos  $A$  e  $B$ , a união é representada por  $A \cup B$ .

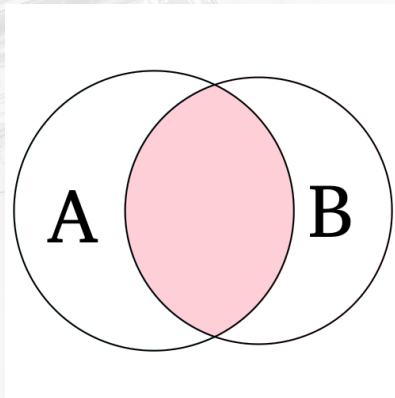


Figura 3. Representação da interseção de 2 eventos.

# Alguns tipos especiais de eventos

- ▶ **Eventos complementares:** eventos disjuntos cuja união resulta no espaço amostral.
  - ▶ Considerando um evento  $A$ :  $A \cap A^c = \phi$  e  $A \cup A^c = \Omega$ .
- ▶ **Conjunto vazio:** o conjunto sem elementos.
  - ▶ Denotaremos por  $\phi$ .
- ▶ **Eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos:**
  - ▶ Eventos que possuem interseção nula.
  - ▶ Considerando dois eventos  $A$  e  $B$ , estes eventos são disjuntos se  $A \cap B = \phi$ .



# Outros resultados

Com estas operações, vários outros resultados surgem:

- ▶  $A \cap \Omega = A$
- ▶  $A \cup \Omega = \Omega$
- ▶  $A \cap A^c = \phi$
- ▶  $A \cup A^c = \Omega$
- ▶  $A \cap \phi = \phi$
- ▶  $A \cup \phi = A$
- ▶  $(A \cap B^c) = A^c \cup B^c$
- ▶  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- ▶  $(A^c \cup B^c)^c = (A \cap B)$
- ▶  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- ▶  $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$
- ▶ Foram apresentadas apenas ilustrações e representações de operações envolvendo dois eventos.
- ▶ Contudo todas elas se estendem para um número maior de eventos, inclusive infinitos eventos.

# Exemplo

Retomando o exemplo do dado. Em que definimos os eventos:

- ▶ A: face 3 voltada para cima.
- ▶ B: face par voltada para cima.
- ▶ C: face maior que 4 voltada para cima.

Quais são as uniões, interseções e complementos?

# Exemplo

- ▶  $A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$
- ▶  $A \cup C = \{3, 5, 6\}$
- ▶  $B \cup C = \{2, 4, 5, 6\}$
- ▶  $A \cap B = \{\phi\}$
- ▶  $A \cap C = \{\phi\}$
- ▶  $B \cap C = \{6\}$
- ▶  $A^c = \{1, 2, 4, 5, 6\}$
- ▶  $B^c = \{1, 3, 5\}$
- ▶  $C^c = \{1, 2, 3, 4\}$



# Definição axiomática de probabilidade

# Definição axiomática de probabilidade

- ▶ **Probabilidade** é uma **função** que atribui valores numéricos aos eventos do espaço amostral.
  - ▶ Denotaremos a probabilidade de um evento  $A$  por  $P(A)$  para qualquer evento  $A$  definido num espaço amostral  $\Omega$ .
1.  $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A \in \Omega$ .
  2.  $P(\Omega) = 1$ .
  3.  $P(\cup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n P(A_j)$ , desde que os  $A'_j$ s sejam disjuntos.

# Definição axiomática de probabilidade

Em outras palavras:

1. A probabilidade de um evento sempre é um valor entre 0 e 1.
2. A probabilidade do espaço amostral é igual a 1.
3. A probabilidade da união de eventos é dada pela soma das probabilidades desde que os eventos sejam disjuntos.



# Atribuição de probabilidades aos elementos do espaço amostral

# Como atribuir probabilidades aos elementos do espaço amostral?

Existem algumas possibilidades, algumas delas são:

1. Forma clássica.
2. Forma frequentista.
3. Forma subjetiva.



# Como atribuir probabilidades aos elementos do espaço amostral?

## Forma clássica

- ▶ Baseia-se nas características teóricas da realização do fenômeno.

## Forma frequentista

- ▶ Baseia-se nas frequências (relativas) de ocorrência do fenômeno.
- ▶ Repete-se o experimento muitas vezes, registra-se o resultado, avalia-se a frequência, usa esta frequência como valor candidato a probabilidade.

## Forma subjetiva

- ▶ Baseia-se no julgamento pessoal ou experiência própria sobre a plausibilidade/chance de algo ocorrer.

## O que foi visto:

- ▶ Introdução à probabilidades.
  - ▶ Tipos de fenômenos.
  - ▶ Definições.
  - ▶ Operações com eventos.
  - ▶ Definição axiomática de probabilidade.
  - ▶ Atribuição de probabilidades a elementos do espaço amostral.

## Próximos assuntos:

- ▶ Operações com probabilidades.
  - ▶ Regra da adição.
  - ▶ Regra do complementar.
  - ▶ Probabilidade condicional.
  - ▶ Regra do produto.
  - ▶ Independência.