AI 알고리즘

선형계획법의 기본 개념

수퍼스타를 키우는 곳

전주대학교

학습내용

- 수송모형
- 수송모형의 발견적 해법

학습목표

- 수송모형을 이해하고 설명할 수 있다.
- 다양한 수송모형법을 알고 적절하게 활용할 수 있다.

수송모형의 개념과 발견적 해법

수송모형

수송모형

❖ 수송모형(Transportation Model)

다수의 공급지(Source)에서 다수의 수요지(Destination)로 최소의 비용으로 수송하는 방안을 찾기 위한 모형

- 단위당 수송 비용이 상수인 경우 선형계획모형의 특수한 형태

❖ 할당모형(Assignment Model)

할당하고자 하는 대상과 할당받고자 하는 대상 간 최소의 비용으로 할당 및 배당을 찾기 위한 모형

- 각 수요지와 공급지에서의 수요량과 공급량이 각각 1인 경우의 수송모형의 특수한 경우
  - 모형의 특성을 이용하여 효율적으로 최적해를 구하는 방법을 학습

❖ 수송 문제(Transportation Problem)

- 최소의 비용으로 제품들을 수송하기 위한 방안을 찾고자 하는 문제

m	총 공급지 수
n	총 수요지 수
S_i	공급지 i의 공급 가능 물량(capacity), i=1,2,...,m
D_j	수요지 j에서 수요량, j= 1,2,...,n
C_{ij}	공급지 i에서 수요지 j로의 단위당 수송 비용
X_{ij}	공급지 i에서 수요지 j로의 수송량

수송모형

❖ 수송 문제(Transportation Problem)

- 수송량은 각 공급지와 수요지에서 공급량과 수요량의 제약을 만족하는 값
- 2개의 가정
  - 가정 1 총 수송 비용은 수송량과 수송 거리에 비례함
  - 가정 2 수송을 위한 최단 경로(Shortest Path)는 알고 있음
- 수송 문제에 대한 수리 모형

$$
\begin{aligned}
Min \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}X_{ij} \\
s.t. \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = S_{i,} \quad i = 1,2,\dots,m \\
& \textstyle\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = D_j, \ j = 1,2,\dots,n \\
& X_{ij} \geq 0, i = 1,2,\dots,m \,; j = 1,2,\dots,n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{5} x_i &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\
\textstyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} x_{ij} &= x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} + x_{31} + x_{32}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Max \quad & \textstyle\sum_{i=1}^{m} S_i\, U_i + \sum_{j=1}^{n} D_j\, V_j \\
s.t. \quad & U_i + V_j \leq C_{ij} \quad i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n \\
& U_i\,, V_j : \text{무제약}
\end{aligned}
$$

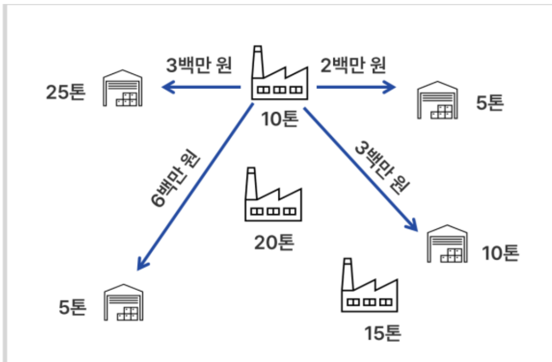
❖ [예제] AI 맥주㈜

- AI 맥주(주)는 세 곳의 공장에서 제품을 생산하여 네 곳의 수요지에 제품을 공급하고 있음
  - 각각의 공급량, 수요량이 정해져 있음

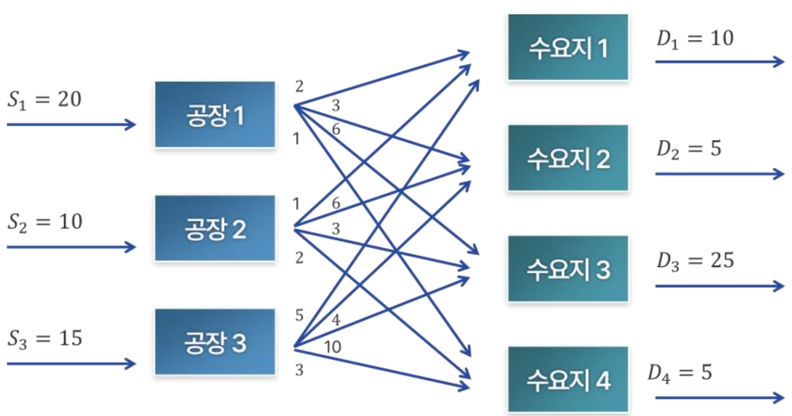
수송모형

❖ [예제] AI 맥주㈜

- 각각의 공장에서 수요처로 가는 수송 비용을 알고 있음



- 최적 수송 네트워크
  - 최소비용



  - 수송모형 잘 표현할 수 있는 방법이 없는가?

- 선형계획모형 수립

$$
\begin{aligned}
Min\quad & 2X_{11} + 3X_{12} + 6X_{13} + X_{14} + X_{21} + 6X_{22} + 3X_{23} + 2X_{24} + 5X_{31} + 4X_{32} + 10X_{33} + 3X_{34} \\
s.t.\quad & X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = 20 \\
& X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = 10 \\
& X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = 15 \\
& X_{11} + X_{21} + X_{31} = 10 \\
& X_{12} + X_{22} + X_{32} = 5 \\
& X_{13} + X_{23} + X_{33} = 25 \\
& X_{14} + X_{24} + X_{34} = 5 \\
& X_{ij} \geq 0, \quad i = 1,2,3;\ j = 1,2,3,4.
\end{aligned}
$$

수송모형

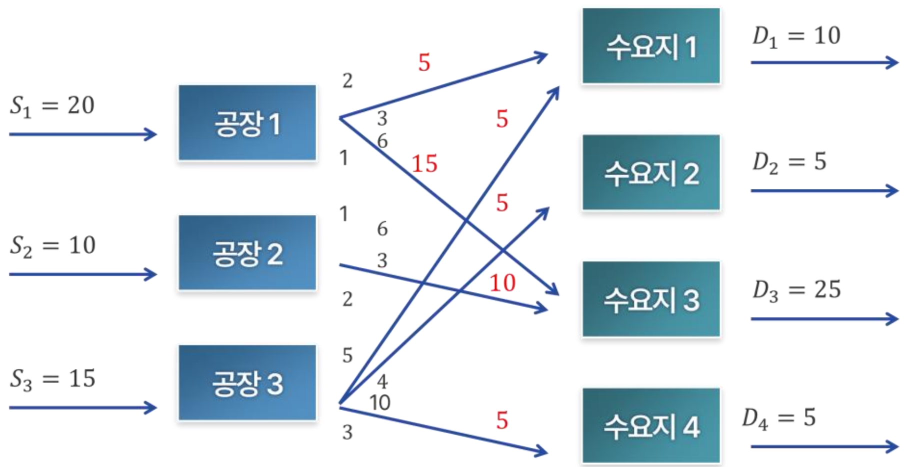
❖ [예제] AI 맥주㈜

- 최적 수송 네트워크 프로그래밍

```
from scipy.optimize import linprog
c=[2,3,6,1,1,6,3,2,5,4,10,3]
A=[[1,1,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0],[0,0,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0],[0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1,1],
   [1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0],[0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0,0],[0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1,0],[0,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,1]]
b=[20,10,15,10,5,25,5]
x0_bounds=(0, None)
x1_bounds=(0,None)
x2_bounds=(0,None)
x3_bounds=(0,None)
x4_bounds=(0,None)
x5_bounds=(0,None)
x6_bounds=(0,None)
x7_bounds=(0,None)
x8_bounds=(0,None)
x9_bounds=(0,None)
x10_bounds=(0,None)
x11_bounds=(0,None)
res=linprog(c,A_eq=A, b_eq=b, bounds=[x0_bounds, x1_bounds, x2_bounds, x3_bounds, x4_bounds, x5_bounds, x6_bounds, x7_bounds,
x8_bounds,x9_bounds, x10_bounds, x11_bounds], method='simplex' , options={'disp':True})
print(res)
```

```
Optimization terminated successfully.
         Current function value: 190.000000
         Iterations: 9
     con: array([0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.])
     fun: 190.0
 message: 'Optimization terminated successfully.'
     nit: 9
   slack: array([], dtype=float64)
  status: 0
 success: True
       x: array([ 5., 0., 15., 0., 0., 0., 10., 0., 5., 5., 0., 5.])
```

- 최적 수송 네트워크
  - 최소비용: 190백만 원



수송모형

❖ [예제] AI 맥주㈜

- 선형계획모형 수립(쌍대문제)

$$
\begin{array}{llllllllll}
Max & 20U_1 + 10U_2 + 15U_3 + 10V_1 + 5V_2 + 25V_3 + 5V_4 \\
s.t. \\
 & U_1 & & & + V_1 & & & & \leq 2 \\
 & U_1 & & & & + V_2 & & & \leq 3 \\
 & U_1 & & & & & + V_3 & & \leq 6 \\
 & U_1 & & & & & & + V_4 & \leq 1 \\
 & & U_2 & & + V_1 & & & & \leq 1 \\
 & & U_2 & & & + V_2 & & & \leq 6 \\
 & & U_2 & & & & + V_3 & & \leq 3 \\
 & & U_2 & & & & & + V_4 & \leq 2 \\
 & & & U_3 & + V_1 & & & & \leq 5 \\
 & & & U_3 & & + V_2 & & & \leq 4 \\
 & & & U_3 & & & + V_3 & & \leq 10 \\
 & & & U_3 & & & & + V_4 & \leq 3
\end{array}
$$

수송모형의 개념과 발견적 해법

수송모형의 발견적 해법

수송모형의 발견적 해법

❖ 북서코너법(Northwest Corner Method)

문제를 위해 주어진 단위 수송 비용을 고려하지 않고 수송량을 배정하는 방식

- 장점
  - 빠르고 쉽게 수송 방안을 개발할 수 있음
- 단점
  - 수송계획법의 목적인 최소의 수송 비용을 갖는 수송 방안에 절대적인 영향을 주는 수송 비용을 고려하지 않는 방법이므로, 최적해가 될 가능성이 적음
- 알고리즘

단계 1
i=j=1로 두고, 수송표의 북서쪽에 있는 셀에서부터 배정

단계 2
셀 (i,j)에 가능한 최대량의 수송량을 배정한 후, 잔여 배정가능량을 $S_i = S_i - X_{ij}$ 와 같이 수정

만약 $Min\{S_i, D_j\} = S_i$ 라면, $X_{ij} = S_i, S_i = 0, D_j = D_j - X_{ij}$ 로 한 후, 행 i를 고려대상에서 지우고, i=i+1로 하여 단계 3을 수행

만약 $Min\{S_i, D_j\} = D_j$ 라면, $X_{ij} = D_j, S_i = S_i - X_{ij}, D_j = 0$으로 한 후, 열 j를 고려대상에서 지우고, j=j+1로 하여 단계 3을 수행

만약, $S_i = D_j$ 라면 행이나 열 중 하나만을 임의로 선택하여 배정

단계 3
i>n,또는 j>m이거나 n+m−1 개의 셀에 할당되지 않았으면, 단계 2를 반복

수송모형의 발견적 해법

❖ 북서코너법 예시

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량(S_i)
공장 1	2 Start	3	6	1	20
공장 2	1	6	3	2	10
공장 3	5	4	10	3	15
소요량(D_j)	10	5	25	5	45

- 비용 무시하고 오른쪽에 생산 용량 소요량 맞추기

수요지 \ 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량(S_i)
공장 1	2 10	3 5	6 5	1	~~20~~ ~~10~~ ~~5~~ 0
공장 2	1	6	3 10	2	~~10~~ 0
공장 3	5	4	10 10	3 5	~~15~~ ~~5~~ 0
소요량(D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ ~~20~~ ~~10~~ 0	~~5~~ 0	45

수송모형의 발견적 해법

❖ 최소비용법(Least Cost Method)

최소의 수송 단가를 가지는 셀을 우선으로 고려하여 가능한 최대의 양을 할당하는 방법

❖ 최소비용법 예시

총 비용 = 240백만원

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량(S_i)
공장 1	2	3 5 ③	6 10 ④	1 5 ①	~~20~~ ~~15~~ ~~10~~ 0
공장 2	1 10 ②	6	3	2	~~10~~ 0
공장 3	5	4	10 15 ⑤	3	~~15~~ 0
소요량(D_j)	~~10~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ ~~15~~ 0	~~5~~ 0	45

수송모형의 발견적 해법

❖ 발달

- 가장 좋은 방법과 차선의 방법을 고려하는 방법

최소비용법을 이용한 수송량 할당 방식은 가장 비용이 저렴한 곳부터 할당해가는 방법

- 알고리즘

단계 1	기회비용 = |최소비용-차 하위 최소비용|
단계 2	최대 기회비용을 갖는 행이나 열에서 최소 단위 수송 비용을 갖는 셀에 가능한 한 최대로 수송량을 배정
단계 3	잔여 공급량이나 수요량이 0인 행이나 열을 제거해가면서 n+m-1개의 셀에 배당될 때까지 단계 1에서 단계 3까지를 반복

❖ 보겔 근사법 예시

총 비용 = 190만원

수요지 / 공급지	수요지 1	수요지 2	수요지 3	수요지 4	생산용량(S_i)	기회비용
공장 1	2 5	3	6 15	1	~~20~~ ~~5~~ 0	1
공장 2	1	6	3 10	2	~~10~~ 0	1
공장 3	5 5	4 5	10	3 5	~~15~~ ~~10~~ ~~5~~ 0	1
소요량(D_j)	~~10~~ ~~5~~ 0	~~5~~ 0	~~25~~ ~~15~~ 0	~~5~~ 0	45	
기회비용	~~1~~ 3	1	~~3~~ 4	~~1~~ 2		

- 노스 웨스트 210만원
- 최소비용 240만원
- 보겔 근사법190만원