

LINEU ALBERTO CAVAZANI DE FREITAS

Verificação de  
veracidade  
estatística

TESTES DE HIPÓTESE EM MODELOS MULTIVARIADOS  
DE COVARIÂNCIA LINEAR GENERALIZADA (MCGLM)

(versão pré-defesa, compilada em 6 de abril de 2021)

Documento apresentado como requisito parcial ao exame  
de qualificação de Mestrado no Programa de Pós-  
Graduação em Informática, Setor de Ciências Exatas,  
da Universidade Federal do Paraná.

Área de concentração: *Ciência da Computação*.

Orientador: Prof. Dr. Wagner Hugo Bonat.

Coorientador: Prof. Dr. Marco Antonio Zanata Alves.

CURITIBA PR

2021

→ Vaya como que o pessoal identifice que é "qualificação"!!

## RESUMO

→ Fazise incluir o  
resumo

O resumo deve conter no máximo 500 palavras, devendo ser justificado na largura da página e escrito em um único parágrafo<sup>1</sup> com um afastamento de 1,27 cm na primeira linha. O espaçamento entre linhas deve ser de 1,5 linhas. O resumo deve ser informativo, ou seja, é a condensação do conteúdo e expõe finalidades, metodologia, resultados e conclusões.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdier lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetur odio sem sed wisi.

Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetur eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdier justo nec dolor.

Etiam euismod. Fusce facilisis lacinia dui. Suspendisse potenti. In mi erat, cursus id, nonummy sed, ullamcorper eget, sapien. Praesent pretium, magna in eleifend egestas, pede pede pretium lorem, quis consectetur tortor sapien facilisis magna. Mauris quis magna varius nulla scelerisque imperdier. Aliquam non quam. Aliquam porttitor quam a lacus. Praesent vel arcu ut tortor cursus volutpat. In vitae pede quis diam bibendum placerat. Fusce elementum convallis neque. Sed dolor orci, scelerisque ac, dapibus nec, ultricies ut, mi. Duis nec dui quis leo sagittis commodo.

Aliquam lectus. Vivamus leo. Quisque ornare tellus ullamcorper nulla. Mauris porttitor pharetra tortor. Sed fringilla justo sed mauris. Mauris tellus. Sed non leo. Nullam elementum, magna in cursus sodales, augue est scelerisque sapien, venenatis congue nulla arcu et pede. Ut suscipit enim vel sapien. Donec congue. Maecenas urna mi, suscipit in, placerat ut, vestibulum ut, massa. Fusce ultrices nulla et nisl.

Palavras-chave: Palavra-chave 1. Palavra-chave 2. Palavra-chave 3.

<sup>1</sup>E também não deve ter notas de rodapé; em outras palavras, não siga este exemplo... :-)

## ABSTRACT

The abstract should be the English translation of the “resumo”, no more, no less.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetur odio sem sed wisi.

Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetur eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.

Etiam euismod. Fusce facilisis lacinia dui. Suspendisse potenti. In mi erat, cursus id, nonummy sed, ullamcorper eget, sapien. Praesent pretium, magna in eleifend egestas, pede pede pretium lorem, quis consectetur tortor sapien facilisis magna. Mauris quis magna varius nulla scelerisque imperdiet. Aliquam non quam. Aliquam porttitor quam a lacus. Praesent vel arcu ut tortor cursus volutpat. In vitae pede quis diam bibendum placerat. Fusce elementum convallis neque. Sed dolor orci, scelerisque ac, dapibus nec, ultricies ut, mi. Duis nec dui quis leo sagittis commodo.

Aliquam lectus. Vivamus leo. Quisque ornare tellus ullamcorper nulla. Mauris porttitor pharetra tortor. Sed fringilla justo sed mauris. Mauris tellus. Sed non leo. Nullam elementum, magna in cursus sodales, augue est scelerisque sapien, venenatis congue nulla arcu et pede. Ut suscipit enim vel sapien. Donec congue. Maecenas urna mi, suscipit in, placerat ut, vestibulum ut, massa. Fusce ultrices nulla et nisl.

Keywords: Keyword 1. Keyword 2. Keyword 3.

## **LISTA DE FIGURAS**

## **LISTA DE TABELAS**

4.1	Funções implementadas.	24
-----	------------------------	----

## **LISTA DE ACRÔNIMOS**

<b>GLM</b>	Modelos Lineares Generalizados
<b>McGLM</b>	Modelos Multivariados de Covariância Linear Generalizada
<b>ANOVA</b>	Análise de Variância
<b>MANOVA</b>	Análise de Variância Multivariada
<b>GEE</b>	Equações de Estimativas Generalizadas

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	alfa, primeira letra do alfabeto grego
$\beta$	beta, segunda letra do alfabeto grego
$\gamma$	gama, terceira letra do alfabeto grego
$\omega$	ômega, última letra do alfabeto grego
$\pi$	pi
$\tau$	Tempo de resposta do sistema
$\theta$	Ângulo de incidência do raio luminoso

berkya em  
meuse  
diss? .  
Este jolando  
muitos!

---

Da forma como instruíram não parei de trabalhar.  
não fico com o que é "SEU" e o que  
é seu.

Vaje n° 9 Pessoal  
verifique essa versão de literatura.

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO .....	9
2	MODELOS MULTIVARIADOS DE COVARIÂNCIA LINEAR GENERALIZADA .....	12
2.1	GLM .....	12
2.2	CGLM.....	13
2.3	MCGLM .....	14
2.3.1	Estimação e inferência .....	14
3	TESTE WALD NO CONTEXTO DOS MCGLM. ....	17
3.1	O TESTE WALD .....	17
3.2	ADAPTAÇÃO DO TESTE PARA OS MCGLM. ....	17
3.3	EXEMPLOS DE HIPÓTESES .....	19
3.3.1	Exemplo 1. ....	19
3.3.2	Exemplo 2. ....	20
3.3.3	Exemplo 3. ....	21
3.4	ANOVA E MANOVA VIA TESTE WALD. ....	21
4	FUNÇÕES IMPLEMENTADAS .....	23
5	ESTUDO DE SIMULAÇÃO .....	28
	REFERÊNCIAS .....	29

Não entendi qual a ideia desse manuscrito  
de minuscule. Este estranho assim.

Vaje n° 10 permito.

- Estranho essas opções as rigas nos fólios de cíptulos.
- Cíptulos de nome Lobs dos métodos.



O que faz vc pensar que CD vem ganhando destaque?

## 1 INTRODUÇÃO

Podemos entender como Ciéncia de Dados o estudo sistemático de conjuntos de dados com o objetivo de gerar conhecimento sobre determinado assunto. Em suma, o objetivo da Ciéncia de Dados é extrair informação. Seu processo é caracterizado por etapas como a definição do problema, planejamento do estudo, coleta e análise dos dados e, por fim, a interpretação dos resultados.

Trata-se de um campo de estudo extremamente interdisciplinar que envolve técnicas de áreas como Estatística, Ciéncia da Computação e Matemática. É uma área que vem ganhando destaque nos últimos anos devido a fatores tais como a popularização do uso de dados nas tomadas de decisão em diversos cenários, difusão do uso de grandes bancos de dados, desenvolvimento e propagação de técnicas modernas e eficientes de análise, sem mencionar o desenvolvimento computacional que permitiu a implementação de técnicas mais complexas para solução de problemas e também que mais pessoas tivessem acesso às técnicas e ferramentas necessárias para se analisar dados.

Alguns dos campos de interesse na Ciéncia de Dados são: métodos de amostragem, mineração de dados, bancos de dados, técnicas de análise exploratória, probabilidade, inferênciaria, otimização, infraestrutura computacional, plataformas de Big Data, modelos estatísticos, dentre outros.

No contexto de modelos estatísticos, existem os chamados modelos de regressão, dentre os quais podemos citar: os modelos lineares, lineares generalizados, aditivos generalizados, de efeitos aleatórios, aditivos generalizados para locação, escala e forma e ainda os multivariados.

Os modelos de regressão são indicados a problemas nos quais temos interesse em verificar a associação entre uma ou mais variáveis resposta e um conjunto de variáveis explicativas; podemos ainda, além de verificar associação, utilizar o modelo para realizar predições para uma população.

Nos casos univariados mais gerais, estes modelos associam uma única variável resposta, também chamada de variável dependente, a uma ou mais variáveis explicativas, conhecidas como variáveis independentes, covariáveis ou preditoras.

De forma geral, um modelo de regressão é uma expressão matemática que relaciona a média da variável resposta às variáveis preditoras, em que a variável resposta segue uma distribuição de probabilidade condicional às covariáveis e a média é descrita por um preditor linear.

O caso mais conhecido é o modelo linear normal, no qual um dos pressupostos é de que a variável resposta, condicional às variáveis explicativas, segue distribuição Normal. Todavia, não são raras as situações em que a suposição de normalidade não é atendida. Uma alternativa, por muito tempo adotada, foi buscar uma transformação da variável resposta a fim de atender

Dá um maior alcance  
nos próximos!

Referência?

*bra digh  
meio de justificac  
Tenho de dizer  
de parcerias  
de somente  
Nível maior  
Isso melhora  
a fluidez de  
fundo.  
Essa parceria  
esta muito  
genérica.  
Explique bem  
mais  
de conteúdo  
histórico,*

*Pode falar, mas meia fala é  
uma ligação menor.*

*Cabeça  
PP1  
Já  
Pode  
explique  
melhor  
qual é o*

*que é  
explique  
melhor  
qual é o*

os pressupostos do modelo, tal como a família de transformações Box-Cox (Box e Cox, 1964). Contudo, este tipo de solução leva a dificuldades na interpretação dos resultados.

Neste contexto, a proposta de maior renome para contornar tais restrições foram os Modelos Lineares Generalizados (GLM) propostos por Nelder e Wedderburn (1972). Essa classe de modelos permitiu a flexibilização da distribuição da variável resposta de tal modo que esta pertence à família exponencial de distribuições. Em meio aos casos especiais de distribuições possíveis nesta classe de modelos estão a Bernoulli, Binomial, Poisson, Normal, Gama, Normal inversa, entre outras. Trata-se portanto, de uma classe de modelos de regressão univariados para dados de diferentes naturezas, tais como: dados contínuos simétricos e assimétricos, contagens, proporções, assim por diante. Tais características tornam esta classe uma flexível ferramenta de modelagem aplicável a diversos tipos de problema.

*ESSA É  
Já é  
família  
exponencial.*

Embora as técnicas citadas sejam úteis, há casos em que são coletadas mais de uma resposta por unidade experimental e há o interesse de modelá-las em função de um conjunto de variáveis explicativas. Para problemas com essa estrutura, uma alternativa são os Modelos Lineares Multivariados, nos quais associa-se um conjunto de respostas a uma ou mais covariáveis. Porém, por maior que seja seu potencial de aplicação, essa classe apresenta limitações como a necessidade de normalidade multivariada, homogeneidade das matrizes de variâncias e covariâncias, além de independência entre as observações.

*Aqui é bom ter referências que discutem esse problema.*

Uma alternativa para solucionar tais limitações são os Modelos Multivariados de Covariância Linear Generalizada (McGLM) propostos por Bonat e Jørgensen (2016). Essa classe permite lidar com múltiplas respostas de diferentes naturezas e, de alguma forma, correlacionadas. Além disso, não há nesta classe suposições quanto à independência entre as observações da amostra, pois a correlação entre observações pode ser modelada por um preditor linear matricial que envolve matrizes conhecidas.

*Juntas.*

*Só falso isso!*

De forma geral, o McGLM é uma estrutura para modelagem de múltiplas respostas, de diferentes naturezas, em que não há necessidade de observações independentes. Estas características tornam o McGLM uma classe flexível ao ponto de ser possível chegar a extensões multivariadas para modelos de medidas repetidas, séries temporais, dados longitudinais, espaciais e espaço-temporais.

Quando trabalhamos com modelos de regressão, por diversas vezes há o interesse em avaliar os parâmetros do modelo. Isto é, verificar se os valores que associam as variáveis explicativas às variáveis respostas são iguais a determinados valores de interesse. Isto é feito através dos chamados testes de hipótese.

Em geral, existe o interesse em avaliar se há evidência suficiente para afirmar que o parâmetro que associa a variável explicativa à variável resposta é igual a 0, pois, caso esta afirmação seja verdadeira, podemos concluir que a variável explicativa não está associada à variável resposta. Contudo, através dos testes de hipótese podemos avaliar outros valores diferentes de 0.

*Eu entendo o que vc só dizendo, mas acho que preciso understande mais e  
dilidir. Penso que a audiência pode não saber o que é um parâmetro.  
Tem que dar e não só dizer o que é e de onde vem.*

*Qq. vc sabe que é igual a 0? Dizem elas que livros que esse texto represente um objetivo módio.*

11 *referencia*

Para o caso dos modelos lineares tradicionais existem técnicas como a Análise de Variância (ANOVA), na qual o objetivo é analisar o efeito de cada uma das variáveis explicativas, isto é, avaliar se a retirada de cada variável gera perda ao modelo ajustado. Em outras palavras, na Análise de Variância realizamos sucessivos testes de hipótese para verificar se o parâmetro que associa a variável explicativa à variável resposta é igual a 0.

*Técnica* Quando se está na classe de modelos multivariados para dados gaussianos, extende-se o conceito de Análise de Variância (ANOVA) para a Análise de Variância Multivariada (Smith et al., 1962), a MANOVA. E dentre os testes de hipótese multivariados já discutidos na literatura, destacam-se o  $\lambda$  de Wilk's (Wilks, 1932), traço de Hotelling-Lawley (Lawley, 1938), (Hotelling, 1951), traço de Pillai (Pillai et al., 1955) e maior raiz de Roy (Roy, 1953).

*O objetivo* No entanto, considerando o cenário com múltiplas respostas não gaussianas, são escassas as discussões na literatura a respeito de testes de hipótese sobre os parâmetros do modelo. Deste modo, nosso objetivo geral é o desenvolvimento destes testes de hipótese para os Modelos Multivariados de Covariância Linear Generalizada (McGLM) por se tratar de uma classe de modelos flexível e com alto poder de aplicação a problemas práticos em que se fazem necessários tais testes para avaliação do modelo.

Portanto, este trabalho tem os seguintes objetivos específicos:

1. Adaptar o teste Wald para realização de testes de hipótese gerais sobre parâmetros de Modelos Multivariados de Covariância Linear Generalizada (McGLM).
2. Implementar funções para efetuar tais testes, bem como funções para efetuar Análises de Variância e Análises de Variância Multivariadas para os McGLM.
3. Demonstrar as propriedades e comportamento dos testes propostos com base em estudos de simulação.
4. Demonstrar o potencial de aplicação das metodologias discutidas com base na aplicação a conjuntos de dados reais.

*Não há nada que indique que é uma qualificação.* Este trabalho está organizado em sete capítulos: na atual seção foi exposto o tema de forma a enfatizar as características dos modelos lineares e testes de hipóteses. O Capítulo 2 é dedicado à revisão bibliográfica da estrutura dos McGLM. No Capítulo 3 é apresentado e discutido o teste Wald no contexto dos McGLM. No capítulo 4 são mostradas as funções implementadas. O Capítulo 5 apresenta o escopo do estudo de simulação para verificar as principais propriedades dos testes propostos. O Capítulo 6 apresenta os conjuntos de dados que serão usados no trabalho com o objetivo de discutir a aplicação do método a conjuntos de dados reais. E, por fim, no Capítulo 7 são apresentados os comentários finais e são discutidos os resultados esperados do estudo.

*esquifis não descrevem mais detalhados do gerd. Se o parágrafo ficar grande coloco e mais importante em um parágrafo menor e o restante no próximo.*

Bem aqui no começo é bom vc dizer que vai precisar se atentar a seguir na explicação de Bonat and Jørgensen (2016). Em vc verá tudo igual ao que pode parecer plágio. Aí sim, fica claro que vc está errado e arrependendo aqui por ter feito isso. Jariel<sup>12</sup> e Lutosa.

não vejo necessidade de mesclar matrizes.

## 2 MODELOS MULTIVARIADOS DE COVARIÂNCIA LINEAR GENERALIZADA

Infelizmente explicitamente que só podem lidar com uma resposta.

Os Modelos Lineares Generalizados (GLM), propostos por Nelder e Wedderburn (1972), são uma forma de modelagem univariada para dados de diferentes naturezas, tais como respostas contínuas, binárias e contagens. Tais características tornam essa classe de modelos uma flexível ferramenta de modelagem aplicável a diversos tipos de problema. Contudo, por mais flexível e discutida na literatura, essa classe apresenta duas principais restrições:

- ma verdade não  
é menor 3-
- 1. A incapacidade de lidar com observações dependentes.
  - 2. E/ou a incapacidade de lidar com múltiplas respostas simultaneamente.

J - fatores distribuídos  
2 - Independência  
3 - Uma resposta.

Com o objetivo de contornar estas restrições, foi proposta por Bonat e Jørgensen (2016), uma estrutura geral para análise de dados não gaussianos com múltiplas respostas em que não se faz suposições quanto à independência das observações: os chamados Modelos Multivariados de Covariância Linear Generalizada (McGLM).

Vamos discutir os McGLM como uma extensão dos GLM. Vale ressaltar que é usada uma especificação menos usual de um Modelo Linear Generalizado, porém trata-se de uma notação mais conveniente para chegar à uma especificação melhor construída de um Modelo Multivariado de Covariância Linear Generalizada.

### 2.1 GLM nos fala em nível menor completo.

Seja  $Y$  um vetor  $N \times 1$  de valores observados da variável resposta,  $X$  uma matriz de delineamento  $N \times k$  e  $\beta$  um vetor de parâmetros de regressão  $k \times 1$ , um GLM pode ser descrito da forma

$$\begin{aligned} E(Y) &= \mu = g^{-1}(X\beta), \\ \text{Var}(Y) &= \Sigma = V(\mu; p)^{1/2} (\tau_0 I) V(\mu; p)^{1/2}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

em que  $g(\cdot)$  é a função de ligação,  $V(\mu; p)$  é uma matriz diagonal em que as entradas principais são dadas pela função de variância aplicada ao vetor  $\mu$ ,  $p$  é o parâmetro de potência,  $\tau_0$  o parâmetro de dispersão e  $I$  é a matriz identidade de ordem  $N \times N$ .

Os GLM fazem uso de apenas duas funções, a função de variância e de ligação. Diferentes escolhas de funções de variância implicam em diferentes suposições a respeito da distribuição da variável resposta. Dentre as funções de variância conhecidas, podemos citar:

1. A função de variância potência, que caracteriza a família Tweedie de distribuições, em que a função de variância é dada por  $\vartheta(\mu; p) = \mu^p$ , na qual destacam-se a distribuições: Normal ( $p = 0$ ), Poisson ( $p = 1$ ), gama ( $p = 2$ ) e Normal inversa ( $p = 3$ ). Para mais informações consulte Jørgensen (1987) e Jørgensen (1997).

Isso é GLM padrão.  
A família Tweedie é mais geral.

*Desta forma que é mais i de variância med. | Taisvez não falar que é uma função que caracteriza o relacionamento entre média e variância*

2. A função de dispersão Poisson-Tweedie, a qual caracteriza a família Poisson-Tweedie de distribuições, que visa contornar a inflexibilidade da utilização da função de variância potência para respostas discretas. A família Poisson-Tweedie tem função de dispersão dada por  $\vartheta(\mu; p) = \mu + \mu^p$  e tem como casos particulares os mais famosos modelos para dados de contagem: Hermite ( $p = 0$ ), Neyman tipo A ( $p = 1$ ), binomial negativa ( $p = 2$ ) e Poisson-inversa gaussiana ( $p = 3$ ) (Jørgensen e Kokonendji, 2015).

3. A função de variância binomial, dada por  $\vartheta(\mu) = \mu(1 - \mu)$ , utilizada quando a variável resposta é binária, restrita a um intervalo ou quando tem-se o número de sucessos em um número de tentativas.

Lembre-se que o GLM é uma classe de modelos de regressão univariados em que um dos pressupostos é a independência entre as observações. Esta independência é especificada na matriz identidade no centro da equação que define a matriz de variância e covariância. Podemos imaginar que, substituindo esta matriz identidade por uma matriz qualquer que reflita a relação entre os indivíduos da amostra teremos uma extensão do Modelo Linear Generalizado para observações dependentes. É justamente essa a ideia dos Modelos de Covariância Linear Generalizada, o cGLM.

## 2.2 CGLM

Os cGLM são uma alternativa para problemas em que a suposição de independência entre as observações não é atendida. Neste caso, a solução proposta é substituir a matriz identidade  $I$  da equação que descreve a matriz de variância e covariância por uma matriz não diagonal  $\Omega(\tau)$  que descreva adequadamente a estrutura de correlação entre as observações. Trata-se de uma ideia similar à proposta de Liang e Zeger (1986) nos modelos GEE (Equações de Estimativas Generalizadas), em que utiliza-se uma matriz de correlação de trabalho para considerar a dependência entre as observações. A matriz  $\Omega(\tau)$  é descrita como uma combinação de matrizes conhecidas tal como nas propostas de Anderson et al. (1973) e Pourahmadi (2000), podendo ser escrita da forma

$$h\{\Omega(\tau)\} = \tau_0 Z_0 + \dots + \tau_D Z_D, \quad (2.2)$$

em que  $h(\cdot)$  é a função de ligação de covariância,  $Z_d$  com  $d = 0, \dots, D$  são matrizes que representam a estrutura de covariância presente nos dados e  $\tau = (\tau_0, \dots, \tau_D)$  é um vetor  $(D+1) \times 1$  de parâmetros de dispersão. Tal estrutura pode ser vista como um análogo ao preditor linear para a média e foi nomeado como preditor linear matricial. A especificação da função de ligação de covariância é discutida por Pinheiro e Bates (1996). É possível selecionar combinações de matrizes para se obter os mais conhecidos modelos da literatura para dados longitudinais, séries temporais, dados espaciais e espaço-temporais. Maiores detalhes são discutidos por Demidenko (2013).

Eq. (22)

Com isso, substituindo a matriz identidade pela equação do preditor linear matricial, temos uma classe com toda a flexibilidade dos GLM, porém contornando a restrição da independência entre as observações desde que o preditor linear matricial seja adequadamente especificado.<sup>3</sup>

Deste modo, é contornada a primeira restrição dos GLM. A segunda restrição diz respeito às múltiplas respostas e, resolvendo esta restrição, chegamos ao McGLM.

### 2.3 MCGLM → Entendendo

O McGLM pode ser entendido como uma extensão multivariada do cGLM e contorna as duas principais restrições presentes nos GLM, pois além de permitir a modelagem de dados com estrutura de covariância, permite modelar múltiplas respostas.

Considere  $Y_{N \times R} = \{Y_1, \dots, Y_R\}$  uma matriz de variáveis resposta e  $M_{N \times R} = \{\mu_1, \dots, \mu_R\}$  uma matriz de valores esperados. Cada uma das variáveis resposta tem sua própria matriz de variância e covariância, responsável por modelar a covariância dentro de cada resposta, sendo expressa por

$$\Sigma_r = V_r(\mu_r; p)^{1/2} \Omega_r(\tau) V_r(\mu_r; p)^{1/2}. \quad (2.3)$$

Além disso, é necessária uma matriz de correlação  $\Sigma_b$ , de ordem  $R \times R$ , que descreve a correlação entre as variáveis resposta. Para a especificação da matriz de variância e covariância conjunta é utilizado o produto Kronecker generalizado, proposto por Martinez-Beneito (2013).

Finalmente, um MCGLM é descrito como

$$\begin{aligned} E(Y) &= M = \{g_1^{-1}(X_1\beta_1), \dots, g_R^{-1}(X_R\beta_R)\} \\ \text{Var}(Y) &= C = \Sigma_R \stackrel{G}{\otimes} \Sigma_b, \end{aligned} \quad (2.4)$$

em que  $\Sigma_R \stackrel{G}{\otimes} \Sigma_b = \text{Bdiag}(\tilde{\Sigma}_1, \dots, \tilde{\Sigma}_R)(\Sigma_b \otimes I)\text{Bdiag}(\tilde{\Sigma}_1^\top, \dots, \tilde{\Sigma}_R^\top)$  é o produto generalizado de Kronecker, a matriz  $\tilde{\Sigma}_r$  denota a matriz triangular inferior da decomposição de Cholesky da matriz  $\Sigma_r$ , o operador  $\text{Bdiag}$  denota a matriz bloco-diagonal e  $I$  uma matriz identidade  $N \times N$ .

Toda metodologia do McGLM está implementada no pacote *mcglm* (Bonat, 2018) do software estatístico R (R Core Team, 2020).

#### 2.3.1 Estimação e inferência

Os McGLMs são ajustados baseados no método de funções de estimação descritos em detalhes por Bonat e Jørgensen (2016) e Jørgensen e Knudsen (2004). Nesta seção é apresentada uma visão geral do algoritmo e da distribuição assintótica dos estimadores baseados em funções de estimação.

As suposições de segundo momento dos McGLM permitem a divisão dos parâmetros em dois conjuntos:  $\theta = (\beta^\top, \lambda^\top)^\top$ . Desta forma,  $\beta = (\beta_1^\top, \dots, \beta_R^\top)^\top$  é um vetor  $K \times 1$  de

parâmetros de regressão e  $\lambda = (\rho_1, \dots, \rho_{R(R-1)/2}, p_1, \dots, p_R, \tau_1^\top, \dots, \tau_R^\top)^\top$  é um vetor  $Q \times 1$  de parâmetros de dispersão. Além disso,  $\mathcal{Y} = (Y_1^\top, \dots, Y_R^\top)^\top$  denota o vetor empilhado de ordem  $NR \times 1$  da matriz de variáveis resposta  $Y_{N \times R}$  e  $\mathcal{M} = (\mu_1^\top, \dots, \mu_R^\top)^\top$  denota o vetor empilhado de ordem  $NR \times 1$  da matriz de valores esperados  $M_{N \times R}$ .

Para estimação dos parâmetros de regressão é utilizada a função quasi-score (Liang e Zeger, 1986), representada por

$$\psi_\beta(\beta, \lambda) = \mathbf{D}^\top \mathbf{C}^{-1} (\mathcal{Y} - \mathcal{M}), \quad (2.5)$$

em que  $\mathbf{D} = \nabla_\beta \mathcal{M}$  é uma matriz  $NR \times K$ , e  $\nabla_\beta$  denota o operador gradiente. Utilizando a função quasi-score a matriz  $K \times K$  de sensitividade de  $\psi_\beta$  é dada por

$$S_\beta = E(\nabla_{\beta\psi\beta}) = -\mathbf{D}^\top \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}, \quad (2.6)$$

enquanto que a matriz  $K \times K$  de variabilidade de  $\psi_\beta$  é escrita como

$$V_\beta = VAR(\psi_\beta) = \mathbf{D}^\top \mathbf{C}^{-1} \mathbf{D}. \quad (2.7)$$

Para os parâmetros de dispersão é utilizada a função de estimação de Pearson, definida da forma

$$\psi_{\lambda_i}(\beta, \lambda) = \text{tr}(W_{\lambda_i}(\mathbf{r}^\top \mathbf{r} - \mathbf{C})), \quad i = 1, \dots, Q, \quad (2.8)$$

em que  $W_{\lambda_i} = -\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \lambda_i}$  e  $\mathbf{r} = (\mathcal{Y} - \mathcal{M})$ . A entrada  $(i, j)$  da matriz de sensitividade  $Q \times Q$  de  $\psi_\lambda$  é dada por

$$S_{\lambda_{ij}} = E \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \psi_{\lambda_j} \right) = -\text{tr}(W_{\lambda_i} \mathbf{C} W_{\lambda_j} \mathbf{C}). \quad (2.9)$$

Já a entrada  $(i, j)$  da matriz de variabilidade  $Q \times Q$  de  $\psi_\lambda$  é definida por

$$V_{\lambda_{ij}} = Cov \left( \psi_{\lambda_i}, \psi_{\lambda_j} \right) = 2\text{tr}(W_{\lambda_i} \mathbf{C} W_{\lambda_j} \mathbf{C}) + \sum_{l=1}^{NR} k_l^{(4)} (W_{\lambda_i})_{ll} (W_{\lambda_j})_{ll}, \quad (2.10)$$

em que  $k_l^{(4)}$  denota a quarta cumulante de  $\mathcal{Y}_l$ . No processo de estimação dos McGLM são usadas ~~são usadas~~  
~~versões~~ versões empíricas.

Para se levar em conta a covariância entre os vetores  $\beta$  e  $\lambda$ , Bonat e Jørgensen (2016) obtiveram as matrizes de sensitividade e variabilidade cruzadas, denotadas por  $S_{\lambda\beta}$ ,  $S_{\beta\lambda}$  e  $V_{\lambda\beta}$ , mais detalhes em Bonat e Jørgensen (2016). As matrizes de sensitividade e variabilidade conjuntas de  $\psi_\beta$  e  $\psi_\lambda$  são denotados por

$$S_\theta = \begin{bmatrix} S_\beta & S_{\beta\lambda} \\ S_{\lambda\beta} & S_\lambda \end{bmatrix} \text{ e } V_\theta = \begin{bmatrix} V_\beta & V_{\lambda\beta}^\top \\ V_{\lambda\beta} & V_\lambda \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Eq. (2.5) <sup>1</sup>  
Eq. <sup>16</sup> 2.8

Seja  $\hat{\theta} = (\hat{\beta}^\top, \hat{\lambda}^\top)^\top$  o estimador baseado em funções de estimação de  $\theta$ . Então, a distribuição assintótica de  $\hat{\theta}$  é

$$\hat{\theta} \sim N(\theta, J_\theta^{-1}), \quad (2.12)$$

em que  $J_\theta^{-1}$  é a inversa da matriz de informação de Godambe, dada por  $J_\theta^{-1} = S_\theta^{-1} V_\theta S_\theta^{-\top}$ , em que  $S_\theta^{-\top} = (S_\theta^{-1})^\top$ .

Para resolver o sistema de equações  $\psi_\beta = 0$  e  $\psi_\lambda = 0$  faz-se uso do algoritmo Chaser modificado, proposto por Jørgensen e Knudsen (2004), que fica definido como

$$\begin{aligned}\beta^{(i+1)} &= \beta^{(i)} - S_\beta^{-1} \psi \beta(\beta^{(i)}, \lambda^{(i)}), \\ \lambda^{(i+1)} &= \lambda^{(i)} \alpha S_\lambda^{-1} \psi \lambda(\beta^{(i+1)}, \lambda^{(i)}).\end{aligned} \quad (2.13)$$

- Melhor dizer o momento da o passo aqui!
- Vc numero todos os zeros mas não vê nenhuma.
- só numero o que for elas!
- \* Tem vários lugares que vc precisa estar engajado para de qual equação está falando.
- \* Deve dizer que este capítulo é uma revisão e só é importante ler essa revisão aqui!

Aqui só a sua contribuição! mas não só elas.

Dá pra que aqui vc deverei apresentar uma revisão sobre Te-H e depois

### 3 TESTE WALD NO CONTEXTO DOS MCGLM

Já sei e fico com:

#### 3.1 O TESTE WALD

Está muito genérico - Vc passou a ideia mas  
meu formalizar.

O teste Wald é um teste de hipóteses amplamente difundido para análises de Modelos Lineares e Modelos Lineares Generalizados para verificar suposições sobre os parâmetros do modelo, isto é, verificar se a estimativa do parâmetro é ou não estatisticamente igual a um valor qualquer.

A grosso modo, é um teste que avalia a distância entre a estimativa do parâmetro e o valor postulado sob a hipótese nula. Esta diferença é ainda ponderada por uma medida de precisão da estimativa do parâmetro e, quanto mais distante de 0 for o valor da distância ponderada, menor é a chance da hipótese de igualdade ser verdadeira, ou seja, do valor postulado ser igual ao valor estimado.

Além destes elementos o teste pressupõe que os estimadores dos parâmetros do modelo sigam distribuição assintótica Normal. Para avaliação da estatística de teste e verificação de significância estatística utiliza-se distribuição assintótica Qui-quadrado ( $\chi^2$ ).

Quando trabalhamos com modelos de regressão, estes tipos de teste são extremamente úteis quando usados para avaliar o efeito das variáveis explicativas sobre a(s) variável(is) resposta do modelo. Por exemplo: se ajustarmos um modelo com uma variável resposta e uma variável explicativa numérica, vamos estimar um único parâmetro de regressão; este parâmetro associa a variável explicativa à variável resposta. Através de um teste de hipótese podemos avaliar o efeito desta variável explicativa, basta verificar se existe evidência que permita afirmar que o valor que associa as variáveis é igual a 0.

Existe também a possibilidade de formular hipóteses para mais de um parâmetro de regressão e ainda testar valores diferentes de 0, tudo depende do objetivo do estudo e do interesse do pesquisador.

#### 3.2 ADAPTAÇÃO DO TESTE PARA OS MCGLM

Quando trabalhamos na classe dos McGLM estimamos parâmetros de regressão, dispersão e potência. Os parâmetros de regressão são aqueles que associam a variável explicativa à variável resposta. Os parâmetros de dispersão estão associados ao preditor matricial e, em geral, cada matriz do preditor matricial diz respeito a uma estrutura de correlação existente entre as unidades amostrais do conjunto de dados, deste modo, os parâmetros de dispersão podem ser usados para avaliar se existe efeito da relação entre as unidades amostrais tal como foi especificado pelo preditor matricial. Já os parâmetros de potência nos fornecem um indicativo de qual distribuição de probabilidade melhor se adequa ao problema.

Lembre-se: Nós só temos duas idéias por vez!

Nossa adaptação do teste Wald tradicional visa uma forma de formular e testar hipóteses para todos esses parâmetros estimados na classe dos McGLM para responder questões comuns de analistas no contexto de modelagem, como: quais variáveis influenciam a resposta? Existe efeito da estrutura de correlação entre indivíduos no meu estudo? Qual a distribuição de probabilidade que melhor se adequa ao meu problema? Dentre outras.

Vale ressaltar que por si só, o McGLM já contorna importantes restrições encontradas nas classes clássicas de modelos, como a impossibilidade de modelar múltiplas respostas e modelar a dependência entre indivíduos. Nossa contribuição vai no sentido de fornecer ferramentas para uma melhor interpretação dos parâmetros estimados.

As hipóteses a serem testadas podem ser escritas como:

$$H_0 : L\theta_{\beta,\tau,p} = c \text{ vs } H_1 : L\theta_{\beta,\tau,p} \neq c, \quad (3.1)$$

Em que  $L$  é a matriz de especificação das hipóteses a serem testadas, tem dimensão  $s \times h$ ;  $\theta_{\beta,\tau,p}$  é o vetor de dimensão  $h \times 1$  de parâmetros de regressão, dispersão e potência do modelo;  $c$  é um vetor de dimensão  $s \times 1$  com os valores sob hipótese nula.

A generalização da estatística de teste do teste Wald para verificar a validade de uma hipótese sobre parâmetros de um McGLM é dada por:

$$W = (L\hat{\theta}_{\beta,\tau,p} - c)^T (L J_{\beta,\tau,p}^{-1} L^T)^{-1} (L\hat{\theta}_{\beta,\tau,p} - c),$$

Em que  $L$  é a mesma matriz da especificação das hipóteses a serem testadas, tem dimensão  $s \times h$ ;  $\hat{\theta}_{\beta,\tau,p}$  é o vetor de dimensão  $h \times 1$  com todas as estimativas dos parâmetros de regressão, dispersão e potência do modelo;  $c$  é um vetor de dimensão  $s \times 1$  com os valores sob hipótese nula; e  $J_{\beta,\tau,p}^{-1}$  é a inversa da matriz de informação de Godambe desconsiderando os parâmetros de correlação, de dimensão  $h \times h$ .

Cada coluna da matriz  $L$  corresponde a um dos  $h$  parâmetros do modelo e cada linha a uma hipótese. Sua construção consiste basicamente em preencher a matriz com 0, 1 e eventualmente -1 de tal modo que o produto  $L\theta_{\beta,\tau,p}$  represente corretamente a hipótese de interesse.

A correta especificação da matriz permite testar qualquer parâmetro individualmente ou até mesmo formular hipóteses para diversos parâmetros simultaneamente, sejam eles de regressão, dispersão ou potência. Independentemente do número de parâmetros testados, a estatística de teste  $W$  é um único valor que segue assintoticamente distribuição  $\chi^2$  com graus de liberdade dados pelo número de parâmetros testados, isto é, o número de linhas da matriz  $L$ , denotado por  $s$ .

*Precisa contextualizar melhor a construção do test. e dimensionar os vetores para serem influentes.*

- $\theta_{\beta,\tau,p}^T = [\beta_{10} \ \beta_{11} \ \beta_{20} \ \beta_{21} \ \tau_{11} \ \tau_{21}]$ .
  - $L = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ .
  - $c = [0]$ , é o valor da hipótese nula.

Note que o vetor  $\theta_{\beta,\tau,p}$  possui 6 elementos, consequentemente a matriz  $L$  contém 6 colunas (uma para cada elemento) e apenas uma linha, pois apenas um único parâmetro está sendo testado. Essa única linha é composta por zeros, exceto a coluna referente ao parâmetro de interesse que recebe 1. É simples verificar que o produto  $L\theta_{\beta,\tau,p}$  representa a hipótese de interesse inicialmente postulada. *Fale sobre a distribuição amostral do*

### 3.3.2 Exemplo 2 + Nome informado

Suponha Imagine agora que o interesse neste problema genérico não é mais testar o efeito da variável explicativa apenas em uma resposta. Suponha que o analista tem interesse em avaliar se existe evidência suficiente para afirmar que há efeito da variável explicativa  $x_1$  em ambas as respostas simultaneamente. Neste caso teremos que testar 2 parâmetros:  $\beta_{11}$ , que associa  $x_1$  à primeira resposta; e  $\beta_{21}$ , que associa  $x_1$  à segunda resposta. Podemos escrever a hipótese da seguinte forma:

$$H_0 : \beta_{r1} = 0 \text{ vs } H_1 : \beta_{r1} \neq 0, \quad (3.6)$$

g) h) de forma equivalente:

$$H_0 : \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vs } H_1 : \begin{pmatrix} \beta_{11} \\ \beta_{21} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

A hipótese pode ainda ser reescrita na notação conveniente para o teste Wald:

$$H_0 : L\theta_{\beta,\tau,p} = c \text{ vs } H_1 : L\theta_{\beta,\tau,p} \neq c \quad (3.7)$$

Em que:

- $\theta_{\beta,\tau,p}^T = [\beta_{10} \ \beta_{11} \ \beta_{20} \ \beta_{21} \ \tau_{11} \ \tau_{21}]$ .
  - $L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - $c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , é o valor da hipótese nula.

O vetor  $\theta_{\beta,\tau,p}$  mantém 6 elementos e a matriz  $L$  6 colunas. Neste caso estamos testando 2 parâmetros, portanto a matriz  $L$  possui 2 linhas. Novamente, essas linhas são composta por

Lembre-se V.A  $\hat{Y}^h$  máximos vols observado "y" mínimos.

19

### 3.3 EXEMPLOS DE HIPÓTESES

Em um contexto prático, um analista após a obtenção dos parâmetros do modelo pode estar interessado em 3 tipos de hipótese: a primeira delas diz respeito a quando o interesse está em avaliar se existe evidência que permita afirmar que apenas um único parâmetro é igual a um valor postulado; a segunda delas ocorre quando há interesse em avaliar se existe evidência para afirmar que mais de um parâmetro simultaneamente são iguais a um vetor de valores postulado; e a terceira hipótese diz respeito a situações em que o analista está interessado em saber se a diferença entre os efeitos de duas variáveis é igual a 0.

a situação Para fins de ilustração dos tipos de hipótese mencionadas, considere um problema qualquer em que deseja-se investigar se uma variável numérica  $x_1$  possui efeito sobre duas variáveis resposta, denotadas por  $y_1$  e  $y_2$ . Para tal tarefa coletou-se uma amostra com  $n$  indivíduos e para cada indivíduo observou-se o valor de  $x_1$ ,  $y_1$  e  $y_2$ . Com base nos dados coletados ajustou-se um modelo bivariado, com preditor dado por:

$$g_r(\mu_r) = \beta_{r0} + \beta_{r1}x_1, \quad (3.3)$$

Em que o índice  $r$  denota a variável resposta,  $r = 1, 2$ ;  $\beta_{r0}$  representa o intercepto;  $\beta_{r1}$  um parâmetro de regressão associado a uma variável  $x_1$ . Considere que cada resposta possui apenas um parâmetro de dispersão:  $\tau_{r0}$  e que os parâmetros de potência foram fixados. Portanto, trata-se de um problema em que há duas variáveis resposta e apenas uma variável explicativa. Como existe apenas um parâmetro de dispersão isso quer dizer que nossas unidades amostrais são independentes.

Neste cenário poderiam ser perguntas de interesse: será que a variável  $x_1$  tem efeito apenas sobre a primeira resposta? Ou apenas sobre a segunda resposta? Será que a variável  $x_1$  possui efeito sobre as duas respostas ao mesmo tempo? Será que o efeito da variável é o mesmo para ambas as respostas? Todas essas perguntas podem ser respondidas através de um teste de hipóteses sobre os parâmetros do modelo.

#### 3.3.1 Exemplo 1 *Di um nome informativo p/ o exemplo!*

Considere o primeiro tipo de hipótese: o analista deseja saber se existe efeito da variável  $x_1$  apenas na primeira resposta. A hipótese pode ser escrita da seguinte forma:

$$H_0 : \beta_{11} = 0 \text{ vs } H_1 : \beta_{11} \neq 0. \quad (3.4)$$

Esta mesma hipótese pode ser reescrita na notação mais conveniente para aplicação da estatística do teste Wald:

$$H_0 : L\theta_{\beta, \tau, p} = c \text{ vs } H_1 : L\theta_{\beta, \tau, p} \neq c, \quad (3.5)$$

Em que:

zeros, exceto nas colunas referentes ao parâmetro de interesse. É simples verificar que o produto  $L\theta_{\beta,\tau,p}$  representa a hipótese de interesse inicialmente postulada.

*Faz do distribuição amostral.*

### 3.3.3 Exemplo 3 *+ Nome informal*

Imagine agora que a hipótese de interesse não envolve testar se o valor do parâmetro é igual a um valor postulado mas sim verificar se, no caso deste problema genérico, o efeito da variável  $x_1$  é o mesmo independente da resposta. Nesta situação formularíamos uma hipótese de igualdade entre os parâmetros, ou em outros termos, se a diferença dos efeitos é nula:

$$H_0 : \beta_{11} - \beta_{21} = 0 \text{ vs } H_1 : \beta_{11} - \beta_{21} \neq 0. \quad (3.8)$$

Esta hipótese pode ser reescrita na seguinte notação:

$$H_0 : L\theta_{\beta,\tau,p} = c \text{ vs } H_1 : L\theta_{\beta,\tau,p} \neq c.$$

Em que:

- $\theta_{\beta,\tau,p}^T = [\beta_{10} \ \beta_{11} \ \beta_{20} \ \beta_{21} \ \tau_{11} \ \tau_{21}]$ .
  - $L = [0 \ 1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 0]$ .
  - $c = [0]$ , é o valor da hipótese nula.
- uma de linha*

Como existe apenas uma hipótese, a matriz  $L$  possui apenas uma linha. Para a matriz  $L$  ser corretamente especificada no caso de uma hipótese de igualdade precisamos colocar 1 na coluna referente a um parâmetro, e -1 na coluna referente ao outro parâmetro, de tal modo que o produto  $L\theta_{\beta,\tau,p}$  representa a hipótese de interesse inicialmente postulada.

É possível testar qualquer parâmetro individualmente, formular hipóteses para diversos parâmetros simultaneamente (sejam eles de regressão, dispersão, potência), formular hipóteses para combinações entre estes parâmetros e testar valores diferentes de zero. Como explicitado nos exemplos, basta uma correta especificação da matriz  $L$ . Independente do número de parâmetros testados, a estatística de teste  $W$  é um único valor que segue assintoticamente distribuição  $\chi^2$  em que os graus de liberdade são dados pelo número de hipóteses, isto é, o número de linhas da matriz  $L$ , denotado por  $s$ .

*Preciso em algum lugar discutir condição gl em resultados assintótico e discutir que o melhor se adaptar as condições.*

### 3.4 ANOVA E MANOVA VIA TESTE WALD

Quando trabalhamos com modelos univariados, uma das formas de avaliar a significância de cada uma das variáveis de uma forma procedural é através da análise de variância (ANOVA). Este método consiste em efetuar testes sucessivos impondo restrições ao modelo original. O objetivo é testar se a ausência de determinada variável gera perda ao modelo. Os resultados

*foi perde em que sentido?*

*Só que muito grande*

Aqui só falando vc das o conteúdo de conteúdos  
do tipo fatos - Fatos de dummy, tipos de contrastes etc.  
Bem jogar mais um bocado falar de ANOVA.

destes sucessivos testes são sumarizados numa tabela, o chamado quadro de análise de variância, que contém em cada linha: a variável, o valor de uma estatística de teste referente à hipótese de nulidade de todos os parâmetros associados à esta variável, os graus de liberdade desta hipótese, e um p-valor associado à hipótese testada naquela linha do quadro.

Trata-se de um interessante procedimento para avaliar a relevância de uma variável ao problema, contudo, cuidados devem ser tomados no que diz respeito à forma como o quadro foi elaborado. Como já mencionado, cada linha do quadro refere-se a uma hipótese e estas hipóteses podem ser formuladas de formas distintas. Formas conhecidas de se elaborar o quadro são as chamadas ANOVAs do tipo I, II e III. Esta nomenclatura vem do software estatístico SAS (Institute, 1985), contudo as implementações existentes em outros softwares que seguem esta nomenclatura não necessariamente correspondem ao que está implementado no SAS. No software R (R Core Team, 2020) as implementações dos diferentes tipos de análise de variância podem ser obtidas e usadas no pacote *car* (Fox e Weisberg, 2019). Em geral, recomenda-se ao usuário estar seguro de qual tipo de análise está sendo utilizada pois, caso contrário, interpretações equivocadas podem ser feitas.

*Isto não é só de conteúdo. Vc não só está estudando um manual!*

Testar se a ausência de determinada variável gera perda ao modelo quer dizer, em outros termos, realizar um teste para verificar a nulidade dos parâmetros que associam esta variável à resposta. Isto geralmente é feito através de uma sequência de testes de Razão de Verossimilhança, contudo é possível gerar quadros de Análise de Variância utilizando o teste Wald pois sempre estarão sendo comparados o modelo completo e o modelo sem determinada ou determinadas variáveis. Ou seja, no contexto dos McGLM basta então, para cada linha do quadro de Análise de Variância, especificar corretamente uma matriz  $L$  que represente de forma adequada a hipótese a ser testada.

Do mesmo modo que é feito para um modelo univariado, podemos chegar também a uma Análise de Variância Multivariada (MANOVA) realizando sucessivos testes do tipo Wald em que estamos interessados em avaliar o efeito de determinada variável em todas as respostas simultaneamente. Portanto, a pergunta que a ser respondida seria: esta variável tem efeito diferente de 0 para todas as respostas?

A MANOVA clássica (Smith et al., 1962) é um assunto com vasta discussão na literatura e possui diversas propostas com o objetivo de verificar a nulidade dos parâmetros de um modelo de regressão multivariado, como o lambda de Wilk's (Wilks, 1932), traço de Hotelling-Lawley (Lawley, 1938); (Hotelling, 1951), traço de Pillai (Pillai et al., 1955) e maior raiz de Roy (Roy, 1953). Tal como no caso univariado basta, para cada linha do quadro de Análise de Variância, especificar corretamente uma matriz  $L$  que represente de forma adequada a hipótese a ser testada.

*Aqui fiquei esperando mais?*

*Aquele passo de entender a ANOVA e/ou MANOVA no*  
*equação 3.2 usando módulo Kronecker é bem incluir*  
*os exemplos mostrando a matriz L. etc...*

Aqui tem um problema de escritor, pq vc está fazendo uma  
resenha de literatura já onde dividiu os resultados.  
Tive que reescrever a introdução da seção e ISSS.

23

#### 4 FUNÇÕES IMPLEMENTADAS

Ela é  
uma  
função

máis ligue para  
o que é o

No capítulo anterior vimos que podemos chegar a um teste de hipóteses sobre qualquer um dos parâmetros de um McGLM (Bonat e Jørgensen, 2016). Ou seja, somos capazes de gerar conhecimento sobre problemas práticos através do estudo das estimativas dos parâmetros de modelos de uma classe em que podemos lidar com múltiplas respostas, de diferentes naturezas, modelando também a correlação entre indivíduos da amostra. Deste modo um dos objetivos deste trabalho consiste em implementar tais testes no software R (R Core Team, 2020) com o objetivo de complementar as já possíveis análises permitidas pelo pacote *mcglm* (Bonat, 2018).

No que diz respeito à implementações do teste Wald em outros contextos no R, o pacote *lmttest* (Zeileis e Hothorn, 2002) possui uma função genérica para realizar testes de Wald para comparar modelos lineares e lineares generalizados aninhados. Já o pacote *survey* (Lumley, 2020); (Lumley, 2004); (Lumley, 2010) possui uma função que realiza teste de Wald que, por padrão, testa se todos os coeficientes associados a um determinado termo de regressão são zero, mas é possível especificar hipóteses com outros valores. O já mencionado pacote *car* (Fox e Weisberg, 2019) possui uma implementação para testar hipóteses lineares sobre parâmetros de modelos lineares, modelos lineares generalizados, modelos lineares multivariados, modelos de efeitos mistos, etc; nesta implementação o usuário tem total controle de que parâmetros testar e com quais valores confrontar na hipótese nula. Quanto às tabelas de análise de variância, o R possui a função *anova* no pacote padrão *stats* (R Core Team, 2020) aplicável a modelos lineares e lineares generalizados. Já o pacote *car* (Fox e Weisberg, 2019) possui uma função que retorna quadros de análise de variância dos tipos II e III para diversos modelos.

Contudo, quando se trata de Modelos Multivariados de Covariância Linear Generalizada ajustados no pacote *mcglm* (Bonat, 2018), não existem opções para realização de testes de hipóteses lineares gerais nem de análises de variância utilizando a estatística de Wald. Deste modo, baseando-nos nas funcionalidades do pacote *car* (Fox e Weisberg, 2019), implementamos funções que permitem a realização de análises de variância por variável resposta (ANOVA), bem como análises de variância multivariadas (MANOVA). Note que no caso da MANOVA os preditores devem ser iguais para todas as respostas sob análise. Foram implementadas também funções que geram quadros como os de análise de variância focados no preditor linear matricial, ou seja, quadros cujo objetivo é verificar a significância dos parâmetros de dispersão. Estas funções recebem como argumento apenas o objeto que armazena o modelo devidamente ajustado através da função *mcglm()* do pacote *mcglm*.

Por fim, foi implementada uma função para hipóteses lineares gerais especificadas pelo usuário, na qual é possível testar hipóteses sobre parâmetros de regressão, dispersão ou potência. Também é possível especificar hipóteses sobre múltiplos parâmetros e o vetor de valores da hipótese nula é definido pelo usuário. Esta função recebe como argumentos o modelo, um vetor

Essas funções são claras, não?

com os parâmetros que devem ser testados e o vetor com os valores sob hipótese nula. Com algum trabalho, através da função de hipóteses lineares gerais, é possível replicar os resultados obtidos pelas funções de análise de variância.

Todas as funções geram resultados mostrando graus de liberdade e p-valores baseados no teste Wald aplicado aos modelos multivariados de covariância linear generalizada (McGLM). Todas as funções implementadas podem ser acessadas em <https://github.com/lineu96/msc>. A Tabela 4.1 mostra os nomes e descrições das funções implementadas.

Função	Descrição
mc_linear_hypothesis()	Hipóteses lineares gerais especificadas pelo usuário
mc_anova_I()	ANOVA tipo I
mc_anova_II()	ANOVA tipo II
mc_anova_III()	ANOVA tipo III
mc_manova_I()	MANOVA tipo I
mc_manova_II()	MANOVA tipo II
mc_manova_III()	MANOVA tipo III
mc_anova_disp()	ANOVA tipo III para dispersão
mc_manova_disp()	MANOVA tipo III para dispersão

Tabela 4.1: Funções implementadas

A função `mc_linear_hypothesis()` é a implementação computacional em R do que foi exposto no Capítulo 3. É a função mais flexível que temos no conjunto de implementações. Com ela é possível especificar qualquer tipo de hipótese sobre parâmetros de regressão, dispersão ou potência de um modelo `mcglm`.

As funções `mc_anova_I()`, `mc_anova_II()` e `mc_anova_III()` são funções destinadas à avaliação dos parâmetros de regressão do modelo. Elas geram quadros de análise de variância por resposta para um modelo `mcglm`. Implementamos 3 tipos diferentes de análises de variância mas não necessariamente essas implementações apresentarão os mesmos resultados que as versões com nomenclatura similar destinadas a modelos univariados disponíveis em outras bibliotecas.

Para fins de ilustração dos testes feitos por cada tipo das análise de variância implementada, considere um modelo bivariado com preditor dado por:

$$g_r(\mu_r) = \beta_{r0} + \beta_{r1}x_1 + \beta_{r2}x_2 + \beta_{r3}x_1x_2. \quad (4.1)$$

Em que o índice  $r$  denota a variável resposta,  $r = 1, 2$ . Temos neste modo um intercepto para cada resposta:  $\beta_{10}$  para a primeira e  $\beta_{20}$  para a segunda; temos também três parâmetros de regressão para cada resposta:  $\beta_{11}$  é o efeito de  $x_1$  sobre a resposta 1,  $\beta_{21}$  é o efeito de  $x_1$  sobre a resposta 2;  $\beta_{12}$  é o efeito de  $x_2$  sobre a resposta 1,  $\beta_{22}$  é o efeito de  $x_2$  sobre a resposta 2; por fim,  $\beta_{13}$  representa o efeito da interação entre as variáveis  $x_1$  e  $x_2$  sobre a resposta 1 e  $\beta_{23}$  representa o efeito da interação entre as variáveis  $x_1$  e  $x_2$  sobre a resposta 2. Todas as funções de análise de variância neste contexto retornariam dois quadros, um para cada resposta.

Nossa implementação de análise de variância do tipo I (*mc\_anova\_I()*) realiza testes sobre os parâmetros de regressão de forma sequencial. Neste cenário, nossa função faria os seguintes testes para cada resposta:

1. Testa se todos os parâmetros são iguais a 0.
2. Testa se todos os parâmetros, exceto intercepto, são iguais a 0.
3. Testa se todos os parâmetros, exceto intercepto e os parâmetros referentes a  $x_1$ , são iguais a 0.
4. Testa se todos os parâmetros, exceto intercepto e os parâmetros referentes a  $x_1$  e  $x_2$ , são iguais a 0.

Cada um destes testes seria uma linha do quadro de análise de variância, e pode ser chamada de sequencial pois a cada linha é acrescentada uma variável. Em geral, justamente por esta sequencialidade, se torna difícil interpretar os efeitos das variáveis pela análise de variância do tipo I. Em contrapartida, as análises do tipo II e III testam hipóteses que são, geralmente de maior interesse ao analista. *em termos práticos*

Nossa análise de variância do tipo II (*mc\_anova\_II()*) efetua testes similares ao último teste da análise de variância sequencial. Em um modelo sem interação o que é feito é, em cada linha, testar o modelo completo contra o modelo sem uma variável. Deste modo se torna melhor interpretável o efeito daquela variável sobre o modelo completo, isto é, o impacto na qualidade do modelo caso retirássemos determinada variável.

Caso haja interações no modelo, é testado o modelo completo contra o modelo sem o efeito principal e qualquer efeito de interação que envolva a variável. Considerando o preditor exemplo, a análise de variância do tipo II faria os seguintes testes para cada resposta:

1. Testa se o intercepto é igual a 0.
2. Testa se os parâmetros referentes a  $x_1$  são iguais a 0. Ou seja, é avaliado o impacto da retirada de  $x_1$  do modelo. Neste caso retira-se a interação pois nela há  $x_1$ .
3. Testa se os parâmetros referentes a  $x_2$  são iguais a 0. Ou seja, é avaliado o impacto da retirada de  $x_2$  do modelo. Neste caso retira-se a interação pois nela há  $x_2$ .
4. Testa se o efeito de interação é 0.

Note que nas linhas em que se busca entender o efeito de  $x_1$  e  $x_2$  a interação também é avaliada, pois retira-se do modelo todos os parâmetros que envolvem aquela variável.

Na análise de variância do tipo II são feitos testes comparando o modelo completo contra o modelo sem todos os parâmetros que envolvem determinada variável (sejam efeitos principais ou interações). Já nossa análise de variância do tipo III (*mc\_anova\_III()*) considera

o modelo completo contra o modelo sem determinada variável, seja ela efeito principal ou de interação. Deste modo, cuidados devem ser tomados nas conclusões pois uma variável não ter efeito constatado como efeito principal não quer dizer que não haverá efeito de interação.

Considerando o preditor exemplo, a análise de variância do tipo III faria os seguintes testes para cada resposta:

1. Testa se o intercepto é igual a 0.
2. Testa se os parâmetros de efeito principal referentes a  $x_1$  são iguais a 0. Ou seja, é avaliado o impacto da retirada de  $x_1$  nos efeitos principais do modelo. Neste caso, diferente do tipo II, nada se supõe a respeito do parâmetro de interação, por mais que envolva  $x_1$ .
3. Testa se os parâmetros de efeito principal referentes a  $x_2$  são iguais a 0. Ou seja, é avaliado o impacto da retirada de  $x_2$  nos efeitos principais do modelo. Novamente, diferente do tipo II, nada se supõe a respeito do parâmetro de interação, por mais que envolva  $x_2$ .
4. Testa se o efeito de interação é 0.

Note que nas linhas em que se testa o efeito de  $x_1$  e  $x_2$  mantém-se o efeito da interação, diferentemente do que é feito na análise de variância do tipo II.

É importante notar que, que as análises de variância do tipo II e III tal como foram implementadas nesse trabalho geram os mesmos resultados quando aplicadas a modelos sem efeitos de interação. Além disso, o *mcglm* ajusta modelos com múltiplas respostas; deste modo, para cada resposta seria gerado um quadro de análise de variância.

As funções *mc\_manova\_I()*, *mc\_manova\_II()* e *mc\_manova\_III()* também são funções destinadas à avaliação dos parâmetros de regressão do modelo. Elas geram quadros de análise de variância multivariada para um modelo *mcglm*.

Estas funções são generalizações das funções *mc\_anova\_I()*, *mc\_anova\_II()* e *mc\_anova\_III()*. Enquanto as funções de análise de variância simples visam avaliar o efeito das variáveis para cada resposta, as multivariadas visam avaliar o efeito das variáveis explicativas em todas as variáveis resposta simultaneamente.

Deste modo, em nosso exemplo, as funções de análise de variância univariadas retornariam um quadro para cada uma das respostas avaliando o efeito das variáveis para cada uma delas. Já as funções de análise de variância multivariadas retornariam um único quadro, em que avalia-se o efeito das variáveis em todas as respostas ao mesmo tempo. A sequência de testes feitos a cada linha do quadro são os mesmos mostrados para as funções de análise de variância univariadas.

Na prática, utilizando o *mcglm*, podemos ajustar modelos com diferentes preditores para as respostas, nestes casos as funções *mc\_anova\_I()*, *mc\_anova\_II()* e *mc\_anova\_III()* funcionam

sem problema algum. Contudo as funções `mc_manova_I()`, `mc_manova_II()` e `mc_manova_III()` necessitam que os preditores sejam iguais para todas as respostas.

Tal como descrito no Capítulo 2, a matriz  $\Omega(\tau)$  tem como objetivo modelar a correlação existente entre linhas do conjunto de dados. A matriz é descrita como uma combinação de matrizes conhecidas e tal estrutura foi batizada como preditor linear matricial. Com isso é possível especificar extensões multivariadas para diversos modelos famosos da literatura que lidam com dados em que haja alguma relação entre as unidades amostrais, como estudos de medidas repetidas, dados longitudinais, séries temporais, dados espaciais e espaço-temporais.

Na prática temos, para cada matriz do preditor matricial, um parâmetro de dispersão  $\tau_d$ . De modo análogo ao que é feito para o preditor de média, podemos usar estes parâmetros para avaliar o efeito das unidades correlacionadas no estudo. Neste sentido implementamos as funções `mc_anova_disp()` e `mc_manova_disp()`.

A função `mc_anova_disp()` efetua uma análise de variância do tipo III para os parâmetros de dispersão do modelo. Tal como as demais funções com prefixo `mc_anova` é gerado um quadro para cada variável resposta, isto é, nos casos mais gerais avaliamos se há evidência que nos permita afirmar que determinado parâmetro de dispersão é igual a 0, ou seja, se existe efeito das medidas repetidas tal como especificado no preditor matricial para aquela resposta. Já a função `mc_manova_disp()` pode ser utilizada em um modelo multivariado em que os preditores matriciais são iguais para todas as respostas e há o interesse em avaliar se o efeito das medidas correlacionadas é o mesmo para todas as respostas.

Por fim, ressaltamos que ~~as~~ todas as funções de prefixo `mc_anova` e `mc_manova` foram implementadas no sentido de facilitar o procedimento de análise da importâncias das variáveis. Contudo, dentre as funções implementadas, a mais flexível é a função `mc_linear_hypothesis()` que implementa e da liberdade ao usuário de efetuar qualquer teste utilizando a estatística de Wald no contexto dos McGLM. A partir desta função é possível replicar os resultados de qualquer uma das funções de análise de variância e testar hipóteses mais gerais como igualdade de efeitos, formular hipóteses com testes usando valores diferentes de zero e até mesmo formular hipóteses que combinem parâmetros de regressão, dispersão e potência quando houver alguma necessidade prática.

Firou Jaffard revelado preliminarmente  
Mônica pams.

## 5 ESTUDO DE SIMULAÇÃO

TO DO

*Além o Arquipé os dados de plástico ve verem ell-*

## REFERÊNCIAS

- Anderson, T. et al. (1973). Asymptotically efficient estimation of covariance matrices with linear structure. *The Annals of Statistics*, 1(1):135–141.
- Bonat, W. H. (2018). Multiple response variables regression models in R: The mcglm package. *Journal of Statistical Software*, 84(4):1–30.
- Bonat, W. H. e Jørgensen, B. (2016). Multivariate covariance generalized linear models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series C (Applied Statistics)*, 65(5):649–675.
- Box, G. E. e Cox, D. R. (1964). An analysis of transformations. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, páginas 211–252.
- Demidenko, E. (2013). *Mixed models: theory and applications with R*. John Wiley & Sons.
- Fox, J. e Weisberg, S. (2019). *An R Companion to Applied Regression*. Sage, Thousand Oaks CA, third edition.
- Hotelling, H. (1951). A generalized t test and measure of multivariate dispersion. Relatório técnico, UNIVERSITY OF NORTH CAROLINA Chapel Hill United States.
- Institute, S. (1985). *SAS user's guide: Statistics*, volume 2. Sas Inst.
- Jørgensen, B. (1987). Exponential dispersion models. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 49(2):127–145.
- Jørgensen, B. (1997). *The theory of dispersion models*. CRC Press.
- Jørgensen, B. e Knudsen, S. J. (2004). Parameter orthogonality and bias adjustment for estimating functions. *Scandinavian Journal of Statistics*, 31(1):93–114.
- Jørgensen, B. e Kokonendji, C. C. (2015). Discrete dispersion models and their tweedie asymptotics. *ASTA Advances in Statistical Analysis*, 100(1):43–78.
- Lawley, D. (1938). A generalization of fisher's z test. *Biometrika*, 30(1/2):180–187.
- Liang, K.-Y. e Zeger, S. L. (1986). Longitudinal data analysis using generalized linear models. *Biometrika*, 73(1):13–22.
- Lumley, T. (2004). Analysis of complex survey samples. *Journal of Statistical Software*, 9(1):1–19. R package verson 2.2.
- Lumley, T. (2010). *Complex Surveys: A Guide to Analysis Using R*: A Guide to Analysis Using R. John Wiley and Sons.

- Lumley, T. (2020). survey: analysis of complex survey samples. R package version 4.0.
- Martinez-Beneito, M. A. (2013). A general modelling framework for multivariate disease mapping. *Biometrika*, 100(3):539–553.
- Nelder, J. A. e Wedderburn, R. W. M. (1972). Generalized Linear Models. *Journal of the Royal Statistical Society. Series A (General)*, 135:370–384.
- Pillai, K. et al. (1955). Some new test criteria in multivariate analysis. *The Annals of Mathematical Statistics*, 26(1):117–121.
- Pinheiro, J. C. e Bates, D. M. (1996). Unconstrained parametrizations for variance-covariance matrices. *Statistics and computing*, 6(3):289–296.
- Pourahmadi, M. (2000). Maximum likelihood estimation of generalised linear models for multivariate normal covariance matrix. *Biometrika*, 87(2):425–435.
- R Core Team (2020). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Roy, S. N. (1953). On a heuristic method of test construction and its use in multivariate analysis. *The Annals of Mathematical Statistics*, páginas 220–238.
- Smith, H., Gnanadesikan, R. e Hughes, J. (1962). Multivariate analysis of variance (manova). *Biometrics*, 18(1):22–41.
- Wilks, S. S. (1932). Certain generalizations in the analysis of variance. *Biometrika*, páginas 471–494.
- Zeileis, A. e Hothorn, T. (2002). Diagnostic checking in regression relationships. *R News*, 2(3):7–10.