

# AI 알고리즘

## 선형계획법의 기본 개념

## 학습내용

- 선형계획법이란
- 선형계획문제의 모형화

## 학습목표

- 선형계획모형의 개발 과정을 설명할 수 있다.
- 선형계획법을 이용하여 최대화·최소화 문제를 해결할 수 있다.

# 선형계획모형의 개념과 모형화

선형계획법이란

## 선형계획법이란

### ❖ 선형계획법

- 의사결정을위해수리적모형(Mathematical Model)으로 개발
- 제한된자원을최적(Optimal)으로활용하는 의사결정을위한 모형
- 제한된자원을목적에따라어떻게배분할 것인지를 결정
  - 제품 생산 계획
  - 원료배합
  - 투자·자본예산계획
  - 인력및공간배치
- 문제를 수학적모형으로작성
- 선형의여러제약조건에서목적함수와 최적화함으로써해를 구하는과정
- 목적함수와제약식이1차함수로 이루어진문제를 최적으로 푸는방법

### ❖ 선형계획법 발전과정

- 군수관리문제를 효율적으로해결하기 위해개발
  - 1947년덴치그(George Dantzig)에 의해 심플렉스법(Simplex Method)개발되고 선형계획법이 획기적으로발전
  - 1984년내부점해법
- 1975년에 선형계획모형을통한 경제이론 개발
  - 찰링 코프만스
  - 레오니트 칸토르비치
- 한정된자원을 효율적으로배분하는 문제
  - 배합문제
    - 성분 함량 조건을 만족하면서비용이최소가 되는배합비율 구하기
  - 생산제품 결정
    - 회사의 이익을 위해 어떤 제품을 얼마나 생산을 할 것인지 결정
  - 수송문제
    - 적절한 수송 및 배분계획을 통하여 전체 수송비를 최소화

# 선형계획모형의 개념과 모형화

선형계획문제의 모형화

## 선형계획문제의 모형화

### ❖ 선형계획모형 개발과정

1. 문제이해
2. 의사결정변수 결정
3. 해의우열을 결정하는 기준 선택
4. 의사결정변수를 선형식으로 나타내는 목적함수 표현
5. 모든 조건이 의사결정변수 선형식으로 나타나도록 제약식 표현
6. 입력자료 수집·추정
7. 모든 제약식을 만족하는 의사결정변수 조합 중에서 목적함수의 값을 가장 좋게 만드는 조합 찾기
  - 실행가능해(Feasible Solution)
    - 비음조건을 포함한 모든 제약식들을 만족하는 의사결정변수들의 조합
  - 최적해(Optimal Solution)
    - 실행가능해 중에서 목적함수의 값을 가장 좋게 만드는 조합

## 선형계획문제의 모형화

### ❖ 선형계획법의 구성요소

- 목적함수(Objective Function)
- 제약조건(Constraint)
- 비음조건(Nonnegativity Constraint)

### ❖ 선형계획법의 일반구조

목적함수

$$Max(orMin) \ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

제약식

$$s.t. \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\leq (or \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\leq (or \geq) b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\leq (or \geq) b_m \\ x_1, x_2, \dots, x_n &\geq 0 \end{aligned}$$

비음조건

$x_j$  = 활동  $j$ 의 양( $j = 1, 2, \dots, n$ )

$c_j$  = 활동  $j$ 의 단위당 기여도

$a_{ij}$  = 활동  $j$ 의 한 단위를 생산하기 위해 필요한 자원  $i$ 의 양

$b_i$  = 자원  $i$ 의 보유량

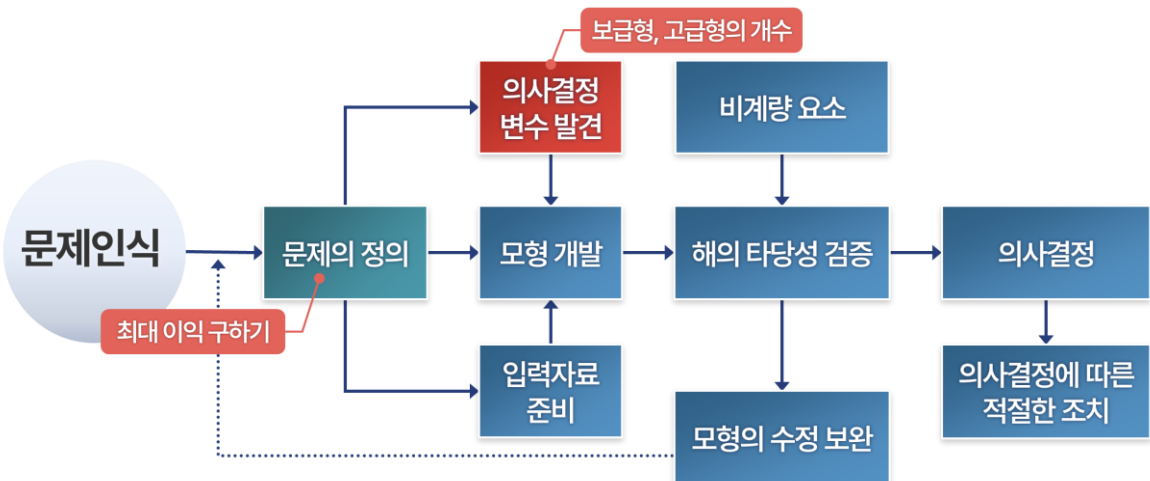
의사결정변수  $x$ 를  $n$ 개 결정해야 되는 상황

b가 비용으로 최소로 필요할 경우 목적함수는 Min이 됨

## 선형계획문제의 모형화

### ❖ 최대화 문제

**Q** 전주 스마트팜(주)는 환경과 영상 정보를 수집하는 2가지 제품(보급형, 고급형)을 생산하고 있다. 보급형을 생산하기 위해서는 센서 3개와 CCTV 2개가 필요하고 고급형을 생산하기 위해서는 센서 2개와 CCTV 3개가 필요하다. 사용할 수 있는 센서와 CCTV는 각각 60개와 50개이고, 제품당 이익은 보급형이 4만 원이고 고급형은 5만 원이다. 이익을 최대화하기 위해 보급형과 고급형을 각각 얼마만큼 생산하여야 하는가?





## 선형계획문제의 모형화

### ❖ 최대화 문제

**Q** 전주 스마트팜(주)는 환경과 영상 정보를 수집하는 2가지 제품(보급형, 고급형)을 생산하고 있다. 보급형을 생산하기 위해서는 센서 3개와 CCTV 2개가 필요하고 고급형을 생산하기 위해서는 센서 2개와 CCTV 3개가 필요하다. 사용할 수 있는 센서와 CCTV는 각각 60개와 50개이고, 제품당 이익은 보급형이 4만 원이고 고급형은 5만 원이다. 이익을 최대화하기 위해 보급형과 고급형을 각각 얼마만큼 생산하여야 하는가?

#### 의사결정변수의 결정

- $X_1$ : 보급형의 생산량
- $X_2$ : 고급형의 생산량

#### 목적함수

- $Max \ 4x_1 + 5x_2$

보급형은 4만 원,  
고급형은 5만 원

#### 제약 조건

- 센서  $3x_1 + 2x_2 \leq 60$
- CCTV  $2x_1 + 3x_2 \leq 50$
- 비음조건  $x_1, x_2 \geq 0$

$$\begin{array}{ll}
 Max & 4x_1 + 5x_2 \\
 s. t. & 3x_1 + 2x_2 \leq 60 \\
 & 2x_1 + 3x_2 \leq 50 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

$x_1$  = 보급형의 생산량

$x_2$  = 고급형의 생산량

## 선형계획문제의 모형화

### ❖ 최소화 문제

**Q** AI 공유대학교의 영양사는 학생들을 위해 매일 간식을 준비하고 있다. 영양사의 역할은 비타민 K와 J의 매일 최소 요구량을 맞추고, 메뉴의 비용은 가능한 낮게 유지해야 한다. 비타민 K와 J를 제공하는 주요 간식 메뉴는 전통 한과와 떡이다. 비타민 요구량과 각 메뉴의 단위당 비타민 함유량은 다음과 같다.

비타민	비타민 함유량		1일 최소 요구량 (mg)
	mg/한과(개)	mg/떡(조각)	
K	20	40	140
J	30	20	120

한과의 개당 원가는 150원, 떡 조각당 원가는 100원이다. 영양사는 총비용을 최소화하는 반면에 최소 1일 비타민 요구량을 충족시키도록 하려면 간식 메뉴를 어떻게 제공해야 하는가를 알고자 한다.

#### 의사결정변수의 결정

- $x_1$ : 한과 개수
- $x_2$ : 떡의 조각수

#### 목적함수

- $\text{Min } 150x_1 + 100x_2$

한과의 개당 원가는 150원,  
떡 조각당 원가는 100원

비타민	비타민 함유량		1일 최소 요구량 (mg)
	mg/한과(개)	mg/떡(조각)	
K	20	40	140
J	30	20	120

#### 제약 조건

- 비타민 K  $20x_1 + 40x_2 \geq 140$
- 비타민 J  $30x_1 + 20x_2 \geq 120$
- 비음조건  $x_1, x_2 \geq 0$

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min} & 150x_1 + 100x_2 \\
 \text{s.t.} & 20x_1 + 40x_2 \geq 140 \\
 & 30x_1 + 20x_2 \geq 120 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{array}$$

$x_1$  = 한과 개수  
 $x_2$  = 떡의 조각수

## 선형계획문제의 모형화

### ❖ 생산계획 문제

**Q** AI 공유키구(주)에서는 목재, 가죽, 섬유 등 세 가지 원료를 사용하여 침대와 소파 등 두 가지 가구를 만들고 있다. 앞으로 한 달간 사용하기 위하여 확보한 원료는 목재가  $16\text{m}^3$ , 가죽은  $12\text{m}^2$ , 섬유는  $6\text{m}^2$ 이다. 침대를 하나 만드는 데는 목재가  $2\text{m}^3$ , 가죽은  $1\text{m}^2$ , 섬유는  $1\text{m}^2$ 가 필요하고, 소파를 하나 만드는 데는 목재가  $1\text{m}^3$ , 가죽은  $1\text{m}^2$  필요하고 섬유는 필요하지 않다. 침대는 개당 100만 원에 판매하여 원료비 등의 비용을 제외하고 15만 원의 이익을 내고 있으며, 소파는 개당 60만 원에 판매하여 원료비 등의 비용을 제외하고 10만 원의 이익을 내고 있다. 이익을 최대로 만들기 위해서는 한 달간 침대와 소파를 각각 몇 개씩 만들어야 하는가?

침대 이익 15만 원,  
소파 이익 10만 원

$$\text{Max} \quad 150000x_1 + 100000x_2$$

$$\text{s. t.} \quad 2x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$x_1$  = 침대 생산량

$x_2$  = 소파 생산량