AI 알고리즘

선형계획법의 기본 개념

수퍼스타를 키우는 곳
전주대학교

선형계획모형의 민감도 분석과 쌍대문제

민감도 분석

민감도 분석

❖ 민감도 분석과 컴퓨터

- 계수와 최적해가 잘못 됐을 때 컴퓨터가 귀한 시절에는 거의 풀 수 없었음
- 하드웨어, 소프트웨어 발전
- 기계학습, 딥러닝 모형 구축 후 조정하는 과정

❖ 민감도 분석을 위한 변화의 종류

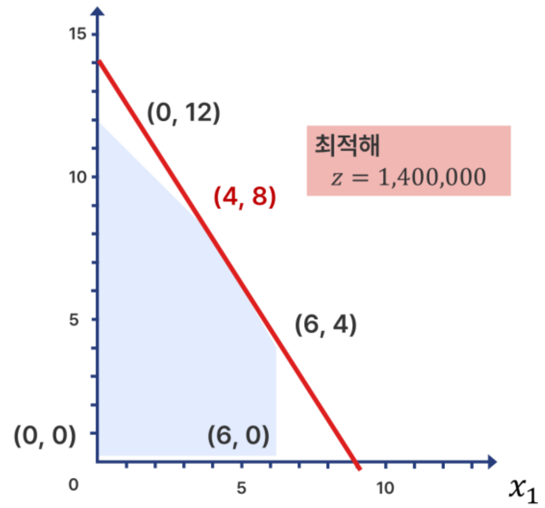
- 목적 함수의 변화
  - 하나의 계수가 부정확하거나 다른 값을 갖게 되면 우리가 내린 의사결정이 어떠한 영향을 받게 되는가?
- 자원가용량의 변화
  - 여러 개 변화하면 우리가 내린 의사결정이 어떠한 영향을 받게 되는가?

민감도 분석

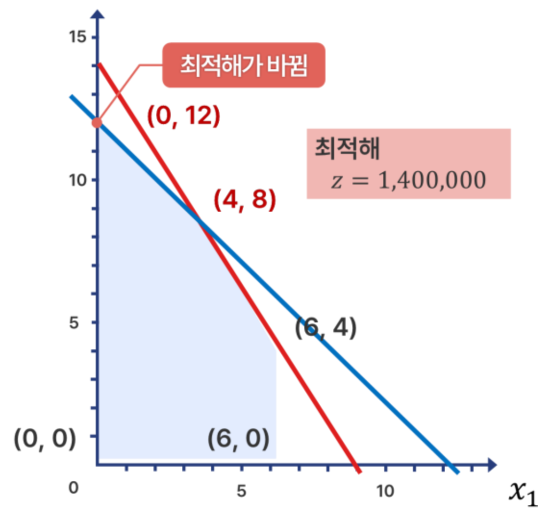
❖ 민감도 분석

- 기울기의 변화와 최적해

$$
\begin{array}{ll}
 & \quad\quad C_1 \quad\quad\quad\quad\quad C_2 \\
Max & \boxed{150{,}000x_1 + 100{,}000x_2} \\
s.t. & \\
 & 2x_1 + x_2 \le 16 \\
 & x_1 + x_2 \le 12 \\
 & x_1 \le 6 \\
 & x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{ll}
 & \quad\quad C_1 \quad\quad\quad\quad\quad C_2 \\
Max & \boxed{150{,}000x_1 + 100{,}000x_2} \\
s.t. & \\
 & 2x_1 + x_2 \le 16 \\
 & x_1 + x_2 \le 12 \\
 & x_1 \le 6 \\
 & x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$

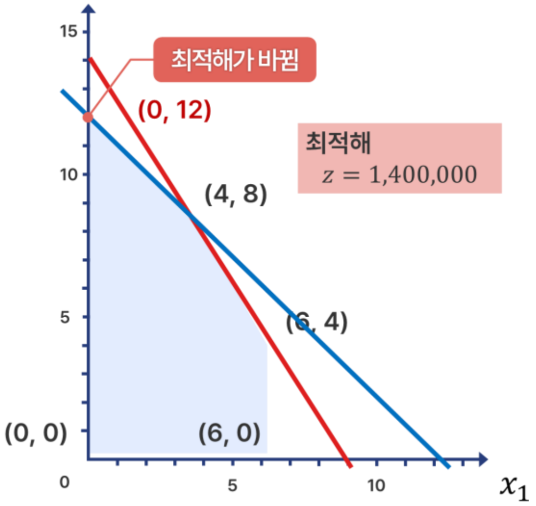


민감도 분석

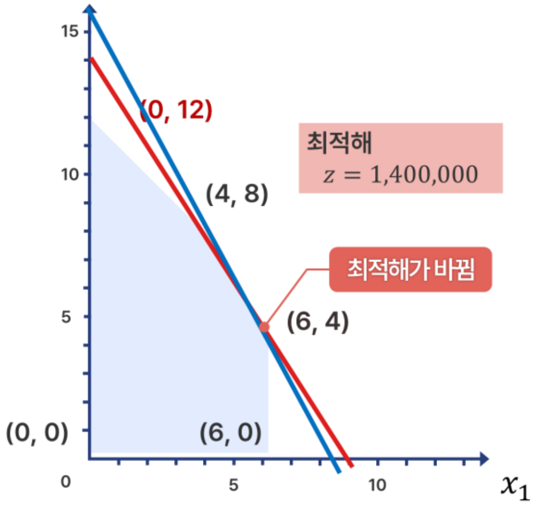
❖ 민감도 분석

- 기울기의 변화와 최적해

$$
\begin{array}{ll}
 & \quad C_1 \qquad\qquad\quad C_2 \\
Max & \boxed{150{,}000x_1 + 100{,}000x_2} \\
s.t. & \\
 & 2x_1 + x_2 \le 16 \\
 & x_1 + x_2 \le 12 \\
 & x_1 \le 6 \\
 & x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{ll}
 & \quad C_1 \qquad\qquad\quad C_2 \\
Max & \boxed{150{,}000x_1 + 100{,}000x_2} \\
s.t. & \\
 & 2x_1 + x_2 \le 16 \\
 & x_1 + x_2 \le 12 \\
 & x_1 \le 6 \\
 & x_1, x_2 \ge 0
\end{array}
$$



민감도 분석

❖ 민감도 분석

- C_1의 계수 변경

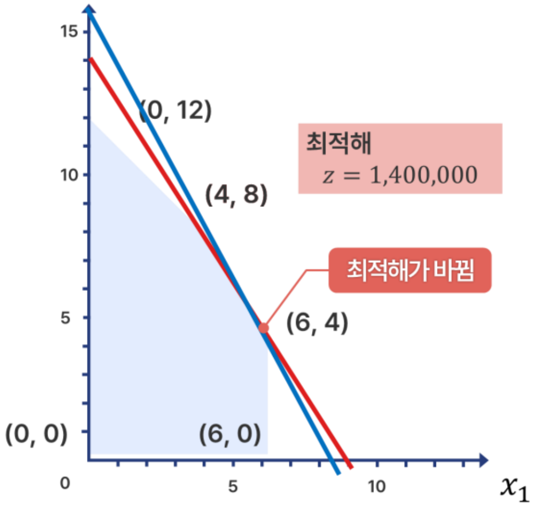
$$-2 \le -\frac{c_1}{100000} \le -1$$

마이너스 곱하기

$$1 \le \frac{c_1}{100000} \le 2$$

이 사이에 최적해가 있음

$$100000 \le c_1 \le 200000$$



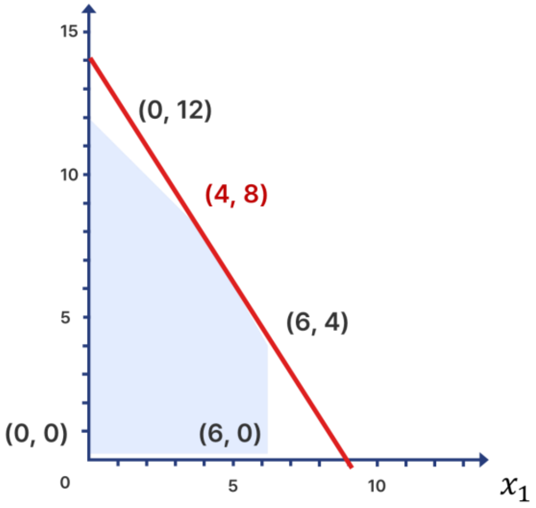
- C_2의 계수 변경

$$-2 \le -\frac{150000}{c_2} \le -1$$

$$1 \le \frac{150000}{c_2} \le 2$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{c_2}{150000} \le 1$$

$$75000 \le c_2 \le 150000$$



민감도 분석

❖ 민감도 분석

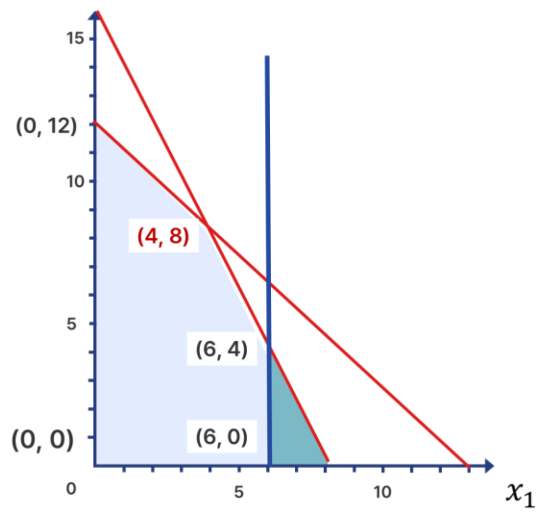
- 목적 함수의 변화
  - 목적 함수 계수들이 동시에 변할 때
    - 변동이 100%를 넘지 않으면 최적해는 변하지 않음

❖ 민감도 분석

- 가용자원의 변화

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 16 \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 12 \\
&\qquad \boxed{x_1 \qquad\quad \le 6} \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

최적화에 영향을
미치지 않음



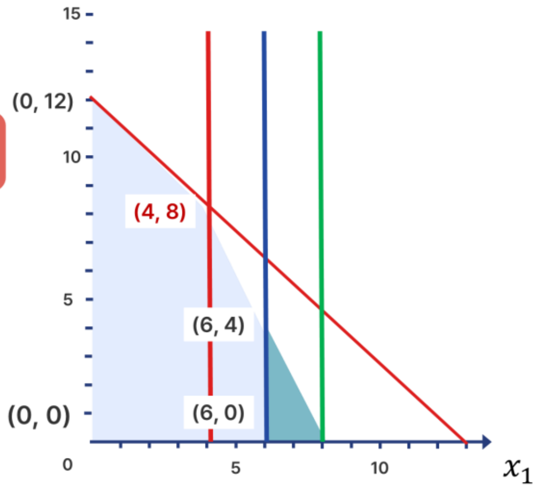
민감도 분석

❖ 민감도 분석

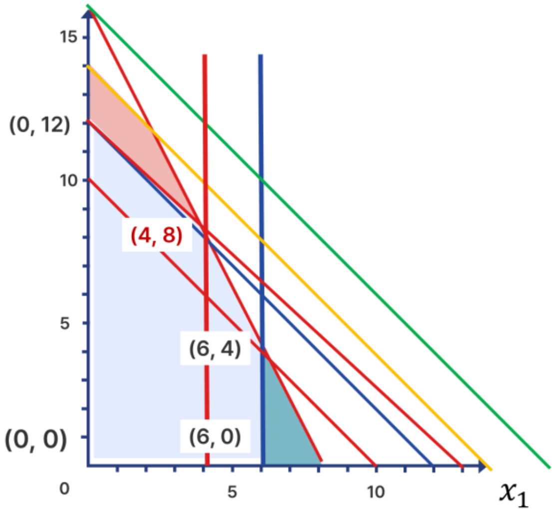
- 가용자원의 변화

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\quad 2x_1 + x_2 \le 16 \\
&\quad \boxed{x_1 + x_2 \le 12} \\
&\quad x_1 \le 6 \\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

두 번째 제약식의 경사를 따라서 움직임



$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\quad 2x_1 + x_2 \le \boxed{16} \\
&\quad x_1 + x_2 \le \boxed{12} \\
&\quad x_1 \le \boxed{6} \\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



선형계획모형의 민감도 분석과 쌍대문제

쌍대문제

쌍대문제

❖ 쌍대문제

- 모든 선형계획법(LP)문제는 쌍을 이루는 또 다른 선형계획문제인 쌍대문제(Dual Problem)와 밀접히 연관되어 있음

❖ 잠재가격

- 자원의 공급능력이 한 단위 추가됨으로써 발생하는 목적 함수의 증가량
- 수학적으로는 이를 쌍대변수라 함

❖ 수정 비용

- 최적해에서 0의 값을 가지는 변수의 값을 1단위 증가시킬 때에 발생하는 목적 함숫값의 변화
- 상대비용이라고도 함

❖ 원문제와 쌍대문제

- 원문제(Primal Problem)

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 16 \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 12 \\
&\qquad x_1 \le 6 \\
&\qquad x_1,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

- 쌍대문제(Dual Problem)

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ 16y_1 + 12y_2 + 6y_3 \\
&s.t. \\
&\qquad 2y_1 + y_2 + y_3 \ge 150000 \\
&\qquad y_1 + y_2 \ge 100000 \\
&\qquad y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

쌍대문제

❖ 쌍대문제의 경제학적 해석

- 원료를 확보하지 못한 ㈜소유가구는 ㈜공유가구에게 시장가격보다 웃돈(premium)을 붙여줄 테니 확보한 원료를 팔라는 제안
  이때 ㈜소유가구는 과연 각 원료별로 시장가격보다 얼마 정도의 웃돈을 책정하는 것이 합리적인 의사결정인가?
  - 목재: y_1,
  - 가죽: y_2,
  - 섬유: y_3
- ㈜소유가구에서 원료를 사갈 때 받을 수 있는 가격

$$w = 16y_1 + 12y_2 + 6y_3$$

상대 업체는 이 가격을 최소화하기 위해 노력할 것

- 침대 하나에서 얻을 수 있는 이익이 150,000원보다 커야 함

$$2y_1 + y_2 + y_3 \geq 150000$$

- 소파 하나에서 얻을 수 있는 이익이 100,000원보다 커야 함

$$y_1 + y_2 \geq 100000$$

- 결론

$$\begin{aligned} & Min\ \ 16y_1 + 12y_2 + 6y_3 \\ & s.t. \\ & \qquad 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 150000 \\ & \qquad y_1 + y_2 \geq 100000 \\ & \qquad y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

쌍대문제

❖ 원문제를 쌍대문제로 만드는 과정

- 원문제를 표준형(Standard Form)으로 전환
  - 표준형
    - 모든 제약식이 등식
    - 제약식에서 변수들은 모두 좌변으로 정리하여 0보다 크거나 같은 형태
  - 등식을 만들기 위한 변수를 도입
  - 상수인 우변(Right-Hand-Side) 값은 0보다 크거나 같아야 함
  - 모든 변수가 비음 조건을 만족하는 형태
  - 목적 함수의 최대화 문제는 최소화의 마이너스를 붙임

$$
\begin{aligned}
&Max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&s.t. \\
&\qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\qquad \qquad \vdots \\
&\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
&\qquad x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

쌍대문제

❖ 원문제를 쌍대문제로 만드는 과정

- 원문제의 제약식 하나에 쌍대문제의 쌍대변수(Dual Variable) 하나씩 대응
  - $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$
- 목적 함수
  - 우변 상수(b_1)와 이 제약식에 대응하는 쌍대변수 (y_1)의 곱을 구한 후 이것들을 모두 합함
  - $(b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m)$
- 제약식
  - 계수(a_{ij})와 각 제약식들에 대응하는 쌍대변수(y_i)들의 곱을 구한 후 이것들을 모두 합함
  - 부등 관계는 좌변이 우변보다 크거나 같은 관계로 정의

❖ 원문제의 표준형과 쌍대문제

- 원문제의 표준형

$$\begin{aligned}
&Max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&s.t. \\
&\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&\quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\qquad \vdots \\
&\quad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
&\qquad x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0
\end{aligned}$$

- 쌍대문제

$$\begin{aligned}
&Min \quad b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\
&s.t. \\
&\quad a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\
&\quad a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\
&\qquad \vdots \\
&\quad a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n
\end{aligned}$$

쌍대문제

❖ 원문제와 쌍대문제

- 원문제

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\quad 2x_1 + x_2 \le 16 \\
&\quad x_1 + x_2 \le 12 \\
&\quad x_1 \le 6 \\
&\quad x_1,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

부등식을 등식으로 변경

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 16 \\
&\quad x_1 + x_2 + x_4 = 12 \\
&\quad x_1 + x_5 = 6 \\
&\quad x_1,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

- 쌍대문제

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ 16y_1 + 12y_2 + 6y_3 \\
&s.t. \\
&\quad 2y_1 + y_2 + y_3 \ge 150000 \\
&\quad y_1 + y_2 \ge 100000 \qquad y_1,\ y_2,\ y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

쌍대문제

❖ 원문제의 일반형과 쌍대문제의 일반형

- 원문제의 일반형

$$
\begin{aligned}
&Max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&s.t. \\
&\qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\
&\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leq b_m \\
&\qquad x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

- 쌍대문제의 일반형

$$
\begin{aligned}
&Min \quad b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\
&s.t. \\
&\qquad a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\
&\qquad a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n \\
&\qquad y_1, y_2, \cdots, y_m \geq 0
\end{aligned}
$$

쌍대문제

❖ 원문제를 쌍대문제로 변환 방법

- 표준형으로 고치는데 시간이 오래 걸림
- 원문제의 각 제약식에 대해 한 개의 쌍대변수를 도입
- 원문제의 우변항으로 쌍대문제의 목적식을 만들며 이를 최소화
- 원문제의 제약식들에서 갖는 계수들을 가지고 쌍대문제 제약식의 계수를 만듦
- 원문제의 목적 함수의 계수를 가지고 우변항을 만듦

원문제	MAX	제약식 <= 형태
쌍대문제	MIN	변수>=0
제약식 = 형태	변수 >=0	변수 비음 제약 없음
비음 제약 없음	제약식 >=	제약식 =

- 원문제의 비음 조건은 쌍대문제의 제약식과 연결
- 변수는 비음 조건 0 보다 크거나 같음

쌍대문제

❖ 원문제를 쌍대문제로 변환

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ 150x_1 + 100x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 20x_1 + 40x_2 \ge 140 \\
&\qquad 30x_1 + 20x_2 \ge 120 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 140y_1 + 120y_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 20y_1 + \ 30y_2 \le 150 \\
&\qquad 40y_1 + \ 20y_2 \le 100 \\
&\qquad y_1,\ y_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

y_1 $\quad 140y_1 + 120y_2$

y_2 $\quad 20y_1 + \ 30y_2 \quad 150$

$40y_1 + \ 20y_2 \quad 100$

$y_1,\ y_2 \quad 0$

$\boxed{Max}$

$\le$

$\ge$

부등식을 비우고
Max를 붙임

$$
\begin{aligned}
&\boxed{Min}\ 150x_1 + 100x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 30x_1 + 40x_2 \boxed{=} 140 \\
&\qquad 30x_1 + 20x_2 \ge 120 \\
&\qquad x_1 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 140y_1 + 120y_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 30y_1 + \ 30y_2 \le 150 \\
&\qquad 40y_1 + \ 20y_2 = 100 \\
&\qquad y_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

y_1 $\quad 140y_1 + 120y_2$

y_2 $\quad 20y_1 + \ 30y_2 \quad 150$

$40y_1 + \ 20y_2 \quad 100$

$y_2 \quad 0$

Max

$\le$

$=$

$\ge$

쌍대문제

❖ 원문제를 쌍대문제로 변환

$$\boxed{Min}\ 150x_1 + 100x_2$$
$$s.t.$$
$$30x_1 + 40x_2 \boxed{=} 140$$
$$30x_1 + 20x_2 \geq 120$$
$$x_1 \geq 0$$

$$Max\ \ 140y_1 + 120y_2$$
$$s.t.$$
$$30y_1 + \ 30y_2 \leq 150$$
$$40y_1 + \ 20y_2 = 100$$
$$y_2 \geq 0$$

y_1

y_2

$140y_1 + 120y_2$

$20y_1 + \ 30y_2 \quad 150$

$40y_1 + \ 20y_2 \quad 100$

$y_2 \quad 0$

Max

$\leq$

$=$

$\geq$

$$Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2$$
$$s.t.$$
$$2x_1 + \ x_2 \ \leq 16$$
$$x_1 + \ x_2 \ \leq 12$$
$$x_1 \qquad \leq \ 6$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

$$Min\ \ 16y_1 + 12y_2 + 6y_3$$
$$s.t.$$
$$2y_1 + \ y_2 + \ y_3 \geq 150000$$
$$y_1 + \ y_2 \qquad \geq 100000$$
$$y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0$$

y_1

y_2

y_3

$16y_1 + 12y_2 + 6y_3$

$2y_1 + y_2 + y_3 \quad 150000$

$y_1 + y_2 \quad 100000$

$y_1,\ y_2,\ y_3 \quad 0$

Min

$\geq$

$\geq$

$\geq$

쌍대문제

❖ 원문제와 쌍대문제 상관관계

- 원문제가 최대화 문제이면 쌍대문제는 최소화 문제이고, 원문제가 최소화 문제이면 쌍대문제는 최대화 문제임
- 원문제로부터 정의된 쌍대문제로부터 이의 쌍대문제를 구하면 원문제가 됨
- 원문제가 무한 최적해(제한 없는 목적 함숫값)를 가지면 쌍대문제는 실행 불가능 문제
  - 역의 경우로 쌍대문제가 무한 최적해를 가지면 원문제는 실행 불가능한 문제

쌍대문제

❖ 상보여유정리(Complementary Slackness Theorem)

- 최적해가 X, Y인 경우

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n < b_i$ **이면** $y_i = 0$

$y_i > 0$ **이면** $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$

$x_j > 0$ **이면** $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m = c_j$

$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m > 0$ **이면** $x_j = 0$

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ 16y_1 + 12y_2 + 6y_3 \\
&s.t. \\
&\qquad 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 150000 \\
&\qquad y_1 + y_2 \geq 100000 \\
&\qquad y_1,\ y_2,\ y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

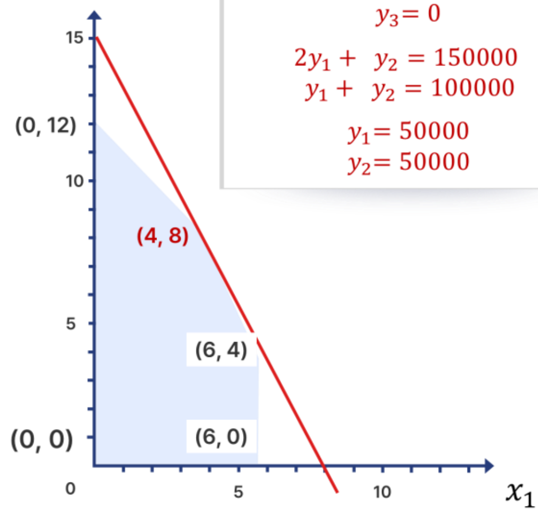
$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \leq 16 \\
&\qquad x_1 + x_2 \leq 12 \\
&\qquad x_1 \leq 6 \\
&\qquad x_1,\ x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

쌍대문제

❖ 상보여유정리(Complementary Slackness Theorem)

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ 16y_1 + 12y_2 + 6y_3 \\
&s.t. \\
&\quad 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 150000 \\
&\quad y_1 + y_2 \geq 100000 \\
&\quad y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\quad 2x_1 + x_2 \leq 16 \\
&\quad x_1 + x_2 \leq 12 \\
&\quad x_1 \leq 6 \\
&\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



$y_3 = 0$

$2y_1 + y_2 = 150000$

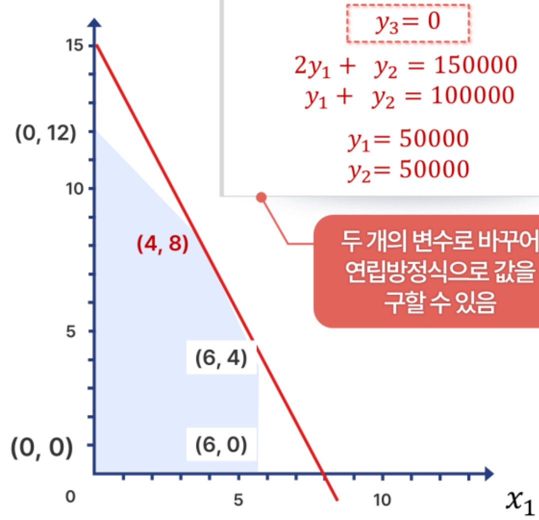
$y_1 + y_2 = 100000$

$y_1 = 50000$

$y_2 = 50000$

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ 16y_1 + 12y_2 + 6y_3 \\
&s.t. \\
&\quad 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 150000 \\
&\quad y_1 + y_2 \geq 100000 \\
&\quad y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\quad 2x_1 + x_2 \leq 16 \\
&\quad x_1 + x_2 \leq 12 \\
&\quad x_1 \leq 6 \\
&\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



$\boxed{y_3 = 0}$

$2y_1 + y_2 = 150000$

$y_1 + y_2 = 100000$

$y_1 = 50000$

$y_2 = 50000$

두 개의 변수로 바꾸어 연립방정식으로 값을 구할 수 있음