3/17 Cobb-Douglas 生產函數 $Q=f(L,K)=L^{\alpha}K^{\beta}$，$\alpha,\beta>0$

1. APL（勞動平均產量）

$$APL=\frac{Q}{L}=\frac{L^{\alpha}K^{\beta}}{L}=L^{\alpha-1}K^{\beta}$$

2 APK（資本平均產量）

$$APK=\frac{Q}{K}=\frac{L^{\alpha}K^{\beta}}{K}=L^{\alpha}K^{\beta-1}$$

3 MPL（勞動邊際產量）

$$MPL=\frac{dQ}{dL}=\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}$$

4. MPK（資本邊際產量）

$$MPK=\frac{dQ}{dK}=\beta L^{\alpha}K^{\beta-1}$$

MRTS（邊際技術替代率）

$$MRTS=\frac{-dK}{dL}=\frac{MPL}{MPK}=\frac{\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}}{\beta L^{\alpha}K^{\beta-1}}=\frac{\alpha K}{\beta L}$$

6 ε^{L}（勞動產量彈力）

$$\varepsilon^{L}=\frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dL}{L}}=\frac{\frac{dQ}{dL}}{\frac{Q}{L}}=\frac{MPL}{APL}$$

$$=\frac{\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}}{L^{\alpha-1}K^{\beta}}=\alpha$$

7. ε^{K}（資本產量彈性）

$$\varepsilon^{L}=\frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dK}{K}}=\frac{\frac{dQ}{dK}}{\frac{Q}{K}}=\frac{MPK}{APK}$$

$$=\frac{\beta L^{\alpha}K^{\beta-1}}{L^{\alpha}K^{\beta-1}}=\beta$$

8 ε^{ϕ}（生產力彈性）

$$\varepsilon^{L}=\frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{dK}{K}}=\frac{\frac{dQ}{dK}}{\frac{Q}{K}}=\frac{MPK}{APK}$$

$$=\frac{\beta L^{\alpha}K^{\beta-1}}{L^{\alpha}K^{\beta-1}}=\beta$$

9. ε^{LK}（替代彈性）

$$\varepsilon^{LK}=\varepsilon^{L}+\varepsilon^{K}=\alpha+\beta$$

2

生產函數 $Q=3K+2L$，K為資本，L為勞動，Q為產出

(1) 函數呈現固定規模報酬，正確

當L和K增加n倍 → nL和nK，生產函數為 $F(nL,nK)=2(nL)+3(nK)$

$=n(2L+3K)=nQ$，故呈現固定規模報酬

(2) 函數呈現遞減，不正確

$MPL=\frac{dQ}{dL}=2$，$MPK=\frac{dQ}{dL}=3$，資本與勞動的邊際生產力（MPL和MPK）皆固定

(3) 函數呈現固定的技術替代率，正確

$MRTS=\frac{MPL}{MPK}=\frac{2}{3}$，技術替代率（MRTS）成固定值（$\frac{2}{3}$）