Ejercicio 1 - Convexidad

Recordamos del teórico que f es convexa si

$$f(t \cdot x + (1-t) \cdot y) \leq t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y), \quad \forall x, y \in R^n, t \in [0,1]$$

a) $g(x) = \sum_i w_i f_i(x)$

$$g(x) = w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + ... + w_k f_k(x)$$

$$g(t{\cdot}x{+}(1{-}t){\cdot}y) = w_1 f_1(t{\cdot}x{+}(1{-}t){\cdot}y){+}w_2 f_2(t{\cdot}x{+}(1{-}t){\cdot}y){+}...{+}w_k f_k(t{\cdot}x{+}(1{-}t){\cdot}y)$$

Por convexidad de las funciones f_i se cumple que

$$g(t \cdot x + (1-t) \cdot y) \leq w_1 \left(t f_1(x) + (1-t) f_1(y)\right) + ... + w_k \left(t f_k(x) + (1-t) f_k(y)\right)$$

Agrupamos los terminos multiplicados por t por un lado y $(1-t)$ por otro

$$g(t{\cdot}x{+}(1{-}t){\cdot}y) \leq t{\cdot}[w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + ... + w_k f_k(x)]{+}(1{-}t){\cdot}[(w_1 f_1(y) + w_2 f_2(y) + ... + w_k f_k(y)]$$

$$g(t \cdot x + (1-t) \cdot y) \leq t \sum_i w_i f_i(x) + (1-t) \sum_i w_i f_i(y) = t g(x) + (1-t) g(y)$$

$\Rightarrow$ se cumple que g(x) es convexa.

b) $l(x) = f_1(Ax + b)$

$$l(tx + (1-t)y) = f_1(A(tx + (1-t)y) + b)$$

Observamos que $tb + (1-t)b = b$ por lo que lo incluimos en los respectivos terminos

$$f_1(A(tx + (1-t)y) + b) = f_1(t(Ax + b) + (1-t)(Ay + b))$$

Por convexidad de la función f_1 se cumple que

$$l(tx{+}(1{-}t)y) = f_1(t(Ax{+}b){+}(1{-}t)(Ay{+}b))) \leq t f_1(Ax{+}b){+}(1{-}t) f_1(Ay{+}b) = t l(x){+}(1{-}t) l(y)$$

$\Rightarrow$ l(x) es convexa.

c) $Y = \cap_{i \in N} X_i$

Del teórico sabemos que un conjunto $C \subset R^n$ es convexo si se cumple:

$$\forall x, y \in C, \quad tx + (1-t)y \in C, \forall t \in [0,1]$$

Si tomamos dos puntos cualesquiera (x, y) que pertenezcan a Y sabemos por definición que también pertenecerán a la intersección de todos los X_i. Luego por convexidad de los X_i esos puntos cumplen que $xt + (1-t)y \in X_i, \quad \forall i$ y, por ser Y la intersección, $xt + (1-t)y \in Y$. Lo mismo aplica al tomar cualquier otro par $(x, y) \in Y \Rightarrow Y$ es convexa.

d) $B(C,r) = \{x \in R^n : ||x-c|| \leq r\}$

Sean $x, y \in B(C,r)$ entonces debemos verificar si se cumple que $tx + (1-t)y \in B(C,r)$ o lo que es lo mismo, que $||C - [tx + (1-t)y]|| < r$.

Partiendo de $[tx + (1-t)y]$, sabemos que

$$||C-[tx+(1-t)y]|| = ||tC+(1-t)C-[tx+(1-t)y]|| = ||t(C-x)+(1-t)(C-y)$$

Utilizando la desigualdad triangular, se tiene que

$$||C-[tx+(1-t)y]|| \leq ||t(C-x)||+||(1-t)(C-y)|| = t\cdot||(C-x)||+(1-t)\cdot||(C-y)||$$

Ahora, sabemos que tanto x como y pertenecen a $B(C,r)$, con lo cual $||(C-x)|| < r$ y $||(C-y)|| < r$.

Lo anterior se transforma entonces en

$$||C - [tx + (1-t)y]|| \leq tr + (1-t)r = r$$

Finalmente, verificamos que $[tx + (1-t)y] \in B(C,r)$ para cualquier par x, y en $B(C,r)$ y $\forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow B(C,r)$ es convexa.

Ejercicio 2 - Interpretación geométrica

a)

Debemos probar que la función de costo $c(x,y) = -log(y^2 - x^2)$ es convexa.

En primer lugar, se puede observar que $y^2 - x^2 = (y-x)^2$