

LINEU ALBERTO CAVAZANI DE FREITAS

TESTES DE HIPÓTESE EM MODELOS MULTIVARIADOS  
DE COVARIÂNCIA LINEAR GENERALIZADA (MCGLM)

*(versão pré-defesa, compilada em 30 de março de 2021)*

Documento apresentado como requisito parcial ao exame de qualificação de Mestrado no Programa de Pós-Graduação em Informática, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Área de concentração: *Ciência da Computação*.

Orientador: Prof. Dr. Wagner Hugo Bonat.

Coorientador: Prof. Dr. Marco Antonio Zanata Alves.

CURITIBA PR

2021

## RESUMO

O resumo deve conter no máximo 500 palavras, devendo ser justificado na largura da página e escrito em um único parágrafo<sup>1</sup> com um afastamento de 1,27 cm na primeira linha. O espaçamento entre linhas deve ser de 1,5 linhas. O resumo deve ser informativo, ou seja, é a condensação do conteúdo e expõe finalidades, metodologia, resultados e conclusões.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetur odio sem sed wisi.

Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetur eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.

Etiam euismod. Fusce facilisis lacinia dui. Suspendisse potenti. In mi erat, cursus id, nonummy sed, ullamcorper eget, sapien. Praesent pretium, magna in eleifend egestas, pede pede pretium lorem, quis consectetur tortor sapien facilisis magna. Mauris quis magna varius nulla scelerisque imperdiet. Aliquam non quam. Aliquam porttitor quam a lacus. Praesent vel arcu ut tortor cursus volutpat. In vitae pede quis diam bibendum placerat. Fusce elementum convallis neque. Sed dolor orci, scelerisque ac, dapibus nec, ultricies ut, mi. Duis nec dui quis leo sagittis commodo.

Aliquam lectus. Vivamus leo. Quisque ornare tellus ullamcorper nulla. Mauris porttitor pharetra tortor. Sed fringilla justo sed mauris. Mauris tellus. Sed non leo. Nullam elementum, magna in cursus sodales, augue est scelerisque sapien, venenatis congue nulla arcu et pede. Ut suscipit enim vel sapien. Donec congue. Maecenas urna mi, suscipit in, placerat ut, vestibulum ut, massa. Fusce ultrices nulla et nisl.

Palavras-chave: Palavra-chave 1. Palavra-chave 2. Palavra-chave 3.

---

<sup>1</sup>E também não deve ter notas de rodapé; em outras palavras, não siga este exemplo... ;-)

## ABSTRACT

The abstract should be the English translation of the “resumo”, no more, no less.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetur odio sem sed wisi.

Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetur eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.

Etiam euismod. Fusce facilisis lacinia dui. Suspendisse potenti. In mi erat, cursus id, nonummy sed, ullamcorper eget, sapien. Praesent pretium, magna in eleifend egestas, pede pede pretium lorem, quis consectetur tortor sapien facilisis magna. Mauris quis magna varius nulla scelerisque imperdiet. Aliquam non quam. Aliquam porttitor quam a lacus. Praesent vel arcu ut tortor cursus volutpat. In vitae pede quis diam bibendum placerat. Fusce elementum convallis neque. Sed dolor orci, scelerisque ac, dapibus nec, ultricies ut, mi. Duis nec dui quis leo sagittis commodo.

Aliquam lectus. Vivamus leo. Quisque ornare tellus ullamcorper nulla. Mauris porttitor pharetra tortor. Sed fringilla justo sed mauris. Mauris tellus. Sed non leo. Nullam elementum, magna in cursus sodales, augue est scelerisque sapien, venenatis congue nulla arcu et pede. Ut suscipit enim vel sapien. Donec congue. Maecenas urna mi, suscipit in, placerat ut, vestibulum ut, massa. Fusce ultrices nulla et nisl.

Keywords: Keyword 1. Keyword 2. Keyword 3.

## **LISTA DE FIGURAS**

## **LISTA DE TABELAS**

## **LISTA DE ACRÔNIMOS**

GLM	Modelos Lineares Generalizados
McGLM	Modelos Multivariados de Covariância Linear Generalizada
ANOVA	Análise de Variância
MANOVA	Análise de Variância Multivariada

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	alfa, primeira letra do alfabeto grego
$\beta$	beta, segunda letra do alfabeto grego
$\gamma$	gama, terceira letra do alfabeto grego
$\omega$	ômega, última letra do alfabeto grego
$\pi$	pi
$\tau$	Tempo de resposta do sistema
$\theta$	Ângulo de incidência do raio luminoso

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>MODELOS MULTIVARIADOS DE COVARIÂNCIA LINEAR GENERALIZADA . . . . .</b>	<b>12</b>
2.1	GLM . . . . .	12
2.2	CGLM. . . . .	13
2.3	MCGLM . . . . .	14
2.3.1	Estimação e inferência . . . . .	14
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>17</b>
	<b>APÊNDICE A – EXEMPLO DE ANEXO . . . . .</b>	<b>18</b>
A.1	UMA SEÇÃO. . . . .	18
A.1.1	Uma Subseção. . . . .	19
	<b>APÊNDICE B – TESTES DE ALINHAMENTO DE LISTAS . . . . .</b>	<b>21</b>
B.1	OUTRA SEÇÃO . . . . .	21



## 1 INTRODUÇÃO

Podemos entender como Ciência de Dados o estudo sistemático de conjuntos de dados com o objetivo de gerar conhecimento sobre determinado assunto. Em suma, o objetivo da Ciência de Dados é extrair informação. Seu processo é caracterizado por etapas como a definição do problema, planejamento do estudo, coleta e análise dos dados e, por fim, a interpretação dos resultados.

Trata-se de um campo de estudo extremamente interdisciplinar que envolve técnicas de áreas como Estatística, Ciência da Computação e Matemática. É uma área que vem ganhando destaque nos últimos anos devido a fatores tais como a popularização do uso de dados nas tomadas de decisão em diversos cenários, difusão do uso de grandes bancos de dados, desenvolvimento e propagação de técnicas modernas e eficientes de análise, sem mencionar o desenvolvimento computacional que permitiu a implementação de técnicas mais complexas para solução de problemas e também que mais pessoas tivessem acesso às técnicas e ferramentas necessárias para se analisar dados.

Alguns dos campos de interesse na Ciência de Dados são: métodos de amostragem, mineração de dados, bancos de dados, técnicas de análise exploratória, probabilidade, inferência, otimização, infraestrutura computacional, plataformas de Big Data, modelos estatísticos, dentre outros.

No contexto de modelos estatísticos, existem os chamados modelos de regressão, dentre os quais podemos citar: os modelos lineares, lineares generalizados, aditivos generalizados, de efeitos aleatórios, aditivos generalizados para locação, escala e forma e ainda os multivariados.

Os modelos de regressão são indicados a problemas nos quais temos interesse em verificar a associação entre uma ou mais variáveis resposta e um conjunto de variáveis explicativas; podemos ainda, além de verificar associação, utilizar o modelo para realizar previsões para uma população.

Nos casos univariados mais gerais, estes modelos associam uma única variável resposta, também chamada de variável dependente, a uma ou mais variáveis explicativas, conhecidas como variáveis independentes, covariáveis ou preditoras.

De forma geral, um modelo de regressão é uma expressão matemática que relaciona a média da variável resposta às variáveis preditoras, em que a variável resposta segue uma distribuição de probabilidade condicional às covariáveis e a média é descrita por um preditor linear.

O caso mais conhecido é o modelo linear normal, no qual um dos pressupostos é de que a variável resposta, condicional às variáveis explicativas, siga distribuição Normal. Todavia, não são raras as situações em que a suposição de normalidade não é atendida. Uma alternativa, por muito tempo adotada, foi buscar uma transformação da variável resposta a fim de atender

os pressupostos do modelo, tal como a família de transformações Box-Cox (Box e Cox, 1964). Contudo, este tipo de solução leva a dificuldades na interpretação dos resultados.

Neste contexto, a proposta de maior renome para contornar tais restrições foram os Modelos Lineares Generalizados (GLM) propostos por Nelder e Wedderburn (1972). Essa classe de modelos permitiu a flexibilização da distribuição da variável resposta de tal modo que esta pertença à família exponencial de distribuições. Em meio aos casos especiais de distribuições possíveis nesta classe de modelos estão a Bernoulli, Binomial, Poisson, Normal, Gama, Normal inversa, entre outras. Trata-se portanto, de uma classe de modelos de regressão univariados para dados de diferentes naturezas, tais como: dados contínuos simétricos e assimétricos, contagens, proporções, assim por diante. Tais características tornam esta classe uma flexível ferramenta de modelagem aplicável a diversos tipos de problema.

Embora as técnicas citadas sejam úteis, há casos em que são coletadas mais de uma resposta por unidade experimental e há o interesse de modelá-las em função de um conjunto de variáveis explicativas. Para problemas com essa estrutura, uma alternativa são os modelos lineares multivariados, nos quais associa-se um conjunto de respostas a uma ou mais covariáveis. Porém, por maior que seja seu potencial de aplicação, essa classe apresenta limitações como a necessidade de normalidade multivariada, homogeneidade das matrizes de variâncias e covariâncias, além de independência entre as observações.

Uma alternativa para solucionar tais limitações são os Modelos Multivariados de Covariância Linear Generalizada (McGLM) propostos por Bonat e Jørgensen (2016). Essa classe permite lidar com múltiplas respostas de diferentes naturezas e, de alguma forma, correlacionadas. Além disso, não há nesta classe suposições quanto à independência entre as observações da amostra, pois a correlação entre observações pode ser modelada por um preditor linear matricial que envolve matrizes conhecidas.

De forma geral, o McGLM é uma estrutura para modelagem de múltiplas respostas, de diferentes naturezas, em que não há necessidade de observações independentes. Estas características tornam o McGLM uma classe flexível ao ponto de ser possível chegar a extensões multivariadas para modelos de medidas repetidas, séries temporais, dados longitudinais, espaciais e espaço-temporais.

Quando trabalhamos com modelos de regressão, por diversas vezes há o interesse em avaliar os parâmetros do modelo. Isto é, verificar se os valores que associam as variáveis explicativas às variáveis respostas são iguais a determinados valores de interesse. Isto é feito através dos chamados testes de hipótese.

Em geral, existe o interesse em avaliar se há evidência suficiente para afirmar que o parâmetro que associa a variável explicativa à variável resposta é igual a 0, pois, caso esta afirmação seja verdadeira, podemos concluir que a variável explicativa não está associada à variável resposta. Contudo, através dos testes de hipótese podemos avaliar outros valores diferentes de 0.

Para o caso dos modelos lineares tradicionais existem técnicas como a Análise de Variância (ANOVA), na qual o objetivo é analisar o efeito de cada uma das variáveis explicativas, isto é, avaliar se a retirada de cada variável gera perda ao modelo ajustado. Em outras palavras, na Análise de Variância realizamos sucessivos testes de hipótese para verificar se o parâmetro que associa a variável explicativa à variável resposta é igual a 0.

Quando se está na classe de modelos multivariados para dados gaussianos, estende-se o conceito de Análise de Variância (ANOVA) para a Análise de Variância Multivariada (Smith et al., 1962), a MANOVA. E dentre os testes de hipótese multivariados já discutidos na literatura, destacam-se o  $\lambda$  de Wilk's (Wilks, 1932), traço de Hotelling-Lawley (Lawley, 1938) e (Hotelling, 1951), traço de Pillai (Pillai et al., 1955) e maior raiz de Roy (Roy, 1953).

No entanto, considerando o cenário com múltiplas respostas não gaussianas, são escassas as discussões na literatura a respeito de testes de hipótese sobre os parâmetros do modelo. Deste modo, nosso objetivo geral é o desenvolvimento destes testes de hipótese para os Modelos Multivariados de Covariância Linear Generalizada (McGLM) por se tratar de uma classe de modelos flexível e com alto poder de aplicação a problemas práticos em que se fazem necessários tais testes para avaliação do modelo.

Portanto, este trabalho tem os seguintes objetivos específicos:

1. Adaptar e implementar testes de hipótese gerais para os Modelos Multivariados de Covariância Linear Generalizada.
2. Desenvolver um procedimento para efetuar Análises de Variância Multivariadas para os Modelos Multivariados de Covariância Linear Generalizada.
3. Demonstrar as propriedades e comportamento dos testes propostos com base em estudos de simulação.
4. Demonstrar o potencial de aplicação das metodologias discutidas com base na aplicação a conjuntos de dados reais.

Este trabalho está organizado em sete capítulos: na atual seção foi exposto o tema de forma a enfatizar as características dos modelos lineares e testes de hipóteses. O Capítulo 2 é dedicado à revisão bibliográfica da estrutura dos McGLM. No Capítulo 3 são apresentados e discutidos os testes de hipótese já no contexto dos McGLM. No capítulo 4 são mostradas as funções implementadas. O Capítulo 5 apresenta o escopo do estudo de simulação para verificar as principais propriedades dos testes propostos. O Capítulo 6 apresenta os conjuntos de dados que serão usados no trabalho com o objetivo de discutir a aplicação do método a conjuntos de dados reais. E, por fim, no Capítulo 7 são apresentados os comentários finais e são discutidos os resultados esperados do estudo.

## 2 MODELOS MULTIVARIADOS DE COVARIÂNCIA LINEAR GENERALIZADA

Os Modelos Lineares Generalizados (GLM), propostos por (Nelder e Wedderburn, 1972), são uma forma de modelagem univariada para dados de diferentes naturezas, tais como respostas contínuas, binárias e contagens. Tais características tornam essa classe de modelos uma flexível ferramenta de modelagem aplicável a diversos tipos de problema. Contudo, por mais flexível e discutida na literatura, essa classe apresenta duas principais restrições:

1. A incapacidade de lidar com observações dependentes.
2. E/ou a incapacidade de lidar múltiplas respostas simultaneamente.

Com o objetivo de contornar estas restrições, foi proposta por (Bonat e Jørgensen, 2016), uma estrutura geral para análise de dados não gaussianos com múltiplas respostas em que não se faz suposições quanto à independência das observações, os chamados Modelos Multivariados de Covariância Linear Generalizada (McGLM).

Vamos discutir os McGLM como uma extensão dos GLM. Vale ressaltar que é usada uma especificação menos usual de um Modelo Linear Generalizado, porém trata-se de uma notação mais conveniente para chegar à uma especificação melhor construída de um Modelo Multivariado de Covariância Linear Generalizada.

### 2.1 GLM

Seja  $Y$  um vetor  $N \times 1$  de valores observados da variável resposta,  $X$  uma matriz de delineamento  $N \times k$  e  $\beta$  um vetor de parâmetros de regressão  $k \times 1$ , um GLM pode ser descrito da forma

$$\begin{aligned} E(Y) &= \mu = g^{-1}(X\beta), \\ \text{Var}(Y) &= \Sigma = V(\mu; p)^{1/2} (\tau_0 I) V(\mu; p)^{1/2}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

em que  $g(\cdot)$  é a função de ligação,  $V(\mu; p)$  é uma matriz diagonal em que as entradas principais são dadas pela função de variância aplicada ao vetor  $\mu$ ,  $p$  é o parâmetro de potência,  $\tau_0$  o parâmetro de dispersão e  $I$  é a matriz identidade de ordem  $N \times N$ .

Os GLM fazem uso de apenas duas funções, a função de variância e de ligação. Diferentes escolhas de funções de variância implicam em diferentes suposições a respeito da distribuição da variável resposta. Dentre as funções de variância conhecidas, podemos citar:

1. A função de variância potência, que caracteriza a família Tweedie de distribuições, em que a função de variância é dada por  $\vartheta(\mu; p) = \mu^p$ , na qual destacam-se as distribuições: Normal ( $p = 0$ ), Poisson ( $p = 1$ ), gama ( $p = 2$ ) e Normal inversa ( $p = 3$ ) [Jørgensen87; Jørgensen97].
2. A função de dispersão Poisson–Tweedie, a qual caracteriza a família Poisson-Tweedie de distribuições, que visa contornar a inflexibilidade da utilização da função de variância

potência para respostas discretas. A família Poisson-Tweedie tem função de dispersão dada por  $\vartheta(\mu; p) = \mu + \mu^p$  e tem como casos particulares os mais famosos modelos para dados de contagem: Hermite ( $p = 0$ ), Neyman tipo A ( $p = 1$ ), binomial negativa ( $p = 2$ ) e Poisson–inversa gaussiana ( $p = 3$ ) [Jorgensen15].

3. A função de variância binomial, dada por  $\vartheta(\mu) = \mu(1 - \mu)$ , utilizada quando a variável resposta é binária, restrita a um intervalo ou quando tem-se o número de sucessos em um número de tentativas.

Lembre-se que o GLM é uma classe de modelos de regressão univariados em que um dos pressupostos é a independência entre as observações. Esta independência é especificada na matriz identidade no centro da equação que define a matriz de variância e covariância. Podemos imaginar que, substituindo esta matriz identidade por uma matriz qualquer que reflita a relação entre os indivíduos da amostra teremos uma extensão do Modelo Linear Generalizado para observações dependentes. É justamente essa a ideia dos Modelos de Covariância Linear Generalizada, o cGLM.

## 2.2 CGLM

Os cGLM são uma alternativa para problemas em que a suposição de independência entre as observações não é atendida. Neste caso, a solução proposta é substituir a matriz identidade  $I$  da equação que descreve a matriz de variância e covariância por uma matriz não diagonal  $\Omega(\tau)$  que descreva adequadamente a estrutura de correlação entre as observações. Trata-se de uma ideia similar à proposta de Liang86 nos modelos GEE (Generalized Estimation Equation), em que utiliza-se uma matriz de correlação de trabalho para considerar a dependência entre as observações. A matriz  $\Omega(\tau)$  é descrita como uma combinação de matrizes conhecidas tal como nas propostas de Anderson73 e Pourahmadi00, podendo ser escrita da forma

$$h\{\Omega(\tau)\} = \tau_0 Z_0 + \dots + \tau_D Z_D, \quad (2.2)$$

em que  $h(\cdot)$  é a função de ligação de covariância,  $Z_d$  com  $d = 0, \dots, D$  são matrizes que representam a estrutura de covariância presente nos dados e  $\tau = (\tau_0, \dots, \tau_D)$  é um vetor  $(D + 1) \times 1$  de parâmetros de dispersão. Tal estrutura pode ser vista como um análogo ao preditor linear para a média e foi nomeado como preditor linear matricial. A especificação da função de ligação de covariância é discutida por Pinheiro96 e é possível selecionar combinações de matrizes para se obter os mais conhecidos modelos da literatura para dados longitudinais, séries temporais, dados espaciais e espaço-temporais. Maiores detalhes são discutidos por Demidenko13.

Com isso, substituindo a matriz identidade pela equação do preditor linear matricial, temos uma classe com toda a flexibilidade dos GLM, porém contornando a restrição da independência entre as observações desde que o preditor linear matricial seja adequadamente especificado.

Deste modo, é contornada a primeira restrição dos GLM. A segunda restrição diz respeito às múltiplas respostas e, resolvendo esta restrição, chegamos ao McGLM.

### 2.3 MCGLM

O McGLM pode ser entendido como uma extensão multivariada do cGLM e contorna as duas principais restrições presentes nos GLM, pois além de permitir a modelagem de dados com estrutura de covariância, permite modelar múltiplas respostas.

Considere  $\mathbf{Y}_{N \times R} = \{\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_R\}$  uma matriz de variáveis resposta e  $\mathbf{M}_{N \times R} = \{\boldsymbol{\mu}_1, \dots, \boldsymbol{\mu}_R\}$  uma matriz de valores esperados. Cada uma das variáveis resposta tem sua própria matriz de variância e covariância, responsável por modelar a covariância dentro de cada resposta, sendo expressa por

$$\boldsymbol{\Sigma}_r = \mathbf{V}_r(\boldsymbol{\mu}_r; p)^{1/2} \boldsymbol{\Omega}_r(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{V}_r(\boldsymbol{\mu}_r; p)^{1/2}. \quad (2.3)$$

Além disso, é necessária uma matriz de correlação  $\boldsymbol{\Sigma}_b$ , de ordem  $R \times R$ , que descreve a correlação entre as variáveis resposta. Para a especificação da matriz de variância e covariância conjunta é utilizado o produto Kronecker generalizado, proposto por @martinez13.

Finalmente, um McGLM é descrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{Y}) &= \mathbf{M} = \{g_1^{-1}(\mathbf{X}_1 \boldsymbol{\beta}_1), \dots, g_R^{-1}(\mathbf{X}_R \boldsymbol{\beta}_R)\} \\ \text{Var}(\mathbf{Y}) &= \mathbf{C} = \boldsymbol{\Sigma}_R \overset{G}{\otimes} \boldsymbol{\Sigma}_b, \end{aligned} \quad (2.4)$$

em que  $\boldsymbol{\Sigma}_R \overset{G}{\otimes} \boldsymbol{\Sigma}_b = \text{Bdiag}(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_1, \dots, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_R)(\boldsymbol{\Sigma}_b \otimes \mathbf{I})\text{Bdiag}(\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_1^\top, \dots, \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_R^\top)$  é o produto generalizado de Kronecker, a matriz  $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_r$  denota a matriz triangular inferior da decomposição de Cholesky da matriz  $\boldsymbol{\Sigma}_r$ , o operador Bdiag denota a matriz bloco-diagonal e  $\mathbf{I}$  uma matriz identidade  $N \times N$ .

Toda metodologia do McGLM está implementada no pacote ‘mcglm’ [@mcglm] do software estatístico R [@softwareR].

#### 2.3.1 Estimação e inferência

Os McGLMs são ajustados baseados no método de funções de estimação descritos em detalhes por @Bonat16 e @jorg04. Nesta seção é apresentada uma visão geral do algoritmo e da distribuição assintótica dos estimadores baseados em funções de estimação.

As suposições de segundo momento dos McGLM permitem a divisão dos parâmetros em dois conjuntos:  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\beta}^\top, \boldsymbol{\lambda}^\top)^\top$ . Desta forma,  $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_1^\top, \dots, \boldsymbol{\beta}_R^\top)^\top$  é um vetor  $K \times 1$  de parâmetros de regressão e  $\boldsymbol{\lambda} = (\rho_1, \dots, \rho_{R(R-1)/2}, p_1, \dots, p_R, \boldsymbol{\tau}_1^\top, \dots, \boldsymbol{\tau}_R^\top)^\top$  é um vetor  $Q \times 1$  de parâmetros de dispersão. Além disso,  $\mathcal{Y} = (\mathbf{Y}_1^\top, \dots, \mathbf{Y}_R^\top)^\top$  denota o vetor empilhado de ordem  $NR \times 1$  da matriz de variáveis resposta  $\mathbf{Y}_{N \times R}$  e  $\mathcal{M} = (\boldsymbol{\mu}_1^\top, \dots, \boldsymbol{\mu}_R^\top)^\top$  denota o vetor empilhado de ordem  $NR \times 1$  da matriz de valores esperados  $\mathbf{M}_{N \times R}$ .

Para estimação dos parâmetros de regressão é utilizada a função quasi-score [Li86], representada por

$$\psi_{\beta}(\beta, \lambda) = \mathbf{D}^{\top} \mathbf{C}^{-1}(\mathcal{Y} - \mathcal{M}), \quad (2.5)$$

em que  $\mathbf{D} = \nabla_{\beta} \mathcal{M}$  é uma matriz  $NR \times K$ , e  $\nabla_{\beta}$  denota o operador gradiente. Utilizando a função quasi-score a matriz  $K \times K$  de sensibilidade de  $\psi_{\beta}$  é dada por

$$S_{\beta} = E(\nabla_{\beta} \psi_{\beta}) = -\mathbf{D}^{\top} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}, \quad (2.6)$$

enquanto que a matriz  $K \times K$  de variabilidade de  $\psi_{\beta}$  é escrita como

$$V_{\beta} = \text{VAR}(\psi_{\beta}) = \mathbf{D}^{\top} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}. \quad (2.7)$$

Para os parâmetros de dispersão é utilizada a função de estimação de Pearson, definida da forma

$$\psi_{\lambda_i}(\beta, \lambda) = \text{tr}(W_{\lambda_i}(\mathbf{r}^{\top} \mathbf{r} - \mathbf{C})), i = 1, \dots, Q, \quad (2.8)$$

em que  $W_{\lambda_i} = -\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \lambda_i}$  e  $\mathbf{r} = (\mathcal{Y} - \mathcal{M})$ . A entrada  $(i, j)$  da matriz de sensibilidade  $Q \times Q$  de  $\psi_{\lambda}$  é dada por

$$S_{\lambda_{ij}} = E \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \psi_{\lambda_j} \right) = -\text{tr}(W_{\lambda_i} \mathbf{C} W_{\lambda_j} \mathbf{C}). \quad (2.9)$$

Já a entrada  $(i, j)$  da matriz de variabilidade  $Q \times Q$  de  $\psi_{\lambda}$  é definida por

$$V_{\lambda_{ij}} = \text{Cov}(\psi_{\lambda_i}, \psi_{\lambda_j}) = 2\text{tr}(W_{\lambda_i} \mathbf{C} W_{\lambda_j} \mathbf{C}) + \sum_{l=1}^{NR} k_l^{(4)} (W_{\lambda_i})_{ll} (W_{\lambda_j})_{ll}, \quad (2.10)$$

em que  $k_l^{(4)}$  denota a quarta cumulante de  $\mathcal{Y}_l$ . No processo de estimação dos McGLM são usadas as versões empíricas.

Para se levar em conta a covariância entre os vetores  $\beta$  e  $\lambda$ , @Bonat16 obtiveram as matrizes de sensibilidade e variabilidade cruzadas, denotadas por  $S_{\lambda\beta}$ ,  $S_{\beta\lambda}$  e  $V_{\lambda\beta}$ , mais detalhes em @Bonat16. As matrizes de sensibilidade e variabilidade conjuntas de  $\psi_{\beta}$  e  $\psi_{\lambda}$  são denotados por

$$S_{\theta} = \begin{bmatrix} S_{\beta} & S_{\beta\lambda} \\ S_{\lambda\beta} & S_{\lambda} \end{bmatrix} \text{ e } V_{\theta} = \begin{bmatrix} V_{\beta} & V_{\lambda\beta}^{\top} \\ V_{\lambda\beta} & V_{\lambda} \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Seja  $\hat{\theta} = (\hat{\beta}^{\top}, \hat{\lambda}^{\top})^{\top}$  o estimador baseado em funções de estimação de  $\theta$ . Então, a distribuição assintótica de  $\hat{\theta}$  é

$$\hat{\theta} \sim N(\theta, J_{\theta}^{-1}), \quad (2.12)$$

em que  $J_{\theta}^{-1}$  é a inversa da matriz de informação de Godambe, dada por  $J_{\theta}^{-1} = S_{\theta}^{-1} V_{\theta} S_{\theta}^{-\top}$ , em que  $S_{\theta}^{-\top} = (S_{\theta}^{-1})^{\top}$ .

Para resolver o sistema de equações  $\psi_{\beta} = 0$  e  $\psi_{\lambda} = 0$  faz-se uso do algoritmo Chaser modificado, proposto por @jorg04, que fica definido como

$$\begin{aligned}\beta^{(i+1)} &= \beta^{(i)} - S_{\beta}^{-1} \psi \beta(\beta^{(i)}, \lambda^{(i)}), \\ \lambda^{(i+1)} &= \lambda^{(i)} \alpha S_{\lambda}^{-1} \psi \lambda(\beta^{(i+1)}, \lambda^{(i)}).\end{aligned}\tag{2.13}$$



## REFERÊNCIAS

- Bonat, W. H. e Jørgensen, B. (2016). Multivariate covariance generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 65(5):649–675.
- Box, G. E. e Cox, D. R. (1964). An analysis of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, páginas 211–252.
- Hotelling, H. (1951). A generalized t test and measure of multivariate dispersion. Relatório técnico, UNIVERSITY OF NORTH CAROLINA Chapel Hill United States.
- Lawley, D. (1938). A generalization of fisher's z test. *Biometrika*, 30(1/2):180–187.
- Nelder, J. A. e Wedderburn, R. W. M. (1972). Generalized Linear Models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 135:370–384.
- Pillai, K. et al. (1955). Some new test criteria in multivariate analysis. *The Annals of Mathematical Statistics*, 26(1):117–121.
- Roy, S. N. (1953). On a heuristic method of test construction and its use in multivariate analysis. *The Annals of Mathematical Statistics*, páginas 220–238.
- Smith, H., Gnanadesikan, R. e Hughes, J. (1962). Multivariate analysis of variance (manova). *Biometrics*, 18(1):22–41.
- Wilks, S. S. (1932). Certain generalizations in the analysis of variance. *Biometrika*, páginas 471–494.

## APÊNDICE A – EXEMPLO DE ANEXO

Os apêndices são uma extensão do texto, destacados deste para evitar descontinuidade na sequência lógica ou alongamento excessivo de determinado assunto ou tópico secundário dentro dos capítulos da dissertação ou da tese. São contribuições que servem para esclarecer, complementar, provar ou confirmar as ideias apresentadas no texto dos capítulos e que são importantes para a compreensão dos mesmos.

Todos os apêndices devem vir após as referências bibliográficas e devem ser enumerados por letras maiúsculas (A, B, C, ...).

### A.1 UMA SEÇÃO

Nulla ac nisl. Nullam urna nulla, ullamcorper in, interdum sit amet, gravida ut, risus. Aenean ac enim. In luctus. Phasellus eu quam vitae turpis viverra pellentesque. Duis feugiat felis ut enim. Phasellus pharetra, sem id porttitor sodales, magna nunc aliquet nibh, nec blandit nisl mauris at pede. Suspendisse risus risus, lobortis eget, semper at, imperdiet sit amet, quam. Quisque scelerisque dapibus nibh. Nam enim. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Nunc ut metus. Ut metus justo, auctor at, ultrices eu, sagittis ut, purus. Aliquam aliquam.

Etiam pede massa, dapibus vitae, rhoncus in, placerat posuere, odio. Vestibulum luctus commodo lacus. Morbi lacus dui, tempor sed, euismod eget, condimentum at, tortor. Phasellus aliquet odio ac lacus tempor faucibus. Praesent sed sem. Praesent iaculis. Cras rhoncus tellus sed justo ullamcorper sagittis. Donec quis orci. Sed ut tortor quis tellus euismod tincidunt. Suspendisse congue nisl eu elit. Aliquam tortor diam, tempus id, tristique eget, sodales vel, nulla. Praesent tellus mi, condimentum sed, viverra at, consectetur quis, lectus. In auctor vehicula orci. Sed pede sapien, euismod in, suscipit in, pharetra placerat, metus. Vivamus commodo dui non odio. Donec et felis.

Etiam suscipit aliquam arcu. Aliquam sit amet est ac purus bibendum congue. Sed in eros. Morbi non orci. Pellentesque mattis lacinia elit. Fusce molestie velit in ligula. Nullam et orci vitae nibh vulputate auctor. Aliquam eget purus. Nulla auctor wisi sed ipsum. Morbi porttitor tellus ac enim. Fusce ornare. Proin ipsum enim, tincidunt in, ornare venenatis, molestie a, augue. Donec vel pede in lacus sagittis porta. Sed hendrerit ipsum quis nisl. Suspendisse quis massa ac nibh pretium cursus. Sed sodales. Nam eu neque quis pede dignissim ornare. Maecenas eu purus ac urna tincidunt congue.

Donec et nisl id sapien blandit mattis. Aenean dictum odio sit amet risus. Morbi purus. Nulla a est sit amet purus venenatis iaculis. Vivamus viverra purus vel magna. Donec in justo sed odio malesuada dapibus. Nunc ultrices aliquam nunc. Vivamus facilisis pellentesque velit.

Nulla nunc velit, vulputate dapibus, vulputate id, mattis ac, justo. Nam mattis elit dapibus purus. Quisque enim risus, congue non, elementum ut, mattis quis, sem. Quisque elit.

#### A.1.1 Uma Subseção

Sed mattis, erat sit amet gravida malesuada, elit augue egestas diam, tempus scelerisque nunc nisl vitae libero. Sed consequat feugiat massa. Nunc porta, eros in eleifend varius, erat leo rutrum dui, non convallis lectus orci ut nibh. Sed lorem massa, nonummy quis, egestas id, condimentum at, nisl. Maecenas at nibh. Aliquam et augue at nunc pellentesque ullamcorper. Duis nisl nibh, laoreet suscipit, convallis ut, rutrum id, enim. Phasellus odio. Nulla nulla elit, molestie non, scelerisque at, vestibulum eu, nulla. Ut odio nisl, facilisis id, mollis et, scelerisque nec, enim. Aenean sem leo, pellentesque sit amet, scelerisque sit amet, vehicula pellentesque, sapien.

Sed consequat tellus et tortor. Ut tempor laoreet quam. Nullam id wisi a libero tristique semper. Nullam nisl massa, rutrum ut, egestas semper, mollis id, leo. Nulla ac massa eu risus blandit mattis. Mauris ut nunc. In hac habitasse platea dictumst. Aliquam eget tortor. Quisque dapibus pede in erat. Nunc enim. In dui nulla, commodo at, consectetur nec, malesuada nec, elit. Aliquam ornare tellus eu urna. Sed nec metus. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas.

Phasellus id magna. Duis malesuada interdum arcu. Integer metus. Morbi pulvinar pellentesque mi. Suspendisse sed est eu magna molestie egestas. Quisque mi lorem, pulvinar eget, egestas quis, luctus at, ante. Proin auctor vehicula purus. Fusce ac nisl aliquam ante hendrerit pellentesque. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Morbi wisi. Etiam arcu mauris, facilisis sed, eleifend non, nonummy ut, pede. Cras ut lacus tempor metus mollis placerat. Vivamus eu tortor vel metus interdum malesuada.

Sed eleifend, eros sit amet faucibus elementum, urna sapien consectetur mauris, quis egestas leo justo non risus. Morbi non felis ac libero vulputate fringilla. Mauris libero eros, lacinia non, sodales quis, dapibus porttitor, pede. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Morbi dapibus mauris condimentum nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Etiam sit amet erat. Nulla varius. Etiam tincidunt dui vitae turpis. Donec leo. Morbi vulputate convallis est. Integer aliquet. Pellentesque aliquet sodales urna.

##### A.1.1.1 Uma Subsubseção

Sed mattis, erat sit amet gravida malesuada, elit augue egestas diam, tempus scelerisque nunc nisl vitae libero. Sed consequat feugiat massa. Nunc porta, eros in eleifend varius, erat leo rutrum dui, non convallis lectus orci ut nibh. Sed lorem massa, nonummy quis, egestas id, condimentum at, nisl. Maecenas at nibh. Aliquam et augue at nunc pellentesque ullamcorper.

Duis nisl nibh, laoreet suscipit, convallis ut, rutrum id, enim. Phasellus odio. Nulla nulla elit, molestie non, scelerisque at, vestibulum eu, nulla. Ut odio nisl, facilisis id, mollis et, scelerisque nec, enim. Aenean sem leo, pellentesque sit amet, scelerisque sit amet, vehicula pellentesque, sapien.

Sed consequat tellus et tortor. Ut tempor laoreet quam. Nullam id wisi a libero tristique semper. Nullam nisl massa, rutrum ut, egestas semper, mollis id, leo. Nulla ac massa eu risus blandit mattis. Mauris ut nunc. In hac habitasse platea dictumst. Aliquam eget tortor. Quisque dapibus pede in erat. Nunc enim. In dui nulla, commodo at, consectetur nec, malesuada nec, elit. Aliquam ornare tellus eu urna. Sed nec metus. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas.

Phasellus id magna. Duis malesuada interdum arcu. Integer metus. Morbi pulvinar pellentesque mi. Suspendisse sed est eu magna molestie egestas. Quisque mi lorem, pulvinar eget, egestas quis, luctus at, ante. Proin auctor vehicula purus. Fusce ac nisl aliquam ante hendrerit pellentesque. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Morbi wisi. Etiam arcu mauris, facilisis sed, eleifend non, nonummy ut, pede. Cras ut lacus tempor metus mollis placerat. Vivamus eu tortor vel metus interdum malesuada.

Sed eleifend, eros sit amet faucibus elementum, urna sapien consectetur mauris, quis egestas leo justo non risus. Morbi non felis ac libero vulputate fringilla. Mauris libero eros, lacinia non, sodales quis, dapibus porttitor, pede. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Morbi dapibus mauris condimentum nulla. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Etiam sit amet erat. Nulla varius. Etiam tincidunt dui vitae turpis. Donec leo. Morbi vulputate convallis est. Integer aliquet. Pellentesque aliquet sodales urna.



