Ejercicio 1 - Convexidad

Recordamos del teórico que f es convexa si

$$f(t \cdot x + (1-t) \cdot y) \leq t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y) \forall x, y \in R^n, t \in [0,1]$$

a) $g(x) = \sum_i w_i f_i(x)$

$$g(x) = w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + ... + w_k f_k(x)$$

$$g(t \cdot x + (1-t) \cdot y) = w_1 f_1(t \cdot x + (1-t) \cdot y) + w_2 f_2(t \cdot x + (1-t) \cdot y) + ... + w_k f_k(t \cdot x + (1-t) \cdot y)$$

Por convexidad de las funciones f_i se cumple que

$$g(t \cdot x + (1-t) \cdot y) \leq w_1 \left(t f_1(x) + (1-t) f_1(y)\right) + ... + w_k \left(t f_k(x) + (1-t) f_k(y)\right)$$

Agrupamos los terminos multiplicados por t por un lado y $(1-t)$ por otro

$$g(t \cdot x + (1-t) \cdot y) \leq t \cdot [w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + ... + w_k f_k(x)] + (1-t) \cdot [(w_1 f_1(y) + w_2 f_2(y) + ... + w_k f_k(y)]$$

$$g(t \cdot x + (1-t) \cdot y) \leq t \sum_i w_i f_i(x) + (1-t) \sum_i w_i f_i(y) = t g(x) + (1-t) g(y)$$

$\Rightarrow$ se cumple que g(x) es convexa

b) $l(x) = f_1(Ax + b)$

$$l(tx + (1-t)y) = f_1(A(tx + (1-t)y) + b)$$

Observamos que $tb + (1-t)b = b$ por lo que lo incluimos en los respectivos terminos

$$f_1(A(tx + (1-t)y) + b) = f_1(t(Ax + b) + (1-t)(Ay + b))$$

Por convexidad de la función f_1 se cumple que

$$l(tx + (1-t)y) = f_1(t(Ax + b) + (1-t)(Ay + b))) \leq t f_1(Ax + b) + (1-t) f_1(Ay + b) = t l(x) + (1-t) l(y)$$

$\Rightarrow$ l(x) es convexa

c) $Y = \cap_{i \in N} X_i$