4장. 수송모형 및 할당모형

- 참고문헌: 최적 의사결정을 위한 경영과학, 권수태외 5인, 청람, 2018

Contents

4. 수송모형 및 할당모형

4-1 수송모형의 개념과 발견적 해법
4-2 수송모형의 최적화 해법
4-3 할당모형의 개념과 최적화 해법

4.1 수송모형

❖ 수송모형 (transportation model)

- ➢ 다수의 공급지(source)에서 다수의 수요지(destination)로 최소의 비용으로 수송하는 방안을 찾기 위한 모형
  - ✓ 단위당 수송비용이 상수인 경우 선형계획모형의 특수한 형태

❖ 할당모형 (assignment model)

- ➢ 할당하고자하는 대상과 할당받고자 하는 대상 간 최소의 비용으로 할당 및 배당을 찾기위한 모형
  - ✓ 각 수요지와 공급지에서의 수요량과 공급량이 각각 1인 경우의 수송모형의 특수한 경우

❖선형계획법을 이용하여 최적해를 구할 수 있지만, 이들 모형의 특성을 이용하여 효율적으로 최적해를 구하는 방법을 학습

4.1 수송모형

❖ 수송문제(transportation problem)

➢ 다수의 공급지(source)에서 다수의 수요지(destination)로 최소의 비용으로 제품들을 수송하기 위한 방안을 찾고자 하는 문제

m : 총 공급지 수
n : 총 수요
S_i : 공급지 i의 공급가능 물량 (capacity), i=1,2,...,m
D_j : 수요지 j에서 수요량, j= 1,2,...,n
C_{ij}: 공급지 i에서 수요지 j로의 단위당 수송비용

X_{ij}: 공급지 i에서 수요지 j로의 수송량

4.1 수송모형

❖ 수송문제(transportation problem)

- 수송량은 각 공급지와 수요지에서 공급량과 수요량의 제약을 만족하는 값
- 2개의 가정
  - ✓ 가정 1. 총 수송비용은 수송량과 수송 거리에 비례한다.
  - ✓ 가정 2. 수송을 위한 최단경로(shortest path)는 알고 있다.
- 가정 1에 의해 수송문제는 선형계획모형으로 표현될 수 있고, 공급지와 수요지 간에 직접적인 수송을 한다는 것을 의미
  - ✓ 특히 공급자와 수요자 간의 최단경로를 이용한 직접적인 수송을 하지 않고 중간 경유지를 거치는 경우도 고려할 수 있는데, 이 때는 이송문제(transshipment problem)라고 함
- 가정 2에 의하면 수송문제의 기본적인 목적이 수송량을 정하는데 있고, 수송경로는 이미 알고 있는 상황을 고려

4.1 수송모형

❖ 수송문제(transportation problem)

➢ 수송문제에 대한 수리모형

$$Min \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = S_{i,} \quad i = 1,2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = D_j, \; j = 1,2, \dots, n$$

$$X_{ij} \geq 0, i = 1,2, \dots, m \,; j = 1,2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} x_{ij} = x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} + x_{31} + x_{32}$$

4.1 수송모형

❖ 수송문제(transportation problem)

➢ 수송문제에 대한 수리모형(쌍대문제)

$$Max \quad \sum_{i=1}^{m} S_i \, U_i + \sum_{j=1}^{n} D_j \, V_j$$

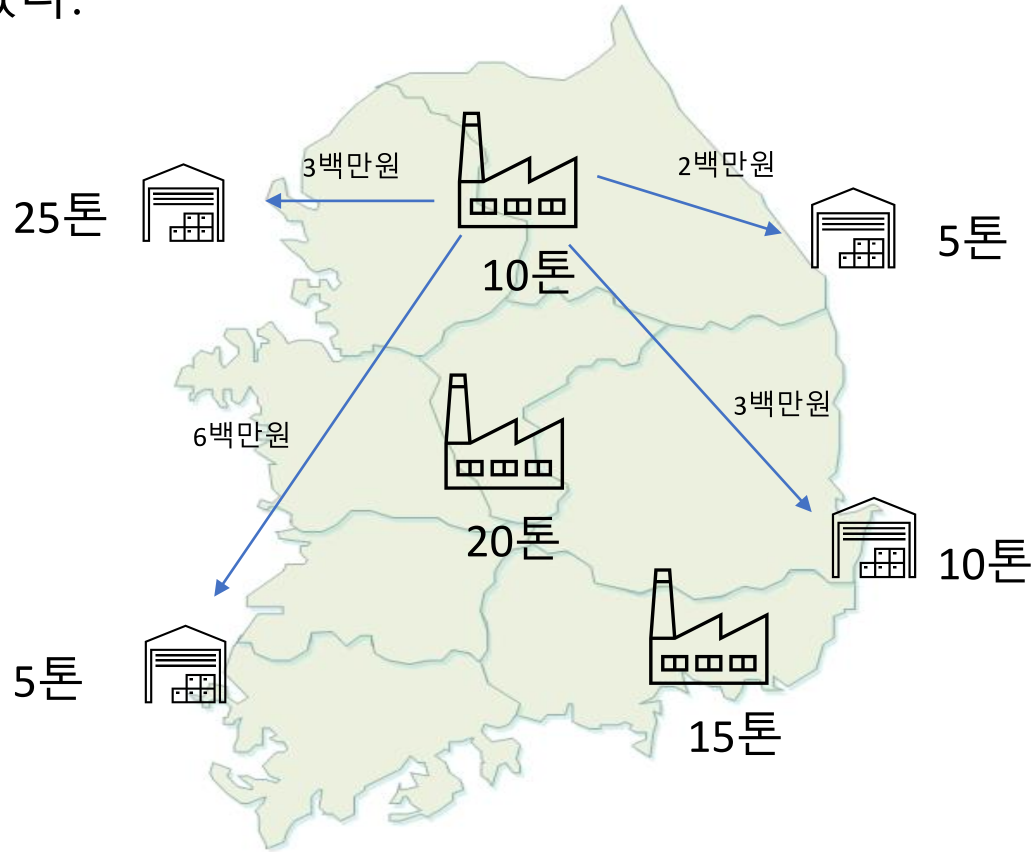
$$s.t. \qquad U_i + V_j \le C_{ij} \quad i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$$

$$U_i \,,\, V_j : \text{무제약}$$

➢ 쌍대문제를 통해서 수송문제의 해가 최적성(optimality)을 만족하기 위해서는 쌍대변수 U_i 와 V_j 가 $U_i + V_j \le C_{ij}$ 를 만족해야 함을 알 수 있는데, 이러한 성질을 이용하여 최적해를 구한다.

❖ [예제] AI 맥주㈜

AI맥주㈜는 세 곳의 공장에서 제품을 생산하여 네 곳의 수요지에 제품을 공급하고 있다.

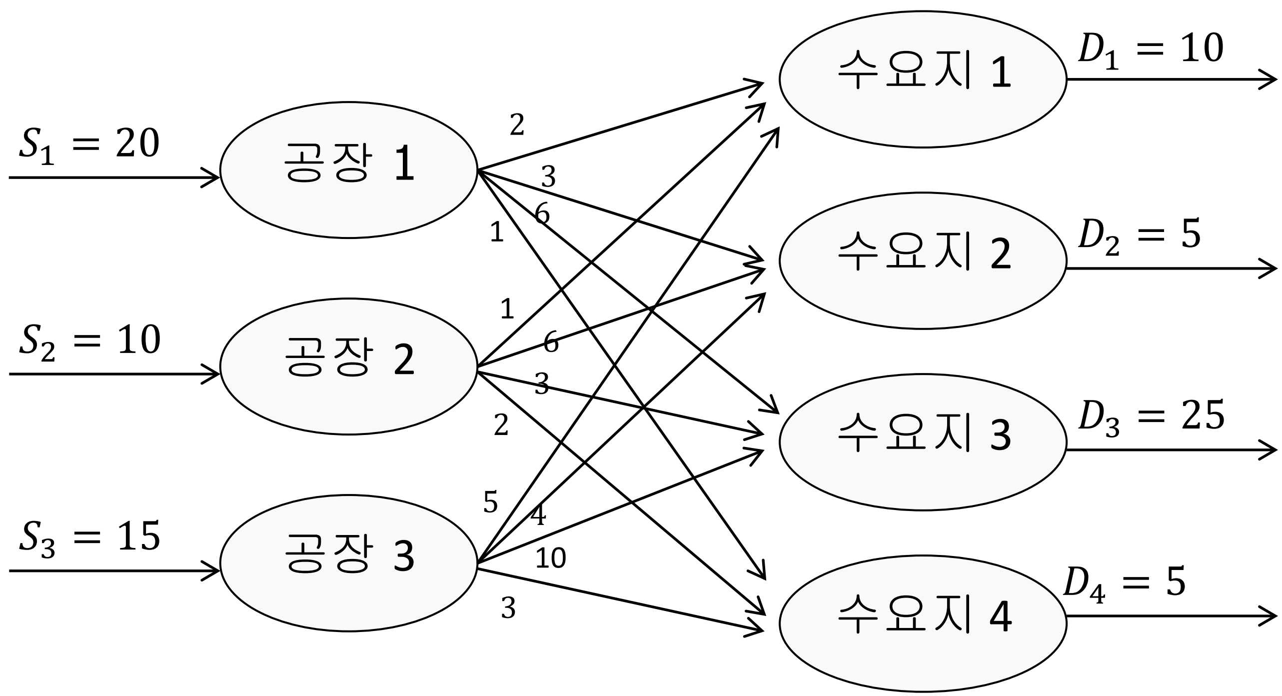


4.1 수송모형

❖ [예제] AI 맥주㈜

➢ 최적 수송 네트워크

✓ 최소비용 :



❖ [예제] AI 맥주㈜

➢ 선형계획모형 수립

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
\textit{Min} & \multicolumn{13}{l}{2X_{11} + 3X_{12} + 6X_{13} + X_{14} + X_{21} + 6X_{22} + 3X_{23} + 2X_{24} + 5X_{31} + 4X_{32} + 10X_{33} + 3X_{34}} \\
\textit{s.t.} \\
& X_{11} + & X_{12} + & X_{13} + & X_{14} & & & & & & & & & = 20 \\
& & & & & X_{21} + & X_{22} + & X_{23} + & X_{24} & & & & & = 10 \\
& & & & & & & & & X_{31} + & X_{32} + & X_{33} + & X_{34} & = 15 \\
& X_{11} & & & & + X_{21} & & & & + X_{31} & & & & = 10 \\
& & X_{12} & & & & + X_{22} & & & & + X_{32} & & & = 5 \\
& & & X_{13} & & & & + X_{23} & & & & + X_{33} & & = 25 \\
& & & & X_{14} & & & & + X_{24} & & & & + X_{34} & = 5
\end{array}
$$

$X_{ij} \geq 0,$ i=1,2,3; j=1,2,3,4.

❖ [예제] AI 맥주㈜

➢ 최적 수송 네트워크

```
from scipy.optimize import linprog
c=[2,3,6,1,1,6,3,2,5,4,10,3]
A=[[1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1],
   [1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0],[0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0],[0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0],[0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1]]
b=[20,10,15,10,5,25,5]
x0_bounds=(0, None)
x1_bounds=(0,None)
x2_bounds=(0,None)
x3_bounds=(0,None)
x4_bounds=(0,None)
x5_bounds=(0,None)
x6_bounds=(0,None)
x7_bounds=(0,None)
x8_bounds=(0,None)
x9_bounds=(0,None)
x10_bounds=(0,None)
x11_bounds=(0,None)
res=linprog(c,A_eq=A, b_eq=b, bounds=[x0_bounds, x1_bounds, x2_bounds, x3_bounds, x4_bounds, x5_bounds,
x6_bounds, x7_bounds, x8_bounds,x9_bounds, x10_bounds, x11_bounds], method='simplex' , options={'disp':True})
print(res)
```

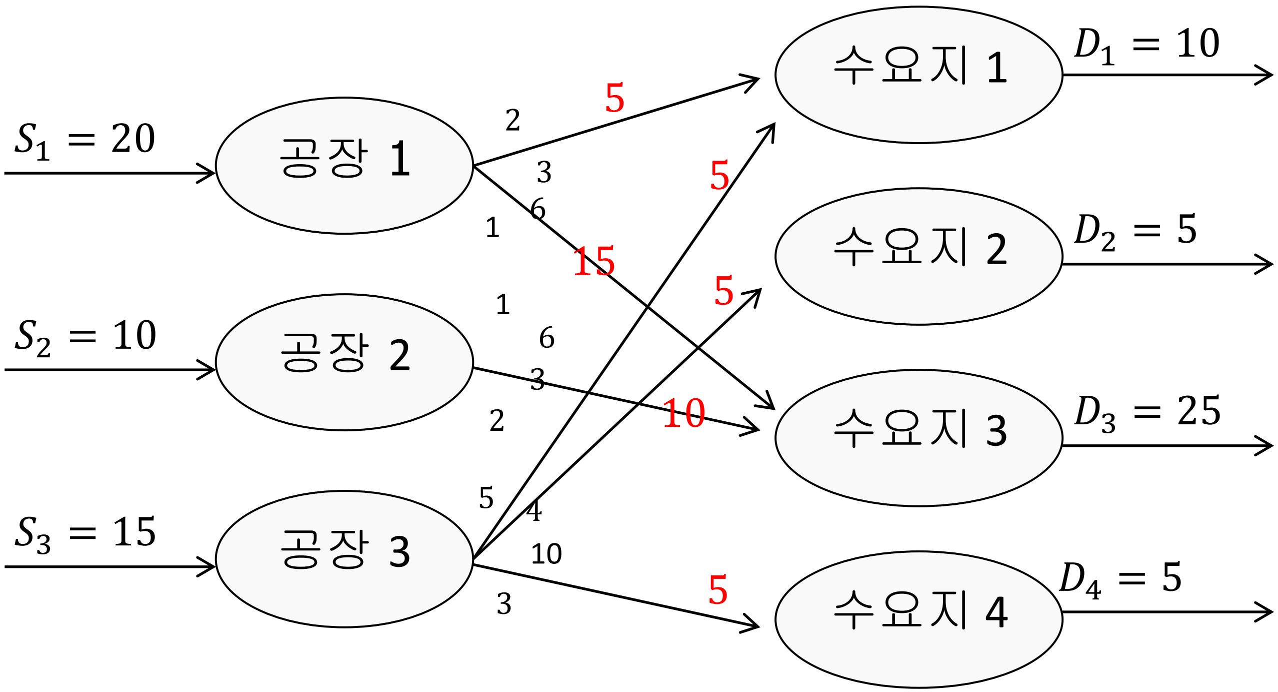
```
Optimization terminated successfully.
         Current function value: 190.000000
         Iterations: 9
     con: array([0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.])
     fun: 190.0
 message: 'Optimization terminated successfully.'
     nit: 9
   slack: array([], dtype=float64)
  status: 0
 success: True
       x: array([ 5.,  0., 15.,  0.,  0.,  0., 10.,  0.,  5.,  5.,  0.,  5.])
```

4.1 수송모형

❖ [예제] AI 맥주㈜

➢ 최적 수송 네트워크

✓ 최소비용 : 190백만원



❖ [예제] AI 맥주㈜

➢ 선형계획모형 수립 (쌍대문제)

$$Max \quad 20U_1 + 10U_2 + 15U_3 + 10V_1 + 5V_2 + 25V_3 + 5V_4$$

$$s.t.$$

$$
\begin{aligned}
U_1 + V_1 &\le 2 \\
U_1 + V_2 &\le 3 \\
U_1 + V_3 &\le 6 \\
U_1 + V_4 &\le 1 \\
U_2 + V_1 &\le 1 \\
U_2 + V_2 &\le 6 \\
U_2 + V_3 &\le 3 \\
U_2 + V_4 &\le 2 \\
U_3 + V_1 &\le 5 \\
U_3 + V_2 &\le 4 \\
U_3 + V_3 &\le 10 \\
U_3 + V_4 &\le 3
\end{aligned}
$$

4.2 수송모형의 특징

❖ 특징

- 수송문제는 선형계획 문제의 일종이지만, [예제]의 수리모형에서 볼 수 있는 바와 같이 제약식의 계수가 대부분 0이고 (표시되지 않은 변수는 모두 계수가 0임), 0이 아닌 것은 1을 갖는 특수한 구조의 선형계획법 모형
- 더구나 수송문제는 다음과 같은 특징이 있음
  - ✓ 수송문제의 실행가능해가 존재하기 위한 필요충분조건은 총공급량=총수요량
  - ✓ 불균형 수송문제도 균형 수송문제로 변환할 수 있음
  - ✓ 수송문제 제약식의 수는 $n+m$ 개이지만 기저변수의 수는 $n+m-1$ 개

➡ 균형수송문제의 조건인 (총공급량=총수요량) 에 의해 n+m개의 제약식 중 하나의 제약식은 중복적(redundant)인 제약식이 되기 때문임

수송문제에 대해 선형계획법을 위한 심플렉스법을 적용하면 기저변수 값 중 적어도 하나는 0값을 갖는 해(degenerated solution:퇴화해)가 항상 발생하게 되고, 퇴화해의 발생은 수송문제의 해를 구하는 데에 있어 순환현상(cycling)의 문제를 유발할 수 있으므로, 심플렉스 해법 외의 다른 해법을 찾을 필요가 있음

  - ✓ 수송문제의 우변상수 값인 S_i와 D_j가 모두 정수(integer)라면 실행가능해도 정수값을 갖게 됨

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 발견적해법 (Hueristic Method)

➢ 다른 수리모형과 마찬가지로 수송모형에 대해서도 근사 최적해를 구하는 발견적인 해법이 있음

➢ 수송문제를 위해 제시된 발견적 해법

✓ 북서코너법(northwest corner method)

✓ 최소비용법(least cost method)

✓ 보겔 근사법 (Vogel's Approximation Method: VAM)

✓ 러셀 근사법 (Russel's Approximation Method: RAM)

❖ [예제] AI 맥주㈜

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2	3	6	1	20
공장 2	1	6	3	2	10
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 북서코너법(Northwest Corner Method)

- 문제를 위해 주어진 단위 수송비용을 고려하지 않고 수송량을 배정하는 방식
- 장점 : 빠르고 쉽게 수송 방안을 개발할 수 있음
- 단점 : 수송계획법의 목적인 최소의 수송비용을 갖는 수송 방안에 절대적인 영향을 주는 수송비용을 고려하지 않는 방법이므로, 최적해가 될 가능성이 적음
- 북서코너란 수송표의 왼쪽의 최상위 셀을 말하는데, 북서코너법은 수송문제에 대한 수송표의 북서코너에 있는 셀부터 시작하여 가능한 최대 양의 수송량을 배정해가며, 총 n+m-1개의 셀에 수송량을 배정하는 방식

❖ 북서코너법(Northwest Corner Method)

➢ 알고리즘

- ✓ 단계 1. i=j=1로 두고, 수송표의 북서쪽에 있는 셀에서부터 배정
- ✓ 단계 2.
  - 셀 (i, j)에 가능한 최대량의 수송량을 배정한 후, 잔여 배정가능량을 $S_i = S_i - X_{ij}$와 같이 수정
  - 만약 Min$\{S_i, D_j\} = S_i$ 라면, $X_{ij} = S_i, S_i = 0, D_j = D_j - X_{ij}$로 한 후, 행 i를 고려대상에서 지우고, $i = i + 1$로 하여 단계 3을 수행
  - 만약 Min $\{S_i, D_j\} = D_j$ 라면, $X_{ij} = D_j, S_i = S_i - X_{ij}$, $D_j = 0$으로 한 후, 열 j 를 고려대상에서 지우고, $j = j + 1$로 하여 단계 3을 수행
  - 만약, $S_i = D_j$라면 행이나 열 중 하나만을 임의로 선택하여 배정
- ✓ 단계 3.
  - i>n,또는 j>m이거나 n+m–1 개의 셀에 할당되지 않았으면, 단계 2를 반복

❖ 북서코너법

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2 start	3	6	1	20
공장 2	1	6	3	2	10
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45

❖ 북서코너법

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2 10	3	6	1	20
공장 2	1	6	3	2	10
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 북서코너법

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2 10	3	6	1	~~20~~ 10
공장 2	1	6	3	2	10
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	5	25	5	45

❖ 북서코너법

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2 10	3	6	1	~~20~~ 10
공장 2	1	6	3	2	10
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	5	25	5	45

❖ 북서코너법

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2 10	3 5	6	1	~~20~~ 10
공장 2	1	6	3	2	10
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	5	25	5	45

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 북서코너법

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	[2] 10	[3] 5	[6]	[1]	~~20~~ ~~10~~ 5
공장 2	[1]	[6]	[3]	[2]	10
공장 3	[5]	[4]	[10]	[3]	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	25	5	45

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 북서코너법

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2 10	3 5	6	1	~~20~~ ~~10~~ 5
공장 2	1	6	3	2	10
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	25	5	45

❖ 북서코너법

수요지 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2 10	3 5	6 5	1	~~20~~ ~~10~~ 5
공장 2	1	6	3	2	10
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	25	5	45

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 북서코너법

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	[2] 10	[3] 5	[6] 5	[1]	~~20~~ ~~10~~ ~~5~~ 0
공장 2	[1]	[6]	[3]	[2]	10
공장 3	[5]	[4]	[10]	[3]	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ 20	5	45

❖ 북서코너법

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2 10	3 5	6 5	1	~~20~~ ~~10~~ ~~5~~ 0
공장 2	1	6	3	2	10
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ 20	5	45

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 북서코너법

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{6}$ 5	$\boxed{1}$	~~20~~ ~~10~~ ~~5~~ 0
공장 2	$\boxed{1}$	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$ 10	$\boxed{2}$	10
공장 3	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{10}$	$\boxed{3}$	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ 20	5	45

❖ 북서코너법

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{6}$ 5	$\boxed{1}$	~~20~~ ~~10~~ ~~5~~ 0
공장 2	$\boxed{1}$	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$ 10	$\boxed{2}$	~~10~~ 0
공장 3	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{10}$	$\boxed{3}$	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ ~~20~~ 10	5	45

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 북서코너법

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	[2] 10	[3] 5	[6] 5	[1]	~~20~~ ~~10~~ ~~5~~ 0
공장 2	[1]	[6]	[3] 10	[2]	~~10~~ 0
공장 3	[5]	[4]	[10]	[3]	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ ~~20~~ 10	5	45

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 북서코너법

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2 10	3 5	6 5	1	~~20~~ ~~10~~ ~~5~~ 0
공장 2	1	6	3 10	2	~~10~~ 0
공장 3	5	4	10 10	3	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ ~~20~~ 10	5	45

❖ 북서코너법

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2 10	3 5	6 5	1	~~20~~ ~~10~~ ~~5~~ 0
공장 2	1	6	3 10	2	~~10~~ 0
공장 3	5	4	10 10	3	~~15~~ 5
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ ~~20~~ ~~10~~ 0	5	45

❖ 북서코너법

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{6}$ 5	$\boxed{1}$	~~20~~ ~~10~~ ~~5~~ 0
공장 2	$\boxed{1}$	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$ 10	$\boxed{2}$	~~10~~ 0
공장 3	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{10}$ 10	$\boxed{3}$	~~15~~ 5
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ ~~20~~ ~~10~~ 0	5	45

❖ 북서코너법

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2 10	3 5	6 5	1	~~20~~ ~~10~~ ~~5~~ 0
공장 2	1	6	3 10	2	~~10~~ 0
공장 3	5	4	10 10	3 5	~~15~~ 5
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ ~~20~~ ~~10~~ 0	5	45

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 북서코너법

수요지 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2 10	3 5	6 5	1	~~20~~ ~~10~~ ~~5~~ 0
공장 2	1	6	3 10	2	~~10~~ 0
공장 3	5	4	10 10	3 5	~~15~~ ~~5~~ 0
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ ~~20~~ ~~10~~ 0	~~5~~ 0	45

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 북서코너법

❖ 총비용=210백만원

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{6}$ 5	$\boxed{1}$	~~20~~ ~~10~~ ~~5~~ 0
공장 2	$\boxed{1}$	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$ 10	$\boxed{2}$	~~10~~ 0
공장 3	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{10}$ 10	$\boxed{3}$ 5	~~15~~ ~~5~~ 0
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ ~~20~~ ~~10~~ 0	~~5~~ 0	45

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 최소비용법(Least Cost Method)

- 북서코너법은 수송비용을 고려하지 않는 방법이므로, 총 수송비용이 큰 수송 대안이 제시될 가능성이 있음
- 최소비용법(least cost method)은 이러한 문제를 해결하기 위해서 최소의 수송 단가를 가지는 셀을 우선으로 고려하여 가능한 최대의 양을 할당하는 방법
- 알고리즘
  - ✓ 단계 1.
    - 배당이 안 된 셀 중에서 최소의 수송비용을 갖는 셀을 찾는다.
    - 만약 이러한 셀이 여러 개 존재한다면 이 중에서 임의로 하나의 셀을 선택
  - ✓ 단계 2.
    - 선택한 셀에 대해 가능한 최대량의 수송량 X_{ij}을 배정
    - 잔여 배정 가능량을 $S_i = S_i - X_{ij},\ D_j = D_j - X_{ij}$와 같이 수정
  - ✓ 단계 3.
    - 총 $n + m - 1$ 개의 셀에 할당이 되지 않았다면, 단계 1을 반복

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 최소비용법(Least Cost Method)

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2	3	6	1	20
공장 2	1	6	3	2	10
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45

❖ 최소비용법(Least Cost Method)

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2	3	6	1 5	20
공장 2	1	6	3	2	10
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45

❖ 최소비용법(Least Cost Method)

수요지 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2	3	6	1 5	~~20~~ 15
공장 2	1	6	3	2	10
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	10	5	25	~~5~~ 0	45

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 최소비용법(Least Cost Method)

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2	3	6	1 5	~~20~~ 15
공장 2	1	6	3	2	10
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	10	5	25	~~5~~ 0	45

❖ 최소비용법(Least Cost Method)

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2	3	6	1 5	~~20~~ 15
공장 2	1 10	6	3	2	10
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	10	5	25	~~5~~ 0	45

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 최소비용법(Least Cost Method)

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2	3	6	1 5	~~20~~ 15
공장 2	1 10	6	3	2	~~10~~ 0
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	5	25	~~5~~ 0	45

❖ 최소비용법(Least Cost Method)

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2	3	6	1 5	~~20~~ 15
공장 2	1 10	6	3	2	~~10~~ 0
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	5	25	~~5~~ 0	45

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 최소비용법(Least Cost Method)

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2	3 5	6	1 5	~~20~~ 15
공장 2	1 10	6	3	2	~~10~~ 0
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	5	25	~~5~~ 0	45

❖ 최소비용법(Least Cost Method)

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2	3 5	6	1 5	~~20~~ ~~15~~ 10
공장 2	1 10	6	3	2	~~10~~ 0
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	25	~~5~~ 0	45

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 최소비용법(Least Cost Method)

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2	3 5	6	1 5	~~20~~ ~~15~~ 10
공장 2	1 10	6	3	2	~~10~~ 0
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	25	~~5~~ 0	45

❖ 최소비용법(Least Cost Method)

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	[2]	[3] 5	[6] 10	[1] 5	~~20~~ ~~15~~ 10
공장 2	[1] 10	[6]	[3]	[2]	~~10~~ 0
공장 3	[5]	[4]	[10]	[3]	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	25	~~5~~ 0	45

❖ 최소비용법(Least Cost Method)

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	[2]	[3] 5	[6] 10	[1] 5	~~20~~ ~~15~~ ~~10~~ 0
공장 2	[1] 10	[6]	[3]	[2]	~~10~~ 0
공장 3	[5]	[4]	[10]	[3]	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ 15	~~5~~ 0	45

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 최소비용법(Least Cost Method)

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2	3 5	6 10	1 5	~~20~~ ~~15~~ ~~10~~ 0
공장 2	1 10	6	3	2	~~10~~ 0
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ 15	~~5~~ 0	45

❖ 최소비용법(Least Cost Method)

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	[2]	[3] 5	[6] 10	[1] 5	~~20~~ ~~15~~ ~~10~~ 0
공장 2	[1] 10	[6]	[3]	[2]	~~10~~ 0
공장 3	[5]	[4]	[10] 15	[3]	15
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ 15	~~5~~ 0	45

❖ 최소비용법(Least Cost Method)

수요지 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2	3 5	6 10	1 5	~~20~~ ~~15~~ ~~10~~ 0
공장 2	1 10	6	3	2	~~10~~ 0
공장 3	5	4	10 15	3	~~15~~ 0
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ ~~15~~ 0	~~5~~ 0	45

COSS Convergence and Open Sharing System 인공지능

❖ 최소비용법(Least Cost Method)

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2	3 5	6 10	1 5	~~20~~ ~~15~~ ~~10~~ 0
공장 2	1 10	6	3	2	~~10~~ 0
공장 3	5	4	10 15	3	~~15~~ 0
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ ~~15~~ 0	~~5~~ 0	45

210

❖ 최소비용법(Least Cost Method)

❖ 총비용=240백만원

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2	3 5 ③	6 10 ④	1 5 ①	~~20~~ ~~15~~ ~~10~~ 0
공장 2	1 10 ②	6	3	2	~~10~~ 0
공장 3	5	4	10 15 ⑤	3	~~15~~ 0
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ ~~15~~ 0	~~5~~ 0	45

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 보겔 근사법

- 최소비용법을 이용한 수송량 할당 방식은 가장 비용이 저렴한 곳부터 할당해가는 방법이므로, 총 수송비용이 최저가 되는 수송 방안을 제공해줄 것 같지만 항상 그렇지는 않음
- 이는 최소 비용법을 이용한 할당은 단지 최소의 비용을 가진 하나의 셀만 고려할 뿐 다른 셀들에 대한 고려를 하지 않는 방식이기 때문
- 최소비용 셀에 최대량을 배정하면 다른 셀에는 배정을 할 수 없게 되는데, 이에 따른 기회비용을 고려한 할당 방식이 보겔근사법(VAM)이나 러셀근사법(RAM)

❖ 보겔 근사법

- ➢ 어떤 셀을 선택하여 수요와 공급을 대응시켜 배당할 때 최적의 셀을 선택하지 못했을 경우에 치러야 할 손실이 기회비용인데, 기회비용이 최소가 되도록 배당하는 방식이 보겔 근사법
- ➢ 알고리즘
  - ✓ 단계 1.
    - 수송표의 각 행과 열의 단위 수송비용 중에서 최소비용치와 그 다음으로 작은 비용치의 차이인 기회비용을 구함
    - 기회비용 = |최소비용-차 하위 최소비용|
  - ✓ 단계 2.
    - 최대 기회비용을 갖는 행이나 열에서 최소 단위 수송비용을 갖는 셀에 가능한 한 최대로 수송량을 배정
  - ✓ 단계 3.
    - 잔여 공급량이나 수요량이 0인 행이나 열을 제거해가면서 n+m-1개의 셀에 배당될 때까지 단계 1에서 단계 3까지를 반복

❖ 보겔 근사법

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	기회비용
공장 1	2	3	6	1	20	1
공장 2	1	6	3	2	10	1
공장 3	5	4	10	3	15	1
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45	
기회비용	1	1	3	1		

❖ 보겔 근사법

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	기회비용
공장 1	[2]	[3]	[6]	[1]	20	1
공장 2	[1]	[6]	[3] 10	[2]	10	1
공장 3	[5]	[4]	[10]	[3]	15	1
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45	
기회비용	1	1	3	1		

❖ 보겔 근사법

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	기회비용
공장 1	2	3	6	1	20	1
공장 2	1	6	3 10	2	~~10~~ 0	1
공장 3	5	4	10	3	15	1
소요량 (D_j)	10	5	~~25~~ 15	5	45	
기회비용	1	1	3	1		

❖ 보겔 근사법

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	기회비용
공장 1	2	3	6	1	20	1
공장 2	1	6	3 10	2	~~10~~ 0	1
공장 3	5	4	10	3	15	1
소요량 (D_j)	10	5	~~25~~ 15	5	45	
기회비용	1	1	3	1		

❖ 보겔 근사법

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	기회비용
공장 1	2	3	6	1	20	1
공장 2	1	6	3 10	2	~~10~~ 0	1
공장 3	5	4	10	3	15	1
소요량 (D_j)	10	5	~~25~~ 15	5	45	
기회비용	~~1~~ 3	1	~~3~~ 4	~~1~~ 2		

❖ 보겔 근사법

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	기회비용
공장 1	2	3	6	1	20	1
공장 2	1	6	3 10	2	~~10~~ 0	1
공장 3	5	4	10	3	15	1
소요량 (D_j)	10	5	~~25~~ 15	5	45	
기회비용	~~1~~ 3	1	~~3~~ 4	~~1~~ 2		

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 보겔 근사법

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	기회비용
공장 1	2	3	6 15	1	20	1
공장 2	1	6	3 10	2	~~10~~ 0	1
공장 3	5	4	10	3	15	1
소요량 (D_j)	10	5	~~25~~ 15	5	45	
기회비용	~~1~~ 3	1	~~3~~ 4	~~1~~ 2		

❖ 보겔 근사법

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	기회비용
공장 1	2	3	6 15	1	~~20~~ 5	1
공장 2	1	6	3 10	2	~~10~~ 0	1
공장 3	5	4	10	3	15	1
소요량 (D_j)	10	5	~~25~~ ~~15~~ 0	5	45	
기회비용	~~1~~ 3	1	~~3~~ 4	~~1~~ 2		

❖ 보겔 근사법

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	기회비용
공장 1	2	3	6 15	1	~~20~~ 5	1
공장 2	1	6	3 10	2	~~10~~ 0	1
공장 3	5	4	10	3	15	1
소요량 (D_j)	10	5	~~25~~ ~~15~~ 0	5	45	
기회비용	~~1~~ 3	1	~~3~~ 4	~~1~~ 2		

❖ 보겔 근사법

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	기회비용
공장 1	2	3	6 15	1	~~20~~ 5	1
공장 2	1	6	3 10	2	~~10~~ 0	1
공장 3	5	4	10	3	15	1
소요량 (D_j)	10	5	~~25~~ ~~15~~ 0	5	45	
기회비용	~~1~~ 3	1	~~3~~ 4	~~1~~ 2		

❖ 보겔 근사법

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	기회비용
공장 1	2	3	6 15	1 5	~~20~~ 5	1
공장 2	1	6	3 10	2	~~10~~ 0	1
공장 3	5	4	10	3	15	1
소요량 (D_j)	10	5	~~25~~ ~~15~~ 0	5	45	
기회비용	~~1~~ 3	1	~~3~~ 4	~~1~~ 2		

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 보겔 근사법

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	기회비용
공장 1	2	3	6 15	1 5	~~20~~ ~~5~~ 0	1
공장 2	1	6	3 10	2	~~10~~ 0	1
공장 3	5	4	10	3	15	1
소요량 (D_j)	10	5	~~25~~ ~~15~~ 0	~~5~~ 0	45	
기회비용	~~1~~ 3	1	~~3~~ 4	~~1~~ 2		

❖ 보겔 근사법

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	기회비용
공장 1	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$ 15	$\boxed{1}$ 5	~~20~~ ~~5~~ 0	1
공장 2	$\boxed{1}$	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$ 10	$\boxed{2}$	~~10~~ 0	1
공장 3	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	$\boxed{10}$	$\boxed{3}$	15	1
소요량 (D_j)	10	5	~~25~~ ~~15~~ 0	~~5~~ 0	45	
기회비용	~~1~~ 3	1	~~3~~ 4	~~1~~ 2		

❖ 보겔 근사법

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	기회비용
공장 1	2	3	6 15	1 5	~~20~~ ~~5~~ 0	1
공장 2	1	6	3 10	2	~~10~~ 0	1
공장 3	5	4 5	10	3	15	1
소요량 (D_j)	10	5	~~25~~ ~~15~~ 0	~~5~~ 0	45	
기회비용	~~1~~ 3	1	~~3~~ 4	~~1~~ 2		

❖ 보겔 근사법

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	기회비용
공장 1	2	3	6 15	1 5	~~20~~ ~~5~~ 0	1
공장 2	1	6	3 10	2	~~10~~ 0	1
공장 3	5	4 5	10	3	~~15~~ 10	1
소요량 (D_j)	10	~~5~~ 0	~~25~~ ~~15~~ 0	~~5~~ 0	45	
기회비용	~~1~~ 3	1	~~3~~ 4	~~1~~ 2		

❖ 보겔 근사법

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	기회비용
공장 1	[2]	[3]	[6] 15	[1] 5	~~20~~ ~~5~~ 0	1
공장 2	[1]	[6]	[3] 10	[2]	~~10~~ 0	1
공장 3	[5]	[4] 5	[10]	[3]	~~15~~ 10	1
소요량 (D_j)	10	~~5~~ 0	~~25~~ ~~15~~ 0	~~5~~ 0	45	
기회비용	~~1~~ 3	1	~~3~~ 4	~~1~~ 2		

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 보겔 근사법

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	기회비용
공장 1	2	3	6 15	1 5	~~20~~ ~~5~~ 0	1
공장 2	1	6	3 10	2	~~10~~ 0	1
공장 3	5 10	4 5	10	3	~~15~~ 10	1
소요량 (D_j)	10	~~5~~ 0	~~25~~ ~~15~~ 0	~~5~~ 0	45	
기회비용	~~1~~ 3	1	~~3~~ 4	~~1~~ 2		

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 보겔 근사법

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	기회비용
공장 1	2	3	6 15	1 5	~~20~~ ~~5~~ 0	1
공장 2	1	6	3 10	2	~~10~~ 0	1
공장 3	5 10	4 5	10	3	~~15~~ ~~10~~ 0	1
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ ~~15~~ 0	~~5~~ 0	45	
기회비용	~~1~~ 3	1	~~3~~ 4	~~1~~ 2		

210 240

❖ 보겔 근사법

❖ 총비용=195백만원

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	기회비용
공장 1	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{6}$ 15	$\boxed{1}$ 5	~~20~~ ~~5~~ 0	1
공장 2	$\boxed{1}$	$\boxed{6}$	$\boxed{3}$ 10	$\boxed{2}$	~~10~~ 0	1
공장 3	$\boxed{5}$ 10	$\boxed{4}$ 5	$\boxed{10}$	$\boxed{3}$	~~15~~ ~~10~~ 0	1
소요량 (D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ ~~15~~ 0	~~5~~ 0	45	
기회비용	~~1~~ 3	1	~~3~~ 4	~~1~~ 2		

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 러셀 근사법

- 상대적인 수송비용이 저렴한 셀에서부터 할당해가는 방식
  - ✓ 상대적인 수송비용은 수송표의 각 단위 수송비용에서 각 행과 열에서 최대 수송비용을 빼서 다음과 같이 계산
  - ✓ $\bar{C} = C - \bar{U} - \bar{V}$
    - $\bar{C}$: 공급지 i 에서 수요지 j 로의 단위당 수정 수송비
    - $\bar{U}$: 공급지 i 에서 공급가능한 수요지 중 최대 단위수송비
    - $\bar{V}$: 수요지 j 에 공급 가능한 공급지 중 최대 단위 수송비
  - 수정 수송비 $\bar{C}$ 가 음(negative)인 셀 중에서 가장 작은 셀을 선택하여, 가능한 최대량을 배정해가면서 총 n+m-1개의 셀에 할당
  - $\bar{C}$ 가 모두 비음의 값을 가질 때 ($\bar{U} + \bar{V} \le C$)의 해를 러셀 근사법의 수송방안으로 선택
- 수송 모형의 쌍대문제의 제약식 형태와 같은 수정 비용을 활용한 배당을 하므로, 일반적으로 최적해와 상당히 근접한 해를 제공해준다는 장점이 있으나, 다른 방법에 비해 계산량이 상당이 많다는 단점이 있음

❖ 러셀 근사법

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	2	3	6	1	20	6
공장 2	1	6	3	2	10	6
공장 3	5	4	10	3	15	10
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45	
$\bar{V}$	5	6	10	3		

❖ 러셀 근사법

수요지 / 공급지	수요지 1		수요지 2		수요지 3		수요지 4		생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	-9	2	-9	3	-10	6	-8	1	20	6
공장 2	-10	1	-6	6	-13	3	-7	2	10	6
공장 3	-10	5	-12	4	-10	10	-10	3	15	10
소요량 (D_j)	10		5		25		5		45	
$\bar{V}$	5		6		10		3			

❖ 러셀 근사법

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	-9 [2]	-9 [3]	-10 [6]	-8 [1]	20	6
공장 2	-10 [1]	-6 [6]	-13 [3] 10	-7 [2]	~~10~~ 0	6
공장 3	-10 [5]	-12 [4]	-10 [10]	-10 [3]	15	10
소요량 (D_j)	10	5	~~25~~ 15	5	45	
$\bar{V}$	5	6	10	3		

❖ 러셀 근사법

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	-9 $\boxed{2}$	~~-9~~ -7 $\boxed{3}$	-10 $\boxed{6}$	-8 $\boxed{1}$	20	6
공장 2	-10 $\boxed{1}$	-6 $\boxed{6}$	-13 $\boxed{3}$ 10	-7 $\boxed{2}$	~~10~~ 0	6
공장 3	-10 $\boxed{5}$	~~-12~~ -10 $\boxed{4}$	-10 $\boxed{10}$	-10 $\boxed{3}$	15	10
소요량 (D_j)	10	5	~~25~~ 15	5	45	
$\bar{V}$	5	~~6~~ 4	10	3		

❖ 러셀 근사법

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	-9 2	~~-9~~ -7 3	-10 6	-8 1	20	6
공장 2	-10 1	-6 6	-13 3 10	-7 2	~~10~~ 0	6
공장 3	-10 5	~~-12~~ -10 4	-10 10	-10 3 5	~~15~~ 10	10
소요량 (D_j)	10	5	~~25~~ 15	~~5~~ 0	45	
$\bar{V}$	5	~~6~~ 4	10	3		

❖ 러셀 근사법

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	-9 2	~~-9~~ -7 3	-10 6	-8 1	20	6
공장 2	-10 1	-6 6	-13 3 10	-7 2	~~10~~ 0	6
공장 3	-10 5	~~-12~~ -10 4	-10 10	-10 3 5	~~15~~ 10	10
소요량 (D_j)	10	5	~~25~~ 15	~~5~~ 0	45	
$\bar{V}$	5	~~6~~ 4	10	3		

❖ 러셀 근사법

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	-9 2	~~-9~~ -7 3	-10 6	-8 1	20	6
공장 2	-10 1	-6 6	-13 3 10	-7 2	~~10~~ 0	6
공장 3	-10 5	~~-12~~ 4 -10 5	-10 10	-10 3 5	~~15~~ ~~10~~ 5	10
소요량 (D_j)	10	~~5~~ 0	~~25~~ 15	~~5~~ 0	45	
$\bar{V}$	5	~~6~~ 4	10	3		

❖ 러셀 근사법

수요지 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	-9	2	~~-9~~ -7	3	-10	6	-8	1	20	6
공장 2	-10	1	-6	6	-13	3 10	-7	2	~~10~~ 0	6
공장 3	-10	5	~~-12~~ -10	4 5	-10	10	-10	3 5	~~15~~ ~~10~~ 5	10
소요량 (D_j)	10	~~5~~ 0	~~25~~ 15	~~5~~ 0	45	
$\bar{V}$	5	~~6~~ 4	10	3		

❖ 러셀 근사법

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	-9 2	~~-9~~ -7 3	-10 6	-8 1	20	6
공장 2	-10 1	-6 6	-13 3 10	-7 2	~~10~~ 0	6
공장 3	-10 5 5	~~-12~~ 4 -10 5	-10 10	-10 3 5	~~15~~ ~~10~~ ~~5~~ 0	10
소요량 (D_j)	~~10~~ 5	~~5~~ 0	~~25~~ 15	~~5~~ 0	45	
$\bar{V}$	5	~~6~~ 4	10	3		

❖ 러셀 근사법

수요지 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	-9 2	~~-9~~ -7 3	-10 6	-8 1	20	6
공장 2	-10 1	-6 6	-13 3 10	-7 2	~~10~~ 0	6
공장 3	-10 5 5	~~-12~~ -10 4 5	-10 10	-10 3 5	~~15~~ ~~10~~ ~~5~~ 0	10
소요량 (D_j)	~~10~~ 5	~~5~~ 0	~~25~~ 15	~~5~~ 0	45	
$\bar{V}$	5	~~6~~ 4	10	3		

210 240 195

❖ 러셀 근사법

❖ 총비용=190백만원

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	-9 2 5	~~-9~~ -7 3	-10 6 15	-8 1	20	6
공장 2	-10 1	-6 6	-13 3 10	-7 2	~~10~~ 0	6
공장 3	-10 5 5	~~-12~~ 4 -10 5	-10 10	-10 3 5	~~15~~ ~~10~~ ~~5~~ 0	10
소요량 (D_j)	~~10~~ 5	~~5~~ 0	~~25~~ 15	~~5~~ 0	45	
$\bar{V}$	5	~~6~~ 4	10	3		

❖ 러셀 근사법

idea

수요지 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	-9 2	-9 3	-10 6	-8 1	20	6
공장 2	-10 1	-6 6	-13 3	-7 2	10	6
공장 3	-10 5	-12 4	-10 10	-10 3	15	10
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45	
$\bar{V}$	5	6	10	3		

❖ 러셀 근사법

idea

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	-9 [2]	-9 [3]	-10 [6]	-8 [1]	20	6
공장 2	-10 [1]	-6 [6]	-13 [3] 10	-7 [2]	~~10~~ 0	6
공장 3	-10 [5]	-12 [4]	-10 [10]	-10 [3]	15	10
소요량 (D_j)	10	5	~~25~~ 15	5	45	
$\bar{V}$	5	6	10	3		

❖ 러셀 근사법

idea

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	-9 / 2	-9 / 3	-10 / 6	-8 / 1	20	6
공장 2	-10 / 1	-6 / 6	-13 / 3 10	-7 / 2	~~10~~ 0	6
공장 3	-10 / 5	-12 / 4	-10 / 10	-10 / 3	15	10
소요량 (D_j)	10	5	~~25~~ 15	5	45	
$\bar{V}$	5	6	10	3		

❖ 러셀 근사법

idea

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	-9 [2]	-9 [3]	-10 [6]	-8 [1]	20	6
공장 2	-10 [1]	-6 [6]	-13 [3] 10	-7 [2]	~~10~~ 0	6
공장 3	-10 [5]	-12 [4] 5	-10 [10]	-10 [3]	~~15~~ 10	10
소요량 (D_j)	10	~~5~~ 0	~~25~~ 15	5	45	
$\bar{V}$	5	6	10	3		

❖ 러셀 근사법

idea

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	-9 / 2	-9 / 3	-10 / 6	-8 / 1	20	6
공장 2	-10 / 1	-6 / 6	-13 / 3 10	-7 / 2	~~10~~ 0	6
공장 3	-10 / 5	-12 / 4 5	-10 / 10	-10 / 3	~~15~~ 10	10
소요량 (D_j)	10	~~5~~ 0	~~25~~ 15	5	45	
$\bar{V}$	5	6	10	3		

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 러셀 근사법

idea

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	-9 [2]	-9 [3]	-10 [6]	-8 [1]	20	6
공장 2	-10 [1]	-6 [6]	-13 [3] 10	-7 [2]	~~10~~ 0	6
공장 3	-10 [5]	-12 [4] 5	-10 [10]	-10 [3] 5	~~15~~ ~~10~~ 5	10
소요량 (D_j)	10	~~5~~ 0	~~25~~ 15	~~5~~ 0	45	
$\bar{V}$	5	6	10	3		

4.3 수송모형의 발견적 해법

❖ 러셀 근사법

idea

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	-9 [2]	-9 [3]	-10 [6]	-8 [1]	20	6
공장 2	-10 [1]	-6 [6]	-13 [3] 10	-7 [2]	~~10~~ 0	6
공장 3	-10 [5]	-12 [4] 5	-10 [10]	-10 [3] 5	~~15~~ ~~10~~ 5	10
소요량 (D_j)	10	~~5~~ 0	~~25~~ 15	~~5~~ 0	45	
$\bar{V}$	5	6	10	3		

❖ 러셀 근사법

idea

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	-9 [2]	-9 [3]	-10 [6]	-8 [1]	20	6
공장 2	-10 [1]	-6 [6]	-13 [3] 10	-7 [2]	~~10~~ 0	6
공장 3	-10 [5] 5	-12 [4] 5	-10 [10]	-10 [3] 5	~~15~~ ~~10~~ ~~5~~ 0	10
소요량 (D_j)	~~10~~ 5	~~5~~ 0	~~25~~ 15	~~5~~ 0	45	
$\bar{V}$	5	6	10	3		

❖ 러셀 근사법

idea

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	-9 [2] 5	-9 [3]	-10 [6] 15	-8 [1]	20	6
공장 2	-10 [1]	-6 [6]	-13 [3] 10	-7 [2]	~~10~~ 0	6
공장 3	-10 [5] 5	-12 [4] 5	-10 [10]	-10 [3] 5	~~15~~ ~~10~~ ~~5~~ 0	10
소요량 (D_j)	~~10~~ 5	~~5~~ 0	~~25~~ 15	~~5~~ 0	45	
$\bar{V}$	5	6	10	3		

210 240 195

❖ 러셀 근사법

idea

❖ 총비용=190백만원

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	-9 2 5	-9 3	-10 6 15	-8 1	20	6
공장 2	-10 1	-6 6	-13 3 10	-7 2	~~10~~ 0	6
공장 3	-10 5 5	-12 4 5	-10 10	-10 3 5	~~15~~ ~~10~~ ~~5~~ 0	10
소요량 (D_j)	~~10~~ 5	~~5~~ 0	~~25~~ 15	~~5~~ 0	45	
$\bar{V}$	5	6	10	3		

4.4 수송모형의 최적해 해법

❖ 최적해

- 선형계획법을 이용
- 수송모형의 여러 가지 특징을 활용한 좀 더 효율적인 해법
  - ✓ MODI 법
  - ✓ 디딤돌법
  - ✓ 선형계획법의 심플렉스 해법과 마찬가지로 한번에 하나의 진입변수와 탈락변수를 바꿔가면서 반복적인 연산을 통해 최적해를 찾음
  - ✓ 그러나, 심플렉스 해법의 추축연산(pivot operation)과는 다르게 디딤돌법과 MODI법은 폐환경로(closed loop)를 형성하여 간단히 연산을 수행
  - ✓ 디딤돌법과 MODI법은 진입변수와 탈락변수를 선택하는 방법에 차이가 있음

❖ MODI 법

- 진입변수로 선정한 하나의 변수에 대해서만 폐환경로를 작성하는 방식을 이용하여 최적해를 구하는 방식
- 심플렉스 해법의 수정비용을 기준으로 하는 진입변수 선정 방식과 유사하게 MODI법에서도 각 셀에 대한 수정비용을 계산 한 후, 수정비용이 모두 양(positive)이면 현 상태의 해를 최적해로 선택
- 그렇지 않은 경우는 최소의 수정비용을 갖는 셀을 진입변수로 선택
- 선택한 진입변수에 대한 현재의 기저변수들로 구성된 폐환경로를 구성하여 탈락변수를 선택하는 절차를 반복하여 해를 구함

COSS 인공지능

❖ MODI 법

- 알고리즘
  - ✓ 단계 1. 초기의 실행가능해를 하나 구한다. 이를 위해서는 북서코너법, 최소비용법, 보겔 근사법, 러셀 근사법 등 중 하나를 이용하면 된다.
  - ✓ 단계 2. 현재의 기저해에 대해 다음의 식을 만족하는 변수의 값을 구한다.

$$C = U + V$$

    - 위의 식은 기저변수의 개수인 n+m-1개 이지만 변수(쌍대변수) U, V 의 총 수는 n+m개
    - 즉, 식의 수보다 변수의 수가 하나 더 많으므로, 위의 식을 만족하는 해의 수는 매우 많다.
    - 매우 많은 해 중에서 하나의 해만 구하면 되는데, 이를 위해서는 임의로 하나의 변수를 선택하고, 선택한 변수에 임의의 값(보통은 0값을 부여)을 부여한 후, 나머지 변수들의 값을 구하면 된다.
  - ➢ 단계 3. 현재의 비기저변수에 대해 수정 비용 $\bar{C}$ (=C-U-V) 을 계산한다.
    - 만약 모든 수정비용이 0이상이면 현재의 기저해가 최적해가 되고, 수정비용 중 음(negative)의 값을 가지는 것이 하나라도 있다면 단계 4로 간다.

4.4 수송모형의 최적해 해법

✓ 단계 4. 수정비용 중 최소값을 가지는 변수(셀)을 진입변수로 선택한다. 여기서 만약 최소값을 가진 셀이 여러 개 존재한다면 이들 중 임의로 하나를 선택한다.

✓ 단계 5. 진입변수에 대해 현재의 기저변수들로 구성된 폐환경로를 구성하여, 폐환경로 상의 '주는 셀(donor)' 중 기저변수 값이 최소인 변수를 탈락변수로 선택한다.

- 폐환경로는 직선 경로를 진입변수를 포함하여 두개의 기저변수로 구성하고, 진입변수에서 출발하여 다시 진입변수로 이어지는 경로이다. 이러한 경로는 선택한 진입변수에 대해 유일하게 존재.
- '주는 셀'이란 수송표 상에서 실행가능성을 유지하기 위해 값이 감소되어야 하는 변수의 위치
- 폐환경로 상의 변수 중에서는 진입변수를 기준으로 하여 홀수 개만큼 떨어진 변수들이 주는 셀이 된다. 이들 주는 셀 중 최소값을 가진 셀이 탈락변수가 된다.
- 최소값을 가진 셀을 탈락변수로 선택하는 이유는 모든 변수가 비음제약을 만족해야 하기 때문이며, 주는 셀 중 최소값이 '주는 값'이 된다. 폐환경로 상의 주는 셀이 아니 것을 '받는 셀'이라고 한다.

➢ 단계 6. 폐환경로 상의 주는 셀의 값에서 주는 값만큼 씩을 빼고, 받는 셀에는 이를 더해준 다음, 탈락변수는 비기저변수로 하고 대신 진입변수를 새로운 기저변수로 추가한다. 단계 2로 간다.

4.4 수송모형의 최적해 해법

✓ 페환경로의 특성

- 어떤 빈칸이든 오직 하나의 폐환경로만이 존재
- 폐환경로의 이동은 수송량이 할당된 칸들 사이에서만 가능
- 폐환경로의 방향은 임의로 선택할 수 있음
- 폐환경로의 수송량이 할당된 칸이나 빈칸을 지날 수 있다.
- 폐환경로는 서로 교차될 수 있음
- 구축된 폐환경로상에서 수송량이 증가된 칸과 수송량이 감소되는 칸의 개수는 같음
- 빈칸에서 출발한 폐환경로의 출발점은 다시 종착점이 됨

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4
공장 1	2 / 10	3 / 5	6 / 5	1
공장 2	1	6	3 / 10	2
공장 3	5	4	10 / 10	3 / 5

❖ MODI 법 (단계1: 북서코너법 이용)

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	2 10	3 5	6 5	1	20	
공장 2	1	6	3 10	2	10	
공장 3	5	4	10 10	3 5	15	
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45	
$\bar{V}$						

❖ MODI 법 (단계2: 기저해 구함, $C=U+V$)

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	2 10	3 5	6 5	1	20	0
공장 2	1	6	3 10	2	10	-3
공장 3	5	4	10 10	3 5	15	4
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45	
$\bar{V}$	2	3	6	-1		

❖ MODI 법 (단계3: 비기저해 수정 비용 (=C-U-V) 계산)

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	$\boxed{2}$ 10	$\boxed{3}$ 5	$\boxed{6}$ 5	1 $\boxed{1}$	20	0
공장 2	2 $\boxed{1}$	6 $\boxed{6}$	$\boxed{3}$ 10	6 $\boxed{2}$	10	-3
공장 3	-1 $\boxed{5}$	-3 $\boxed{4}$	$\boxed{10}$ 10	0 $\boxed{3}$ 5	15	4
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45	
$\bar{V}$	2	3	6	-1		

❖ MODI 법 (단계4: 진입변수 선택)

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	2 10	3 5	6 5	1 1	20	0
공장 2	2 1	6 6	3 10	6 2	10	-3
공장 3	-1 5	-3 4	10 10	0 3 5	15	4
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45	
$\bar{V}$	2	3	6	-1		

4.4 수송모형의 최적해 해법

❖ MODI 법 (단계5: 폐환경로 설정 및 탈락변수 선택)

수요지 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	2 10	3 5	6 5	1 1	20	0
공장 2	2 1	6 6	3 10	6 2	10	-3
공장 3	-1 5	-3 4	10 10	0 3 5	15	4
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45	
$\bar{V}$	2	3	6	-1		

❖ MODI 법 (단계6: 새로운 기저해 설정)

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	2 10	3 ~~5~~ 0	6 ~~5~~ 10	1 1	20	0
공장 2	2 1	6 6	3 10	6 2	10	-3
공장 3	-1 5	-3 4 5	10 ~~10~~ 5	0 3 5	15	4
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45	
$\bar{V}$	2	3	6	-1		

❖ MODI 법 (단계2: 기저해 구함, $C=U+V$)

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	2 10	3	6 10	1	20	0
공장 2	1	6	3 10	2	10	-3
공장 3	5	4 5	10 5	3 5	15	4
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45	
$\bar{V}$	2	0	6	-1		

❖ MODI 법 (단계3: 비기저해 수정 비용 (=C-U-V) 계산)

수요지 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	2 10	3 3	6 10	2 1	20	0
공장 2	2 1	9 6	3 10	6 2	10	-3
공장 3	-1 5	4 5	10 5	3 5	15	4
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45	
$\bar{V}$	2	0	6	-1		

❖ MODI 법 (단계4: 진입변수 선택)

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	2 10	3 3	6 10	2 1	20	0
공장 2	2 1	9 6	3 10	6 2	10	-3
공장 3	-1 5	4 5	10 5	3 5	15	4
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45	
$\bar{V}$	2	0	6	-1		

❖ MODI 법 (단계5: 폐환경로 설정 및 탈락변수 선택)

수요지 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	2 10	3 3	6 10	2 1	20	0
공장 2	2 1	9 6	3 10	6 2	10	-3
공장 3	-1 5	4 5	10 5	3 5	15	4
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45	
$\bar{V}$	2	0	6	-1		

❖ MODI 법 (단계6: 새로운 기저해 설정)

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	2 ~~10~~ 5	3 3	6 ~~10~~ 15	2 1	20	0
공장 2	2 1	9 6	3 10	6 2	10	-3
공장 3	-1 5 5	4 5	10 ~~5~~ 0	3 5	15	4
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45	
$\bar{V}$	2	0	6	-1		

❖ MODI 법 (단계2: 기저해 구함, $C=U+V$)

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	[2] 5	[3]	[6] 15	[1]	20	0
공장 2	[1]	[6]	[3] 10	[2]	10	-3
공장 3	[5] 5	[4] 5	[10]	[3] 5	15	3
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45	
$\bar{V}$	2	1	6	0		

4.4 수송모형의 최적해 해법

❖ MODI 법 (단계3: 비기저해 수정 비용 (=C-U-V) 계산)

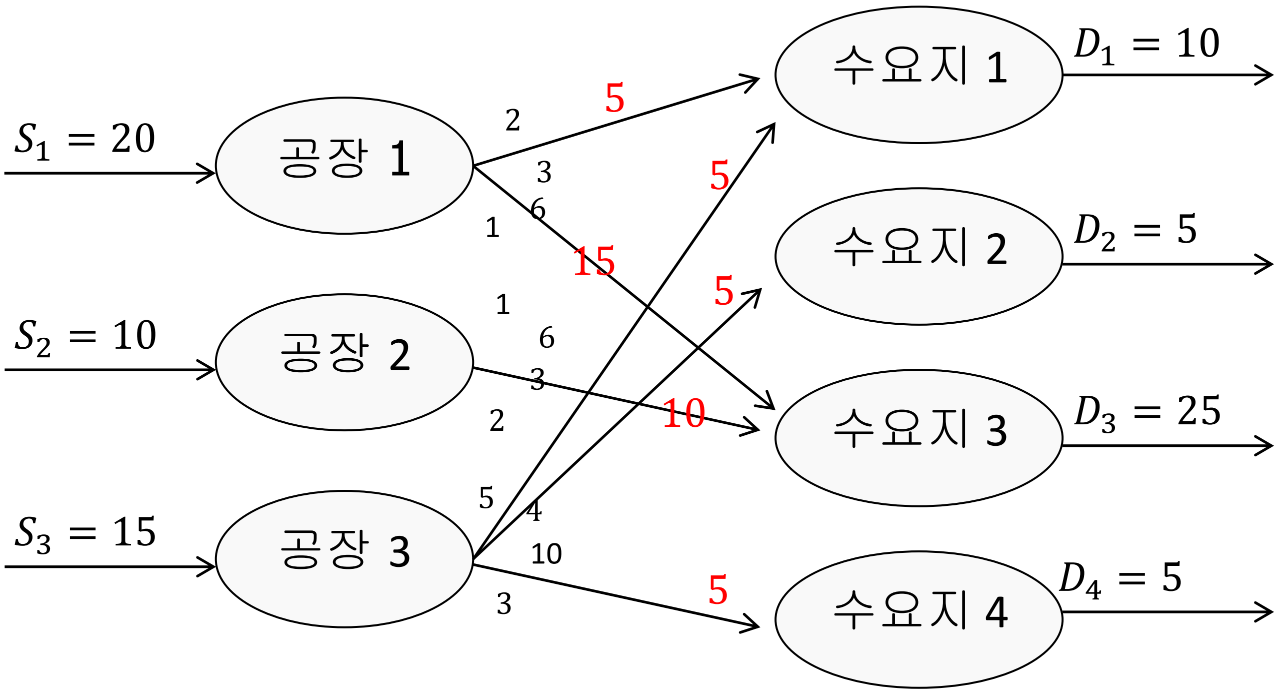
수요지 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	$\boxed{2}$ 5	2 $\boxed{3}$	$\boxed{6}$ 15	1 $\boxed{1}$	20	0
공장 2	2 $\boxed{1}$	8 $\boxed{6}$	$\boxed{3}$ 10	5 $\boxed{2}$	10	-3
공장 3	$\boxed{5}$ 5	$\boxed{4}$ 5	1 $\boxed{10}$	$\boxed{3}$ 5	15	3
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45	
$\bar{V}$	2	1	6	0		

❖ 총비용=190백만원 210 240 195

❖ [예제] AI 맥주㈜

➢ 최적 수송 네트워크

✓ 최소비용 : 190백만원



❖ 디딤돌 법

- MODI법에서 진입변수를 선택하기 위해 쌍대 변수 값을 계산하는 과정(단계 2-4)을 수행하였는데, 디딤돌법은 진입변수 선택을 위한 계산을 미리 하지 않는 방법
- 알고리즘
  - 단계 1. 초기의 실행가능해를 하나 구한다. 이를 위해서는 북서코너법, 최소비용법, 보겔 근사법, 러셀 근사법 등 중 하나를 이용하면 된다.
  - 단계 2. 현재의 각 비기저변수에 대해 폐환경로를 구축하고, 해당 비기저변수값을 현재의 0에서 1로 값을 1만큼 증진 시, 목적함수 값의 변화분을 계산한다.
    - 목적함수 값의 변화분은 (폐환경로를 구성하는 셀 중의 받는 셀들의 단위 수송비용의 합)-(폐환경로 상의 주는 셀들의 단위 수송비용의 합)으로 계산
  - 단계 3. 목적함수 값의 변화분이 모두 음이 아니라면 현 상태가 최적이므로 중단한다. 그러나 어느 하나라도 음의 값을 가진 것이 있다면 단계 4를 수행한다.
  - 단계 4. 최소의 변화 값을 주는 셀(비기저변수)을 진입변수로 하고, 그에 해당되는 폐환경로 상의 한 변수를 탈락변수로 정한다. 주는 셀에는 주는 값을 빼고, 받는 셀에서는 주는 값을 더한 후, 단계 2를 다시 수행한다.

❖ 디딤돌 법 (단계1: 북서코너법 이용)

수요지 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	2 10	3 5	6 5	1	20	
공장 2	1	6	3 10	2	10	
공장 3	5	4	10 10	3 5	15	
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45	
$\bar{V}$						

4.4 수송모형의 최적해 해법

❖ 디딤돌 법 (단계2: 각 비기저해의 변화분 계산)

수요지 / 공급지	수요지 1		수요지 2		수요지 3		수요지 4		생산용량 (S_i)
공장 1	10	2	5	3	5	6	1+10-3-6	1	20
공장 2	1+6-2-3	1	6+6-3-3	6	10	3	2+10-3-3	2	10
공장 3	5+6-2-10	5	4+6-3-10	4	10	10	5	3	15
소요량 (D_j)	10		5		25		5		45

4.4 수송모형의 최적해 해법

❖ 디딤돌 법 (단계4: 기저해 계산)

수요지 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2 10	3 ~~5~~ 0	6 ~~5~~ 10	1+10-3-6 1	20
공장 2	1+6-2-3 1	6+6-3-3 6	3 10	2+10-3-3 2	10
공장 3	5+6-2-10 5	4+6-3-10 4 5	10 ~~10~~ 5	3 5	15
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45

4.4 수송모형의 최적해 해법

❖ 디딤돌 법 (단계2: 비기저해 변화분 계산)

수요지 / 공급지	수요지 1		수요지 2		수요지 3		수요지 4		생산용량 (S_i)
		단가		단가		단가		단가	
공장 1	10	2	3+10-6-4	3	10	6	1+10-3-6	1	20
공장 2	1+6-2-3	1	6+10-3-4	6	10	3	2+10-3-3	2	10
공장 3	5+6-2-10	5	5	4	5	10	5	3	15
소요량 (D_j)	10		5		25		5		45

❖ 디딤돌 법 (단계4: 기저해 계산)

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2 ~~10~~ 5	3+10-6-4 3	6 ~~10~~ 15	1+10-3-6 1	20
공장 2	1+6-2-3 1	6+10-3-4 6	3 10	2+10-3-3 2	10
공장 3	5+6-2-10 5 5	4 5	10 ~~5~~ 0	3 5	15
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45

4.4 수송모형의 최적해 해법

❖ 디딤돌 법 (단계2: 비기저해 변화분 계산)

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2 5	3+5-4-2	3	6 15	1+5-3-2	1	20
공장 2	1+6-2-3	1	6-3+6-2+5-4	6	3 10	2-3+6-2+5-3	2	10
공장 3	5 5	4 5	10-6+2-5	10	3 5	15
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45

❖ 민감도 분석 (비기저변수의 목적함수계수의 변화)

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)	$\bar{U}$
공장 1	[2] 5	[3]	[6] 15	[1]	20	0
공장 2	[1]	[6] X+3-1	[3] 10	[2]	10	-3
공장 3	[5] 5	[4] 5	[10] X-3-6	[3] 5	15	3
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45	
$\bar{V}$	2	1	6	0		

❖ 민감도 분석 (기저변수의 목적함수계수의 변화)

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4		$\bar{U}$	
공장 1	2 5	3	6 15	1	U1+v1=2+x U1+v3=6	0	X-3
공장 2	1	6	3 10	2	U2+v3=3	-3	X-6
공장 3	5 5	4 5	10	3 5	U3+v1=5 U3+v2=4 U3+v4=3	3	0
소요량 (D_j)	10	5	25	5			
$\bar{V}$	2	1	6	0			
	5	4	9-x	3			

❖ 민감도 분석 (기저변수의 목적함수계수의 변화)

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4		$\bar{U}$	
공장 1	2 5	3	6 15	1	3-4-x+3 1-3-x+3	0	X-3
공장 2	1	6	3 10	2	1-5-x+6 6-4-x+6 2-3-x+6	-3	X-6
공장 3	5 5	4 5	10	3 5	10-9+x	3	0
소요량 (D_j)	10	5	25	5	X<=1		
$\bar{V}$	2	1	6	0	X<=2		
	5	4	9-x	3	X<=1		

❖ 불균형 수송문제

- 총수요량과 총공급량이 일치하지 않는 수송문제 (공급>수요)

공급지 \ 수요지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2	3	6	1	20
공장 2	1	6	3	2	20
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	10	5	25	5	45 55

❖ 불균형 수송문제

- 총수요량과 총공급량이 일치하지 않는 수송문제 (공급>수요)

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	수요지 5	생산용량 (S_i)
공장 1	2	3	6	1	0	20
공장 2	1	6	3	2	0	20
공장 3	5	4	10	3	0	15
소요량 (D_j)	10	5	25	5	10	55

4.5 수송문제의 형태

❖ 불균형 수송문제

- 총수요량과 총공급량이 일치하지 않는 수송문제 (공급<수요)

수요지 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2	3	6	1	20
공장 2	1	6	3	2	10
공장 3	5	4	10	3	15
소요량 (D_j)	10	5	25	10	45 50

❖ 불균형 수송문제

➢ 총수요량과 총공급량이 일치하지 않는 수송문제 (공급<수요)

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	2	3	6	1	20
공장 2	1	6	3	2	10
공장 3	5	4	10	3	15
공장 4	0	0	0	0	5
소요량 (D_j)	10	5	25	10	55

4.5 수송문제의 형태

❖ 최대화문제

➢ 최소화문제로 변화

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \quad \rightarrow \quad \text{Min} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (-C_{ij}) X_{ij}$$

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	-2	-3	-6	-1	20
공장 2	-1	-6	-3	-2	10
공장 3	-5	-4	-10	-3	15
소요량 (D_j)	10	5	25	10	55

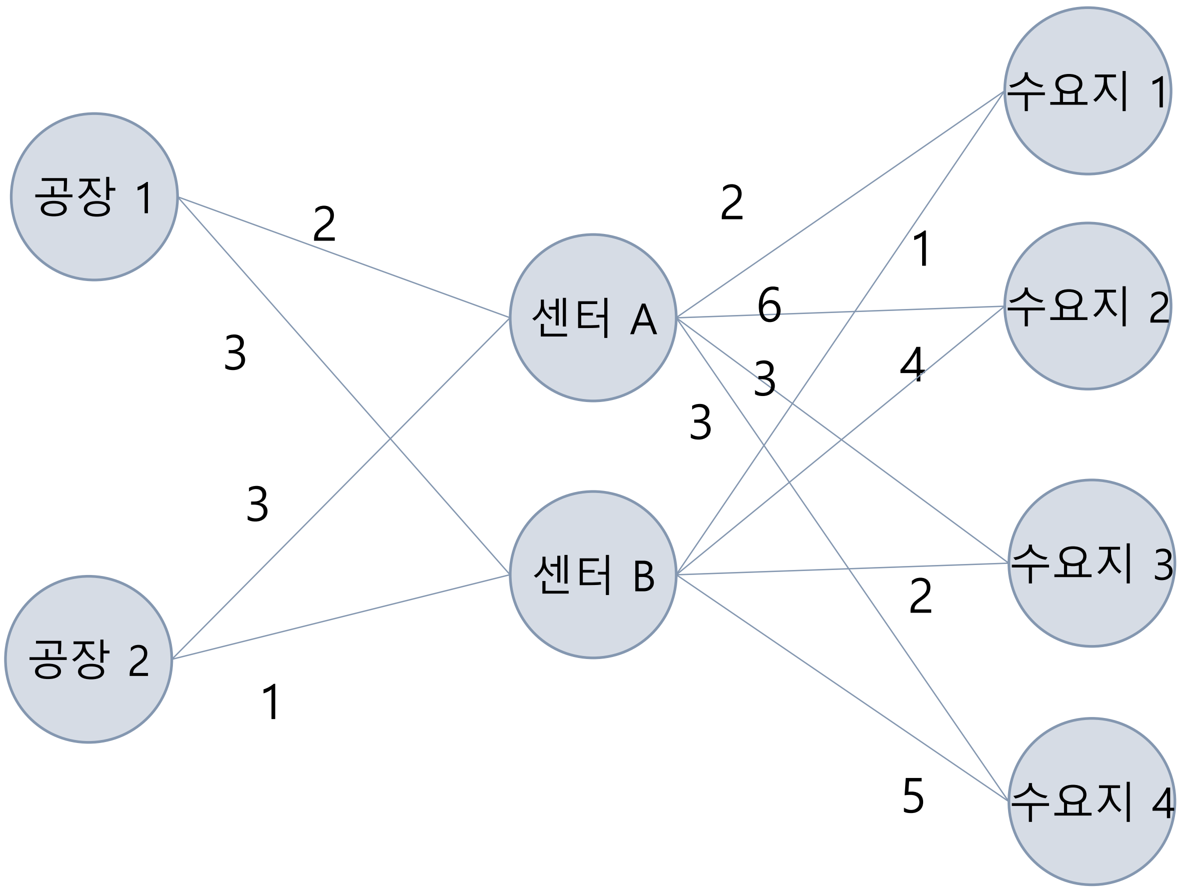
❖ 이송문제

➢ 2 개의 공장에서 4개의 수요지에 물품을 공급하는 상황에서, 중간에 2 개의 물류 센터를 거친 후 수송이 이루어진다고 한다. 여기서, 집하장에서의 수요는 없다고 가정한다. 최소의 수송비용을 갖는 수송방안?

공급지 \ 경유지	A	B	공급량
공급지1	2	3	500
공급지2	3	1	400

경유지 \ 수요지	수요지1	수요지2	수요지3	수요지4
A	2	6	3	3
B	1	4	2	5
수요량	200	150	350	300

❖ 이송문제



4.5 수송문제의 형태

❖ 이송문제

➢ 수송비용 계산

공급지	수요지	물류센터		최소비용 (경로)
		A	B	
공장 1	수요지 1 수요지 2 수요지 3 수요지 4	2+2=4 2+6=8 2+3=5 2+3=5	3+1=4 3+4=7 3+2=5 3+2=5	4 (A, B) 7 (B) 5 (A, B) 5 (A, B)
공장 2	수요지 1 수요지 2 수요지 3 수요지 4	3+2=5 3+6=9 3+3=6 3+3=6	1+1=2 1+4=5 1+2=3 1+5=6	2 (B) 5 (B) 3 (B) 6 (A, B)

❖ 이송문제

➢ 수송문제로 변환한 이송문제

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	4	7	5	5	500
공장 2	2	5	3	6	400
소요량 (D_j)	200	150	350	300	900 1,000

4.5 수송문제의 형태

❖ 이송문제

➢ 수송문제로 변환환 이송문제

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량 (S_i)
공장 1	4	7	5	5	500
공장 2	2	5	3	6	400
공장 3	0	0	0	0	100
소요량 (D_j)	200	150	350	300	1,000

4.6 할당모형의 특징

❖ 할당모형 (assignment problem)

- 수송문제에서 각 공급지 별 공급량과 각 수요지 별 수요량이 모두 1인 모형
- 수리모형

$$Min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij}$$

$$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1, \quad j = 1,2,\ldots,n$$

$$X_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2,\ldots,n; j = 1,2,\ldots,n$$

❖ 할당모형 (assignment problem)

➢ 특징

✓ 결정변수 X_{ij}는 0 또는 1의 값만 갖는다. 수송문제의 특징에서와 같이 할당문제의 해인 X_{ij}는 정수값만을 가지는데, 할당문제의 제약식인 $\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1$과 $\sum_{i=1}^{m} X_{ij}$=1을 만족하여야 하므로 X_{ij}는 0이나 1만을 가진다.

✓ 항상 퇴화해가 된다. 할당문제의 기저변수의 수는 $n + m - 1 = 2n - 1$개이지만, $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = n$이고 X_{ij}는 0이나 1 만을 가지므로 총 $2n - 1$개의 변수 중에서 n개의 변수만 1의 값이 가능하고, 나머지 $n - 1$개의 기저변수는 0의 값을 가진다.

✓ 비용계수 c_{ij}에서 임의의 상수를 빼거나 더해도 최적해에는 영향이 없다. 즉, 상수 p_i와 q_j에 대해서 c_{ij} 대신 $C'_{ij} = C_{ij} - p_i - q_j$를 사용해도 된다.

❖ 헝가리 해법(Hungarian Method)

- 헝가리 수학자 에거베리(Egervary)가 제안하고 쿤(Kuhn)이 개발
  - ✓ Vogel 법에서 이용하고 있는 기회비용의 개념도입
- 알고리즘
  - ✓ 단계 1. 각 공급지 행에서 최소비용을 뺀 후, 각 수요지 열에서 최소비용을 빼서 기회 비용표를 작성한다. 즉, 기회비용표를 위한 C_{ij}를 $C_{ij} - p_i - q_j$ 행태로 구한다. 여기서, p_i는 행 i 에서 최소비용을 나타내고, q_j는 j에서의 최소비용을 나타낸다.
  - ✓ 단계 2. 현재의 기회비용표의 0값을 최소의 직선을 이용해서 지우고,이 때 사용한 직선 수가 행의 수(n)와 같으면 단계 4를 행한다. 그렇지 않다면, 단계 3을 실행한다.
  - ✓ 단계 3. 직선으로 지우지 않은 값 중에서 최소값을 찾는다. 직선으로 지워지지 않은 값에서는 이 값을 빼고, 직선으로 두 번 지워진 값에 대해서는 이 값을 더한다. 단계 2로 되돌아 간다.
  - ✓ 단계 4. 현재 배당 상태가 최적해 상태인데, 최적해는 기회비용 (현재의 수정비용)이 0인 곳 중에서 행과 열에 각각 1개씩 할당되도록 할당하면 된다.

❖ 예제

➢ 5가지의 신규기획 과제에 대해 각 구성원별 최대 1개 과제를 전적으로 맡겨서 수행하려고 한다. 각 과제 별로 예상되는 작성일자는 구성원의 숙련도별로 다른 데, 조사 결과 다음과 같다고 한다. 어떤 과제를 어느 구성원이 수행하는 것이 좋은가?

구성원 / 과제	구성원 1	구성원 2	구성원 3	구성원 4	구성원 5
기획과제 1	3	7	8	6	5
기획과제 2	4	8	10	6	6
기획과제 3	5	7	9	6	7
기획과제 4	4	7	10	6	8
기획과제 5	6	9	11	10	9

❖ 예제

➢ 수송계획법

구성원 / 과제	구성원 1	구성원 2	구성원 3	구성원 4	구성원 4	공급
기획과제 1	3	7	8	6	5	1
기획과제 2	4	8	10	6	6	1
기획과제 3	5	7	9	6	7	1
기획과제	4	7	10	6	8	1
기획과제	6	9	11	10	9	1
수요	1	1	1	1	1	

4.7 할당모형의 해법

❖ 예제

➢ 단계1: 기회비용표 작성

비용표 $\{C_{ij}\}$					행별 최소 비용 $\{p_i\}$	기회비용표 $\{C_{ij} - p_i\}$					기회비용표 $\{\acute{C}_{ij}\}$ $\{C_{ij} - p_i - q_i\}$				
3	7	8	6	5	3	0	4	5	3	2	0	2	1	2	0
4	8	10	6	6	4	0	4	6	2	2	0	2	2	1	0
5	7	9	6	7	5	0	2	4	1	2	0	0	0	0	0
4	7	10	6	8	4	0	3	6	2	4	0	1	2	1	2
6	9	11	10	9	6	0	3	5	4	3	0	1	1	3	1
					열별최소비용 $\{q_i\}$	0	2	4	1	2					

4.7 할당모형의 해법

❖ 예제

➢ 단계 2. 현재의 기회비용표의 0값을 최소의 직선을 이용해서 지우기

0	2	1	2	0
0	2	2	1	0
0	0	0	0	0
0	1	2	1	2
0	1	1	3	1

0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
0	0	1	0	2
0	0	0	2	1

0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	1
0	0	1	0	2
0	0	0	2	1

➢ 단계 3. 직선으로 지우지 않은 값 중에서 최소값을 찾는다. 직선으로 지워지지 않은 값에서는 이 값을 빼고, 직선으로 두 번 지워진 값에 대해서는 이 값을 더한다. 단계 2로 되돌아 간다.

4.7 할당모형의 해법

❖ 예제

➢ 단계 4. 최적해는 기회비용 (현재의 수정비용)이 0인 곳 중에서 행과 열에 각각 1개씩 할당되도록 할당

0	1	0	1	$\boxed{0}$
0	1	1	$\boxed{0}$	0
1	0	$\boxed{0}$	0	1
0	$\boxed{0}$	1	0	2
$\boxed{0}$	0	0	2	1

5+6+9+7+6=33

$\boxed{0}$	1	0	1	0
0	1	1	0	$\boxed{0}$
1	0	$\boxed{0}$	0	1
0	0	1	$\boxed{0}$	2
0	$\boxed{0}$	0	2	1

3+6+9+6+9=33

0	1	0	1	$\boxed{0}$
$\boxed{0}$	1	1	0	0
1	0	$\boxed{0}$	0	1
0	0	1	$\boxed{0}$	2
0	$\boxed{0}$	0	2	1

5+4+9+6+9=33

$\boxed{0}$	1	0	1	0
0	1	1	0	$\boxed{0}$
1	$\boxed{0}$	0	0	1
0	0	1	$\boxed{0}$	2
0	0	$\boxed{0}$	2	1

3+6+7+6+11=33

교육부 Ministry of Education

NRF 한국연구재단 National Research Foundation of Korea

thank you

본 과제(결과물)는 교육부와 한국연구재단의 재원으로 지원을 받아 수행된
디지털신기술인재양성 혁신공유대학사업의 연구결과입니다.

Convergence and Open Sharing System COSS 인공지능 전남대학교 CHONNAM NATIONAL UNIVERSITY 성균관대학교 SUNGKYUNKWAN UNIVERSITY KNU 경북대학교 KYUNGPOOK NATIONAL UNIVERSITY 전주대학교 JEONJU UNIVERSITY 서울시립대학교 UNIVERSITY OF SEOUL 서울과학기술대학교 SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY 영진전문대학교 YEUNGJIN UNIVERSITY