

LINEU ALBERTO CAVAZANI DE FREITAS

TESTE WALD PARA ESTUDO DE PARÂMETROS DE MODELOS MULTIVARIADOS DE  
COVARIÂNCIA LINEAR GENERALIZADA

*(versão pré-defesa, compilada em 10 de novembro de 2021)*

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Informática no Programa de Pós-Graduação em Informática, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Área de concentração: *Ciência da Computação*.

Orientador: Prof. Dr. Wagner Hugo Bonat.

Coorientador: Prof. Dr. Marco Antônio Zanata Alves.

CURITIBA PR

2021

## RESUMO

O resumo deve conter no máximo 500 palavras, devendo ser justificado na largura da página e escrito em um único parágrafo<sup>1</sup> com um afastamento de 1,27 cm na primeira linha. O espaçamento entre linhas deve ser de 1,5 linhas. O resumo deve ser informativo, ou seja, é a condensação do conteúdo e expõe finalidades, metodologia, resultados e conclusões.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetur odio sem sed wisi.

Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetur eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.

Etiam euismod. Fusce facilisis lacinia dui. Suspendisse potenti. In mi erat, cursus id, nonummy sed, ullamcorper eget, sapien. Praesent pretium, magna in eleifend egestas, pede pede pretium lorem, quis consectetur tortor sapien facilisis magna. Mauris quis magna varius nulla scelerisque imperdiet. Aliquam non quam. Aliquam porttitor quam a lacus. Praesent vel arcu ut tortor cursus volutpat. In vitae pede quis diam bibendum placerat. Fusce elementum convallis neque. Sed dolor orci, scelerisque ac, dapibus nec, ultricies ut, mi. Duis nec dui quis leo sagittis commodo.

Aliquam lectus. Vivamus leo. Quisque ornare tellus ullamcorper nulla. Mauris porttitor pharetra tortor. Sed fringilla justo sed mauris. Mauris tellus. Sed non leo. Nullam elementum, magna in cursus sodales, augue est scelerisque sapien, venenatis congue nulla arcu et pede. Ut suscipit enim vel sapien. Donec congue. Maecenas urna mi, suscipit in, placerat ut, vestibulum ut, massa. Fusce ultrices nulla et nisl.

Palavras-chave: Palavra-chave 1. Palavra-chave 2. Palavra-chave 3.

---

<sup>1</sup>E também não deve ter notas de rodapé; em outras palavras, não siga este exemplo... ;-)

## ABSTRACT

The abstract should be the English translation of the “resumo”, no more, no less.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetur odio sem sed wisi.

Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetur eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.

Etiam euismod. Fusce facilisis lacinia dui. Suspendisse potenti. In mi erat, cursus id, nonummy sed, ullamcorper eget, sapien. Praesent pretium, magna in eleifend egestas, pede pede pretium lorem, quis consectetur tortor sapien facilisis magna. Mauris quis magna varius nulla scelerisque imperdiet. Aliquam non quam. Aliquam porttitor quam a lacus. Praesent vel arcu ut tortor cursus volutpat. In vitae pede quis diam bibendum placerat. Fusce elementum convallis neque. Sed dolor orci, scelerisque ac, dapibus nec, ultricies ut, mi. Duis nec dui quis leo sagittis commodo.

Aliquam lectus. Vivamus leo. Quisque ornare tellus ullamcorper nulla. Mauris porttitor pharetra tortor. Sed fringilla justo sed mauris. Mauris tellus. Sed non leo. Nullam elementum, magna in cursus sodales, augue est scelerisque sapien, venenatis congue nulla arcu et pede. Ut suscipit enim vel sapien. Donec congue. Maecenas urna mi, suscipit in, placerat ut, vestibulum ut, massa. Fusce ultrices nulla et nisl.

Keywords: Keyword 1. Keyword 2. Keyword 3.

## **LISTA DE FIGURAS**

## **LISTA DE TABELAS**

2.1	Desfechos possíveis em um teste de hipóteses . . . . .	23
-----	--	----

## **LISTA DE ACRÔNIMOS**

LM	Modelo linear
GLM	Modelo linear generalizado
cGLM	Modelo de covariância linear generalizada
McGLM	Modelo multivariado de covariância linear generalizada
ANOVA	Análise de variância
MANOVA	Análise de variância multivariada

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	alfa, primeira letra do alfabeto grego
$\beta$	beta, segunda letra do alfabeto grego
$\gamma$	gama, terceira letra do alfabeto grego
$\omega$	ômega, última letra do alfabeto grego
$\pi$	pi
$\tau$	Tempo de resposta do sistema
$\theta$	Ângulo de incidência do raio luminoso

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>10</b>
1.1	MOTIVAÇÃO. . . . .	10
1.2	DESAFIO . . . . .	14
1.3	HIPÓTESE . . . . .	14
1.4	OBJETIVO . . . . .	15
1.5	CONTRIBUIÇÃO . . . . .	15
1.6	ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO . . . . .	16
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO . . . . .</b>	<b>17</b>
2.1	MODELOS MULTIVARIADOS DE COVARIÂNCIA LINEAR GENERALI- ZADA . . . . .	17
2.1.1	Modelo linear generalizado . . . . .	17
2.1.2	Modelo de covariância linear generalizada . . . . .	18
2.1.3	Modelos multivariados de covariância linear generalizada. . . . .	19
2.1.4	Estimação e inferência . . . . .	20
2.2	TESTES DE HIPÓTESES . . . . .	22
2.2.1	Elementos de um teste de hipóteses. . . . .	22
2.2.2	Testes de hipóteses em modelos de regressão . . . . .	24
2.2.3	ANOVA e MANOVA . . . . .	25
2.2.4	Testes de comparações múltiplas . . . . .	26
<b>3</b>	<b>TRABALHOS RELACIONADOS . . . . .</b>	<b>29</b>
<b>4</b>	<b>TESTE WALD EM MODELOS MULTIVARIADOS DE COVARIÂNCIA LINEAR GENERALIZADA . . . . .</b>	<b>30</b>
4.1	HIPÓTESES E ESTATÍSTICA DE TESTE . . . . .	30
4.1.1	Exemplo 1: hipótese para um único parâmetro. . . . .	32
4.1.2	Exemplo 2: hipótese para múltiplos parâmetros . . . . .	32
4.1.3	Exemplo 3: hipótese de igualdade de parâmetros . . . . .	33
4.1.4	Exemplo 4: hipótese sobre parâmetros de regressão ou dispersão para respostas sob mesmo preditor . . . . .	33
4.2	ANOVA E MANOVA VIA TESTE WALD. . . . .	35
4.2.1	ANOVA e MANOVA tipo I. . . . .	35
4.2.2	ANOVA e MANOVA tipo II . . . . .	36
4.2.3	ANOVA e MANOVA tipo III . . . . .	36
4.3	TESTE DE COMPARAÇÕES MÚLTIPLAS VIA TESTE WALD . . . . .	37



<b>5</b>	<b>IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL . . . . .</b>	<b>39</b>
<b>6</b>	<b>ESTUDO DE SIMULAÇÃO . . . . .</b>	<b>40</b>
<b>7</b>	<b>ANÁLISE DE DADOS . . . . .</b>	<b>41</b>
7.1	USO DE PROBIÓTICOS NO CONTROLE DE VÍCIOS E COMPULSÕES ALIMENTARES EM PACIENTES SUJEITOS A CIRURGIA BARIÁTRICA . .	41
7.2	HIPES PROJECT . . . . .	41
<b>8</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .</b>	<b>42</b>
8.1	CONCLUSÕES GERAIS. . . . .	42
8.2	LIMITAÇÕES . . . . .	42
8.3	TRABALHOS FUTUROS . . . . .	42
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>43</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 MOTIVAÇÃO

Desde o surgimento do termo *data science* por volta de 1996 (Press, 2013) a discussão sobre o tema atrai pesquisadores das mais diversas áreas (Cao, 2016). A ciência de dados é vista como um campo de estudo de natureza interdisciplinar que incorpora conhecimento de grandes áreas como estatística, ciência da computação e matemática (Ley e Bordas, 2018). Weihs e Ickstadt (2018) afirmam que a ciência de dados é um campo em muito influenciado por áreas como informática, ciência da computação, matemática, pesquisa operacional, estatística e ciências aplicadas. Em Cao (2016) é dito que ciência de dados engloba técnicas de como: estatística, aprendizado de máquina, gerenciamento de *big data*, dentre outras.

Alguns dos campos de interesse da ciência de dados são: métodos de amostragem, mineração de dados, bancos de dados, técnicas de análise exploratória, probabilidade, inferência, otimização, infraestrutura computacional, plataformas de *big data*, modelos estatísticos, dentre outros. Weihs e Ickstadt (2018) afirmam que os métodos estatísticos são de fundamental importância em grande parte das etapas da ciência de dados. Neste sentido, os modelos de regressão tem papel importante. Tais modelos são indicados a problemas nos quais existe interesse em verificar a associação entre uma ou mais variáveis resposta (também chamadas de variáveis dependentes) e um conjunto de variáveis explicativas (também chamadas de variáveis independentes, covariáveis ou preditoras).

Para entender minimamente um modelo de regressão, é necessário compreender o conceito de fenômeno aleatório, variável aleatória e distribuição de probabilidade. Um fenômeno aleatório é uma situação na qual diferentes observações podem fornecer diferentes desfechos. Estes fenômenos podem ser descritos por variáveis aleatórias que associam um valor numérico a cada desfecho possível do fenômeno. Os desfechos deste fenômeno podem ser descritos por uma escala que pode ser discreta ou contínua. Uma variável aleatória é considerada discreta quando os possíveis desfechos estão dentro de um conjunto enumerável de valores. Já uma variável aleatória contínua ocorre quando os possíveis resultados estão em um conjunto não enumerável de valores. Na prática existem probabilidades associadas aos valores de uma variável aleatória, e estas probabilidades podem ser descritas por meio de funções. No caso das variáveis discretas, a função que associa probabilidades aos valores da variável aleatória é chamada de função de probabilidade. No caso das contínuas, esta função é chamada de função densidade de probabilidade.

Existem ainda modelos probabilísticos que buscam descrever as probabilidades de variáveis aleatórias: as chamadas distribuições de probabilidade. Portanto, em problemas práticos, podemos buscar uma distribuição de probabilidades que melhor descreva o fenômeno de interesse. Estas distribuições são descritas por funções e tais funções possuem parâmetros

que controlam aspectos da distribuição como escala e forma, sendo que estes parâmetros são quantidades desconhecidas estimadas por meio dos dados. Na análise de regressão busca-se modelar os parâmetros das distribuições de probabilidade como uma função de outras variáveis. Isto é feito por meio da decomposição do parâmetro da distribuição em outros parâmetros, chamados de parâmetros de regressão, que dependem de variáveis conhecidas e fixas: as variáveis explicativas.

Assim, o objetivo dos modelos de regressão consiste em obter uma equação que explique a relação entre as variáveis explicativas e o parâmetro de interesse da distribuição de probabilidades selecionada para modelar a variável aleatória. Em geral, o parâmetro de interesse da distribuição de probabilidades modelado em função das variáveis explicativas é a média. Fazendo uso da equação resultante do processo de análise de regressão, é possível estudar a importância das variáveis explicativas sobre a resposta e realizar previsões da variável resposta com base nos valores observados das variáveis explicativas.

Em contextos práticos o processo de análise via modelo de regressão parte de um conjunto de dados. Neste contexto, um conjunto de dados é uma representação tabular em que unidades amostrais são representadas nas linhas e seus atributos (variáveis) são representados nas colunas. Pode-se usar um modelo de regressão para, por exemplo, modelar a relação entre a média de uma variável aleatória e um conjunto de variáveis explicativas. Assume-se então que a variável aleatória segue uma distribuição de probabilidades e que o parâmetro de média desta distribuição pode ser descrito por uma combinação linear de parâmetros de regressão associados às variáveis explicativas. Sendo assim, o conhecimento a respeito da influência de uma variável explicativa sobre a resposta vem do estudo das estimativas dos parâmetros de regressão. A obtenção destas estimativas dos parâmetros se dá na chamada etapa de ajuste do modelo, e isto gera a equação da regressão ajustada.

Existem na prática modelos uni e multivariados. Nos modelos univariados há apenas uma variável resposta e temos interesse em avaliar o efeito das variáveis explicativas sobre essa única resposta. No caso dos modelos multivariados há mais de uma resposta e o interesse passa a ser avaliar o efeito dessas variáveis sobre todas as respostas. A literatura fornece inúmeras classes de modelos de regressão, mencionaremos neste trabalho três delas: os modelos lineares (LM), os lineares generalizados (GLM) e os multivariados de covariância linear generalizada (McGLM). No cenário univariado, durante muitos anos o LM normal (Galton, 1886) teve papel de destaque no contexto dos modelos de regressão devido principalmente as suas facilidades computacionais. Um dos pressupostos do LM normal é de que a variável resposta, condicional às variáveis explicativas, segue a distribuição normal. Todavia, não são raras as situações em que a suposição de normalidade não é atendida. Uma alternativa, por muito tempo adotada, foi buscar uma transformação da variável resposta a fim de atender os pressupostos do modelo, tal como a família de transformações proposta por Box e Cox (1964). Contudo, este tipo de solução leva a dificuldades na interpretação dos resultados.

Com o passar o tempo, o avanço computacional permitiu a proposição de modelos mais complexos, que necessitavam de processos iterativos para estimação dos parâmetros (Paula, 2004). A classe de maior renome foram os GLMs propostos por Nelder e Wedderburn (1972). Essa classe de modelos permitiu a flexibilização da distribuição da variável resposta de tal modo que esta pertença à família exponencial de distribuições. Em meio aos casos especiais de distribuições possíveis nesta classe de modelos estão a Bernoulli, binomial, Poisson, normal, gama, normal inversa, entre outras. Trata-se portanto, de uma classe de modelos univariados de regressão para dados de diferentes naturezas, tais como: dados contínuos simétricos e assimétricos, contagens e assim por diante. Tais características tornam esta classe uma flexível ferramenta de modelagem aplicável a diversos tipos de problema.

Embora as técnicas citadas sejam úteis, há casos em que são coletadas mais de uma resposta por unidade experimental e há o interesse de modelá-las em função de um conjunto de variáveis explicativas. Neste cenário surgem os McGLMs propostos por Bonat e Jørgensen (2016). Essa classe pode ser vista com uma extensão multivariada dos GLMs que permite lidar com múltiplas respostas de diferentes naturezas e, de alguma forma, correlacionadas. Além disso, não há nesta classe suposições quanto à independência entre as observações, pois a correlação entre observações pode ser modelada por um preditor linear matricial que envolve matrizes conhecidas. Estas características tornam o McGLM uma classe flexível que possibilita chegar a extensões multivariadas para modelos de medidas repetidas, séries temporais, dados longitudinais, espaciais e espaço-temporais.

Quando trabalha-se com modelos de regressão, um interesse comum aos analistas é o de verificar se a ausência de determinada variável explicativa do modelo geraria uma perda no ajuste. Deste modo, uma conjectura de interesse é avaliar se há evidência suficiente nos dados para afirmar que determinada variável explicativa não possui efeito sobre a resposta. Isto é feito por meio dos chamados testes de hipóteses. Testes de hipóteses são ferramentas estatísticas mais gerais, aplicadas a contextos além de regressão, que auxiliam no processo de tomada de decisão sobre valores desconhecidos (parâmetros) estimados por meio de uma amostra (estimativas). Tal procedimento permite verificar se existe evidência nos dados amostrais que apoiem ou não uma hipótese estatística formulada a respeito de um parâmetro. As suposições a respeito de um parâmetro desconhecido estimado com base nos dados são denominadas hipóteses estatísticas. Estas hipóteses podem ser rejeitadas ou não rejeitadas com base nos dados. Segundo Lehmann (1993) podemos atribuir a teoria, formalização e filosofia dos testes de hipótese a Neyman e Pearson (1928a), Neyman e Pearson (1928b) e Fisher (1925). A teoria clássica de testes de hipóteses é apresentada formalmente em Lehmann e Romano (2006).

No contexto de modelos de regressão, três testes de hipóteses são comuns: o teste da razão de verossimilhanças, o teste Wald e o teste do multiplicador de lagrange, também conhecido como teste score. Engle (1984) descreve a formulação geral dos três testes. Todos eles são baseados na função de verossimilhança dos modelos. Os modelos de regressão tradicionais buscam encontrar as estimativas dos valores dos parâmetros que associam variáveis explicativas

às respostas que maximizam a função de verossimilhança, ou seja, buscam encontrar um conjunto de valores de parâmetros desconhecidos que façam com o que o dado seja provável (verossímil).

O teste da razão de verossimilhanças, inicialmente proposto por Wilks (1938), é efetuado a partir de dois modelos com o objetivo de compará-los. A ideia consiste em obter um modelo com todas as variáveis explicativas e um segundo modelo sem algumas dessas variáveis. O teste é usado para comparar estes modelos por meio da diferença do logaritmo da função de verossimilhança. Caso essa diferença seja estatisticamente significativa, significa que a retirada das variáveis do modelo completo prejudicam o ajuste. Caso não seja observada diferença entre o modelo completo e o restrito, significa que as variáveis retiradas não geram perda na qualidade e, por este motivo, tais variáveis podem ser descartadas.

Já o teste Wald, proposto por Wald (1943), requer apenas um modelo ajustado. A ideia consiste em verificar se existe evidência para afirmar que um ou mais parâmetros são iguais a valores postulados. O teste avalia quão longe o valor estimado está do valor postulado. Utilizando o teste Wald é possível formular hipóteses para múltiplos parâmetros, e costuma ser de especial interesse verificar se há evidência que permita afirmar que os parâmetros que associam determinada variável explicativa a variável resposta são iguais a zero. Caso tal hipótese não seja rejeitada, significa que se estas variáveis forem retiradas, não existirá perda de qualidade no modelo.

O teste do multiplicador de lagrange ou teste escore (Aitchison e Silvey, 1958), (Silvey, 1959), (Rao, 1948), tal como o teste Wald, requer apenas um modelo ajustado. No caso do teste escore o modelo ajustado não possui o parâmetro de interesse e o que é feito é testar se adicionar esta variável omitida resultará em uma melhora significativa no modelo. Isto é feito com base na inclinação da função de verossimilhança, esta inclinação é usada para estimar a melhoria no modelo caso as variáveis omitidas fossem incluídas.

De certo modo, os três testes podem ser usados para verificar se a ausência de determinada variável do modelo prejudica o ajuste. No caso do teste de razão de verossimilhanças, dois modelos precisam ser ajustados. Já os testes Wald e escore necessitam de apenas um modelo. Além disso, os testes são assintoticamente equivalentes. Em amostras finitas estes testes podem apresentar resultados diferentes como discutido por Evans e Savin (1982).

Para o caso dos modelos lineares tradicionais existem técnicas como a análise de variância (ANOVA), proposta inicialmente por Fisher e Mackenzie (1923). Segundo St et al. (1989), a ANOVA é um dos métodos estatísticos mais amplamente usados para testar hipóteses e que está presente em praticamente todos os materiais introdutórios de estatística. O objetivo da técnica é a avaliação do efeito de cada uma das variáveis explicativas sobre a resposta. Isto é feito por meio da comparação via testes de hipóteses entre modelos com e sem cada uma das variáveis explicativas. Logo, tal procedimento permite que seja possível avaliar se a retirada de cada uma das variáveis gera um modelo significativamente pior quando comparado ao modelo com a variável. Para o caso multivariado estende-se a técnica de análise de variância (ANOVA) para a análise de variância multivariada (Smith et al., 1962), a MANOVA. E dentre os testes

de hipóteses multivariados já discutidos na literatura, destacam-se o  $\lambda$  de Wilk's (Wilks, 1932), traço de Hotelling-Lawley (Lawley, 1938), (Hotelling, 1951), traço de Pillai (Pillai et al., 1955) e maior raiz de Roy (Roy, 1953).

Complementar às ANOVAs e MANOVAs estão os testes de comparações múltiplas. Tais procedimentos são utilizados quando a análise de variância aponta como conclusão a existência de efeito significativo dos parâmetros associados a uma variável categórica, ou seja, há ao menos uma diferença significativa entre os níveis de um fator. Com isso, o teste de comparações múltiplas é mais um procedimento baseado em testes de hipóteses, utilizado para determinar onde estão estas diferenças. Por exemplo, suponha que há no modelo uma variável categórica  $X$  de três níveis: A, B e C. A análise de variância mostrará se há efeito da variável  $X$  no modelo, isto é, se os valores da resposta estão associados aos níveis de  $X$ , contudo este resultado não nos mostrará se os valores da resposta diferem de A para B, ou de A para C, ou ainda se B difere de C. Para detectar tais diferenças empregam-se os testes de comparações múltiplas. Dentre os testes discutidos na literatura encontram-se o teste de Dunnett, Tukey, t de student (LSD), Scott-Knott, dentre outros. Hsu (1996) discute diversos procedimentos para fins de comparações múltiplas. Já Bretz et al. (2008) trata de procedimentos de comparações múltiplas em modelos lineares.

## 1.2 DESAFIO

Buscamos até aqui enfatizar a importância dos modelos de regressão no contexto de ciência de dados e sua relevância na análise de problemas práticos. Além disso, ressaltamos a importância dos testes de hipóteses e também de procedimentos baseados em tais testes para fins de avaliação da importância das variáveis incluídas nos modelos. No entanto, considerando os McGLMs, não há discussão a respeito da construção destes testes para a classe.

## 1.3 HIPÓTESE

Apesar da falta de estudos que busquem propor testes de hipóteses para os McGLMs, não é difícil vislumbrar que existem argumentos a favor da hipótese de que o teste Wald clássico utilizado em modelos tradicionais funcionaria para os McGLMs. A construção do teste Wald em sua forma usual é baseada nas estimativas de máxima verossimilhança. Contudo a estatística de teste usada não depende da máxima verossimilhança, e sim de um vetor de estimativas dos parâmetros e uma matriz de variância e covariância destas estimativas. Assim, por mais que os McGLMs não sejam ajustados com base na maximização da função de verossimilhança para obtenção dos parâmetros do modelo, o método de estimação fornece os componentes necessários para a construção do teste. Neste sentido, das três opções clássicas de testes de hipóteses comumente aplicados a problemas de regressão (razão de verossimilhanças, Wald e escore), o teste Wald se torna o mais atrativo. Outra vantagem do teste Wald em relação a seus concorrentes é que existe a possibilidade não só de formular hipóteses sobre conjuntos de parâmetros como também é possível confrontar as estimativas com qualquer valor desejado. Quando se trata

dos McGLMs, esta ideia se torna especialmente atrativa pois fornece ferramentas para avaliar qualquer parâmetro de um McGLM.

Quando trabalhamos na classe dos McGLMs estimamos parâmetros de regressão, dispersão e potência. Os parâmetros de regressão são aqueles que associam a(s) variável(is) explicativa(s) à(s) variável(is) resposta(s), por meio do estudo destes parâmetros é possível avaliar o efeito da(s) variável(is) explicativa(s) sobre a(s) resposta(s). Por meio do estudo dos parâmetros de dispersão pode-se avaliar o efeito da correlação entre unidades do estudo, muito útil em situações em que as observações do conjunto de dados são correlacionadas entre si, como por exemplo em estudos longitudinais, temporais e de medidas repetidas. Já os parâmetros de potência nos fornecem um indicativo de qual distribuição de probabilidade melhor se adequa ao problema. O desenvolvimento de testes de hipóteses para fins de avaliação destas quantidades é de grande valia em problemas práticos e leva a formas procedurais para avaliação das quantidades resultantes do modelo.

#### 1.4 OBJETIVO

Por se tratar de uma classe de modelos flexível e com alto poder de aplicação a problemas práticos, nosso objetivo geral é o desenvolvimento de testes de hipóteses para os McGLMs. Temos os seguintes objetivos específicos: propor a utilização do teste Wald para realização de testes de hipóteses gerais sobre parâmetros de McGLMs, implementar em R funções para efetuar tais testes, bem como funções para efetuar análises de variância, análises de variância multivariadas e testes de comparações múltiplas para os McGLMs. Outro objetivo é avaliar as propriedades e comportamento dos testes propostos com base em estudos de simulação e avaliar o potencial de aplicação das metodologias discutidas com base na aplicação a conjuntos de dados reais.

#### 1.5 CONTRIBUIÇÃO

Nossa proposta visa uma maneira procedural e segura de responder questões comuns no contexto de modelagem que frequentemente surgem em projetos de ciência de dados, como: quais variáveis estão associadas ao desfecho do fenômeno de interesse? Existe efeito da estrutura de correlação entre indivíduos no estudo? Qual a distribuição de probabilidade que melhor se adequa ao problema? O efeito de determinada variável é o mesmo independente da resposta? Dentre outras.

Vale ressaltar que, por si só, os McGLMs já contornam importantes restrições encontradas nas classes clássicas de modelos, como a impossibilidade de modelar múltiplas respostas e modelar a dependência entre indivíduos. Nossa contribuição vai no sentido de fornecer ferramentas para uma melhor interpretação dos parâmetros estimados e assim extrair mais informações e conclusões a respeito dos problemas modelados por meio da classe.

## 1.6 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

Esta dissertação está organizada em oito capítulos. na atual seção foi exposto o tema e a ideia do trabalho de forma a enfatizar as características dos modelos de regressão, utilidade dos testes de hipóteses neste contexto, os testes mais famosos utilizados, procedimentos baseados em testes de hipóteses e nosso objetivo de propor o teste Wald para avaliação dos parâmetros de McGLMs. O Capítulo 2 é dedicado ao referencial teórico do trabalho, trata-se de uma revisão bibliográfica da estrutura dos McGLMs, testes de hipótese, análises de variância e testes de comparações múltiplas. No Capítulo 3 referenciamos trabalhos correlatos. No Capítulo 4 é apresentada nossa proposta com os detalhes do teste Wald para avaliar suposições sobre parâmetros de um McGLM. As implementações computacionais do método proposto são apresentadas no Capítulo 5. O Capítulo 6 é dedicado aos resultados da avaliação de performance do teste proposto com base em um estudo de simulação. No capítulo 7 buscamos motivar o uso da proposta por meio da aplicação do método a problemas práticos e reais de análise de dados. Por fim, encerramos o trabalho com nossas considerações finais no Capítulo 8.

### **TODO**

- **TALVEZ EXEMPLO DE PROBLEMA EM QUE SE APLIQUE UM MODELO DE REGRESSÃO MULTIVARIADO.**



## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Nosso referencial teórico aborda predominantemente três temas. O primeiro deles é uma revisão da estrutura geral e estimação dos parâmetros de um McGLM, baseado nas ideias de Bonat e Jørgensen (2016). A segunda parte do referencial diz respeito ao procedimento dos chamados testes de hipóteses com o foco de tratar do objetivo, notação, componentes e aplicação deste tipo de procedimento no contexto de modelos de regressão. Por fim, a última parte do referencial diz respeito a procedimentos específicos baseados em testes de hipóteses para avaliar os parâmetros de um modelo de regressão: as análises de variância e os testes de comparações múltiplas.

### 2.1 MODELOS MULTIVARIADOS DE COVARIÂNCIA LINEAR GENERALIZADA

Os GLMs, propostos por Nelder e Wedderburn (1972), são uma forma de modelagem que lida exclusivamente com uma resposta em que esta resposta pode ser contínua, binária ou até mesmo uma contagem. Tais características tornam essa classe de modelos uma flexível ferramenta de modelagem aplicável a diversos tipos de problemas. Contudo, por mais flexível e discutida na literatura, essa classe apresenta ao menos três importantes restrições: i) um leque restrito de distribuições disponíveis para modelagem, ii) a incapacidade de lidar com observações dependentes e iii) a incapacidade de lidar com múltiplas respostas simultaneamente.

Com o objetivo de contornar estas restrições, foi proposta por Bonat e Jørgensen (2016), uma estrutura geral para análise de dados não gaussianos com múltiplas respostas em que não se faz suposições quanto à independência das observações: os McGLMs. Tais modelos, levam em conta a não normalidade por meio de uma função de variância. Além disso, a estrutura média é modelada por meio de uma função de ligação e um preditor linear. Os parâmetros dos modelos são obtidos por meio de funções de estimação baseadas em suposições de segundo momento.

Vamos discutir os McGLMs como uma extensão dos GLMs tal como apresentado em de Bonat e Jørgensen (2016). Vale ressaltar que é usada uma especificação menos usual de um GLM, porém trata-se de uma notação mais conveniente para chegar à uma especificação mais simples de um McGLM.

#### 2.1.1 Modelo linear generalizado

Para definição da extensão de um GLM apresentada por Bonat e Jørgensen (2016), considere  $Y$  um vetor  $N \times 1$  de valores observados da variável resposta,  $X$  uma matriz de

delineamento  $N \times k$  e  $\beta$  um vetor de parâmetros de regressão  $k \times 1$ . Com isso, um GLM pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} E(Y) &= \mu = g^{-1}(X\beta), \\ \text{Var}(Y) &= \Sigma = V(\mu; p)^{1/2} (\tau_0 I) V(\mu; p)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

em que  $g(\cdot)$  é a função de ligação,  $V(\mu; p)$  é uma matriz diagonal em que as entradas principais são dadas pela função de variância aplicada ao vetor  $\mu$ ,  $p$  é o parâmetro de potência,  $\tau_0$  o parâmetro de dispersão e  $I$  é a matriz identidade de ordem  $N \times N$ .

Nesta extensão, os GLMs fazem uso de apenas duas funções, a função de variância e de ligação. Diferentes escolhas de funções de variância implicam em diferentes suposições a respeito da distribuição da variável resposta. Dentre as funções de variância conhecidas, podemos citar:

1. A função de variância potência, que caracteriza a família Tweedie de distribuições, em que a função de variância é dada por  $\vartheta(\mu; p) = \mu^p$ , na qual destacam-se as distribuições: normal ( $p = 0$ ), Poisson ( $p = 1$ ), gama ( $p = 2$ ) e normal inversa ( $p = 3$ ). Para mais informações consulte Jørgensen (1987) e Jørgensen (1997).

2. A função de dispersão Poisson–Tweedie, a qual caracteriza a família Poisson-Tweedie de distribuições, que visa contornar a inflexibilidade da utilização da função de variância potência para respostas discretas. A família Poisson-Tweedie tem função de dispersão dada por  $\vartheta(\mu; p) = \mu + \tau\mu^p$ , em que  $\tau$  é o parâmetro de dispersão. A função de dispersão Poisson-Tweedie tem como casos particulares os mais famosos modelos para dados de contagem: Hermite ( $p = 0$ ), Neyman tipo A ( $p = 1$ ), binomial negativa ( $p = 2$ ) e Poisson–inversa gaussiana ( $p = 3$ ) (Jørgensen e Kokonendji, 2015). Não se trata de uma função de variância usual, mas é uma função que caracteriza o relacionamento entre média e variância.

3. A função de variância binomial, dada por  $\vartheta(\mu) = \mu(1 - \mu)$ , utilizada quando a variável resposta é binária, restrita a um intervalo ou quando tem-se o número de sucessos em um número de tentativas.

Lembre-se que o GLM é uma classe de modelos de regressão univariados em que um dos pressupostos é a independência entre as observações. Esta independência é especificada na matriz identidade  $I$  no centro Equação 2.1. Podemos imaginar que, substituindo esta matriz identidade por uma matriz qualquer que reflita a relação entre os indivíduos da amostra teremos uma extensão do Modelo Linear Generalizado para observações dependentes. É justamente essa a ideia dos modelos de covariância linear generalizada, o cGLM, também apresentados em Bonat e Jørgensen (2016).

### 2.1.2 Modelo de covariância linear generalizada

Os cGLMs são uma alternativa para problemas em que a suposição de independência entre as observações não é atendida. Neste caso, a solução proposta é substituir a matriz

identidade  $\mathbf{I}$  da Equação 2.1 por uma matriz não diagonal  $\mathbf{\Omega}(\boldsymbol{\tau})$  que descreva adequadamente a estrutura de correlação entre as observações. Trata-se de uma ideia similar à proposta de Liang e Zeger (1986) nos modelos GEE (Equações de Estimção Generalizadas), em que utiliza-se uma matriz de correlação de trabalho para considerar a dependência entre as observações. A matriz  $\mathbf{\Omega}(\boldsymbol{\tau})$  é descrita como uma combinação de matrizes conhecidas tal como nas propostas de Anderson et al. (1973) e Pourahmadi (2000), podendo ser escrita da forma

$$h\{\mathbf{\Omega}(\boldsymbol{\tau})\} = \tau_0 \mathbf{Z}_0 + \dots + \tau_D \mathbf{Z}_D, \quad (2.2)$$

em que  $h(\cdot)$  é a função de ligação de covariância,  $\mathbf{Z}_d$  com  $d = 0, \dots, D$  são matrizes que representam a estrutura de covariância presente nos dados e  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_0, \dots, \tau_D)$  é um vetor  $(D+1) \times 1$  de parâmetros de dispersão. Note que o número de matrizes usadas para especificar o preditor linear matricial, definido por  $D$ , é indefinido, ou seja, podem ser usadas quantas matrizes forem necessárias para especificação no modelo da relação entre os indivíduos no conjunto de dados. Cada uma das matrizes é associada a um parâmetro de dispersão e podemos utilizar estes parâmetros para avaliar a existência de efeito da correlação entre indivíduos do conjunto de dados. Tal estrutura pode ser vista como um análogo ao preditor linear para a média e foi nomeado como preditor linear matricial, a especificação da função de ligação de covariância é discutida por Pinheiro e Bates (1996). É possível selecionar combinações de matrizes para se obter os mais conhecidos modelos da literatura para dados longitudinais, séries temporais, dados espaciais e espaço-temporais. Mais detalhes são discutidos por Demidenko (2013).

Com isso, substituindo a matriz identidade da Equação 2.1 pela Equação 2.2, temos uma classe com toda a flexibilidade dos GLMs, porém contornando a restrição da independência entre as observações desde que o preditor linear matricial seja adequadamente especificado. Deste modo, é contornada a restrição da incapacidade de lidar com observações dependentes. Outra restrição diz respeito às múltiplas respostas e, contornando este problema, chegamos ao McGLM.

### 2.1.3 Modelos multivariados de covariância linear generalizada

Os McGLMs podem ser entendidos como uma extensão multivariada dos cGLMs e que portanto contornam as principais restrições presentes nos GLMs. Para definição de um McGLM, considere  $\mathbf{Y}_{N \times R} = \{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_R\}$  uma matriz de variáveis resposta e  $\mathbf{M}_{N \times R} = \{\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_R\}$  uma matriz de valores esperados. Cada uma das variáveis resposta tem sua própria matriz de variância e covariância, responsável por modelar a covariância dentro de cada resposta, sendo expressa por

$$\Sigma_r = \mathbf{V}_r(\boldsymbol{\mu}_r; p)^{1/2} \mathbf{\Omega}_r(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{V}_r(\boldsymbol{\mu}_r; p)^{1/2}.$$

Além disso, é necessária uma matriz de correlação  $\Sigma_b$ , de ordem  $R \times R$ , que descreve a correlação entre as variáveis resposta. Para a especificação da matriz de variância e covariância conjunta é utilizado o produto Kronecker generalizado, proposto por Martinez-Beneito (2013).

Finalmente, um McGLM é descrito como

$$\begin{aligned} E(\mathbf{Y}) &= \mathbf{M} = \{g_1^{-1}(\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1), \dots, g_R^{-1}(\mathbf{X}_R\boldsymbol{\beta}_R)\} \\ \text{Var}(\mathbf{Y}) &= \mathbf{C} = \boldsymbol{\Sigma}_R \otimes^G \boldsymbol{\Sigma}_b, \end{aligned}$$

em que  $\boldsymbol{\Sigma}_R \otimes^G \boldsymbol{\Sigma}_b = \text{Bdiag}(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_R)(\boldsymbol{\Sigma}_b \otimes \mathbf{I})\text{Bdiag}(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_1^\top, \dots, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_R^\top)$  é o produto generalizado de Kronecker, a matriz  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_r$  denota a matriz triangular inferior da decomposição de Cholesky da matriz  $\boldsymbol{\Sigma}_r$ , o operador  $\text{Bdiag}$  denota a matriz bloco-diagonal e  $\mathbf{I}$  uma matriz identidade  $N \times N$ .

Com isso, chega-se a uma classe de modelos com um leque maior de distribuições disponíveis, graças às funções de variância. Além disso, se torna possível a modelagem de dados com estrutura de covariância, por meio da especificação do preditor matricial. E ainda é possível a modelagem de múltiplas respostas. Vale ressaltar que os McGLMs são flexíveis ao ponto de que podemos considerar  $R$  preditores lineares diferentes, com  $R$  funções de ligação diferentes e  $R$  funções de variância diferentes. Esta flexibilidade torna os McGLMs uma classe muito atrativa para aplicação, contudo, dependendo da estrutura e complexidade do problema, existe a possibilidade de ajustar modelos superparametrizados, ou seja, chegar a um cenário com mais parâmetros do que observações.

#### 2.1.4 Estimação e inferência

Os McGLMs são ajustados baseados no método de funções de estimação descritos em detalhes por Bonat e Jørgensen (2016) e Jørgensen e Knudsen (2004). Nesta seção é apresentada uma visão geral do algoritmo e da distribuição assintótica dos estimadores baseados em funções de estimação.

As suposições de segundo momento dos McGLMs permitem a divisão dos parâmetros em dois conjuntos:  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\lambda}^\top)^\top$ . Desta forma,  $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1^\top, \dots, \boldsymbol{\beta}_R^\top)^\top$  é um vetor  $K \times 1$  de parâmetros de regressão e  $\boldsymbol{\lambda} = (\rho_1, \dots, \rho_{R(R-1)/2}, p_1, \dots, p_R, \boldsymbol{\tau}_1^\top, \dots, \boldsymbol{\tau}_R^\top)^\top$  é um vetor  $Q \times 1$  de parâmetros de dispersão. Além disso,  $\mathcal{Y} = (\mathbf{Y}_1^\top, \dots, \mathbf{Y}_R^\top)^\top$  denota o vetor empilhado de ordem  $NR \times 1$  da matriz de variáveis resposta  $\mathbf{Y}_{N \times R}$  e  $\mathcal{M} = (\boldsymbol{\mu}_1^\top, \dots, \boldsymbol{\mu}_R^\top)^\top$  denota o vetor empilhado de ordem  $NR \times 1$  da matriz de valores esperados  $\mathbf{M}_{N \times R}$ .

Para estimação dos parâmetros de regressão é utilizada a função quasi-score (Liang e Zeger, 1986), representada por

$$\psi_{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{D}^\top \mathbf{C}^{-1}(\mathcal{Y} - \mathcal{M}), \quad (2.3)$$

em que  $\mathbf{D} = \nabla_{\boldsymbol{\beta}} \mathcal{M}$  é uma matriz  $NR \times K$ , e  $\nabla_{\boldsymbol{\beta}}$  denota o operador gradiente. Utilizando a função quasi-score a matriz  $K \times K$  de sensibilidade de  $\psi_{\boldsymbol{\beta}}$  é dada por

$$\mathbf{S}_{\boldsymbol{\beta}} = E(\nabla_{\boldsymbol{\beta}} \psi_{\boldsymbol{\beta}}) = -\mathbf{D}^\top \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D},$$

enquanto que a matriz  $K \times K$  de variabilidade de  $\psi_{\boldsymbol{\beta}}$  é escrita como

$$V_{\beta} = VAR(\psi\beta) = D^{\top} C^{-1} D.$$

Para os parâmetros de dispersão é utilizada a função de estimação de Pearson, definida da forma

$$\psi_{\lambda_i}(\beta, \lambda) = \text{tr}(W_{\lambda_i}(\mathbf{r}^{\top} \mathbf{r} - \mathbf{C})), \quad i = 1, \dots, Q, \quad (2.4)$$

em que  $W_{\lambda_i} = -\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \lambda_i}$  e  $\mathbf{r} = (\mathcal{Y} - \mathcal{M})$ . A entrada  $(i, j)$  da matriz de sensibilidade  $Q \times Q$  de  $\psi_{\lambda}$  é dada por

$$S_{\lambda_{ij}} = E \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \psi_{\lambda_j} \right) = -\text{tr}(W_{\lambda_i} C W_{\lambda_j} C).$$

Já a entrada  $(i, j)$  da matriz de variabilidade  $Q \times Q$  de  $\psi_{\lambda}$  é definida por

$$V_{\lambda_{ij}} = \text{Cov}(\psi_{\lambda_i}, \psi_{\lambda_j}) = 2\text{tr}(W_{\lambda_i} C W_{\lambda_j} C) + \sum_{l=1}^{NR} k_l^{(4)} (W_{\lambda_i})_{ll} (W_{\lambda_j})_{ll},$$

em que  $k_l^{(4)}$  denota a quarta cumulante de  $\mathcal{Y}_l$ . No processo de estimação dos McGLMs é usada sua versão empírica.

Para se levar em conta a covariância entre os vetores  $\beta$  e  $\lambda$ , Bonat e Jørgensen (2016) obtiveram as matrizes de sensibilidade e variabilidade cruzadas, denotadas por  $S_{\lambda\beta}$ ,  $S_{\beta\lambda}$  e  $V_{\lambda\beta}$ , mais detalhes em Bonat e Jørgensen (2016). As matrizes de sensibilidade e variabilidade conjuntas de  $\psi_{\beta}$  e  $\psi_{\lambda}$  são denotados por

$$S_{\theta} = \begin{bmatrix} S_{\beta} & S_{\beta\lambda} \\ S_{\lambda\beta} & S_{\lambda} \end{bmatrix} \text{ e } V_{\theta} = \begin{bmatrix} V_{\beta} & V_{\lambda\beta}^{\top} \\ V_{\lambda\beta} & V_{\lambda} \end{bmatrix}.$$

Seja  $\hat{\theta} = (\hat{\beta}^{\top}, \hat{\lambda}^{\top})^{\top}$  o estimador baseado na Equação 2.3 e Equação 2.4, a distribuição assintótica de  $\hat{\theta}$  é

$$\hat{\theta} \sim N(\theta, J_{\theta}^{-1}),$$

em que  $J_{\theta}^{-1}$  é a inversa da matriz de informação de Godambe, dada por  $J_{\theta}^{-1} = S_{\theta}^{-1} V_{\theta} S_{\theta}^{-\top}$ , em que  $S_{\theta}^{-\top} = (S_{\theta}^{-1})^{\top}$ .

Para resolver o sistema de equações  $\psi_{\beta} = 0$  e  $\psi_{\lambda} = 0$  faz-se uso do algoritmo Chaser modificado, proposto por Jørgensen e Knudsen (2004), que fica definido como

$$\begin{aligned} \beta^{(i+1)} &= \beta^{(i)} - S_{\beta}^{-1} \psi_{\beta}(\beta^{(i)}, \lambda^{(i)}), \\ \lambda^{(i+1)} &= \lambda^{(i)} - S_{\lambda}^{-1} \psi_{\lambda}(\beta^{(i+1)}, \lambda^{(i)}). \end{aligned}$$

Toda metodologia do McGLM está implementada no pacote *mcglm* (Bonat, 2018) do software estatístico R (R Core Team, 2020).

## 2.2 TESTES DE HIPÓTESES

A palavra “inferir” significa tirar conclusão. O campo de estudo chamado de inferência estatística tem como objetivo o desenvolvimento e discussão de métodos e procedimentos que permitem, com certo grau de confiança, fazer afirmações sobre uma população com base em informação amostral. Na prática, costuma ser inviável trabalhar com uma população. Assim, a alternativa usada é coletar uma amostra e utilizar esta amostra para tirar conclusões. Neste sentido, a inferência estatística fornece ferramentas para estudar quantidades populacionais (parâmetros) por meio de estimativas destas quantidades obtidas por meio da amostra.

Contudo, é importante notar que diferentes amostras podem fornecer diferentes resultados. Por exemplo, se há interesse em estudar a média de determinada característica na população mas não há condições de se observar a característica em todas as unidades, usa-se uma amostra. E é totalmente plausível que diferentes amostras apresentem médias amostrais diferentes. Portanto, os métodos de inferência estatística sempre apresentarão determinado grau de incerteza.

Campos importantes da inferência estatística são a estimação de quantidades (por ponto e intervalo) e testes de hipóteses. O objetivo desta revisão é apresentar uma visão geral a respeito de testes de hipóteses estatísticas e os principais componentes. Mais sobre inferência estatística pode ser visto em Barndorff-Nielsen e Cox (2017), Silvey (2017), Azzalini (2017), Wasserman (2013), entre outros.

### 2.2.1 Elementos de um teste de hipóteses

A atual teoria dos testes de hipóteses é resultado da combinação de trabalhos conduzidos predominantemente na década de 1920 por Ronald Fisher, Jerzy Neyman e Egon Pearson em publicações como Fisher (1992), Fisher (1929), Neyman e Pearson (2020a), Neyman e Pearson (2020b) e Neyman e Pearson (1933).

Entende-se por hipótese estatística uma afirmação a respeito de um ou mais parâmetros (desconhecidos) que são estimados com base em uma amostra. Já um teste de hipóteses é o procedimento que permite responder perguntas como: com base na evidência amostral, podemos considerar que dado parâmetro é igual a determinado valor? Alguns dos componentes de um teste de hipóteses são: as hipóteses, a estatística de teste, a distribuição da estatística de teste, o nível de significância, o poder do teste, a região crítica e o valor-p.

Para definição dos elementos necessários para condução de um teste de hipóteses, considere que uma amostra foi tomada com o intuito de estudar determinada característica de uma população. Considere  $\hat{\pi}$  a estimativa de um parâmetro  $\pi$  da população. Neste contexto, uma hipótese estatística é uma afirmação a respeito do valor do parâmetro  $\pi$  que é estudado por meio da estimativa  $\hat{\pi}$  a fim de concluir algo sobre a população de interesse.

Na prática, sempre são definidas duas hipóteses de interesse. A primeira delas é chamada de hipótese nula ( $H_0$ ) e trata-se da hipótese de que o valor de um parâmetro populacional é igual a algum valor especificado. A segunda hipótese é chamada de hipótese alternativa ( $H_1$ ) e trata-se

da hipótese de que o parâmetro tem um valor diferente daquele especificado na hipótese nula. Deste modo, por meio do estudo da quantidade  $\hat{\pi}$  verificamos a plausibilidade de se afirmar que  $\pi$  é igual a um valor  $\pi_0$ . Portanto, três tipos de hipóteses podem ser especificadas:

1.  $H_0 : \pi = \pi_0$  vs  $H_1 : \pi \neq \pi_0$ .
2.  $H_0 : \pi = \pi_0$  vs  $H_1 : \pi > \pi_0$ .
3.  $H_0 : \pi = \pi_0$  vs  $H_1 : \pi < \pi_0$ .

Com as hipóteses definidas, dois resultados são possíveis em termos de  $H_0$ : rejeição ou não rejeição. O uso do termo “aceitar” a hipótese nula não é recomendado tendo em vista que a decisão a favor ou contra a hipótese se dá por meio de informação amostral. Ainda, por se tratar de um procedimento baseado em informação amostral, existe um risco associado a decisões equivocadas. Os possíveis desfechos de um teste de hipóteses estão descritos na Tabela 2.1, que mostra que existem dois casos nos quais toma-se uma decisão equivocada. Em uma delas rejeita-se uma hipótese nula verdadeira (erro do tipo I) e na outra não rejeita-se uma hipótese nula falsa (erro do tipo II).

A probabilidade do erro do tipo I é usualmente denotada por  $\alpha$  e chamada de nível de significância, já a probabilidade do erro do tipo II é denotada por  $\beta$ . O cenário ideal é aquele que minimiza tanto  $\alpha$  quanto  $\beta$ , contudo, em geral, à medida que  $\alpha$  reduz,  $\beta$  tende a aumentar. Por este motivo busca-se controlar o erro do tipo I. Além disso temos que a probabilidade de se rejeitar a hipótese nula quando a hipótese alternativa é verdadeira (rejeitar corretamente  $H_0$ ) recebe o nome de poder do teste.

	<b>Rejeita <math>H_0</math></b>	<b>Não Rejeita <math>H_0</math></b>
<b><math>H_0</math> verdadeira</b>	Erro tipo I	Decisão correta
<b><math>H_0</math> falsa</b>	Decisão correta	Erro tipo II

Tabela 2.1: Desfechos possíveis em um teste de hipóteses

A decisão acerca da rejeição ou não rejeição de  $H_0$  se dá por meio da avaliação de uma estatística de teste, uma região crítica e um valor crítico. A estatística de teste é um valor obtido por meio de operações da estimativa do parâmetro de interesse e, em alguns casos, envolve outras quantidades vindas da amostra. Esta estatística segue uma distribuição de probabilidade e esta distribuição é usada para definir a região e o valor crítico.

Considerando a distribuição da estatística de teste, define-se um conjunto de valores que podem ser assumidos pela estatística de teste para os quais rejeita-se a hipótese nula, a chamada região de rejeição. Já o valor crítico é o valor que divide a área de rejeição da área de não rejeição de  $H_0$ . Caso a estatística de teste esteja dentro da região crítica, significa que as evidências amostrais apontam para a rejeição de  $H_0$ . Por outro lado, se a estatística de teste estiver fora da região crítica, quer dizer que os dados apontam para uma não rejeição de  $H_0$ . O já mencionado

nível de significância ( $\alpha$ ) tem importante papel no processo, pois trata-se de um valor fixado e, reduzindo o nível de significância, torna-se cada vez mais difícil rejeitar a hipótese nula.

O último conceito importante para compreensão do procedimento geral de testes de hipóteses é chamado de nível descritivo, valor-p ou ainda  $\alpha^*$ . Trata-se da probabilidade de a estatística de teste tomar um valor igual ou mais extremo do que aquele que foi observado, supondo que a hipótese nula é verdadeira. Deste modo, o valor-p pode ser visto como uma quantidade que fornece informação quanto ao grau que os dados vão contra a hipótese nula. Esta quantidade pode ainda ser utilizada como parte da regra decisão, uma vez que um valor-p menor que o nível de significância sugere que há evidência nos dados em favor da rejeição da hipótese nula.

Assim, o procedimento geral para condução de um teste de hipóteses consiste em:

1. Definir  $H_0$  e  $H_1$ .
2. Identificar o teste a ser efetuado, sua estatística de teste e distribuição.
3. Obter as quantidades necessárias para o cálculo da estatística de teste.
4. Fixar o nível de significância.
5. Definir o valor e a região crítica.
6. Confrontar o valor e região crítica com a estatística de teste.
7. Obter o valor-p.
8. Concluir pela rejeição ou não rejeição da hipótese nula.

### 2.2.2 Testes de hipóteses em modelos de regressão

A ideia de modelos de regressão consiste em modelar uma variável em função de um conjunto de variáveis explicativas. Estes modelos contêm parâmetros que são quantidades desconhecidas que estabelecem a relação entre as variáveis sob o modelo. Basicamente, o parâmetro de interesse da distribuição de probabilidades utilizada é reescrito como uma combinação linear de novos parâmetros associados a vetores numéricos que contêm o valor de variáveis explicativas.

Os parâmetros desta combinação linear são estimados com base nos dados e, como estão associados a variáveis explicativas, pode ser de interesse verificar se a retirada de uma ou mais variáveis do modelo gera um modelo significativamente pior que o original. Em outros termos, uma hipótese de interesse costuma ser verificar se há evidência suficiente nos dados para afirmar que determinada variável explicativa não possui efeito sobre a resposta.

Neste contexto, testes de hipóteses são amplamente empregados, sendo que, quando se trata de modelos de regressão, três testes são usualmente utilizados: o teste da razão de



verossimilhanças, o teste Wald e o teste multiplicador de lagrange, também conhecido como teste escore. Estes testes são assintoticamente equivalentes; em amostras finitas podem apresentar resultados diferentes de tal modo que a estatística do teste Wald é maior que a estatística do teste da razão de verossimilhanças que, por sua vez, é maior que a estatística do teste escore (Evans e Savin, 1982). Engle (1984) descreve a formulação geral dos três testes. Dedicaremos parte deste referencial ao teste Wald.

### 2.2.2.1 Teste Wald

O teste Wald (Wald, 1943) avalia a distância entre as estimativas dos parâmetros e um conjunto de valores postulados. Esta diferença é ainda padronizada por medidas de precisão das estimativas dos parâmetros. Quanto mais distante de 0 for o valor da distância padronizada, menores são as evidências a favor da hipótese de que os valores estimados são iguais aos valores postulados.

Com isso, a ideia do teste consiste em verificar se existe evidência suficiente nos dados para afirmar que um ou mais parâmetros são iguais a valores especificados. Em geral, os valores especificados são um vetor nulo para verificar se há evidência para afirmar que os valores dos parâmetros são iguais a 0, contudo existe a possibilidade de especificar hipóteses para qualquer valor.

Para definição de um teste Wald, considere um único modelo de regressão ajustado em que os parâmetros foram estimados por meio da maximização da função de verossimilhança. Neste contexto, considere  $\beta$  o vetor de parâmetros de regressão  $k \times 1$  deste modelo, em que as estimativas são dadas por  $\hat{\beta}$ .

Considere que há interesse em testar  $s$  restrições ao modelo original. As hipóteses são especificadas por meio de uma matriz  $L$  de dimensão  $s \times k$  e um vetor  $c$  de valores postulados, de dimensão  $s$ . Com base nestes elementos, as hipóteses podem ser descritas como:

$$H_0 : L\beta = c \text{ vs } H_1 : L\beta \neq c,$$

a estatística de teste é dada por:

$$W = (L\hat{\beta} - c)^T (L \text{Var}^{-1}(\hat{\beta}) L^T)^{-1} (L\hat{\beta} - c),$$

em que  $W \sim \chi_s^2$ . Note que a estatística de teste necessita de elementos que devem ser especificados pelo pesquisador e quantidades facilmente obtidas após ajuste do modelo: as estimativas dos parâmetros e da matriz de variância e covariância das estimativas.

### 2.2.3 ANOVA e MANOVA

Quando trabalhamos com modelos univariados, uma das formas de avaliar a significância de cada uma das variáveis de uma forma procedural é por meio da análise de variância (ANOVA)

(Fisher e Mackenzie, 1923). Este método consiste em efetuar testes de hipóteses sucessivos impondo restrições ao modelo original. O objetivo é testar se a ausência de determinada variável gera um modelo significativamente inferior que o modelo com determinada variável. Os resultados destes sucessivos testes são sumarizados numa tabela: o chamado quadro de análise de variância. Em geral, este quadro contém em cada linha: a variável, o valor de uma estatística de teste referente à hipótese de nulidade de todos os parâmetros associados à esta variável, os graus de liberdade desta hipótese, e um valor-p associado à hipótese testada naquela linha do quadro.

Trata-se de um interessante procedimento para avaliar a relevância de uma variável ao problema, contudo, cuidados devem ser tomados no que diz respeito à forma como o quadro foi elaborado. Como já mencionado, cada linha do quadro refere-se a uma hipótese e estas hipóteses podem ser formuladas de formas distintas. Formas conhecidas de se elaborar o quadro são as chamadas ANOVAs dos tipos I, II e III. Esta nomenclatura vem do software estatístico SAS (Institute, 1985), contudo as implementações existentes em outros softwares que seguem esta nomenclatura não necessariamente correspondem ao que está implementado no SAS. No software R (R Core Team, 2020) as implementações dos diferentes tipos de análise de variância podem ser obtidas e usadas no pacote *car* (Fox e Weisberg, 2019). Geralmente, no contexto de modelos de regressão, para gerar quadros de análise de variância, faz-se uso de uma sequência de testes da razão de verossimilhanças para avaliar o efeito de cada variável explicativa do modelo.

Do mesmo modo que é feito para um modelo univariado, podemos chegar também a uma análise de variância multivariada (MANOVA) realizando sucessivos testes de hipóteses nos quais existe o interesse em avaliar o efeito de determinada variável em todas as respostas simultaneamente. A MANOVA clássica (Smith et al., 1962) é um assunto com vasta discussão na literatura e possui diversas propostas com o objetivo de verificar o efeito de variáveis explicativas sobre múltiplas respostas, como o  $\lambda$  de Wilk's (Wilks, 1932), traço de Hotelling-Lawley (Lawley, 1938); (Hotelling, 1951), traço de Pillai (Pillai et al., 1955) e maior raiz de Roy (Roy, 1953).

É possível gerar quadros de análise de variância por meio do teste Wald. Basta, para cada linha do quadro de análise de variância, especificar corretamente uma matriz  $L$  que represente de forma adequada a hipótese a ser testada.

## 2.2.4 Testes de comparações múltiplas

Quando a ANOVA aponta para efeito significativo de uma variável categórica, costuma ser de interesse do pesquisador avaliar quais dos níveis diferem entre si. Para isso são empregados os testes de comparações múltiplas. Na literatura existem diversos procedimentos para efetuar tais testes, muitos deles descritos em Hsu (1996).

No contexto de modelos de regressão costuma ser de interesse avaliar comparações aos pares a fim de detectar para quais níveis da variável categórica os valores da resposta se alteram. Tal tipo de situação pode ser avaliada utilizando o teste Wald. Através da correta especificação da matriz  $L$ , é possível avaliar hipóteses sobre qualquer possível contraste entre os níveis de

uma determinada variável categórica. Portanto, é possível usar a estatística de Wald para efetuar também testes de comparações múltiplas.

O procedimento consiste basicamente de 3 passos. O primeiro deles é obter a matriz de combinações lineares dos parâmetros do modelo que resultam nas médias ajustadas. Com esta matriz é possível gerar a matriz de contrastes, dada pela subtração duas a duas das linhas da matriz de combinações lineares. Por fim, basta selecionar as linhas de interesse desta matriz e usá-las como matriz de especificação de hipóteses do teste Wald, no lugar da matriz  $L$ .

Por exemplo, suponha que há uma variável resposta  $Y$  sujeita a uma variável explicativa  $X$  de 4 níveis: A, B, C e D. Para avaliar o efeito da variável  $X$ , ajustou-se um modelo dado por:

$$g(\mu) = \beta_0 + \beta_1[X = B] + \beta_2[X = C] + \beta_3[X = D].$$

Nesta parametrização o primeiro nível da variável categórica é mantido como nível de referência e, para os demais níveis, mede-se a mudança para a categoria de referência; este é o chamado contraste de tramento. Neste contexto  $\beta_0$  representa a média ajustada do nível A, enquanto que  $\beta_1$  representa a diferença de A para B,  $\beta_2$  representa a diferença de A para C e  $\beta_3$  representa a diferença de A para D. Com esta parametrização é possível obter o valor predito para qualquer uma das categorias de tal modo que se o indivíduo pertencer à categoria A,  $\beta_0$  representa o predito; se o indivíduo pertencer à categoria B,  $\beta_0 + \beta_1$  representa o predito; para a categoria C,  $\beta_0 + \beta_2$  representa o predito e, por fim, para a categoria D,  $\beta_0 + \beta_3$  representa o predito.

Matricialmente, estes resultados podem ser descritos como

$$K_0 = \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que o produto  $K_0\beta$  gera o vetor de preditos para cada nível de  $X$ . Por meio da subtração das linhas da matriz de combinações lineares  $K_0$  podemos gerar uma matriz de contrastes  $K_1$

$$K_1 = \begin{matrix} A - B \\ A - C \\ A - D \\ B - C \\ B - D \\ C - D \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Para proceder um teste de comparações múltiplas basta selecionar o contraste desejado na linha da matriz  $K_1$  e utilizar esta linha como matriz de especificação de hipóteses do teste

Wald. Por fim, como usual em testes de comparações múltiplas, é recomendada a correção dos valores-p por meio da correção de Bonferroni.

#### **TODO**

- **REVISAR REFERENCIAL CONFORME JSS**
- **ACRESCENTAR QUE OS PARÂMETROS DE SIGMA B SÃO ESTIMADOS JUNTO COM OS DEMAIS PARÂMETROS**
- **UMA IMAGEM COM OS ELEMENTOS DE UM TESTE DE HIPÓTESES CAIRIA BEM**
- **UMA IMAGEM COM OS ELEMENTOS DE UM QUADRO DE ANOVA CAIRIA BEM**

### 3 TRABALHOS RELACIONADOS

#### **TODO**

#### **SUGESTÃO WAGNER: BUSCAR LITERATURA SOBRE TESTES DE HIPÓTESES MULTIVARIADOS E MANOVA PARA DADOS NÃO GAUSSIANOS**

#### **IDEIA**

No contexto da proposta dos McGLMs (contornar as principais restrições dos GLMs):

- Selecionar algumas classes de modelos univariados
- Selecionar algumas classes de modelos multivariados
- Referenciar e mencionar: ideia geral, restrições que contorna, limitações, como são testadas hipóteses

#### **VER COM O WAGNER QUAIS ELE GOSTARIA DE INCLUIR**

##### **Univariados**

- GLM (na chamada do capítulo)
- hGLM (Lee and Nelder, 1996)
- GEE (Liang and Zeger, 1989)
- GAMLSS (Rigny and Stasinopoulos)

##### **Multivariados**

- Multivariate generalized linear mixed models (Berridge and Crouchley, 2011)
- Multivariate dispersion models (Jorgensen and Lauritzen, 2000)
- Copula models (Joe, 2014)

## 4 TESTE WALD EM MODELOS MULTIVARIADOS DE COVARIÂNCIA LINEAR GENERALIZADA

Este capítulo é dedicado à apresentação de nossa proposta: o uso do teste Wald para avaliação dos parâmetros de McGLMs. Vale lembrar que nos McGLMs existem parâmetros de regressão, dispersão e potência e que nossa proposta pode ser aplicada a qualquer parâmetro ou combinação de parâmetros. Além disso, cada conjunto de parâmetros possui uma interpretação prática bastante relevante de tal modo que por meio dos parâmetros de regressão é possível identificar as explicativas relevantes, por meio dos parâmetros de dispersão é possível avaliar o impacto da correlação entre unidades do conjunto de dados e por meio dos parâmetros de potência é possível identificar qual distribuição de probabilidade melhor se adequa ao problema de acordo com a função de variância.

É importante notar que como temos que as estimativas dos parâmetros seguem distribuição normal, qualquer forma quadrática obtida por meio do estimador ou combinações lineares (tais como a estatística de Wald) é também uma forma quadrática que tem distribuição qui-quadrado. Portanto, nossa proposta não é uma simples adaptação, mas é um procedimento assintoticamente válido com respaldo na teoria da distribuição de formas quadráticas. **REFERENCIA**

### 4.1 HIPÓTESES E ESTATÍSTICA DE TESTE

Um McGLM possui vetor de parâmetros  $\theta = (\beta^\top, \lambda^\top)^\top$ , em que  $\beta = (\beta_1^\top, \dots, \beta_R^\top)^\top$  é um vetor  $K \times 1$  de parâmetros de regressão e  $\lambda = (\rho_1, \dots, \rho_{R(R-1)/2}, p_1, \dots, p_R, \tau_1^\top, \dots, \tau_R^\top)^\top$  é um vetor  $Q \times 1$  de parâmetros de dispersão.

Considere  $\theta^*$  o vetor  $h \times 1$  de parâmetros desconsiderando os parâmetros de correlação, ou seja,  $\theta^*$  refere-se apenas a parâmetros de regressão, dispersão ou potência. As estimativas de dos parâmetros de  $\theta^*$  são dadas por  $\hat{\theta}^*$ . De maneira similar, considere  $J^{*-1}$  a inversa da matriz de informação de Godambe desconsiderando os parâmetros de correlação, de dimensão  $h \times h$ .

Seja  $L$  uma matriz de especificação de hipóteses a serem testadas, de dimensão  $s \times h$  e  $c$  um vetor de dimensão  $s \times 1$  com os valores sob hipótese nula, em que  $s$  denota o número de restrições. As hipóteses a serem testadas podem ser escritas como:

$$H_0 : L\theta^* = c \text{ vs } H_1 : L\theta^* \neq c. \quad (4.1)$$

Desta forma, a generalização da estatística do teste Wald para verificar a validade de uma hipótese sobre parâmetros de um McGLM fica dada por:

$$W = (L\hat{\theta}^* - c)^T (L J^{*-1} L^T)^{-1} (L\hat{\theta}^* - c),$$

em que  $W \sim \chi_s^2$ , ou seja, independente do número de parâmetros nas hipóteses, a estatística de teste  $W$  é um único valor que segue assintoticamente distribuição  $\chi^2$  com graus de liberdade dados pelo número de restrições, isto é, o número de linhas da matriz  $\mathbf{L}$ , denotado por  $s$ .

Em geral, cada coluna da matriz  $\mathbf{L}$  corresponde a um dos  $h$  parâmetros de  $\boldsymbol{\theta}^*$  e cada linha a uma restrição. Sua construção consiste basicamente em preencher a matriz com 0, 1 e eventualmente -1 de tal modo que o produto  $\mathbf{L}\boldsymbol{\theta}^*$  represente corretamente as hipóteses de interesse. A correta especificação de  $\mathbf{L}$  permite testar qualquer parâmetro individualmente ou até mesmo formular hipóteses para diversos parâmetros, sejam eles de regressão, dispersão ou potência.

Em um contexto prático, após a obtenção das estimativas dos parâmetros do modelo podemos estar interessados em três tipos de hipóteses: a primeira delas diz respeito a quando o interesse está em avaliar se existe evidência que permita afirmar que apenas um único parâmetro é igual a um valor postulado; a segunda delas ocorre quando há interesse em avaliar se existe evidência para afirmar que um conjunto de parâmetros é igual a um vetor de valores postulado; já a terceira hipótese diz respeito a situações em que o analista está interessado em saber se a diferença entre os efeitos de duas variáveis é igual a 0, isto é, se o efeito das variáveis sobre a resposta é o mesmo.

Para fins de ilustração dos tipos de hipóteses mencionadas, considere a situação em que deseja-se investigar se uma variável numérica  $X_1$  possui efeito sobre duas variáveis respostas, denotadas por  $Y_1$  e  $Y_2$ . Para tal tarefa coletou-se uma amostra com  $N$  observações e para cada observação registrou-se os valores de  $X_1$ ,  $Y_1$  e  $Y_2$ . Com base nos dados coletados ajustou-se um McGLM bivariado, com preditor dado por:

$$g_r(\mu_r) = \beta_{r0} + \beta_{r1}X_1, r = 1, 2, \quad (4.2)$$

em que o índice  $r$  denota a variável resposta,  $r = 1, 2$ ;  $\beta_{r0}$  representa o intercepto;  $\beta_{r1}$  um parâmetro de regressão associado a uma variável  $X_1$ . Considere que cada resposta possui apenas um parâmetro de dispersão  $\tau_{r0}$  e que os parâmetros de potência foram fixados. Portanto, trata-se de um problema em que há duas variáveis resposta e apenas uma variável explicativa. Considere que as unidades em estudo são independentes, logo  $Z_0 = \mathbf{I}$ .

Neste cenário poderiam ser perguntas de interesse: existe efeito da variável  $X_1$  apenas sobre a primeira resposta? Ou apenas sobre a segunda resposta? É possível que a variável  $X_1$  possua efeito sobre as duas respostas ao mesmo tempo? É possível que o efeito da variável seja o mesmo para ambas as respostas? Todas essas perguntas podem ser respondidas por meio de testes de hipóteses sobre os parâmetros do modelo e especificadas por meio da Equação 4.1. Nas subseções a seguir são apresentados os elementos para responder cada uma destas perguntas.

#### 4.1.1 Exemplo 1: hipótese para um único parâmetro

Considere o primeiro tipo de hipótese: há interesse em avaliar se existe efeito da variável  $X_1$  apenas sobre primeira resposta. A hipótese pode ser escrita da seguinte forma:

$$H_0 : \beta_{11} = 0 \text{ vs } H_1 : \beta_{11} \neq 0. \quad (4.3)$$

Esta mesma hipótese pode ser reescrita na notação mais conveniente para aplicação da estatística do teste Wald, tal como na Equação 4.1 em que:

- $\theta^{*T} = [\beta_{10} \ \beta_{11} \ \beta_{20} \ \beta_{21} \ \tau_{11} \ \tau_{21}]$ .
- $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .
- $c = [0]$ , é o valor sob hipótese nula.

Note que o vetor  $\theta^*$  possui seis elementos, consequentemente a matriz  $L$  contém seis colunas (uma para cada elemento) e uma linha, pois apenas um único parâmetro está sendo testado. Essa única linha é composta por zeros, exceto a coluna referente ao parâmetro de interesse que recebe 1. É simples verificar que o produto  $L\theta^*$  representa a hipótese de interesse inicialmente postulada na Equação 4.3. Com isso, a distribuição assintótica do teste é  $\chi_1^2$ .

#### 4.1.2 Exemplo 2: hipótese para múltiplos parâmetros

Suponha agora que o interesse neste problema genérico não seja mais testar o efeito da variável explicativa apenas em uma resposta. Suponha que o interesse seja avaliar se existe evidência suficiente para afirmar que há efeito da variável explicativa  $X_1$  em ambas as respostas simultaneamente. Neste caso teremos que testar 2 parâmetros:  $\beta_{11}$ , que associa  $X_1$  à primeira resposta; e  $\beta_{21}$ , que associa  $X_1$  à segunda resposta. Podemos escrever a hipótese da seguinte forma:

$$H_0 : \beta_{r1} = 0 \text{ vs } H_1 : \beta_{r1} \neq 0, \quad (4.4)$$

ou, de forma equivalente:

$$H_0 : \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vs } H_1 : \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

As hipóteses na forma da Equação 4.1 possui os seguintes elementos:

- $\theta^{*T} = [\beta_{10} \ \beta_{11} \ \beta_{20} \ \beta_{21} \ \tau_{11} \ \tau_{21}]$ .
- $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .



- $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , é o valor sob hipótese nula.

O vetor  $\boldsymbol{\theta}^*$  se mantém com seis elementos e a matriz  $\mathbf{L}$  com seis colunas. Neste caso estamos testando dois parâmetros, portanto a matriz  $\mathbf{L}$  possui duas linhas. Novamente, essas linhas são compostas por zeros, exceto nas colunas referentes ao parâmetro de interesse. É simples verificar que o produto  $\mathbf{L}\boldsymbol{\theta}^*$  representa a hipótese de interesse inicialmente postulada na Equação 4.4. Com isso, a distribuição assintótica do teste é  $\chi_2^2$ .

#### 4.1.3 Exemplo 3: hipótese de igualdade de parâmetros

Suponha que a hipótese de interesse não envolve testar se o valor do parâmetro é igual a um valor postulado mas sim verificar se, no caso deste problema genérico, o efeito da variável  $X_1$  é o mesmo independente da resposta. Nesta situação formularíamos uma hipótese de igualdade entre os parâmetros ou, em outros termos, se a diferença dos efeitos é nula:

$$H_0 : \beta_{11} - \beta_{21} = 0 \text{ vs } H_1 : \beta_{11} - \beta_{21} \neq 0, \quad (4.5)$$

na notação da Equação 4.1 os elementos das hipóteses são:

- $\boldsymbol{\theta}^{*T} = [\beta_{10} \ \beta_{11} \ \beta_{20} \ \beta_{21} \ \tau_{11} \ \tau_{21}]$ .
- $\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .
- $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ , é o valor sob hipótese nula.

Como existe apenas uma hipótese, a matriz  $\mathbf{L}$  possui apenas uma linha. Para a matriz  $\mathbf{L}$  ser corretamente especificada no caso de uma hipótese de igualdade é necessário colocar 1 na coluna referente a um parâmetro, e -1 na coluna referente ao outro parâmetro, de tal modo que o produto  $\mathbf{L}\boldsymbol{\theta}^*$  represente a hipótese de interesse inicialmente postulada, neste caso o produto  $\mathbf{L}\boldsymbol{\theta}^*$  gera exatamente a mesma hipótese especificada na Equação 4.5 e a distribuição assintótica do teste é  $\chi_1^2$ .

#### 4.1.4 Exemplo 4: hipótese sobre parâmetros de regressão ou dispersão para respostas sob mesmo preditor

A Equação 4.2 descreve um modelo bivariado genérico. É importante notar que neste exemplo ambas as respostas estão sujeitas ao mesmo preditor. Na prática, quando se trata dos McGLMs, preditores diferentes podem ser especificados entre variáveis respostas. Deste modo, o que foi exposto na Subseção 4.1.2 serve para qualquer caso em que haja interesse em testar hipóteses sobre mais de um parâmetro do modelo, sejam eles na mesma resposta ou em respostas diferentes, independente dos preditores entre respostas.

Contudo, nos casos em que as respostas estão sujeitas a preditores idênticos e as hipóteses sobre os parâmetros não se alteram de resposta para resposta, uma especificação alternativa do procedimento é utilizando o produto Kronecker para testar uma mesma hipótese sobre múltiplas respostas tal como utilizado em Bonat et al. (2020).

Suponha que, neste exemplo, as hipóteses de interesse seguem sendo escritas tal como na Equação 4.4. Contudo, como se trata de um modelo bivariado com mesmo preditor para as duas respostas, a hipótese de interesse é igual entre respostas e envolve apenas parâmetros de regressão, torna-se conveniente escrever a matriz  $\mathbf{L}$  como o produto Kronecker de duas matrizes: uma matriz  $\mathbf{G}$  e uma  $\mathbf{F}$ , ou seja,  $\mathbf{L} = \mathbf{G} \otimes \mathbf{F}$ . Desta forma, a matriz  $\mathbf{G}$  tem dimensão  $R \times R$  e especifica as hipóteses referentes às respostas, já a matriz  $\mathbf{F}$  especifica as hipóteses entre variáveis e tem dimensão  $s' \times h'$ , em que  $s'$  é o número de restrições lineares, ou seja, o número de parâmetros testados para uma única resposta, e  $h'$  é o número total de coeficientes de regressão ou dispersão da resposta. Portanto, a matriz  $\mathbf{L}$  tem dimensão  $(s'R \times h)$ .

Em geral, a matriz  $\mathbf{G}$  é uma matriz identidade de dimensão igual ao número de respostas analisadas no modelo. Enquanto que a matriz  $\mathbf{F}$  equivale a uma matriz  $\mathbf{L}$  caso houvesse apenas uma única resposta no modelo e apenas parâmetros de regressão ou dispersão. Utilizamos o produto Kronecker destas duas matrizes para garantir que a hipótese descrita na matriz  $\mathbf{F}$  seja testada nas  $R$  respostas do modelo.

Assim, considerando que se trata do caso em que se pode reescrever as hipóteses por meio da decomposição da matriz  $\mathbf{L}$ , os elementos do teste ficam dados por:

- $\beta^T = [\beta_{10} \ \beta_{11} \ \beta_{20} \ \beta_{21}]$ : os parâmetros de regressão do modelo.
- $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ : matriz identidade com dimensão dada pelo número de respostas.
- $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ : equivalente a um  $\mathbf{L}$  para uma única resposta.
- $\mathbf{L} = \mathbf{G} \otimes \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ : matriz de especificação das hipóteses sobre todas as respostas.
- $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , é o valor sob hipótese nula.

Deste modo, o produto  $\mathbf{L}\beta$  representa a hipótese de interesse inicialmente postulada. Neste caso, a distribuição assintótica do teste é  $\chi^2_2$ . O procedimento é facilmente generalizado quando há interesse em avaliar uma hipótese sobre os parâmetros de dispersão e esta especificação é bastante conveniente para a geração de quadros de análise de variância.

## 4.2 ANOVA E MANOVA VIA TESTE WALD

Com base na proposta de utilização do teste Wald para McGLMs, buscamos propor neste trabalho três diferentes procedimentos para geração de quadros de ANOVA e MANOVA para parâmetros de regressão, seguimos a nomenclatura tipos I, II e III. Além disso buscamos propor também um procedimento análogo à uma ANOVA e MANOVA para avaliação dos parâmetros de dispersão de um dado modelo. No caso das ANOVAs gera-se um quadro para cada variável resposta. Para as MANOVAs apenas um quadro é gerado, por isso, para que seja possível realizar as MANOVAs, as respostas do modelo devem estar sujeitas ao mesmo preditor.

Para fins de ilustração dos testes feitos por cada tipo de análise de variância proposta, considere a situação em que deseja-se investigar se duas variáveis numéricas denotadas por  $X_1$  e  $X_2$  possuem efeito sobre duas variáveis resposta denotadas por  $Y_1$  e  $Y_2$ . Para tal tarefa coletou-se uma amostra com  $N$  observações e para cada observação foram registrados os valores de  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_1$  e  $Y_2$ . Com base nos dados coletados ajustou-se um modelo bivariado, com preditor dado por:

$$g_r(\mu_r) = \beta_{r0} + \beta_{r1}X_1 + \beta_{r2}x_2 + \beta_{r3}X_1X_2.$$

em que o índice  $r$  denota a variável resposta,  $r = 1, 2$ ;  $\beta_{r0}$  representa o intercepto;  $\beta_{r1}$  um parâmetro de regressão associado à variável  $X_1$ ,  $\beta_{r2}$  um parâmetro de regressão associado à variável  $X_2$  e  $\beta_{r3}$  um parâmetro de regressão associado à interação entre  $X_1$  e  $X_2$ . Considere que as unidades em estudo são independentes, portanto cada resposta possui apenas um parâmetro de dispersão  $\tau_{r0}$  associado a uma matriz  $Z_0 = I$ . Além disso considere que os parâmetros de potência foram fixados.

### 4.2.1 ANOVA e MANOVA tipo I

Nossa proposta de análise de variância do tipo I para os McGLMs realiza testes sobre os parâmetros de regressão de forma sequencial. Neste cenário, os seguintes testes seriam efetuados:

1. Testa se todos os parâmetros são iguais a 0.
2. Testa se todos os parâmetros, exceto intercepto, são iguais a 0.
3. Testa se todos os parâmetros, exceto intercepto e os parâmetros referentes a  $X_1$ , são iguais a 0.
4. Testa se todos os parâmetros, exceto intercepto e os parâmetros referentes a  $X_1$  e  $X_2$ , são iguais a 0.

Cada um destes testes seria uma linha do quadro de análise de variância. No caso da ANOVA seria gerado um quadro por resposta, no caso da MANOVA um quadro em que as hipóteses são testadas para ambas as respostas. Este procedimento pode ser chamado de sequencial pois a cada linha é acrescentada uma variável. Em geral, justamente por esta

sequencialidade, se torna difícil interpretar os efeitos das variáveis pela análise de variância do tipo I. Em contrapartida, as análises do tipo II e III testam hipóteses que são, geralmente de mais interesse.

#### 4.2.2 ANOVA e MANOVA tipo II

Nossa análise de variância do tipo II efetua testes similares ao último teste da análise de variância sequencial. Em um modelo sem interação o que é feito é, em cada linha, testar o modelo completo contra o modelo sem uma variável. Deste modo se torna melhor interpretável o efeito daquela variável sobre o modelo completo, isto é, o impacto na qualidade do modelo caso retirássemos determinada variável.

Caso haja interações no modelo, é testado o modelo completo contra o modelo sem o efeito principal e qualquer efeito de interação que envolva a variável. Considerando o preditor exemplo, a análise de variância do tipo II faria os seguintes testes:

1. Testa se o intercepto é igual a 0.
2. Testa se os parâmetros referentes a  $X_1$  são iguais a 0. Ou seja, é avaliado o impacto da retirada de  $X_1$  do modelo. Neste caso retira-se a interação pois nela há  $X_1$ .
3. Testa se os parâmetros referentes a  $X_2$  são iguais a 0. Ou seja, é avaliado o impacto da retirada de  $X_2$  do modelo. Neste caso retira-se a interação pois nela há  $X_2$ .
4. Testa se o efeito de interação é 0.

Note que, nas linhas em que se busca entender o efeito de  $X_1$  e  $X_2$ , a interação também é avaliada, pois retira-se do modelo todos os parâmetros que envolvem aquela variável.

#### 4.2.3 ANOVA e MANOVA tipo III

Na análise de variância do tipo II são feitos testes comparando o modelo completo contra o modelo sem todos os parâmetros que envolvem determinada variável (sejam efeitos principais ou interações). Já nossa análise de variância do tipo III considera o modelo completo contra o modelo sem determinada variável, seja ela efeito principal ou de interação. Deste modo, cuidados devem ser tomados nas conclusões pois uma variável não ter efeito constatado como efeito principal não quer dizer que não haverá efeito de interação. Considerando o preditor exemplo, a análise de variância do tipo III faria os seguintes testes:

1. Testa se o intercepto é igual a 0.
2. Testa se os parâmetros de efeito principal referentes a  $X_1$  são iguais a 0. Ou seja, é avaliado o impacto da retirada de  $X_1$  nos efeitos principais do modelo. Neste caso, diferente do tipo II, nada se supõe a respeito do parâmetro de interação, por mais que envolva  $X_1$ .

3. Testa se os parâmetros de efeito principal referentes a  $X_2$  são iguais a 0. Ou seja, é avaliado o impacto da retirada de  $X_2$  nos efeitos principais do modelo. Novamente, diferente do tipo II, nada se supõe a respeito do parâmetro de interação, por mais que envolva  $X_2$ .
4. Testa se o efeito de interação é 0.

Note que nas linhas em que se testa o efeito de  $X_1$  e  $X_2$  mantém-se o efeito da interação, diferentemente do que é feito na análise de variância do tipo II. É importante notar que as análises de variância do tipo II e III tal como foram propostas nesse trabalho geram os mesmos resultados quando aplicadas a modelos sem efeitos de interação. Além disso, generalizamos o procedimento tipo III para lidar com parâmetros de dispersão.

#### 4.3 TESTE DE COMPARAÇÕES MÚLTIPLAS VIA TESTE WALD

Outra contribuição deste trabalho é a proposta de um procedimento para comparações aos pares a fim de detectar diferenças entre níveis de variáveis explicativas categóricas em McGLMs. Trata-se de uma generalização para os McGLMs do procedimento genérico descrito na Subseção 2.2.4 em que utiliza-se o teste Wald para comparação de cada par de níveis de uma variável categórica através da especificação de um conjunto de matrizes  $L$  do teste Wald.

O procedimento é idêntico ao descrito na Subseção 2.2.4 e consiste em:

1. Obter a matriz de combinações lineares dos parâmetros do modelo que resultam nas médias ajustadas.
2. Gerar a matriz de contrastes (subtração duas a duas das linhas da matriz de combinações lineares).
3. Selecionar as linhas de interesse desta matriz e usá-las como matriz de especificação de hipóteses do teste Wald, no lugar da matriz  $L$ .
4. Em geral, devido ao grande número de testes feitos, corrigir os valores-p por meio da correção de Bonferroni.

Para efetuação deste procedimento para os McGLMs devemos lembrar que trata-se de uma classe de modelos multivariados. E tal como ocorre no caso das análises de variância, para os testes comparações múltiplas existem duas possibilidades: testes para uma única resposta e testes para múltiplas respostas.

Na prática, se o interesse for um teste de comparações múltiplas multivariado, existe a necessidade de todas as respostas estarem sujeitas a um mesmo preditor e basta expandir a matriz de contrastes utilizando o produto Kronecker, seguindo uma ideia muito similar ao exposto na Subseção 4.1.4. No caso de um teste de comparações múltiplas para cada resposta,

basta seleccionar o vetor de estimativas e a partição correspondente ao vetor da matriz  $J_{\theta}^{-1}$  para a resposta específica e proceder com o teste. Desta forma é possível chegar a um simples e útil procedimento de comparações múltiplas para quando há um McGLM com variáveis explicativas categóricas e há interesse em determinar quais níveis diferem entre si.

## **TODO**

- **Refêrencia formas quadráticas, talvez referenciar o livro do Daniel se fizer sentido, Wagner tem o livro**
- **Como nomear anova e manova no contexto dos mcglm? ANOVA e MANOVA não parecem nomes adequados para o procedimento que estamos propondo para os mcglms. Qual seria o nome adequado? Talvez mencionar no texto como "anova and manova type" e "multivariate hypothesis test for non gaussian data"**

## **5 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL**

### **TODO**

- **FAZER OUTRO PACOTE PARA MINHAS CONTRIBUIÇÕES**
- **DOCUMENTAR A BIBLIOTECA E DEIXAR COMO APÊNDICE DA DISSERTAÇÃO**
- **NO TEXTO SEGUIR OS MOLDES DO ARTIGO DO MCGLM NA JSS**
- **INCLUIR UM MAPA DO PACOTE, UMA EXPLICAÇÃO GERAL SOBRE AS FUNÇÕES**
- **INCLUIR EXEMPLOS COM O DATASET DO MCGLM COM 3 RESPOSTAS DE TIPOS DISTINTOS**

## 6 ESTUDO DE SIMULAÇÃO

### TODO

- Definir estudo de simulação
- Avaliar desempenho do erro do tipo I, simular por exemplo  $\beta_1=1$ , testar se  $\beta_1=1$  e ver quantas vezes o teste confirma este resultado.
- Testar poder simulando valores e testando valores distantes de 0; distância de mahalanobis pode ser uma distância interessante para este fim (não sei se entendi bem a ideia).
- Precisamos responder se o teste é confiável, para que tamanho de amostra ele controla adequadamente o erro do tipo 1, ou temos um teste bom já com pequenas amostras
- simular de normais matriz variada pois é possível fixar  $\sigma_r$  e  $b$
-



## **7 ANÁLISE DE DADOS**

### **7.1 USO DE PROBIÓTICOS NO CONTROLE DE VÍCIOS E COMPULSÕES ALIMENTARES EM PACIENTES SUJEITOS A CIRURGIA BARIÁTRICA**

### **7.2 HIPES PROJECT**

## **8 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

### **8.1 CONCLUSÕES GERAIS**

- 

### **8.2 LIMITAÇÕES**

- 

### **8.3 TRABALHOS FUTUROS**

- Trabalhar em outros testes (LRT e LMT)
- Implementar novos procedimentos para comparações múltiplas
-

## REFERÊNCIAS

- Aitchison, J. e Silvey, S. (1958). Maximum-likelihood estimation of parameters subject to restraints. *The annals of mathematical Statistics*, páginas 813–828.
- Anderson, T. et al. (1973). Asymptotically efficient estimation of covariance matrices with linear structure. *The Annals of Statistics*, 1(1):135–141.
- Azzalini, A. (2017). *Statistical inference: Based on the likelihood*. Routledge.
- Barndorff-Nielsen, O. E. e Cox, D. R. (2017). *Inference and asymptotics*. Routledge.
- Bonat, W. H. (2018). Multiple response variables regression models in R: The mcglm package. *Journal of Statistical Software*, 84(4):1–30.
- Bonat, W. H. e Jørgensen, B. (2016). Multivariate covariance generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 65(5):649–675.
- Bonat, W. H., Petterle, R. R., Balbinot, P., Mansur, A. e Graf, R. (2020). Modelling multiple outcomes in repeated measures studies: Comparing aesthetic eyelid surgery techniques. *Statistical Modelling*, página 1471082X20943312.
- Box, G. E. e Cox, D. R. (1964). An analysis of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, páginas 211–252.
- Bretz, F., Hothorn, T. e Westfall, P. (2008). Multiple comparison procedures in linear models. Em *COMPSTAT 2008*, páginas 423–431. Springer.
- Cao, L. (2016). Data science and analytics: a new era.
- Demidenko, E. (2013). *Mixed models: theory and applications with R*. John Wiley & Sons.
- Engle, R. F. (1984). Wald, likelihood ratio, and lagrange multiplier tests in econometrics. *Handbook of econometrics*, 2:775–826.
- Evans, G. e Savin, N. E. (1982). Conflict among the criteria revisited; the w, lr and lm tests. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, páginas 737–748.
- Fisher, R. A. (1925). Statistical methods for research workers. oliver and boyd. *Edinburgh, Scotland*, 6.
- Fisher, R. A. (1929). The statistical method in psychical research. Em *Proceedings of the Society for Psychical Research*, volume 39, páginas 189–192.

- Fisher, R. A. (1992). The arrangement of field experiments. Em *Breakthroughs in statistics*, páginas 82–91. Springer.
- Fisher, R. A. e Mackenzie, W. A. (1923). Studies in crop variation. ii. the manurial response of different potato varieties. *The Journal of Agricultural Science*, 13(3):311–320.
- Fox, J. e Weisberg, S. (2019). *An R Companion to Applied Regression*. Sage, Thousand Oaks CA, third edition.
- Galton, F. (1886). Regression towards mediocrity in hereditary stature. *The Journal of the Anthropological Institute of Great Britain and Ireland*, 15:246–263.
- Hotelling, H. (1951). A generalized t test and measure of multivariate dispersion. Relatório técnico, UNIVERSITY OF NORTH CAROLINA Chapel Hill United States.
- Hsu, J. (1996). *Multiple comparisons: theory and methods*. CRC Press.
- Institute, S. (1985). *SAS user's guide: Statistics*, volume 2. Sas Inst.
- Jørgensen, B. (1987). Exponential dispersion models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 49(2):127–145.
- Jørgensen, B. (1997). *The theory of dispersion models*. CRC Press.
- Jørgensen, B. e Knudsen, S. J. (2004). Parameter orthogonality and bias adjustment for estimating functions. *Scandinavian Journal of Statistics*, 31(1):93–114.
- Jørgensen, B. e Kokonendji, C. C. (2015). Discrete dispersion models and their tweedie asymptotics. *AStA Advances in Statistical Analysis*, 100(1):43–78.
- Lawley, D. (1938). A generalization of fisher's z test. *Biometrika*, 30(1/2):180–187.
- Lehmann, E. L. (1993). The fisher, neyman-pearson theories of testing hypotheses: one theory or two? *Journal of the American statistical Association*, 88(424):1242–1249.
- Lehmann, E. L. e Romano, J. P. (2006). *Testing statistical hypotheses*. Springer Science & Business Media.
- Ley, C. e Bordas, S. P. (2018). What makes data science different? a discussion involving statistics2. 0 and computational sciences. *International Journal of Data Science and Analytics*, 6(3):167–175.
- Liang, K.-Y. e Zeger, S. L. (1986). Longitudinal data analysis using generalized linear models. *Biometrika*, 73(1):13–22.
- Martinez-Beneito, M. A. (2013). A general modelling framework for multivariate disease mapping. *Biometrika*, 100(3):539–553.

- Nelder, J. A. e Wedderburn, R. W. M. (1972). Generalized Linear Models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 135:370–384.
- Neyman, J. e Pearson, E. S. (1928a). On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference: Part i. *Biometrika*, páginas 175–240.
- Neyman, J. e Pearson, E. S. (1928b). On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference: Part ii. *Biometrika*, páginas 263–294.
- Neyman, J. e Pearson, E. S. (1933). IX. on the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 231(694-706):289–337.
- Neyman, J. e Pearson, E. S. (2020a). *On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference. Part I*. University of California Press.
- Neyman, J. e Pearson, E. S. (2020b). *On the use and interpretation of certain test criteria for purposes of statistical inference. Part II*. University of California Press.
- Paula, G. A. (2004). *Modelos de regressão: com apoio computacional*. IME-USP São Paulo.
- Pillai, K. et al. (1955). Some new test criteria in multivariate analysis. *The Annals of Mathematical Statistics*, 26(1):117–121.
- Pinheiro, J. C. e Bates, D. M. (1996). Unconstrained parametrizations for variance-covariance matrices. *Statistics and computing*, 6(3):289–296.
- Pourahmadi, M. (2000). Maximum likelihood estimation of generalised linear models for multivariate normal covariance matrix. *Biometrika*, 87(2):425–435.
- Press, G. (2013). A very short history of data science. <https://www.forbes.com/sites/gilpress/2013/05/28/a-very-short-history-of-data-science/?sh=1c01914855cf>. Acessado em 14/04/2021.
- R Core Team (2020). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Rao, C. R. (1948). Large sample tests of statistical hypotheses concerning several parameters with applications to problems of estimation. Em *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, volume 44, páginas 50–57. Cambridge University Press.
- Roy, S. N. (1953). On a heuristic method of test construction and its use in multivariate analysis. *The Annals of Mathematical Statistics*, páginas 220–238.
- Silvey, S. D. (1959). The lagrangian multiplier test. *The Annals of Mathematical Statistics*, 30(2):389–407.

- Silvey, S. D. (2017). *Statistical inference*. Routledge.
- Smith, H., Gnanadesikan, R. e Hughes, J. (1962). Multivariate analysis of variance (manova). *Biometrics*, 18(1):22–41.
- St, L., Wold, S. et al. (1989). Analysis of variance (anova). *Chemometrics and intelligent laboratory systems*, 6(4):259–272.
- Wald, A. (1943). Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large. *Transactions of the American Mathematical society*, 54(3):426–482.
- Wasserman, L. (2013). *All of statistics: a concise course in statistical inference*. Springer Science & Business Media.
- Weihs, C. e Ickstadt, K. (2018). Data science: the impact of statistics. *International Journal of Data Science and Analytics*, 6(3):189–194.
- Wilks, S. S. (1932). Certain generalizations in the analysis of variance. *Biometrika*, páginas 471–494.
- Wilks, S. S. (1938). The large-sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses. *The annals of mathematical statistics*, 9(1):60–62.