# AI 알고리즘

## 선형계획법의 대수적 해법

수퍼스타를 키우는 곳
전주대학교

# 선형계획모형의 심플렉스법 적용

인공 초기해

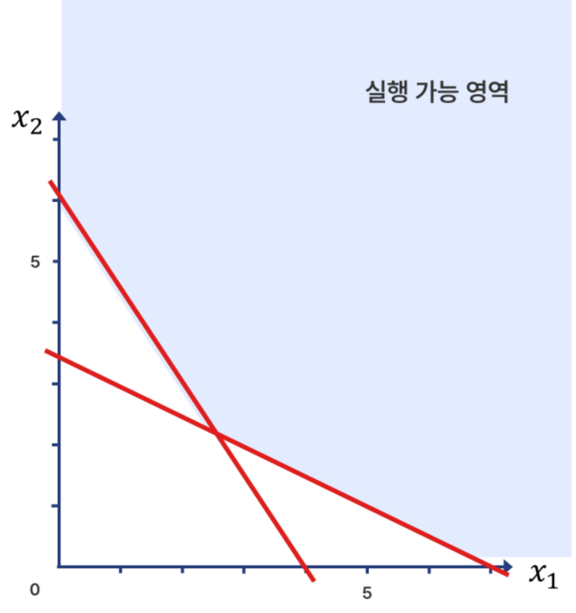
# 인공 초기해

## ❖ 심플렉스 표

- 초기 기저해를 원점으로 잡음
  - 하나의 계수가 부정확하거나 다른 값을 갖게 되면 우리가 내린 의사결정이 어떠한 영향을 받게 되는가?
- 원점을 실행 가능 영역에 포함하는 문제들은 심플렉스법으로 잘 풀림
- 새로운 모형, 기존의 모형 수정
- 원점이 실행 가능해가 아닌 경우도 있었기 때문에 기존 알고리즘을 이용하여 약간의 수정을 거침

## ❖ 최소화 문제 & 부등식(>=)

$$
\begin{aligned}
& Min\ \ 100x_1 + 100x_2 \\
& s.t. \\
& \qquad 20x_1 + 40x_2 \geq 140 \\
& \qquad 30x_1 + 20x_2 \geq 120 \\
& \\
& \qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$




- 기존의 실행 가능 영역 내에서 정점을 이동하는 심플렉스법이 작동하지 않음
- 정점으로 이동하여 실행가능영역으로 만듦
- 심플렉스법 이용하면서 실행가능영역으로 빨리 들어가는 형태

# 인공 초기해

## ❖ 최소화 문제 & 부등식(>=)

- 표준형

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ 100x_1 + 100x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 20x_1 + 40x_2 \geq 140 \\
&\qquad 30x_1 + 20x_2 \geq 120 \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

원점을 대입할 경우 $s_1$=-140

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ 100x_1 + 100x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 20x_1 + 40x_2 \boxed{- s_1} \qquad = 140 \\
&\qquad 30x_1 + 20x_2 \qquad \boxed{- s_2} = 120 \\
&\qquad x_1, x_2,\ s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- 초기기저 실행가능해를 정의할 수 없음
- 목적 변수와 기저 변수 부분에 단위행렬(Identity Matrix)이 나타나도록 해줌으로써 초기기저 실행가능해를 찾아갈 수 있게 해줌
- 나중에는 반드시 0의 값을 갖도록 비기저변수로 만들어야 원하는 기저 실행 가능해 찾을 수 있음

# 인공 초기해

## ❖ Big M-Method

- 도입된 인공 변수들을 기저 변수에서 퇴출시키기 위해 목적 함수식에 해당 인공 변수에 대한 무한대의 벌과비용 부과하는 방법

큰 숫자 M 곱하기

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ z = 100x_1 + 100x_2 + \boxed{MR_1 + MR_2}\\
&s.t.\\
&\qquad 20x_1 + 40x_2 - s_1 \qquad + R_1 \qquad\quad = 140\\
&\qquad 30x_1 + 20x_2 \qquad\quad - s_2 \qquad + R_2 \ = 120\\
&\qquad x_1, x_2,\ s_1, s_2,\ R_1, R_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- 초기 심플렉스 표

값을 0으로 만들어야 함

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $R_1$ | $R_2$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | -100 | -100 | 0 | 0 | -M | -M | 0 | |
| $R_1$ | 0 | 20 | 40 | -1 | 0 | 1 | 0 | 140 | |
| $R_2$ | 0 | 30 | 20 | 0 | -1 | 0 | 1 | 120 | |

전체 M을 곱하고 첫째 행과 더하기

- 심플렉스 표

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $R_1$ | $R_2$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | -100 | -100 | 0 | 0 | -M | -M | 0 | |
| $R_1$ | 0 | 20 | 40 | -1 | 0 | 1 | 0 | 140 | |
| $R_2$ | 0 | 30 | 20 | 0 | -1 | 0 | 1 | [illegible] | |

단위행렬 형태

A

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $R_1$ | $R_2$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | 50M -100 | 60M -100 | -M | -M | 0 | 0 | 260M | |
| $x_2$ | 0 | 20 | 40 | -1 | 0 | 1 | 0 | 140 | |
| $R_2$ | 0 | 30 | 20 | 0 | -1 | 0 | 1 | 120 | |

# 인공 초기해

## ❖ Big M-Method

- 초기 심플렉스법과의 차이점
  - 실행가능해가 아니어서 인공 변수를 집어넣음
  - 목적 함수에 0이 되도록 M을 집어넣음
  - 두번째 행의 차이를 없애기 위해 0 만들기
- 심플렉스 표

진입 변수

퇴출 변수

**A**

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $R_1$ | $R_2$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | 50M -100 | 60M -100 | -M | -M | 0 | 0 | 260M | |
| $x_2$ | 0 | 20 | 40 | -1 | 0 | 1 | 0 | 140 | 7/2 |
| $R_2$ | 0 | 30 | 20 | 0 | -1 | 0 | 1 | 120 | 6 |

연립방정식처럼 40으로 전부 나누고,
위아래 행을 0으로 만듦

**B**

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $R_1$ | $R_2$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | 20M-50 | 0 | 1/2M-5/2 | -M | 5/2-3/2M | 0 | 350+50M | |
| $x_2$ | 0 | 1/2 | 1 | -1/40 | 0 | 1/40 | 0 | 7/2 | |
| $R_2$ | 0 | 20 | 0 | 1/2 | -1 | -1/2 | 1 | 50 | |

진입 변수

퇴출 변수

**B**

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $R_1$ | $R_2$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | 20M-50 | 0 | 1/2M-5/2 | -M | 5/2-3/2M | 0 | 350+50M | |
| $x_2$ | 0 | 1/2 | 1 | -1/40 | 0 | 1/40 | 0 | 7/2 | 7 |
| $R_2$ | 0 | 20 | 0 | 1/2 | -1 | -1/2 | 1 | 50 | 5/2 |

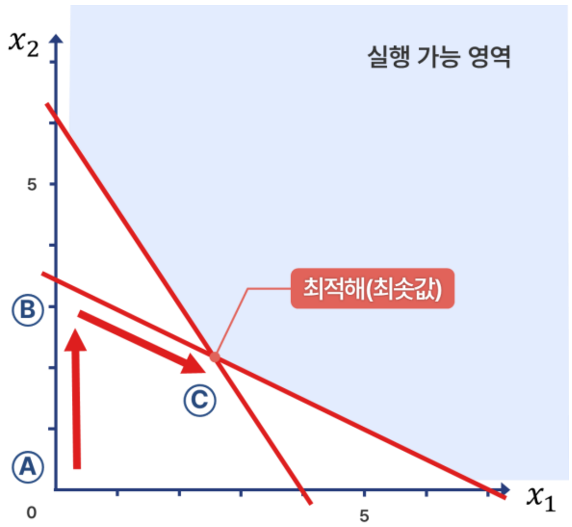
양수가 없음

**C**

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $R_1$ | $R_2$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | 0 | 0 | -5/4 | -5/2 | 100-20M | 5/2-M | 475 | |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | -3/80 | 1/40 | 3/80 | -1/40 | 9/4 | |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 1/40 | -1/20 | -1/40 | 1/20 | 5/2 | |

# 인공 초기해

## ❖ Big M-Method



# 인공 초기해

## ❖ Two-Phase Method

- 도입된 인공 변수를 기저 변수에서 퇴출시켜 초기 기저 실행가능해를 찾아가는 전 단계와 최적해를 찾아가는 심플렉스법 본 단계를 나누어 수행하는 방법
- Phase 1
  - 새로 인공 초기해를 도입했을 때의 값을 목적 함수에만 집어 넣기
- Phase 2
  - 실제 목적 함수의 계수 사용
- Phase 1(Min $R_1$+$R_2$)

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $R_1$ | $R_2$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | |
| $R_1$ | 0 | 20 | 40 | -1 | 0 | 1 | 0 | 140 | |
| $R_2$ | 0 | 30 | 20 | 0 | -1 | 0 | 1 | 120 | |

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $R_1$ | $R_2$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | 50 | 60 | -1 | -1 | 0 | 0 | 260 | |
| $R_1$ | 0 | 20 | 40 | -1 | 0 | 1 | 0 | 140 | |
| $R_2$ | 0 | 30 | 20 | 0 | -1 | 0 | 1 | 120 | |

# 인공 초기해

## ❖ Two-Phase Method

- Phase 1

진입 변수 / 퇴출 변수

A

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $R_1$ | $R_2$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | 50 | 60 | -1 | -1 | 0 | 0 | 260 | |
| $R_1$ | 0 | 20 | 40 | -1 | 0 | 1 | 0 | 140 | 7/2 |
| $R_2$ | 0 | 30 | 20 | 0 | -1 | 0 | 1 | 120 | 6 |

B

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $R_1$ | $R_2$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | 20 | 0 | 1/2 | -1 | -3/2 | 0 | 50 | |
| $x_2$ | 0 | 1/2 | 1 | -1/40 | 0 | 1/40 | 0 | 7/2 | |
| $R_2$ | 0 | 20 | 0 | 1/2 | -1 | -1/2 | 1 | 50 | 6 |

진입 변수 / 퇴출 변수

B

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $R_1$ | $R_2$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | 20 | 0 | 1/2 | -1 | -3/2 | 0 | 50 | |
| $x_2$ | 0 | 1/2 | 1 | -1/40 | 0 | 1/40 | 0 | 7/2 | 7 |
| $R_2$ | 0 | 20 | 0 | 1/2 | -1 | -1/2 | 1 | 50 | 5/2 |

C

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $R_1$ | $R_2$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | |
| $R_1$ | 0 | 0 | 1 | -3/80 | 0 | 3/80 | -1/40 | 9/4 | 7 |
| $R_2$ | 0 | 1 | 0 | 1/40 | -1/20 | -1/40 | 1/20 | 5/2 | 5/2 |

# 인공 초기해

## ❖ Two-Phase Method

- Phase 2
  - 단계 I에서 찾은 초기 실행가능해에서 인공 변수 열들을 제거하고, 단계 I의 목적식 대신 원문제의 목적을 대체

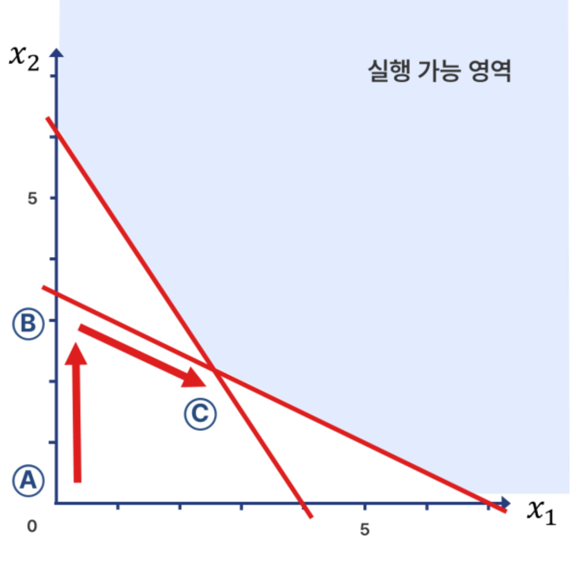
| Basic | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $R_1$ | $R_2$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | -1 | 0 | |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | -3/80 | 0 | 3/80 | -1/40 | 9/4 | 7 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 1/40 | -1/20 | -1/40 | 1/20 | 5/2 | 5/2 |

실행 가능 영역에 들어옴

$$Min\ \ z = 100x_1 + 100x_2$$

양수가 없으므로 현재 상태가 최적해의 상태

| Basic | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | -100 | -100 | 0 | 0 | 0 | |
| $R_1$ | 0 | 0 | 1 | -3/80 | 0 | 9/4 | 7 |
| $R_2$ | 0 | 1 | 0 | 1/40 | -1/20 | 5/2 | 5/2 |



# 선형계획모형의 심플렉스법 적용

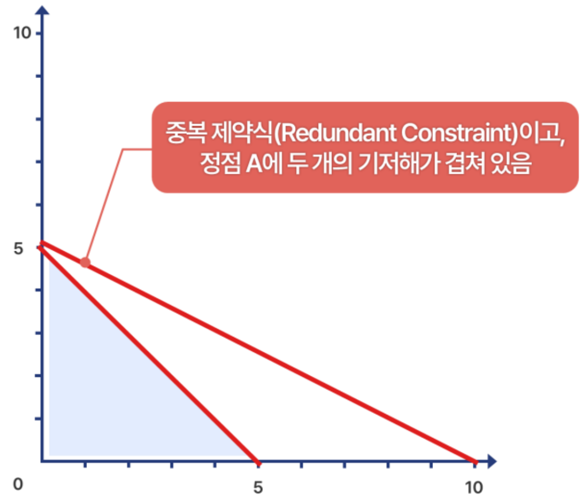
## 심플렉스법의 적용상 특수한 경우

# 심플렉스법의 적용상 특수한 경우

## ❖ 퇴화 현상(Degeneracy)

- 심플렉스법의 실행가능성 조건(Feasibility Condition) 검색에서 최소 비음 비율에 동일한 값이 있는 경우 발생하며, 다음 단계에서 0의 값을 갖는 기저 변수가 발생하게 됨

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 2x_1 + 3x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad x_1 + 2x_2 \le 10 \\
&\qquad x_1 + \ \ x_2 \le 5 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$




진입 변수

퇴출 변수

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | -2 | -3 | 0 | 0 | 0 | |
| $s_1$ | 0 | 1 | 2 | 1 | 0 | 10 | 5 |
| $s_2$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | 5 |

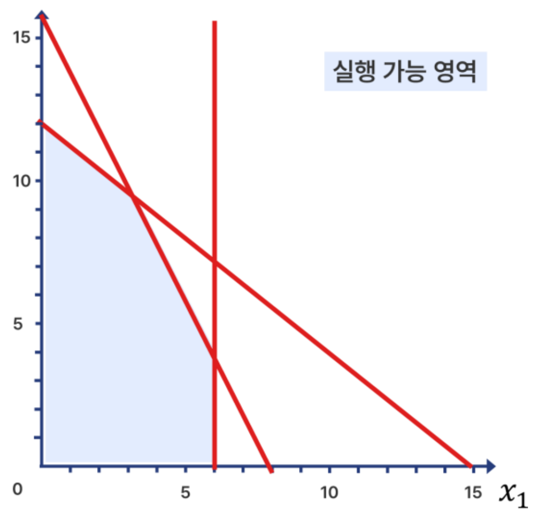
| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 15 | |
| $s_1$ | 0 | -1 | 0 | 1 | -2 | 0 | |
| $s_2$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 5 | |

# 심플렉스법의 적용상 특수한 경우

## ❖ 다중 최적해(Alternative Optima)

- 최적해가 하나만 존재하는 것이 아니라 다중 최적해(Alternative Optima)를 제공

$$\begin{aligned} &Max\ \ 2x_1 + x_2 \\ &s.t. \\ &\quad 2x_1 + x_2 \le 16 \\ &\quad x_1 + x_2 \le 12 \\ &\quad x_1 \le 6 \\ &\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$




$$\begin{aligned} &Max\ \ 2x_1 + x_2 \\ &s.t. \\ &\quad 2x_1 + x_2 \le 16 \\ &\quad x_1 + x_2 \le 12 \\ &\quad x_1 \le 6 \\ &\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Max\ \ z \quad - 2x_1 - x_2 \\ &s.t. \\ &\quad 2x_1 + x_2 + s_1 = 16 \\ &\quad x_1 + x_2 + s_2 = 12 \\ &\quad x_1 + s_3 = 6 \\ &\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | -2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $s_1$ | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 16 | |
| $s_2$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 12 | |
| $s_3$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | |

## 심플렉스법의 적용상 특수한 경우

### ❖ 다중 최적해(Alternative Optima)

진입 변수 ($x_1$) / 퇴출 변수 ($s_3$)

A

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | -2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| $s_1$ | 0 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 16 | 8 |
| $s_2$ | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 12 | 12 |
| $s_3$ | 0 | $\boxed{1}$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 6 |

B

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 2 | 12 | |
| $s_1$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | -2 | 4 | |
| $s_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | 6 | |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | |

B

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 2 | 12 | |
| $s_1$ | 0 | 0 | $\boxed{1}$ | 1 | 0 | -2 | 4 | 4 |
| $s_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | -1 | 6 | 6 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | |

C

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 16 | |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | -2 | 4 | |
| $s_2$ | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 2 | |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | |

# 심플렉스법의 적용상 특수한 경우

## ❖ 다중 최적해(Alternative Optima)

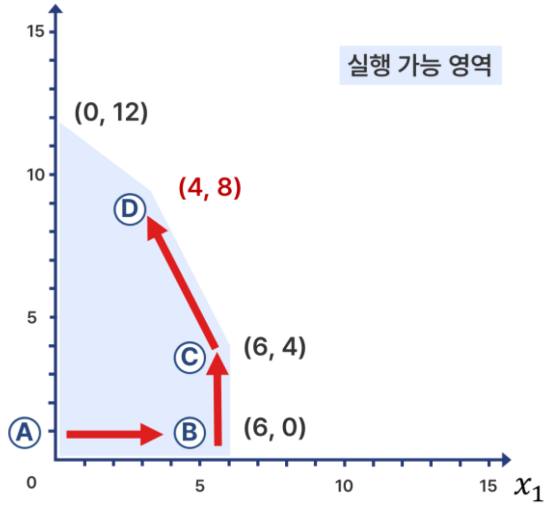
0인 비기저변수 존재

C

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 16 | |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | -2 | 4 | |
| $s_2$ | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 2 | 2 |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 6 | 6 |

D

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 16 | |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | -1 | 2 | 0 | 8 | |
| $s_3$ | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | 1 | 2 | |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 4 | |

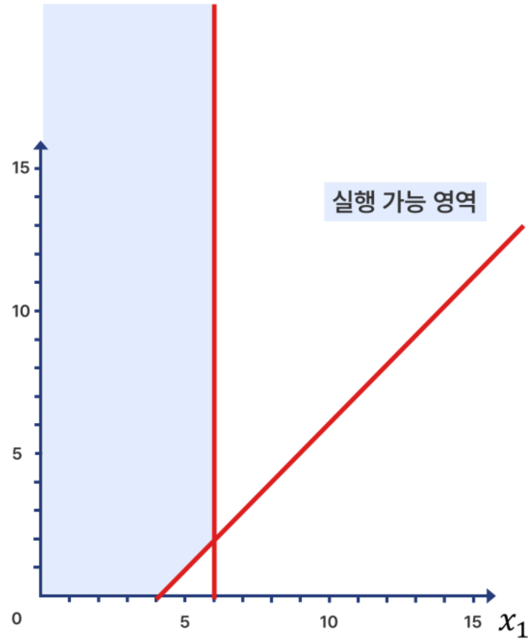


# 심플렉스법의 적용상 특수한 경우

## ❖ 무한해(Unbounded Solution)

- 목적 함수의 값이 무한히 증가(최대화 문제의 경우) 하거나 감소(최소화 문제의 경우) 하는 선형계획 문제

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 2x_1 + \ x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad x_1 - x_2 \le 4 \\
&\qquad x_1 \qquad\ \ \le 6 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$




A

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | -2 | -1 | 0 | 0 | 0 | |
| $s_1$ | 0 | 1 | -1 | 1 | 0 | 4 | 4 |
| $s_2$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 6 | 6 |

B

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | 0 | -3 | 2 | 0 | 8 | |
| $x_1$ | 0 | 1 | -1 | 1 | 0 | 4 | |
| $s_2$ | 0 | 0 | 1 | -1 | 1 | 2 | |

C

| Basic | z | $x_1$ | $x_2$ | $s_1$ | $s_2$ | Solution | ratio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| z | 1 | 0 | 0 | -1 | 3 | 14 | |
| $x_1$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 6 | |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | -1 | 1 | 2 | |

- 진입 변수는 있으나 s1을 진입 변수로 할 때 모든 비율이 음수 또는 무한대여서 퇴출 변수를 선택할 수 없게 됨

# 심플렉스법의 적용상 특수한 경우

## ❖ 실행 불가능해(Infeasible Solution)

- 실행 불가능해 문제는 인공 변수의 도입이 필수적임
- M-Method나 Two-Phase Method를 사용해도 인공 변수가 기저 변수에 남아있음