Ejercicio 1 - Convexidad

Recordamos del teórico que f es convexa si

$$f(t \cdot x + (1-t) \cdot y) \leq t \cdot f(x) + (1-t) \cdot f(y), \quad \forall x, y \in R^n, t \in [0,1]$$

a) $g(x) = \sum_i w_i f_i(x)$

$$g(x) = w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + ... + w_k f_k(x)$$

$$g(t \cdot x + (1-t) \cdot y) = w_1 f_1(t \cdot x + (1-t) \cdot y) + w_2 f_2(t \cdot x + (1-t) \cdot y) + ... + w_k f_k(t \cdot x + (1-t) \cdot y)$$

Por convexidad de las funciones f_i se cumple que

$$g(t \cdot x + (1-t) \cdot y) \leq w_1 \left(t f_1(x) + (1-t) f_1(y)\right) + ... + w_k \left(t f_k(x) + (1-t) f_k(y)\right)$$

Agrupamos los terminos multiplicados por t por un lado y $(1-t)$ por otro

$$g(t \cdot x + (1-t) \cdot y) \leq t \cdot [w_1 f_1(x) + w_2 f_2(x) + ... + w_k f_k(x)] + (1-t) \cdot [(w_1 f_1(y) + w_2 f_2(y) + ... + w_k f_k(y)]$$

$$g(t \cdot x + (1-t) \cdot y) \leq t \sum_i w_i f_i(x) + (1-t) \sum_i w_i f_i(y) = t g(x) + (1-t) g(y)$$

$\Rightarrow$ se cumple que g(x) es convexa.

b) $l(x) = f_1(Ax + b)$

$$l(tx + (1-t)y) = f_1(A(tx + (1-t)y) + b)$$

Observamos que $tb + (1-t)b = b$ por lo que lo incluimos en los respectivos terminos

$$f_1(A(tx + (1-t)y) + b) = f_1(t(Ax + b) + (1-t)(Ay + b))$$

Por convexidad de la función f_1 se cumple que

$$l(tx + (1-t)y) = f_1(t(Ax+b) + (1-t)(Ay+b))) \leq t f_1(Ax+b) + (1-t) f_1(Ay+b) = tl(x) + (1-t) l(y)$$

$\Rightarrow$ l(x) es convexa.

c) $Y = \cap_{i \in N} X_i$

Del teórico sabemos que un conjunto $C \subset R^n$ es convexo si se cumple:

$$\forall x, y \in C, \quad tx + (1-t)y \in C, \forall t \in [0,1]$$

Si tomamos dos puntos cualesquiera (x, y) que pertenezcan a Y sabemos por definición que también pertenecerán a la intersección de todos los X_i. Luego por convexidad de los X_i esos puntos cumplen que $xt + (1-t)y \in X_i, \quad \forall i$ y, por ser Y la intersección, $xt + (1-t)y \in Y$. Lo mismo aplica al tomar cualquier otro par $(x, y) \in Y \Rightarrow Y$ es convexa.

d) $B(C,r) = \{x \in R^n : ||x - c|| \leq r\}$

Sean $x, y \in B(C,r)$ entonces debemos verificar si se cumple que $tx + (1-t)y \in B(C,r)$ o lo que es lo mismo, que $||C - [tx + (1-t)y]|| < r$.

Partiendo de $[tx + (1-t)y]$, sabemos que

$$||C - [tx + (1-t)y]|| = ||tC + (1-t)C - [tx + (1-t)y]|| = ||t(C-x) + (1-t)(C-y)$$

Utilizando la desigualdad triangular, se tiene que

$$||C - [tx + (1-t)y]|| \leq ||t(C-x)|| + ||(1-t)(C-y)|| = t \cdot ||(C-x)|| + (1-t) \cdot ||(C-y)||$$

Ahora, sabemos que tanto x como y pertenecen a $B(C,r)$, con lo cual $||(C-x)|| < r$ y $||(C-y)|| < r$.

Lo anterior se transforma entonces en

$$||C - [tx + (1-t)y]|| \leq tr + (1-t)r = r$$

Finalmente, verificamos que $[tx + (1-t)y] \in B(C,r)$ para cualquier par x, y en $B(C,r)$ y $\forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow B(C,r)$ es convexa.

Ejercicio 2 - Interpretación geométrica

a)

Debemos probar que la función de costo $c(x,y) = -log(y^2 - x^2)$ es convexa.

En primer lugar, se puede observar que $y^2 - x^2 = (y-x)(y+x)$. Por lo que $c(x,y) = -log(y^2 - x^2) = -log((y-x)(y+x))$.

Luego, utilizando la sugerencia se obtiene:

$$c(x,y) = -log(y-x) - log(y+x)$$

Ahora podemos analizar cada termino de la suma por separado, analizar si es o no convexa. Pues, por resultado del ejercicio 1.a, suma de funciones convexas, es convexa.

Llamaremos $c_1(x,y) = -log(y-x)$ y $c_2(x,y) = -log(y+x)$, debemos analizar si la Hessiana es semidefinida positiva.

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} = \frac{1}{(y-x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} = \frac{1}{(y-x)^2}$$

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial xy} = \frac{-1}{(y-x)^2}$$

Observamos que $\frac{\partial^2 c_1}{\partial xy} = \frac{\partial^2 c_1}{\partial yx}$

Su matriz Hessiana queda definida de la siguiente manera

$$H_{c_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(y-x)^2} & \frac{-1}{(y-x)^2} \\ \frac{-1}{(y-x)^2} & \frac{1}{(y-x)^2} \end{bmatrix}$$

Y continuamos calculando sus valores propios:

$$|H_{c_1} - \lambda I| = (\frac{1}{(y-x)^2} - \lambda)^2 - \frac{1}{(y-x)^4} = (\frac{1}{(y-x)^4} - \frac{2\lambda}{(y-x)^2} + \lambda^2) - \frac{1}{(y-x)^4}$$

De lo anterior se deduce que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = \frac{2}{(y-x)}$. Observamos que en el dominio de la función $(y > |x|)$ ambos valores propios son no-negativos. Por lo tanto concluimos que $c_1(x, y)$ es convexa.

Ahora observemos qué sucede con $c_2(x, y)$. En este caso tenemos

$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial x^2} = \frac{1}{(y+x)^2}$$
$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial y^2} = \frac{1}{(y+x)^2}$$
$$\frac{\partial^2 c_1}{\partial xy} = \frac{1}{(y+x)^2}$$

Observamos que $\frac{\partial^2 c_2}{\partial xy} = \frac{\partial^2 c_2}{\partial yx}$

En el caso de c_2 se obtiene la siguiente matriz Hessiana

$$H_{c_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(y+x)^2} & \frac{1}{(y+x)^2} \\ \frac{1}{(y+x)^2} & \frac{1}{(y+x)^2} \end{bmatrix}$$

Y sus valores propios se calculan a continuación

$$|H_{c_1} - \lambda I| = (\frac{1}{(y+x)^2} - \lambda)^2 - \frac{1}{(y+x)^4} = (\frac{1}{(y+x)^4} - \frac{2\lambda}{(y+x)^2} + \lambda^2) - \frac{1}{(y+x)^4}$$

De lo que se deduce que $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_2 = \frac{2}{(y+x)^2}$. Por lo cual ambos valores propios son no-negativos y con ello, la matriz Hessiana es semidefinida positiva y se concluye que $c_2(x, y)$ es convexa.

A partir de los resultados anteriores, demostramos que $c_1(x, y)$ y $c_2(x, y)$ son convexas, y por el resultado del ejercicio 1.a se concluye que $c(x, y)$ es convexa.

b)

En primer lugar, podemos observar que la restricción $x^2 + y^2 \leq 1$ es lo mismo que decir