AI알고리즘

선형계획법의 대수적 해법

수퍼스타를 키우는 곳
전주대학교

학습내용

- 심플렉스법의 절차
- 심플렉스법의 적용

학습목표

- 기저 실행 가능해를 설명할 수 있다.
- 심플렉스법의 절차를 알고 설명할 수 있다.

선형계획모형의 심플렉스법

심플렉스법의 절차

심플렉스법의 절차

❖ 심플렉스법(Simplex Method)

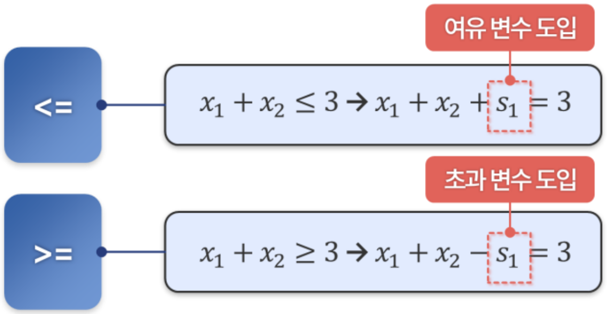
- 1947년 조지 댄치그(George Dantzig)에 의해 개발
- 경우에 따라 최적해를 구하지 못하는 문제가 발생
- 실행 가능 영역의 정점들을 목적 함수 값이 개선되는 방향으로 순차적으로 찾아가 궁극적으로 최적해에 도달하는 반복적인 알고리즘

❖ 용어

- 심플렉스 표
  - 목적 함수와 제약식의 반복적 계산이 아닌 표 안의 숫자 변형으로 최적해 도출 가능
  - 일정 규칙을 따르면 궁극적으로 원하는 최적해 도출 가능

Basic	z	...	변수	...	...	Solution	ratio
z		$Z_j - C_j$					
기저 변수							
...							

- 기저해
  - 부등식을 등식으로 전환하기 위해 몇 가지 변수 더 첨가하게 됨
  - m개의 제약 조건과 n개의 변수로 총 변수의 숫자는 m+n개
  - m개의 변수만 값을 가지고, 나머지 변수는 0으로 전환되는 형태
- 실행 가능한 기저해
  - 기저해에서 실행 가능해이면서 동시에 기저해로부터 얻어진 모든 변수가 비음인 경우
- 여유 변수와 초과 변수
  - 심플렉스법으로 활용 위해 부등식을 등식으로 전환시켜야 하는 경우 도입



심플렉스법의 절차

❖ 용어

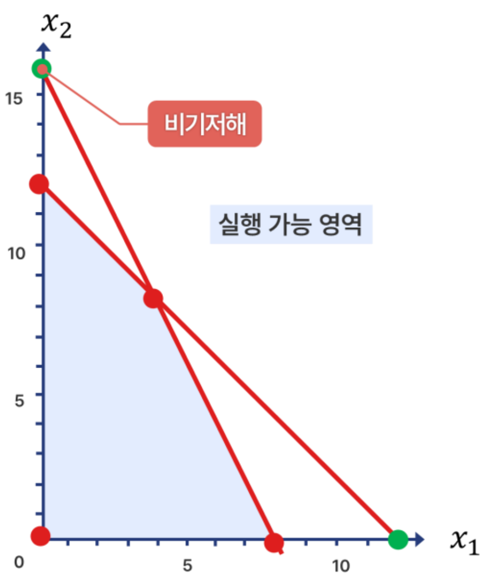
- 진입 기저 변수와 탈락 기저 변수
  - 아웃하는 정점으로 옮기게 되면서 기저해가 바뀜
  - 이때 비기저 변수에서 기저 변수로 들어간 변수를 진입 기저 변수
  - 기저 변수에서 비기저 변수로 전환된 변수를 탈락 기저 변수

❖ 기저해와 기저 실행 가능해

- 임의로 0으로 놓는 변수를 비기저 변수라 함
- 나머지 기저해를 만드는 변수를 기저 변수라 함
- n개의 변수 중 n-m개를 선택하는 경우의 수는 (nCn-m)만큼 존재
- 그 중에서 실행 가능 영역에 속하는 해를 기저 실행 가능해라 함

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 3x_1 + 2x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 16 \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 12 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

총 4개의 제약 조건



심플렉스법의 절차

❖ 기저해와 기저 실행 가능해

- 표준형

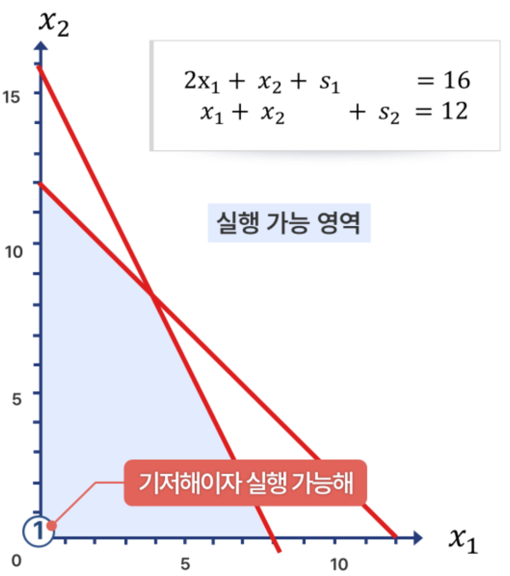
$$\begin{aligned} & Max\ \ 3x_1 + 2x_2 \\ & s.t. \\ & \quad 2x_1 + x_2 \le 16 \\ & \quad x_1 + x_2 \le 12 \\ & \quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & Max\ \ 3x_1 + 2x_2 \\ & s.t. \\ & \quad 2x_1 + x_2 + s_1 \qquad\quad = 16 \\ & \quad x_1 + x_2 \qquad\quad + s_2 = 12 \\ & \quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

- 기저 실행가능해의 최대 개수

$$_4C_2 = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

1. $x_1=x_2=0$일 때
   - 기저해는 s_1=16, s_2= 12이고 비음 조건을 모두 만족하므로 실행가능해

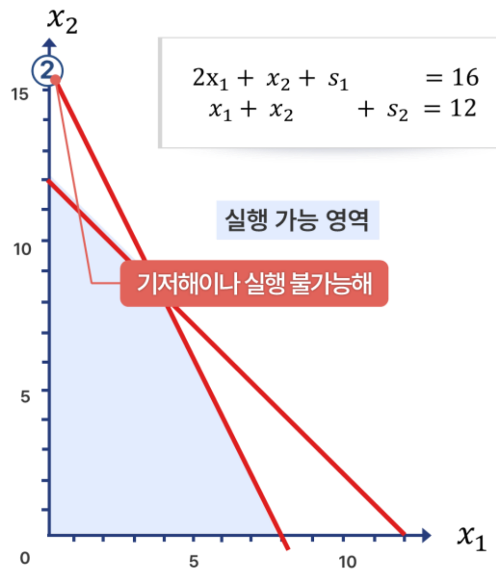


심플렉스법의 절차

❖ 민감도 분석

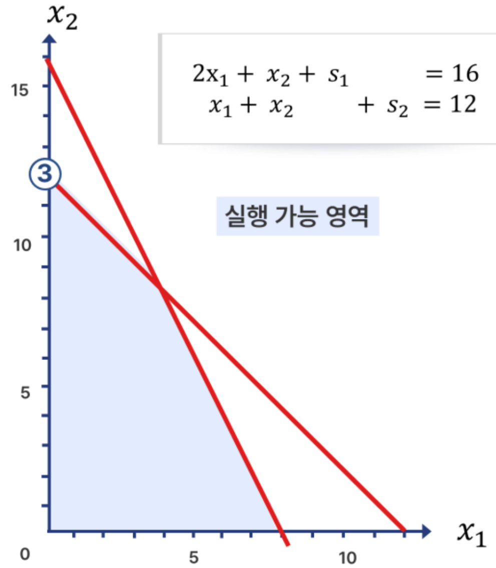
2. $x_1=s_1=0$일 때

- 기저해는 $x_2=16, s_2=-4$이고 비음 조건을 모두 만족하지 못하므로 실행 불가능해



3. $x_1=s_2=0$일 때

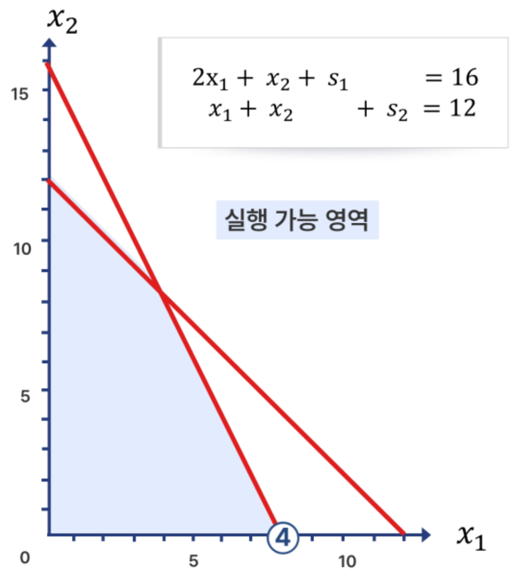
- 기저해는 $x_2=12, s_1=4$이고 비음 조건을 모두 만족하므로 실행 가능해



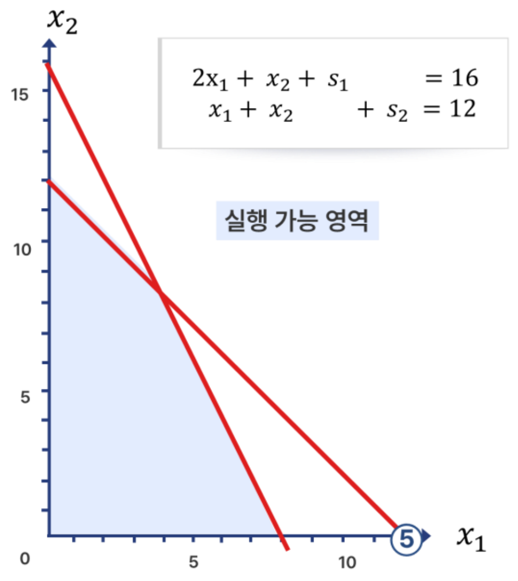
심플렉스법의 절차

❖ 민감도 분석

4. $x_2=s_1=0$일 때
   - 기저해는 $x_1=8, s_2=4$이고 비음 조건을 모두 만족하므로 실행 가능해



5. $x_2=s_2=0$일 때
   - 기저해는 $x_1=12, s_1=-8$이고 비음 조건을 모두 만족하지 못하므로 실행 불가능해

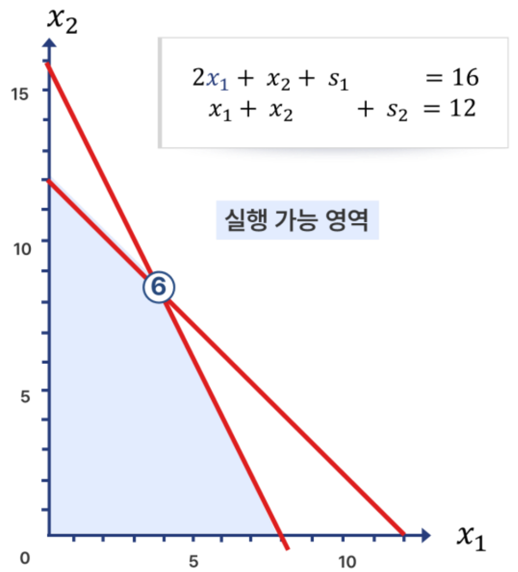


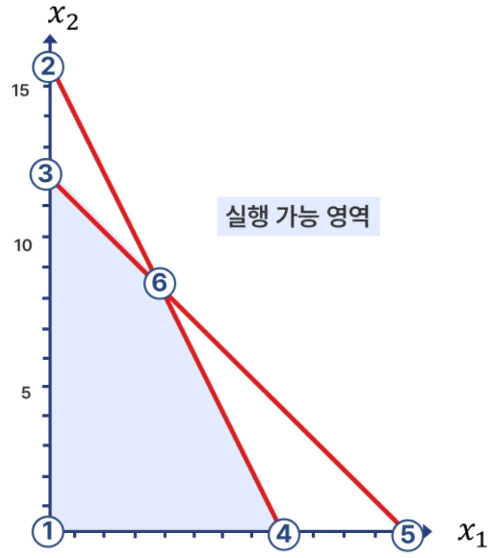
심플렉스법의 절차

❖ 민감도 분석

6. $s_1 = s_2 = 0$일 때

- 기저해는 $x_1 = 4, x_2 = 8$이고 비음 조건을 모두 만족하므로 실행 가능해





심플렉스법의 절차

❖ 절차

1. 선형계획모형을 표준식으로 전환

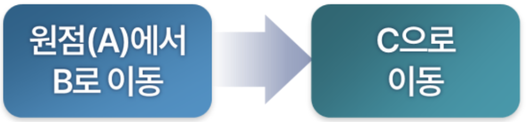
$Max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$Max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$
$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$	$s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i$
$x_j \ge 0$	$x_j \ge 0$
$i = 1, \cdots, m$	$s_i \ge 0$
$j = 1, \cdots, n$	$i = 1, \cdots, m$
	$j = 1, \cdots, n$

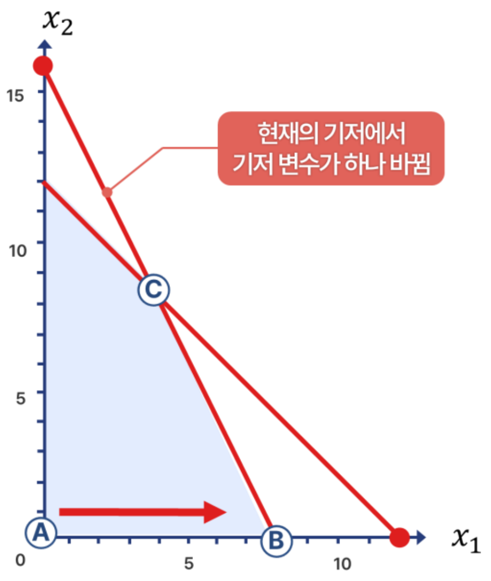
2. 최초 실행 가능 기저해를 선정
   ① 단계에서 작성된 표준식을 심플렉스표에 기입
   ② 원점에서부터 시작하는 수치들을 기입
3. 현재의 실행 가능해의 최적 여부 판단
4. 진입 기저 변수와 탈락 기저 변수의 선정
   - 진입 기저 변수
     - 목적함수값을 가장 크게 개선하는 변수
   - 탈락 기저 변수
     - 우변 상수열을 추축열의 기술계수로 나눈 값 중에서 가장 작은 양수를 가진 행의 기저 변수
5. 새로운 실행 가능 기저해의 선정

심플렉스법의 절차

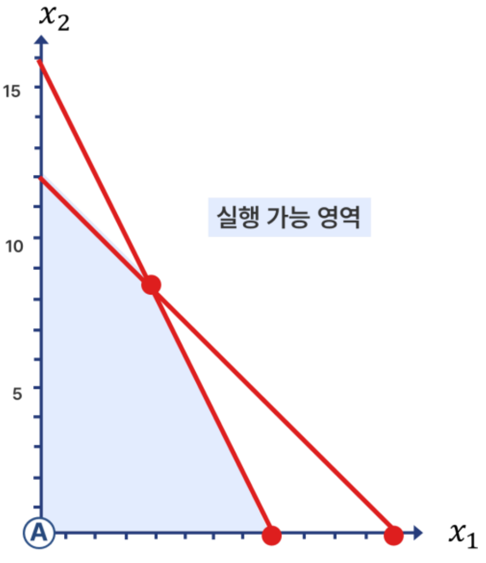
❖ 최적해 탐색 절차

- 시스템 관련 용어



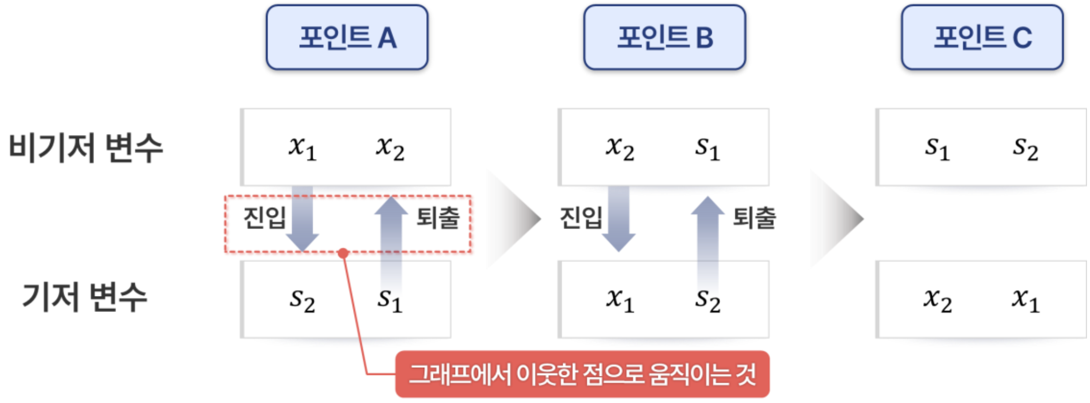


- 원점(A)은 변수 x_1 과 x_2 가 0이라는 뜻으로 비기저 변수
- x_1 또는 x_2 의 값을 증가시키면 최대화 문제이므로 목적 함수의 값을 개선시킬 수 있음
- x_1 은 3만큼, x_2 는 2만큼 증가되는데, 이 때 더 많이 증가되는 x_1 을 진입 변수로 선택



심플렉스법의 절차

❖ 최적해 탐색 절차 정리



선형계획모형의 심플렉스법

심플렉스법의 적용

심플렉스법의 적용

❖ 정점 A의 심플렉스 표

$$
\begin{aligned}
&Max\ z - 3x_1 - 2x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + x_2 + s_1 \qquad = 16 \\
&\qquad x_1 + x_2 \qquad + s_2 = 12 \\
&\qquad x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

여유 변수 s_1, s_2 도입

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	-3	-2	0	0	0	
s_1	0	2	1	1	0	16	
s_2	0	1	1	0	1	12	

$$
\begin{aligned}
&Max\ z - 3x_1 - 2x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + x_2 + s_1 \qquad = 16 \\
&\qquad x_1 + x_2 \qquad + s_2 = 12 \\
&\qquad x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

원문제를 등식으로 전환

등식의 계수를 그대로 심플렉스 표에 대입

마이너스 값을 찾음

기저 변수

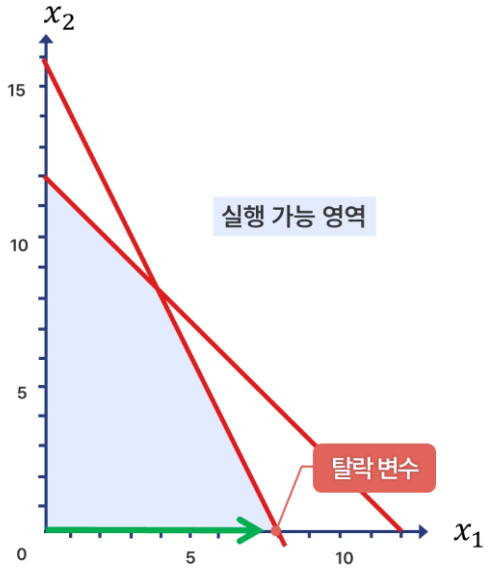
진입 변수

탈락 변수

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	-3	-2	0	0	0	
s_1	0	2	1	1	0	16	16/2
s_2	0	1	1	0	1	12	12/1

심플렉스법의 적용

❖ 정점 A의 심플렉스 표



심플렉스법의 적용

❖ 정점 B의 심플렉스 표

$$
\begin{aligned}
&Max\ z\ -\ 3x_1 - 2x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + x_2 + s_1 \qquad = 16 \\
&\qquad\ x_1 + x_2 \qquad + s_2 = 12 \\
&\qquad\ x_1, x_2,\ s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	-3	-2	0	0	0	
s_1	0	2	1	1	0	16	16/2
s_2	0	1	1	0	1	12	12/1

전부 2로 나눔

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	0	-1/2	3/2	0	24	
x_1	0	1	1/2	1/2	0	8	
s_2	0	0	1/2	-1/2	1	4	

심플렉스법의 적용

❖ 정점 B의 심플렉스 표

$$
\begin{aligned}
&Max\ z\ -\ 3x_1 - 2x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + x_2 + s_1 \qquad\quad = 16 \\
&\qquad\ \ x_1 + x_2 \qquad + s_2 = 12 \\
&\qquad\qquad\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

위 아래를 0으로
만들어 줌

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	-3	-2	0	0	0	
s_1	0	2	1	1	0	16	16/2
s_2	0	1	1	0	1	12	12/1

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	0	-1/2	3/2	0	24	
x_1	0	1	1/2	1/2	0	8	8/(1/2)
s_2	0	0	1/2	-1/2	1	4	4/(1/2)

심플렉스법의 적용

❖ 정점 B의 심플렉스 표

$$
\begin{aligned}
&Max\ z\ -\ 3x_1 - 2x_2\\
&s.t.\\
&\qquad 2x_1 + x_2 + s_1 \qquad\quad = 16\\
&\qquad\ \ x_1 + x_2 \qquad + s_2 = 12\\
&\qquad\ \ x_1, x_2,\ s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	-3	-2	0	0	0	
s_1	0	2	1	1	0	16	16/2
s_2	0	1	1	0	1	12	12/1

진입 변수

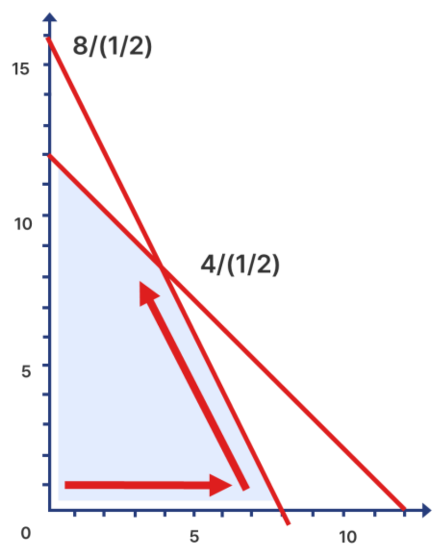
Basic	z	x_1	x_2			Solution	ratio
z	1	0	-1/2	3/2	0	24	
x_1	0	1	1/2	1/2	0	8	8/(1/2)
s_2	0	0	1/2	-1/2	1	4	4/(1/2)

심플렉스법의 적용

❖ 정점 B의 심플렉스 표

$$
\begin{aligned}
&Max\ z \qquad - 1/2x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad x_1 + 1/2x_2 + 1/2s_1 \qquad = 8 \\
&\qquad\qquad 1/2x_2 - 1/2s_1 + s_2 = 4 \\
&\qquad x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Basic	z	x_1	x_2	진입 변수	2	Solution	ratio
z	1	0	-1/2	0	0	24	
x_1	0	1	1/2	1	0	8	8/(1/2)
s_2 탈락 변수	0	0	1/2	0	1	4	4/(1/2)



심플렉스법의 적용

❖ 정점 C의 심플렉스 표

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ z \\
&s.t. \\
&\qquad x_1 \qquad + s_1 - \ \ s_2 \ = 4 \\
&\qquad\qquad x_2 - \ s_1 + 2s_2 \ = 8 \\
&\qquad x_1, x_2,\ s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

최적화에 도달

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	0	0	1	1	24	
x_1	0	1	0	1	-1	4	
x_2	0	0	1	-1	2	8	

❖ 최적해

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	0	0	1	1	24	
x_1	0	1	0	1	-1	4	
x_2	0	0	1	-1	2	8	

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
Ax &= b \\
A^{-1}Ax &= A^{-1}b
\end{aligned}
$$

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

심플렉스법의 적용

❖ 실행 가능성 조건

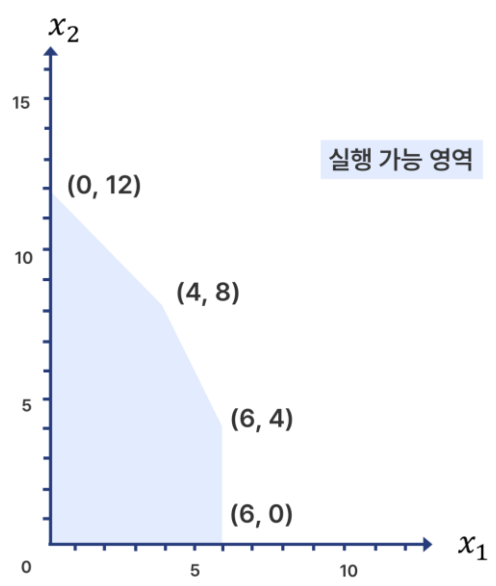
- 피벗 열이 결정됐을 때 작은 값을 취함
  - 실행 가능 영역 내에서 움직이려는 노력

❖ 심플렉스법의 전체 절차

- 단계0
  - 초기 기저 실행 가능해를 결정
- 단계1
  - 최적성 조건을 이용하여 진입 변수를 선택
  - 만약 진입 대상 변수가 없으면 현재 해를 최적해로 절차를 종료
- 단계2
  - 실행 가능성 조건을 이용하여 퇴출 변수를 선택
- 단계3
  - Gauss－Jordan 소거법을 활용하여 새로운 기저 실행 가능해를 찾고, 단계1로 감

❖ 예제 정리

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 16 \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 12 \\
&\qquad x_1 \le 6 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



심플렉스법의 적용

❖ 예제 정리

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\quad 2x_1 + x_2 \le 16 \\
&\quad x_1 + x_2 \le 12 \\
&\quad x_1 \le 6 \\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ z \quad - 150{,}000x_1 - 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\quad 2x_1 + x_2 + s_1 = 16 \\
&\quad x_1 + x_2 + s_2 = 12 \\
&\quad x_1 + s_3 = 6 \\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	-15	-10	0	0	0	0	
s_1	0	2	1	1	0	0	16	
s_2	0	1	1	0	1	0	12	
s_3	0	1	0	0	0	1	6	

가장 작은 값이 퇴출 변수

A

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	-15	-10	0	0	0	0	
s_1	0	2	1	1	0	0	16	8
s_2	0	1	1	0	1	0	12	12
s_3	0	1	0	0	0	1	6	6

B

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	0	-10	0	0	15	90	
s_1	0	0	1	1	0	-2	4	
s_2	0	0	1	0	1	-1	6	
x_1	0	1	0	0	0	1	6	

심플렉스법의 적용

❖ 예제 정리

B

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	0	-10	0	0	15	90	
s_1	0	0	1	1	0	-2	4	4
s_2	0	0	1	0	1	-1	6	6
x_1	0	1	0	0	0	1	6	

C

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	0	0	10	0	-5	130	
x_2	0	0	1	1	0	-2	4	
s_2	0	0	0	-1	1	1	2	
x_1	0	1	0	0	0	1	6	

C

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	0	0	10	0	-5	양수 값중 가장 작은 값	
x_2	0	0	1	1	0	-2		-2
s_2	0	0	0	-1	1	1	2	2
x_1	0	1	0	0	0	1	6	6

D

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	0	0	5	5	0	140	
x_2	0	0	1	-1	2	0	8	
s_3	0	0	0	-1	1	1	2	
x_1	0	1	0	0	0	0	4	

심플렉스법의 적용

❖ 예제 정리