线性代数-L3 to L5...

1.矩阵相乘的五种方法

(1)行 点乘 列,获取单个元素方法

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 11\\12 & 13\\14 & 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1*10+2*12+3*14 & 1*11+2*13+3*15\\\dots & \dots\\\dots & \dots\end{bmatrix}$$

(2)列 点乘 行，获取m*p矩阵后再相加

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 11\\12 & 13\\14 & 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 11\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12 & 13\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14 & 15\end{bmatrix}$$

(3)行向量的线性叠加

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 11\\12 & 13\\14 & 15\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1*[10 & 11]+2*[12 & 13]+3*[14 & 15]\\4*[10 & 11]+5*[12 & 13]+6*[14 & 15]\\7*[10 & 11]+8*[12 & 13]+9*[14 & 15]\end{bmatrix}$$

(4)列向量的线性叠加

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 11\\12 & 13\\14 & 15\end{bmatrix}$$
$$=$$
$$10*\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix}+12*\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix}+14*\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}\text{为第一列；}$$
$$11*\begin{bmatrix}1\\4\\7\end{bmatrix}+13*\begin{bmatrix}2\\5\\8\end{bmatrix}+15*\begin{bmatrix}3\\6\\9\end{bmatrix}\text{为第二列；}$$

(5)分块乘法(扩展)

$$\begin{bmatrix}A1 & A2\\A3 & A4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B1 & B2\\B3 & B4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A1*B1+A2*B3 & A1*B2+A2*B4\\\dots & \dots\end{bmatrix}$$

2.逆矩阵

$$A^{-1}A=I=AA^{-1}$$

对于方阵，左乘逆矩阵和右乘逆矩阵是同一矩阵。

(1)如果存在一个非零向量X，左乘矩阵A后得出零向量，则矩阵A为不可逆矩阵，即为奇异矩阵：

$$AX=0$$

(2)什么是不可逆矩阵

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$为不可逆矩阵。

用列向量的线性叠加可以解释，因为$AA^{-1} = I$，
无论矩阵A^{-1}是什么，都只是让A的列向量线性叠加，
因为A的列向量共线，所以无论如何线性组合都组合不出单位矩阵的列向量。

(3)求解逆矩阵——高斯-若尔当思想

$$AA^{-1} = I$$

其中$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$，求$A^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 3 & 7 & | & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对于上方的增广矩阵，对左边进行下三角消元后再进行上三角消元可得单位矩阵
则右边变化后的矩阵就为逆矩阵。

(4)逆矩阵运算规则

$$ABB^{-1}A^{-1} = I$$

证明方法就是根据结合律，有$A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = I$

$$A = LU——(L\text{为下三角矩阵})$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

可转换为：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这样就转换成了很完美的格式：左边下三角矩阵L，中间对角线矩阵D，右边上三角矩阵U。

(5)转置矩阵的性质

有$AA^{-1} = I,$两边进行转置后得：

$$(A^{-1})^T A^T = I$$

由于$(A^T)^{-1} A^T = I$

因此$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

(6)为什么采用A=LU而不用EA=U

因为如果消元时不需要行交换，那么消元系数可以直接写入L的矩阵中。
如果用这种思想进行消元，则对A进行第一次消元后得到的U以及写入消元
系数的L即可进行余下的消元，从而不需要A矩阵的信息了，因为L和U包括了A信息。

(7)置换矩阵P(交换行与行)的性质

$$P^{-1} = P^T$$

置换矩阵的逆矩阵是其转置矩阵。

(8)向量空间

向量加法封闭(任取一向量，加另一任意向量的结果仍在集合中)、向量数乘封闭(任取一向量，乘任意常数后结果仍在集合中)。简单描述，所有线性组合仍然在空间中。

(9)向量子空间

$$\text{若有} A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

则$C(A)$为列空间，因为列1和列2向量属于R^3，它们线性组合后的向量仍然在R^3。

例如R^3为三维实数空间(x, y, z)。

它的子空间有：它自身，穿过原点的平面，穿过原点的直线，原点。