

Lineu Alberto

Modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Testes de hipóteses em
modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Adaptação do teste
Wald para os McGLM

Teste de comparações
múltiplas

Implementações

Toy examples

Testes de comparações múltiplas em modelos multivariados de covariância linear generalizada

Tópicos avançados em modelagem estatística

Lineu Alberto Cavazani de Freitas

Trabalho final

Universidade Federal do Paraná

Conteúdo

Lineu Alberto

- 1 Modelos multivariados de covariância linear generalizada
- 2 Testes de hipóteses em modelos multivariados de covariância linear generalizada
- 3 Adaptação do teste Wald para os McGLM
- 4 Teste de comparações múltiplas
 - Exemplo 1
 - Exemplo 2
- 5 Implementações
- 6 Toy examples

Modelos multivariados de covariância linear generalizada

Testes de hipóteses em modelos multivariados de covariância linear generalizada

Adaptação do teste Wald para os McGLM

Teste de comparações múltiplas

Implementações

Toy examples

Lineu Alberto

Modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Testes de hipóteses em
modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Adaptação do teste
Wald para os McGLM

Teste de comparações
múltiplas

Implementações

Toy examples

1

Modelos multivariados de covariância linear generalizada

Modelos multivariados de covariância linear generalizada

- ▶ Configuram uma estrutura geral para análise via modelos de regressão.
- ▶ Comporta múltiplas respostas de diferentes naturezas.
- ▶ Pode-se ajustar modelos com diferentes preditores e distribuições para cada resposta.
- ▶ Os modelos levam em conta a correlação entre indivíduos do conjunto de dados.
- ▶ Contornam as três mais importantes restrições das classes tradicionais de modelos de regressão:
 1. A incapacidade de lidar com observações dependentes.
 2. A incapacidade de lidar com múltiplas respostas simultaneamente.
 3. Leque reduzido de distribuições disponíveis.

Modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Testes de hipóteses em
modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Adaptação do teste
Wald para o McGLM

Teste de comparações
múltiplas

Implementações

Toy examples

Modelos multivariados de covariância linear generalizada

- ▶ Parâmetros estimados nos McGLMs:
 1. **Regressão**: efeito das variáveis explicativas sobre as respostas.
 2. **Dispersão**: impacto da correlação entre unidades.
 3. **Potência**: indicativo de qual distribuição se adequa ao problema.
 4. **Correlação**: relação entre respostas.
- ▶ Todas estas quantidades são interpretáveis e são estimadas com base nos dados.
- ▶ A estimação é feita por meio de **funções de estimação**.
 1. **Função quasi-score** para parâmetros de regressão.
 2. **Função de estimação de Pearson** para os demais parâmetros.
 3. Para resolver o sistema de equações faz-se uso do algoritmo **Chaser modificado**.

Lineu Alberto

Modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Testes de hipóteses em
modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Adaptação do teste
Wald para os McGLM

Teste de comparações
múltiplas

Implementações

Toy examples

2

Testes de hipóteses em modelos multivariados de covariância linear generalizada

Testes de hipóteses em modelos de regressão

Lineu Alberto

Modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Testes de hipóteses em
modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Adaptação do teste
Wald para os McGLM

Teste de comparações
múltiplas

Implementações

Toy examples

- ▶ Usados para verificar se a retirada de determinada variável explicativa do modelo geraria uma perda no ajuste.
- ▶ Os três testes mais usados são:
 - ▶ O teste da razão de verossimilhanças.
 - ▶ O teste Wald.
 - ▶ O teste do multiplicador de lagrange, também conhecido como teste escore.
- ▶ São baseados na função de verossimilhança dos modelos.
- ▶ São assintoticamente equivalentes.

ANOVA & MANOVA

- ▶ Formas de **avaliar a significância** de cada uma das variáveis de uma forma procedural.
- ▶ Consiste em efetuar testes sucessivos impondo **restrições ao modelo** original.
- ▶ O objetivo é testar se a ausência de determinada variável gera perda ao modelo.
- ▶ Os resultados são sumarizados numa tabela, o chamado **quadro de análise de variância**.
- ▶ Na ANOVA, avalia-se a relevância das variáveis sobre uma única resposta.
- ▶ Na MANOVA, avalia-se a relevância das variáveis sobre mais de uma resposta.

Modelos multivariados de covariância linear generalizada

Testes de hipóteses em modelos multivariados de covariância linear generalizada

Adaptação do teste Wald para os McGLM

Teste de comparações múltiplas

Implementações

Toy examples

Proposta

Lineu Alberto

- ▶ Desenvolvimento de testes de hipóteses para avaliação dos parâmetros de McGLMs, através de uma adaptação do teste Wald.
- ▶ Adaptar o teste Wald para realização de testes de hipóteses gerais sobre parâmetros de McGLMs.
- ▶ Implementar funções para efetuar tais testes, bem como funções para efetuar ANOVAs e MANOVAs para os McGLMs.
- ▶ Avaliar as propriedades e comportamento dos testes propostos com base em estudos de simulação.
- ▶ Motivar o potencial de aplicação das metodologias discutidas com base na aplicação a conjuntos de dados reais.

Modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Testes de hipóteses em
modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Adaptação do teste
Wald para os McGLM

Teste de comparações
múltiplas

Implementações

Toy examples

Lineu Alberto

Modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Testes de hipóteses em
modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Adaptação do teste
Wald para os McGLM

Teste de comparações
múltiplas

Implementações

Toy examples

3

Adaptação do teste Wald para os McGLM

Hipóteses

Lineu Alberto

Modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Testes de hipóteses em
modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Adaptação do teste
Wald para os McGLM

Teste de comparações
múltiplas

Implementações

Toy examples

$$H_0 : \mathbf{L}\theta_{\beta,\tau,p} = \mathbf{c} \text{ vs } H_1 : \mathbf{L}\theta_{\beta,\tau,p} \neq \mathbf{c}.$$

Em que:

- ▶ Em que \mathbf{L} é a matriz de especificação das hipóteses a serem testadas, tem dimensão $s \times h$.
- ▶ $\theta_{\beta,\tau,p}$ é o vetor de dimensão $h \times 1$ de parâmetros de regressão, dispersão e potência do modelo.
- ▶ \mathbf{c} é um vetor de dimensão $s \times 1$ com os valores sob hipótese nula.

Estatística de teste

Lineu Alberto

Modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Testes de hipóteses em
modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Adaptação do teste
Wald para os McGLM

Teste de comparações
múltiplas

Implementações

Toy examples

$$W = (\mathbf{L}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\beta,\tau,p} - \mathbf{c})^\top (\mathbf{L} \mathbf{J}_{\beta,\tau,p}^{-1} \mathbf{L}^\top)^{-1} (\mathbf{L}\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\beta,\tau,p} - \mathbf{c}).$$

Em que:

- ▶ \mathbf{L} é a matriz da especificação das hipóteses, tem dimensão $s \times h$.
- ▶ $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\beta,\tau,p}$ é o vetor de dimensão $h \times 1$ com todas as estimativas dos parâmetros de regressão, dispersão e potência.
- ▶ \mathbf{c} é um vetor de dimensão $s \times 1$ com os valores sob hipótese nula.
- ▶ $\mathbf{J}_{\beta,\tau,p}^{-1}$ é a inversa da matriz de informação de Godambe desconsiderando os parâmetros de correlação, de dimensão $h \times h$.
- ▶ $W \sim \chi_s^2$

ANOVA & MANOVA via teste Wald

- ▶ Com base na adaptação do teste Wald propostas, buscamos propor ANOVAs e MANOVAs via teste Wald.
- ▶ Propomos 3 tipos diferentes de análises de variância, nomeadas tipo I, II e III.
- ▶ Cada linha do quadro corresponde uma hipótese. Portanto, basta especificar uma matriz L .
- ▶ Os procedimentos para análise de variância retornam um quadro para cada resposta.
- ▶ Os procedimentos para análise variância multivariadas retornam um único quadro.

Lineu Alberto

Modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Testes de hipóteses em
modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Adaptação do teste
Wald para os McGLM

Teste de comparações
múltiplas

Exemplo 1

Exemplo 2

Implementações

Toy examples

4

Teste de comparações múltiplas

Teste de comparações múltiplas

- ▶ Utilizados quando a análise de variância aponta como conclusão a existência de efeito significativo dos parâmetros associados a uma variável categórica.
- ▶ Isto é, há ao menos uma diferença significativa entre os níveis do fator.
- ▶ O teste de comparações múltiplas é utilizado para determinar onde estão estas diferenças.
- ▶ Através da adaptação do teste Wald é possível chegar a procedimentos para realização de testes de comparações múltiplas.

Teste de comparações múltiplas

- ▶ Por exemplo, suponha que há no modelo uma variável categórica x de três níveis: A, B e C.
- ▶ Um dos níveis será definido como categoria de referência e serão estimados os parâmetros que medem a diferença da referência pras demais.
- ▶ A análise de variância mostrará se há efeito da variável x no modelo, isto é, se os valores da resposta estão associados aos níveis de x .
- ▶ Contudo este resultado não nos mostrará se os valores da resposta diferem de A para B, ou de A para C, ou ainda se B difere de C.
- ▶ Este papel é dos testes de comparações múltiplas.

Passos

Lineu Alberto

Modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Testes de hipóteses em
modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Adaptação do teste
Wald para os McGLM

Teste de comparações
múltiplas

Exemplo 1

Exemplo 2

Implementações

Toy examples

1. Obter a matriz de combinações lineares dos parâmetros dos modelos que resultam nas médias ajustadas (geralmente denotada por L).
2. Gerar a matriz de contrastes dada pela subtração duas a duas das linhas da matriz L (geralmente denotada por K).
3. Selecionar as linhas da matriz K e usar como matriz de especificação de hipóteses do teste Wald.
4. Se for uma hipótese sobre cada uma das respostas, todas sujeitas ao mesmo preditor, basta aumentar a K com um produto de kronecker.
5. Se for uma hipótese por resposta, basta selecionar o vetor de estimativas e a matriz J para a resposta específica.

Exemplo1

- ▶ Variável resposta Y sujeita a uma variável explicativa X de 4 níveis (A, B, C, D).
- ▶ $g(\mu) = \beta_0 + \beta_1[X = B] + \beta_2[X = C] + \beta_3[X = D]$.
- ▶ $h\{\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\tau})\} = \boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{Z}_0$.

$$\mathbf{L} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{matrix} & \begin{matrix} A-B & A-C & A-D & B-C & B-D & C-D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A-B \\ A-C \\ A-D \\ B-C \\ B-D \\ C-D \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Exemplo 2

Lineu Alberto

Modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Testes de hipóteses em
modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Adaptação do teste
Wald para os McGLM

Teste de comparações
múltiplas

Exemplo 1

Exemplo 2

Implementações

Toy examples

- ▶ Variável resposta Y sujeita a uma variável explicativa X_1 de 3 níveis (A, B, C) e X_2 de 2 níveis (D, E).
- ▶ $g(\mu) = \beta_0 + \beta_1[X_1 = B] + \beta_2[X_1 = C] + \beta_3[X_2 = E]$.
- ▶ $h\{\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\tau})\} = \boldsymbol{\tau}_0 \mathbf{Z}_0$.

Exemplo 2

$$L = \begin{matrix} A:D \\ B:D \\ C:D \\ A:E \\ B:E \\ C:E \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{matrix} A:D - B:D \\ A:D - C:D \\ A:D - A:E \\ A:D - B:E \\ A:D - C:E \\ B:D - C:D \\ B:D - A:E \\ B:D - B:E \\ B:D - C:E \\ C:D - A:E \\ C:D - B:E \\ C:D - C:E \\ A:E - B:E \\ A:E - C:E \\ B:E - C:E \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -0 \\ 0 & 0 & -1 & -0 \\ 0 & 1 & -1 & -0 \end{bmatrix}$$

Lineu Alberto

Modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Testes de hipóteses em
modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Adaptação do teste
Wald para os McGLM

Teste de comparações
múltiplas

Exemplo 1

Exemplo 2

Implementações

Toy examples

Lineu Alberto

Modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Testes de hipóteses em
modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Adaptação do teste
Wald para os McGLM

Teste de comparações
múltiplas

Implementações

Toy examples

5

Implementações

Funções

Lineu Alberto

Modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Testes de hipóteses em
modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Adaptação do teste
Wald para os McGLM

Teste de comparações
múltiplas

Implementações

Toy examples

- ▶ **mc_multcomp**: função que faz comparações múltiplas para cada uma das respostas.
- ▶ **mc_mult_multcomp**: função que faz comparações múltiplas para todas as respostas quando sujeitas ao mesmo preditor.

(Mostrar no R)

Lineu Alberto

Modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Testes de hipóteses em
modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Adaptação do teste
Wald para os McGLM

Teste de comparações
múltiplas

Implementações

Toy examples

6

Toy examples

Lineu Alberto

Modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Testes de hipóteses em
modelos multivariados
de covariância linear
generalizada

Adaptação do teste
Wald para os McGLM

Teste de comparações
múltiplas

Implementações

Toy examples

Obrigado!

Lineu Alberto Cavazani de Freitas

lineuacf@gmail.com

<https://lineu96.github.io/st/>

