교육부 Ministry of Education
NRF 한국연구재단 National Research Foundation of Korea

3장. 선형계획법의 대수적 해법

참고문헌: 최적 의사결정을 위한 경영과학, 권수태외 5인, 청람, 2018

COSS 인공지능 · 전남대학교 · 성균관대학교 · KNU 경북대학교 · 전주대학교 · 서울시립대학교 · 서울과학기술대학교 · 영진전문대학교

Contents

3. 선형계획법의 대수적 해법

3-1 서론
3-2 기저 실행가능해
3-3 심플렉스법의 절차
3-4 심플렉스법의 적용
3-5 인공초기해
3-6 심플렉스법의 적용상 특수한 경우
3-7 심플렉스법 활용 프로그램
3-8 선형계획법의 응용

❖ 심플렉스법(Simplex Method)

- 1947년 George Dantzig에 의해 개발됨
- 실행가능영역의 정점(Extreme Point)들을 목적함수값이 개선되는 방향으로 순차적으로 찾아가 궁극적으로 최적해에 도달하는 반복적인 알고리즘(Iterative Algorithm)
- 항상 원점으로부터 출발하여 한 번의 연산과정을 통해 더 나은 해를 얻을 수 있고, 다시 연산과정을 통해 전단계에서 발견된 해보다 더 나은 해를 구하여 최적해에 도달할 수 있기 때문에 매우 유용한 기법

3.1 서론

❖ 용어

➢ 심플렉스표

- ✓ 심플렉스법의 대수적 절차는 제약식들로 이루어진 여러 개의 연립방정식을 푸는데 그 기초를 두고 있음
- ✓ 심플렉스법의 연산과정은 심플렉스표에 의해서 이루어짐

Basic	z	…	변수	…	…	Solution	ratio
z		$Z_j - C_j$					
기저변수							
…							

3.1 서론

❖ 용어

➢ 기저해

✓ m 개의 제약조건과 n 개의 변수로 이루어진 선형계획모형에서 제약조건의 부등식을 등식으로 전환하기 위해 m 개의 변수가 제약조건에 추가됨

✓ 변수의 수: m+n

✓ n 개의 변수를 0으로 전환시키고, 나머지 m 개의 변수값 결정가능

✓ 이와 같이 결정된 해를 기저해라고 함

➢ 실행가능 기저해

✓ 기저해에서 실행가능해이면서 동시에 기저해로부터 얻어진 모든 변수가 비음인 경우

❖ 용어

- 여유변수와 초과변수
  - ✓ 심플렉스법으로 풀기 위해선 부등식을 등식으로 전환시켜야 함
  - ✓ 등식으로 전환시키기 위해선 음이 아닌 새로운 변수를 제약조건에 도입하여야 함
  - ✓ <= : 여유변수(slack variable) 도입

$$x_1 + x_2 \le 3 \quad \text{->} \quad x_1 + x_2 + s_1 = 3$$

  - ✓ >= : 초과변수(surplus variable) 도입

$$x_1 + x_2 \ge 3 \quad \text{->} \quad x_1 + x_2 - s_1 = 3$$

❖ 용어

- ➢ 진입기저변수와 탈락기저변수
  - ✓ 심플렉스법은 항상 원점에서부터 시작하여 최적해를 찾게 됨
  - ✓ 최초의 실행가능기저해는 결정변수들이 0이 되고, 여유변수가 유일한 값을 가지고 기저변수로 존재하게 됨
  - ✓ 연산과정을 진행시켜 결정변수 중 가장 큰 $Z_j - C_j$ 값을 갖는 변수가 기저변수로 들어가 목적함수 Z 를 향상시킴
  - ✓ 이때 비기저변수에서 기저변수로 들어간 변수를 진입기저변수
  - ✓ 기저변수에서 비기저변수로 전환된 변수를 탈락기저변수

3.2 기저 실행가능해

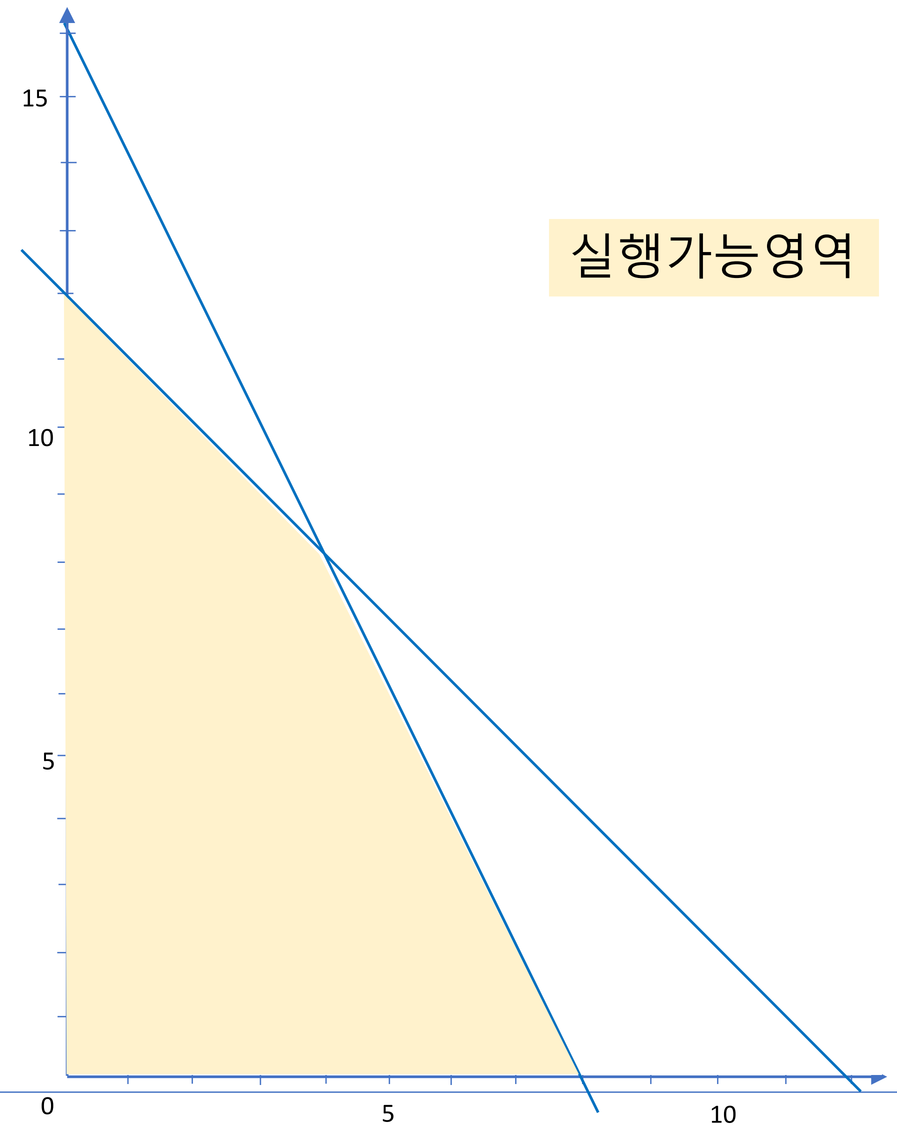
❖ 기저해(Basic Solution)와 기저실행가능해(Basic Feasible Solution)

- 등식의 수 m이 비음변수의 수 n보다 적을 때(m<n), n-m개의 변수값을 임의로 0으로 놓고 나머지 변수들로 연립방정식을 풀었을 때 나오는 유일해들을 기저해(Basic Solutions)라고 함
- 이때 임의로 0으로 놓는 n-m개의 변수를 비기저변수(Nonbasic Variable)라 하고, 나머지 기저해를 만드는 m개의 변수를 기저변수(Basic Variable)라 함
- 이론적으로 가능한 기저해의 수는 n개의 변수 중 임의로 0으로 놓을 변수의 수 n-m개를 선택하는 방법의 수(nCn-m)만큼 존재
- 기저 실행가능해는 표준형 선형계획문제의 비음조건을 포함한 제약조건들 모두를 만족하는 실행가능해이며, 도해법에서 보았던 최적해를 포함하는 실행가능영역의 정점(Corner Point, Extreme Point)과 일치

3.2 기저 실행가능해

❖ 기저해(Basic Solution)와 기저실행가능해(Basic Feasible Solution)

$$Max\ \ 3x_1 + 2x_2$$
$$s.t.$$
$$2x_1 + \ x_2 \ \le 16$$
$$x_1 + \ x_2 \ \le 12$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



3.2 기저 실행가능해

❖ 기저해(Basic Solution)와 기저실행가능해(Basic Feasible Solution)

➢ 표준형

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 3x_1 + 2x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \leq 16 \\
&\qquad \ \ x_1 + x_2 \leq 12 \\
&\qquad \ \ x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 3x_1 + 2x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + x_2 + s_1 \qquad = 16 \\
&\qquad \ \ x_1 + x_2 \qquad + s_2 = 12 \\
&\qquad \ \ x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

➢ 기저 실행가능해의 최대 개수

$$ {}_4C_2 = \frac{4!}{2!2!} = 6 $$

3.2 기저 실행가능해

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + s_1 \quad\quad &= 16 \\ x_1 + x_2 \quad\quad + s_2 &= 12 \end{aligned}$$

(1) $x_1 = x_2 = 0$ 일 때,

기저해는 $s_1 = 16$, $s_2 = 12$ 이고

비음조건을 모두 만족하므로 실행가능해

(2) $x_1 = s_1 = 0$ 일 때,

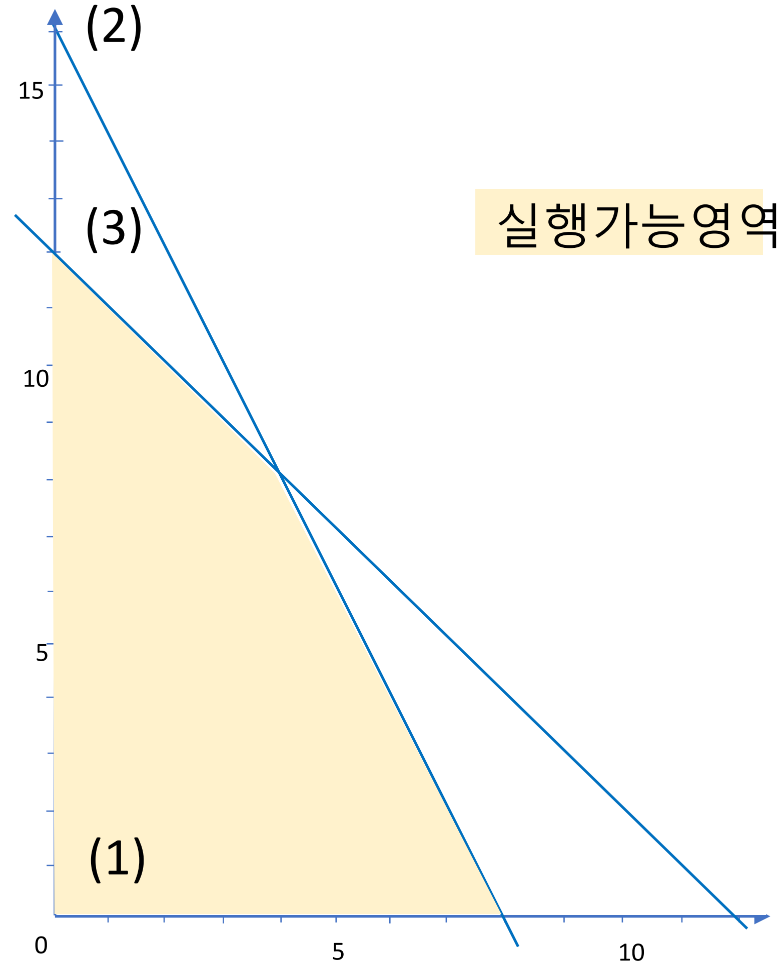
기저해는 $x_2 = 16$, $s_2 = -4$ 이고

비음조건을 모두 만족하지 못하므로 실행불가능해

(3) $x_1 = s_2 = 0$ 일 때,

기저해는 $x_2 = 12$, $s_1 = 4$ 이고

비음조건을 모두 만족하므로 실행가능해



3.2 기저 실행가능해

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + s_1 \quad\quad &= 16 \\ x_1 + x_2 \quad\quad + s_2 &= 12 \end{aligned}$$

(4) $x_2 = s_1 = 0$ 일 때,

기저해는 $x_1 = 8$, $s_2 = 4$ 이고

비음조건을 모두 만족하므로 실행가능해

(5) $x_2 = s_2 = 0$ 일 때,

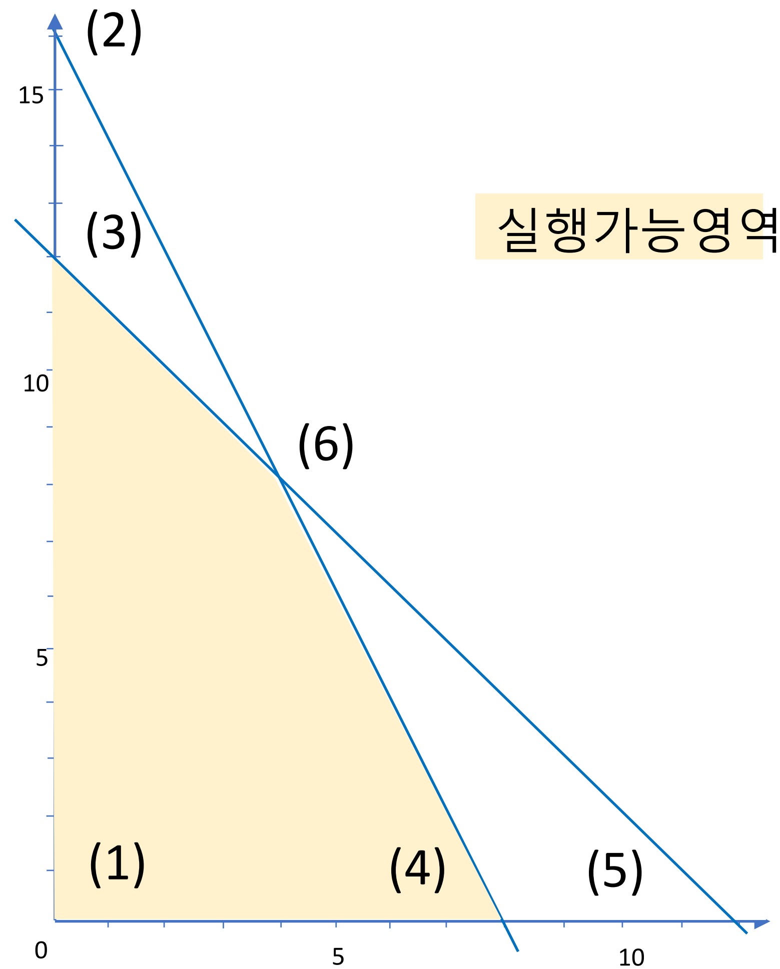
기저해는 $x_1 = 12$, $s_1 = -8$ 이고

비음조건을 모두 만족하지 못하므로 실행불가능해

(6) $s_1 = s_2 = 0$ 일 때,

기저해는 $x_1 = 4$, $x_2 = 8$ 이고

비음조건을 모두 만족하므로 실행가능해



❖ 절차

➢ 단계1: 선형계획모형을 표준식으로 전환

$$
\begin{aligned}
&Max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \\
&\qquad x_j \ge 0 \\
&\qquad i = 1, \cdots, m \\
&\qquad j = 1, \cdots, n
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
&Max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&s.t. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i \\
&\qquad x_j \ge 0 \\
&\qquad s_i \ge 0 \\
&\qquad i = 1, \cdots, m \\
&\qquad j = 1, \cdots, n
\end{aligned}
$$

3.3 심플렉스법의 절차

❖ 절차

➢ 단계2: 최초 실행가능기저해를 선정

✓ 단계1에서 작성된 표준식을 심플렉스표에 기입

✓ 최초의 실행가능기저해가 원점에서부터 시작하므로 각 결정변수는 0 의 값을 갖게되고, 추가변수가 기저변수가 됨

➢ 단계3: 현재의 실행가능기저해의 최적판단

✓ 현재의 비기저변수 중 어떤 변수가 기저변수로 진입하더라도 더 이상 목적함수 값을 개선할 수 없다면 현재의 해가 최적해

✓ $C_j - Z_j$: 해당 변수가 1단위 추가됨에 따라 증가되는 순이익분

✓ $C_j - Z_j \leq 0$

❖ 절차

➢ 단계4: 진입기저변수와 탈락기저변수의 선정

✓ 진입기저변수

- 단계3에서 최적해가 아닐 경우 비기저변수 중 목점함수 값을 가장 크게 개선하는 변수를 진입기저변수로 선정
- 즉, $C_j - Z_j$ 중 가장 큰 값을 갖는 변수

✓ 탈락기저변수

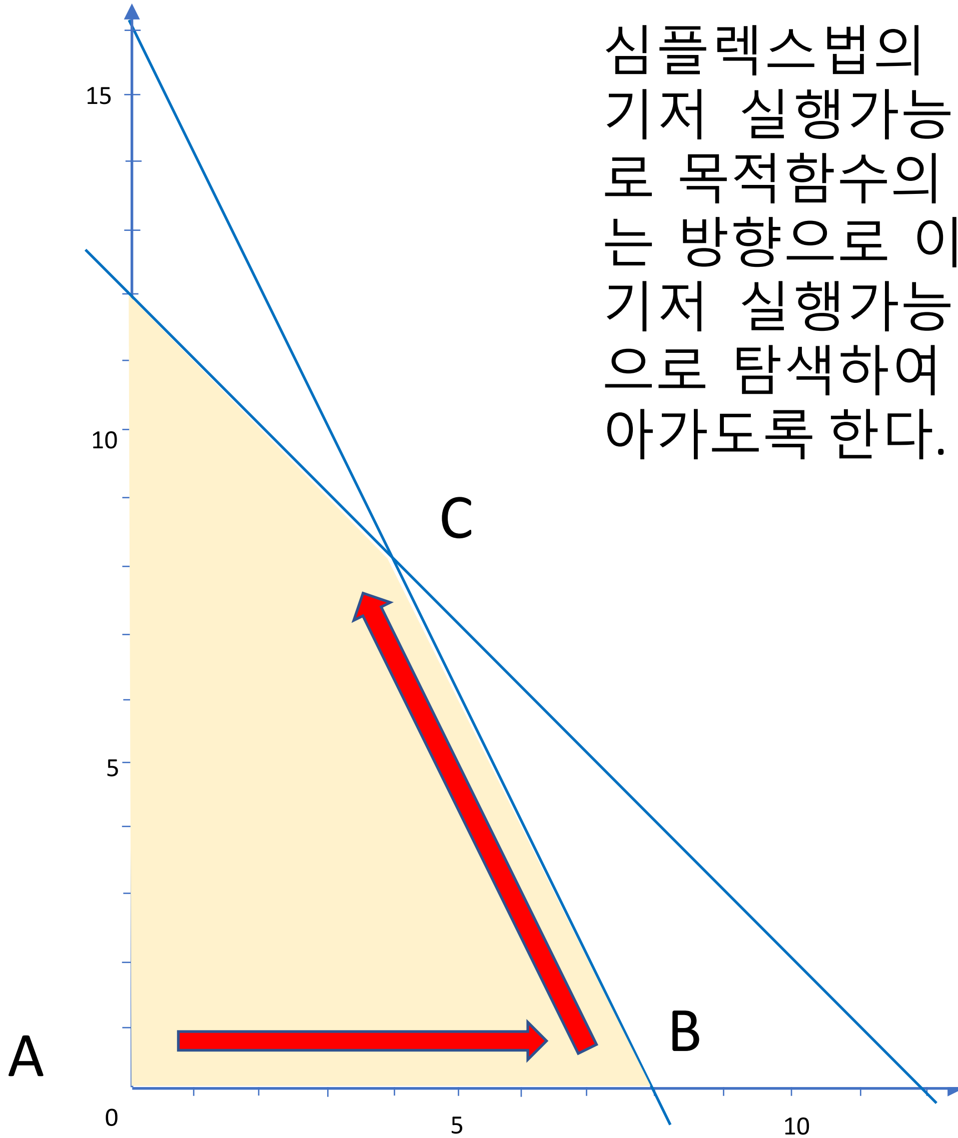
- 우변 상수열을 추축열의 기술계수로 나눈 값 중에서 가장 작은 양수를 가진 행의 기저변수
- 즉, 최소비율검사를 통해 양의 최소값을 가진 기저변수가 비기저변수로 탈락

➢ 단계5: 새로운 실행가능기저해의 선정

✓ 진입기저변수와 탈락기저변수를 교체하고, 행조작을 통해서 추축열의 추축 원소를 1로, 나머지를 0으로 만듬

3.3 심플렉스법의 절차

❖ 최적해 탐색절차



심플렉스법의 절차는 초기 기저 실행가능해를 시작으로 목적함수의 값이 좋아지는 방향으로 이웃하고 있는 기저 실행가능해를 순차적으로 탐색하여 최적해를 찾아가도록 한다.

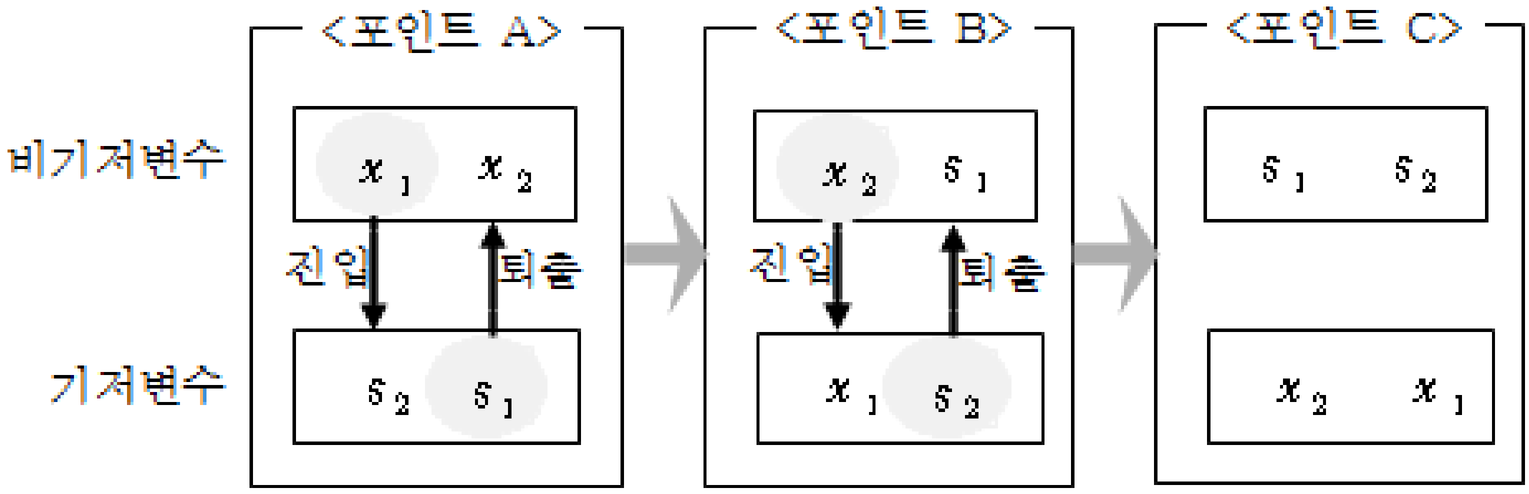
3.3 심플렉스법의 절차

❖ 최적해 탐색절차

- 원점(A)은 변수 x1과 x2 가 비기저변수일 때의 기저 실행가능해이므로 초기해
- x1또는 x2 의 값을 증가시키면 최대화문제이므로 목적함수의 값을 개선시킬 수 있음 (x1은 단위 증가당 3만큼, 변수 x2 는 단위 증가당 2만큼의 개선효과가 있으므로 변수 x1 을 선택
- 이는 초기 기저 실행가능해인 원점에서 x1 축을 따라 (변수 x2 의 값이 0으로 고정되어 있으므로) 8만큼 이웃하는 정점인 포인트 B로의 이동을 의미
- 목적함수값의 개선을 위해 기저변수로 진입시키는 비기저변수 x1 을 진입변수(Entering Variable)라 하고, 실행가능영역의 정점에 해당하는 기저 실행가능해를 찾아가는 것을 보장하기 위해 기저변수에서 퇴출시키는 기저변수 s1 을 퇴출변수(Leaving Variable)라 함

❖ 최적해 탐색절차

- 이웃하고 있는 두 기저가능해인 포인트 A와 B를 비교해보면, 기저변수와 비기저변수 중 하나씩이 상호 교환되어 있는 것을 알 수 있음
- 기저 실행가능해 간 이동 방법



❖ 정점 A의 심플렉스표

$$Max\ \ z - 3x_1 - 2x_2$$
$$s.t.$$
$$2x_1 + x_2 + s_1 \qquad\qquad = 16$$
$$x_1 + x_2 \qquad\qquad + s_2 = 12$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	-3	-2	0	0	0	
s_1	0	2	1	1	0	16	
s_2	0	1	1	0	1	12	

3.4 심플렉스법의 적용

❖ 정점 A의 심플렉스표

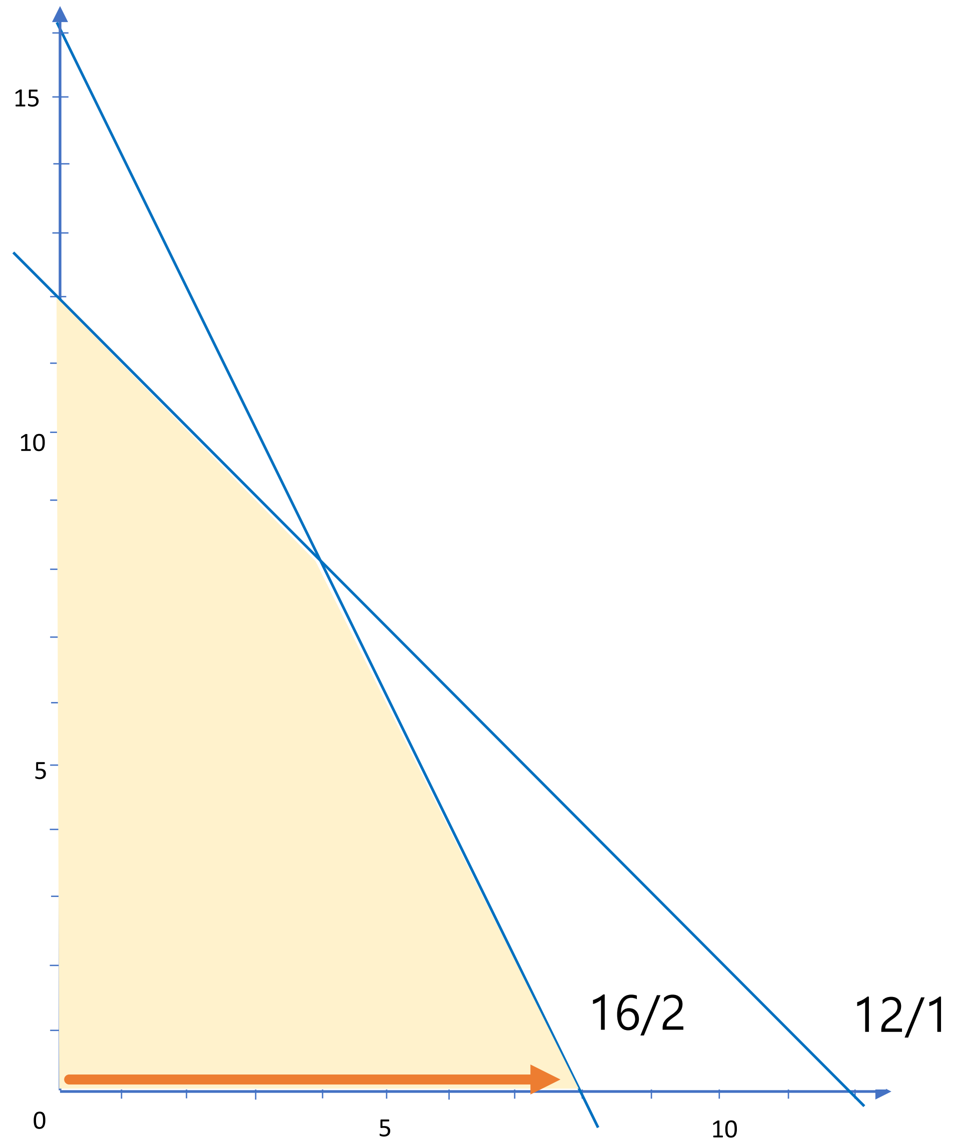
$$
\begin{aligned}
& Max\ \ z\ -\ 3x_1 + 2x_2 \\
& s.t. \\
& \qquad 2x_1 + \ x_2 + \ s_1 \qquad\quad = 16 \\
& \qquad\ \ x_1 + \ x_2 \qquad\quad + \ s_2\ = 12 \\
& \qquad\ \ x_1, x_2,\ s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

진입변수

탈락변수

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	-3	-2	0	0	0	
s_1	0	2	1	1	0	16	16/2
s_2	0	1	1	0	1	12	12/1

❖ 정점 A의 심플렉스표



❖ 정점 B의 심플렉스표

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ z\ -\ 3x_1 + 2x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + \ x_2 + \ s_1 \qquad\qquad = 16 \\
&\qquad \ \ x_1 + \ x_2 \qquad\quad + \ s_2 \ = 12 \\
&\qquad \ \ x_1, x_2,\ s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

진입변수

탈락변수

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	-3	-2	0	0	0	
s_1	0	2	1	1	0	16	16/2
s_2	0	1	1	0	1	12	12/1

3.4 심플렉스법의 적용

❖ 정점 B의 심플렉스표

$$Max \quad z - 3x_1 + 2x_2$$
$$s.t.$$
$$2x_1 + x_2 + s_1 \qquad = 16$$
$$x_1 + x_2 \qquad + s_2 = 12$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0$$

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	0	-1/2	3/2	0	24	
x_1	0	1	1/2	1/2	0	8	
s_2	0	0	1/2	-1/2	1	4	

3.4 심플렉스법의 적용

❖ 정점 B의 심플렉스표

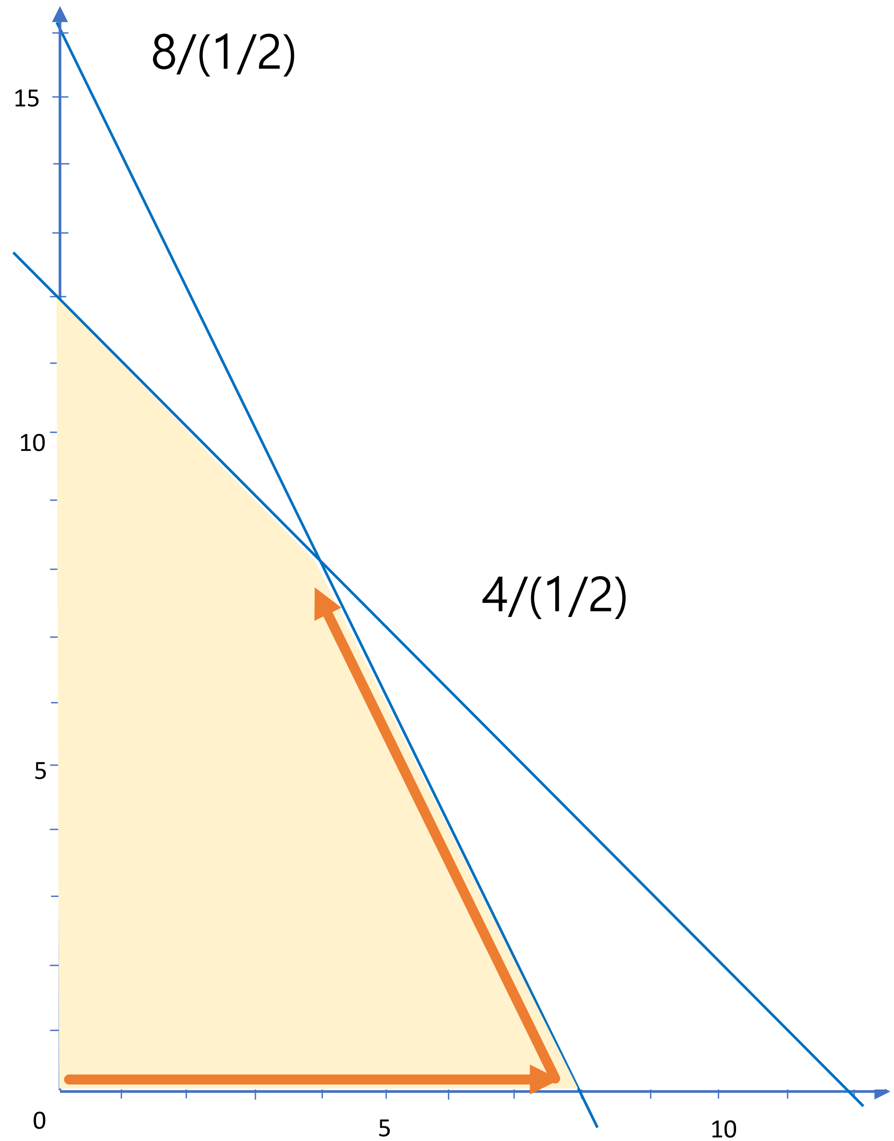
$$Max\ \ z \qquad - 1/2x_2$$
$$s.t.$$
$$x_1 + 1/2x_2 + \ 1/2s_1 \qquad = 8$$
$$1/2x_2 \ - \ 1/2s_1 + \ s_2 \ = 4$$
$$x_1, x_2,\ s_1, s_2 \geq 0$$

진입변수

탈락변수

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	0	-1/2	3/2	0	24	
x_1	0	1	1/2	1/2	0	8	8/(1/2)
s_2	0	0	1/2	-1/2	1	4	4/(1/2)

❖ 정점 A의 심플렉스표



❖ 정점 c의 심플렉스표

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ z \\
&s.t. \\
&\qquad x_1 \qquad\quad + s_1 - \ s_2 \ = 4 \\
&\qquad\qquad x_2 - s_1 + 2s_2 \ = 8 \\
&\qquad x_1, x_2,\ s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	0	0	1	1	24	
x_1	0	1	0	1	-1	4	
x_2	0	0	1	-1	2	8	

❖ 최적해

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	0	0	1	1	24	
x_1	0	1	0	1	-1	4	
x_2	0	0	1	-1	2	8	

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Ax = b

$$x = A^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b$$

3.4 심플렉스법의 적용

❖ 최적성조건

- 최대화문제에서 진입변수는 심플렉스표의 z행 값 중 음의 최대값(Most Negative)을 갖는 비기저변수를 선택
- 동일한 값인 경우는 임의 선택
- 만약 z행의 모든 값이 비음(nonnegative)이면 최적해에 도달한 것
- 최소화문제의 경우에는 표의 z행 값 중 양의 최대값(Most Positive)을 갖는 비기저변수를 진입변수로 선택하고, z행의 모든 값이 비양(nonpositive)이면 최적해에 도달한 것

❖ 실행가능성조건

- 최대화문제와 최소화문제 둘 다 똑같이 최소 비음의 비율(Smallest Nonnegative Ratio)을 갖는 기저변수를 퇴출변수로 선택. 동일한 값인 경우는 임의 선택

3.4 심플렉스법의 적용

❖ 심플렉스법의 전체 절차

➢ 단계 0 : 초기 기저 실행가능해를 결정

➢ 단계 1 :

✓ 최적성조건을 이용하여 진입변수를 선택

✓ 만약 진입대상 변수가 없으면 현재 해를 최적해로 절차를 종료

➢ 단계 2 :

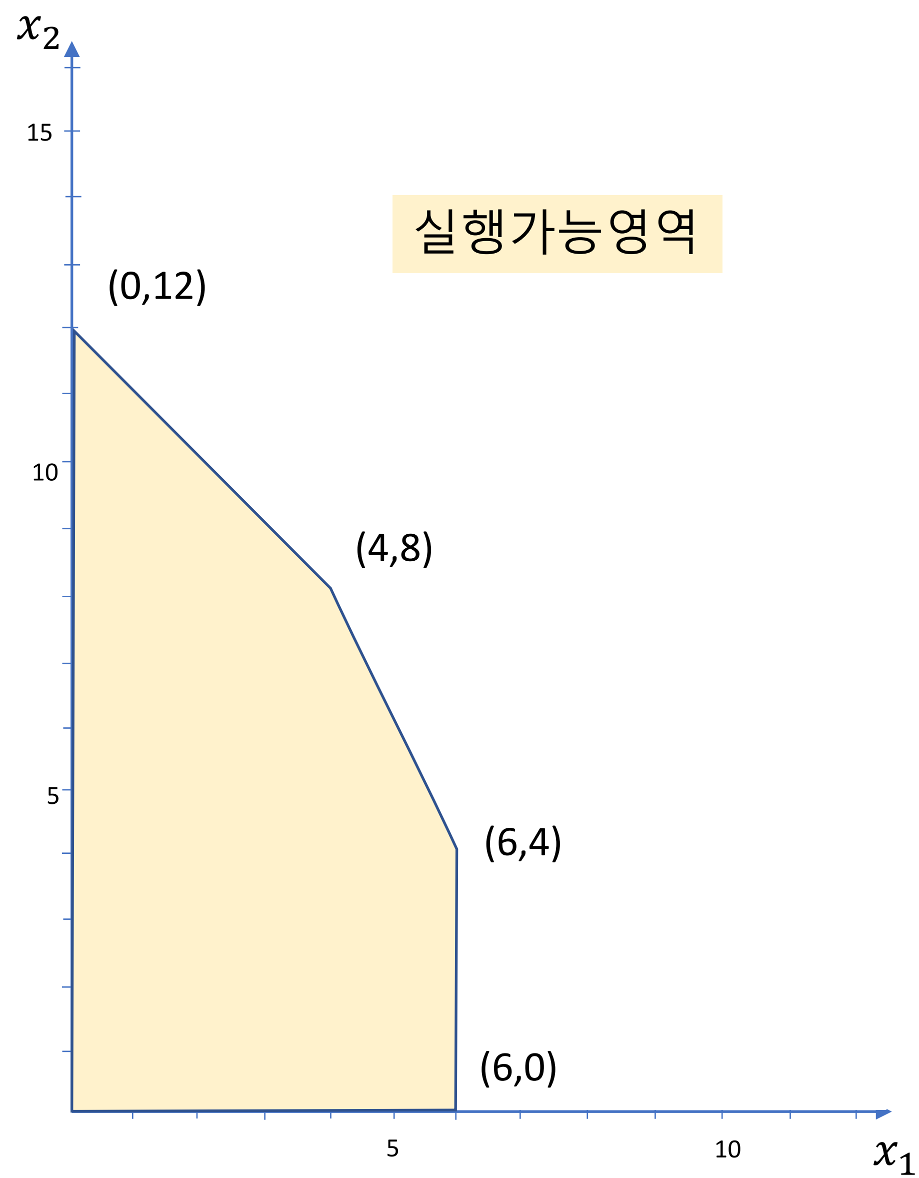
✓ 실행가능성조건(Feasibility Condition)을 이용하여 퇴출변수를 선택

➢ 단계 3 :

✓ Gauss - Jordan 소거법을 활용하여 새로운 기저 실행가능해를 찾고, [단계 1]로 간다.

❖ 2장 예제

$$Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2$$
$$s.t.$$
$$\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 &\le 16 \\ x_1 + \ \ x_2 &\le 12 \\ x_1 \qquad\ \ &\le \ \ 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$



❖ 2장 예제

$$\begin{aligned} &Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\ &s.t. \\ &\quad 2x_1 + x_2 \le 16 \\ &\quad x_1 + x_2 \le 12 \\ &\quad x_1 \le 6 \\ &\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Max\ \ z \quad - 150{,}000x_1 - 100{,}000x_2 \\ &s.t. \\ &\quad 2x_1 + x_2 + s_1 = 16 \\ &\quad x_1 + x_2 + s_2 = 12 \\ &\quad x_1 + \quad + s_3 = 6 \\ &\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	-15	-10	0	0	0	0	
s_1	0	2	1	1	0	0	16	
s_2	0	1	1	0	1	0	12	
s_3	0	1	0	0	0	1	6	

3.4 심플렉스법의 적용

❖ 2장 예제

A

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	-15	-10	0	0	0	0	
s_1	0	2	1	1	0	0	16	8
s_2	0	1	1	0	1	0	12	12
s_3	0	1	0	0	0	1	6	6

B

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	0	-10	0	0	15	90	
s_1	0	0	1	1	0	-2	4	
s_2	0	0	1	0	1	-1	6	
x_1	0	1	0	0	0	1	6	

❖ 2장 예제

B

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	0	-10	0	0	15	90	
s_1	0	0	1	1	0	-2	4	4
s_2	0	0	1	0	1	-1	6	6
x_1	0	1	0	0	0	1	6	

C

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	0	0	10	0	-5	130	
x_2	0	0	1	1	0	-2	4	
s_2	0	0	0	-1	1	1	2	
x_1	0	1	0	0	0	1	6	

3.4 심플렉스법의 적용

❖ 2장 예제

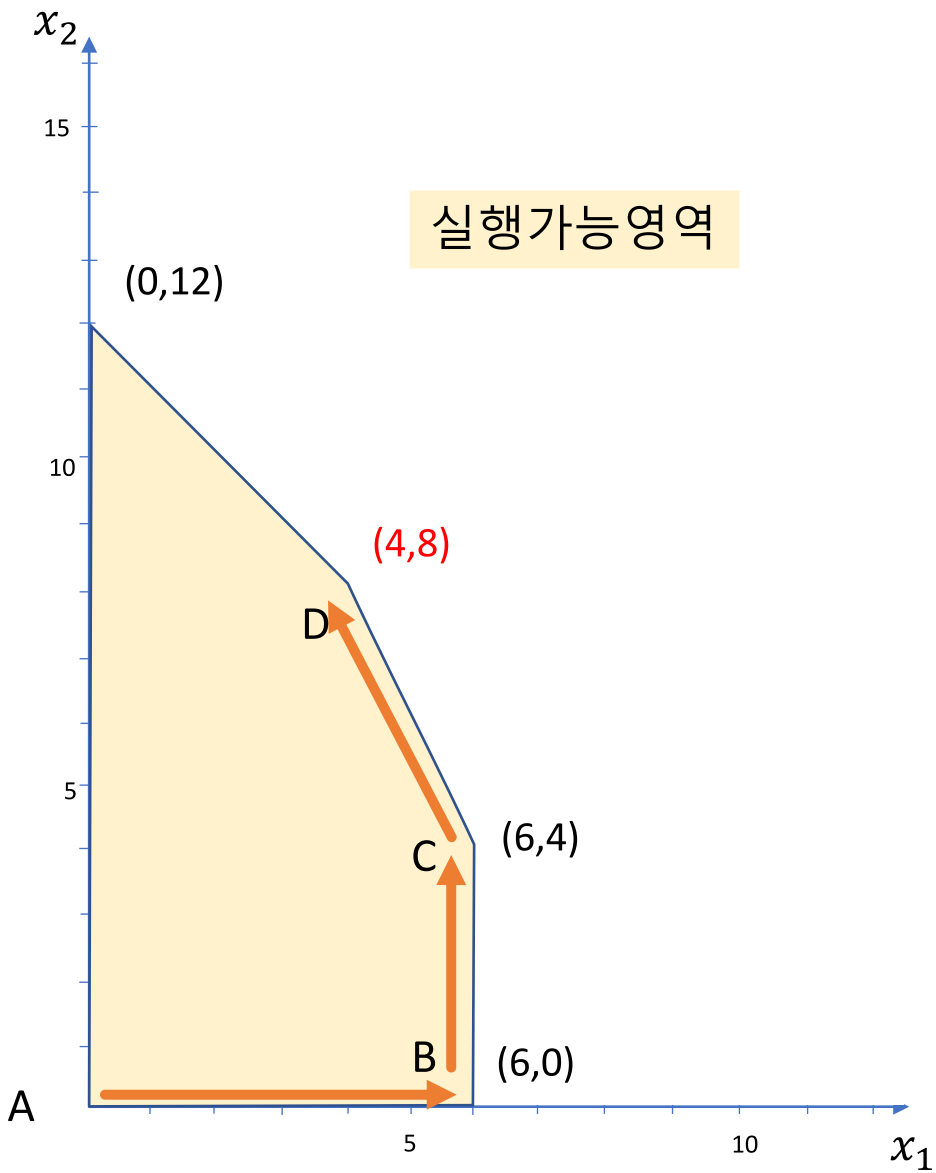
C

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	0	0	10	0	-5	130	
x_2	0	0	1	1	0	-2	4	-2
s_2	0	0	0	-1	1	1	2	2
x_1	0	1	0	0	0	1	6	6

D

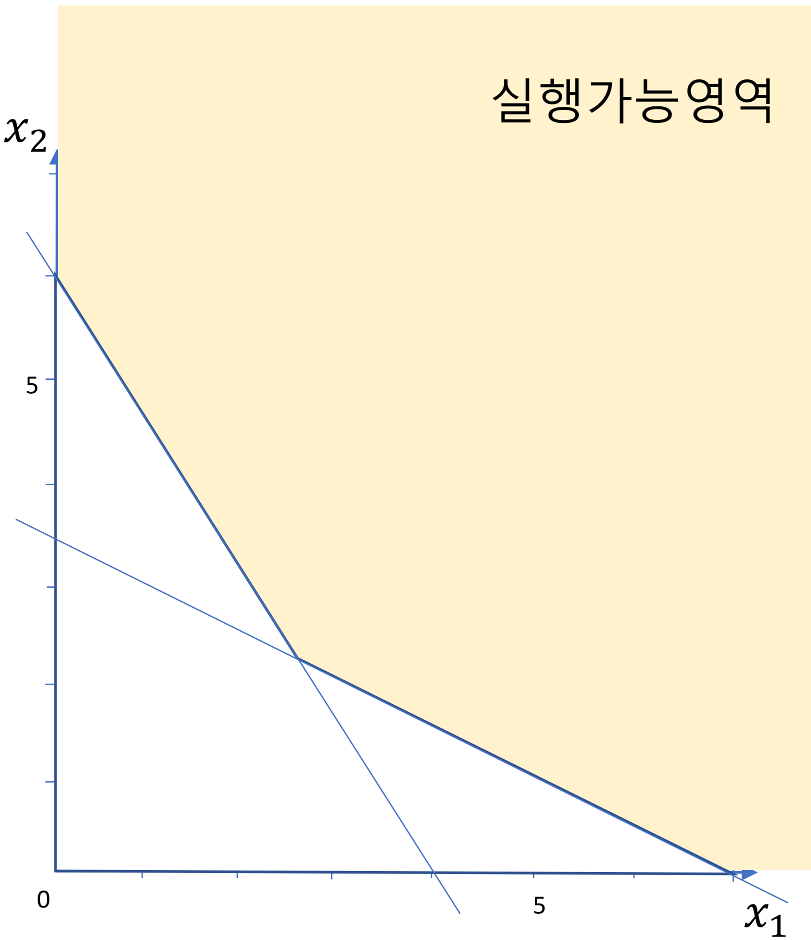
Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	0	0	5	5	0	140	
x_2	0	0	1	-1	2	0	8	
s_3	0	0	0	-1	1	1	2	
x_1	0	1	0	0	0	0	4	

❖ 2장 예제



❖ 최소화문제 & 부등식(>=)

$$Min\ \ 100x_1 + 100x_2$$
$$s.t.$$
$$20x_1 + 40x_2 \geq 140$$
$$30x_1 + 20x_2 \geq 120$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



3.5 인공초기해

❖ 최소화문제 & 부등식(>=)

➢ 표준형

$$\begin{aligned}
&Min\ \ 100x_1 + 100x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 20x_1 + 40x_2 \geq 140 \\
&\qquad 30x_1 + 20x_2 \geq 120 \\
&\\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&Min\ \ 100x_1 + 100x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 20x_1 + 40x_2 - s_1 \qquad = 140 \\
&\qquad 30x_1 + 20x_2 \qquad - s_2 = 120 \\
&\\
&\qquad x_1, x_2,\ s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}$$

초기 기저 실행가능해를 정의할 수 없음

3.5 인공초기해

❖ 최소화문제 & 부등식(>=)

- 표준형에서 바로 초기 기저 실행가능해를 찾지 못하는 경우에는 인공변수(Artificial Variable)를 도입하여 초기 기저 실행가능해를 찾아가는 전 단계가 필요
- 도입되는 인공변수는 심플렉스표에서 목적변수와 기저변수 부분에 단위행렬(Identity Matrix)이 나타나도록 해줌으로써 심플렉스표를 이용하여 초기 기저 실행가능해를 찾아갈 수 있게 해 줌
- 인공변수는 원문제에는 없는 변수이므로 양의 값을 가지면 제약식을 위배하는 실행불가능해를 나타냄. 따라서 도입된 모든 인공변수는 반드시 0의 값을 갖도록 비기저변수로 만들어야 원하는 기저 실행가능해를 찾아갈 수 있음

3.5 인공초기해

❖ Big M-Method

➢ 도입된 인공변수들을 기저변수에서 퇴출시키기 위해 목적함수식에 해당 인공변수에 대한 무한대의 벌과비용을 부과하는 방법

$$Min \;\; z = 100x_1 + 100x_2 + \mathrm{M}R_1 + MR_2$$

$$s.t.$$

$$\begin{aligned} 20x_1 + 40x_2 - s_1 \quad\quad + R_1 \quad\quad &= 140 \\ 30x_1 + 20x_2 \quad\quad - s_2 \quad\quad + R_2 &= 120 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, \;\; s_1\,, s_2,, \;\; R_1\,, R_2 \geq 0$$

3.5 인공초기해

❖ Big M-Method

➢ 초기 심플렉스표

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solution	ratio
z	1	-100	-100	0	0	-M	-M	0	
R_1	0	20	40	-1	0	1	0	140	
R_2	0	30	20	0	-1	0	1	120	

A

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solution	ratio
z	1	50M -100	60M -100	-M	-M	0	0	260M	
x_2	0	20	40	-1	0	1	0	140	
R_2	0	30	20	0	-1	0	1	120	

❖ Big M-Method

A

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solution	ratio
z	1	50M -100	60M -100	-M	-M	0	0	260M	
x_2	0	20	40	-1	0	1	0	140	7/2
R_2	0	30	20	0	-1	0	1	120	6

B

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solution	ratio
z	1	20M-50	0	1/2M -5/2	-M	5/2-3/2M	0	350+50M	
x_2	0	1/2	1	-1/40	0	1/40	0	7/2	
R_2	0	20	0	1/2	-1	-1/2	1	50	

❖ Big M-Method

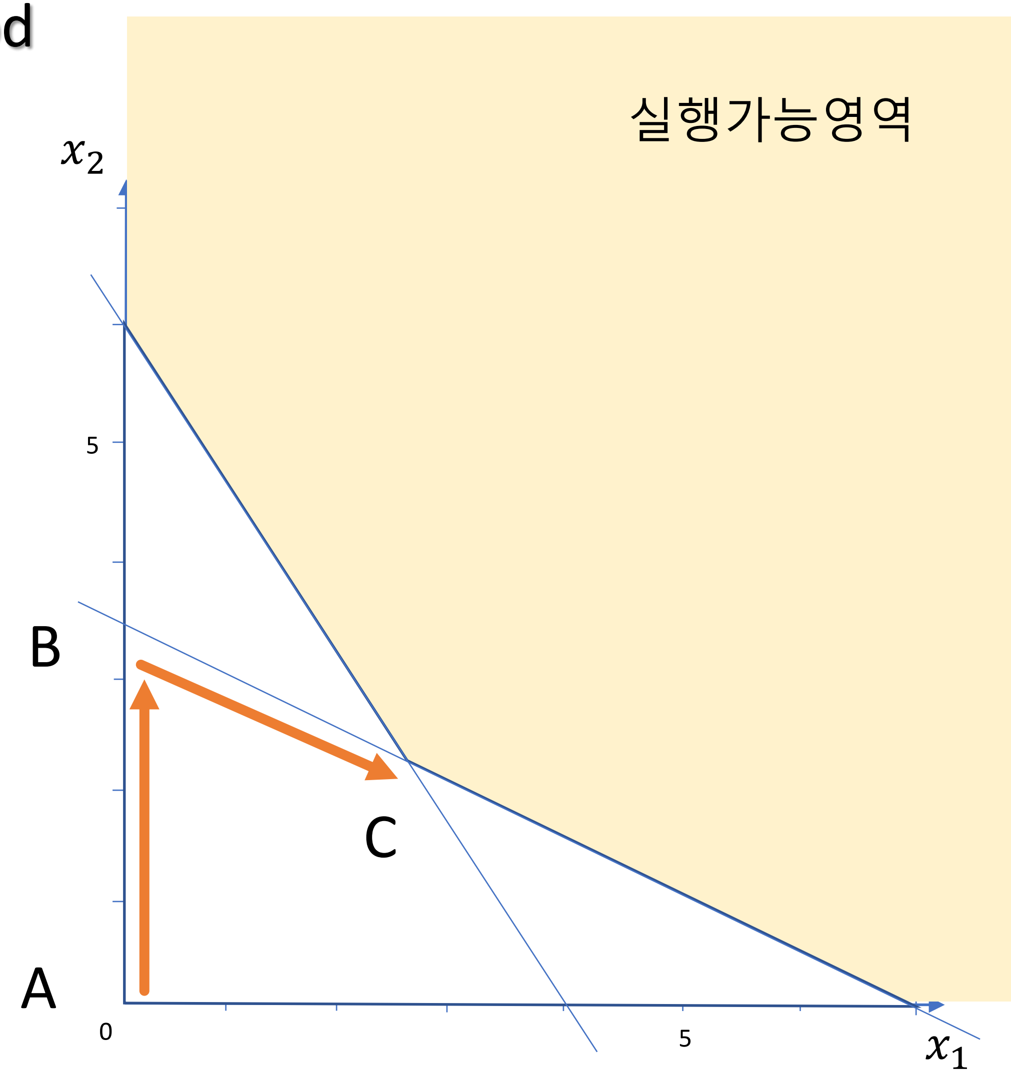
B

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solution	ratio
z	1	20M-50	0	1/2M -5/2	-M	5/2-3/2M	0	350+50M	
x_2	0	1/2	1	-1/40	0	1/40	0	7/2	7
R_2	0	20	0	1/2	-1	-1/2	1	50	5/2

C

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solution	ratio
z	1	0	0	-5/4	-5/2	100-20M	5/2-M	475	
x_2	0	0	1	-3/80	1/40	3/80	-1/40	9/4	
x_1	0	1	0	1/40	-1/20	-1/40	1/20	5/2	

❖ Big M-Method



❖ Two-Phase Method

- 도입된 인공변수를 기저변수에서 퇴출시켜 초기기저 실행가능해를 찾아가는 전 단계와 최적해를 찾아가는 심플렉스법 본 단계를 나누어 수행하는 방법
- Phase 1

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ z = R_1 + R_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 20x_1 + 40x_2 - s_1 \qquad + R_1 \qquad = 140 \\
&\qquad 30x_1 + 20x_2 \qquad - s_2 \qquad + R_2 = 120 \\
&\qquad x_1, x_2,\ s_1, s_2,,\ R_1, R_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

❖ Two-Phase Method

➢ Phase 1

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solution	ratio
z	1	0	0	0	0	-1	-1	0	
R_1	0	20	40	-1	0	1	0	140	
R_2	0	30	20	0	-1	0	1	120	

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solution	ratio
z	1	50	60	-1	-1	0	0	260	
R_1	0	20	40	-1	0	1	0	140	
R_2	0	30	20	0	-1	0	1	120	

❖ Two-Phase Method

➢ Phase 1

A

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solution	ratio
z	1	50	60	-1	-1	0	0	260	
R_1	0	20	40	-1	0	1	0	140	7/2
R_2	0	30	20	0	-1	0	1	120	6

B

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solution	ratio
z	1	20	0	1/2	-1	-3/2	0	50	
R_1	0	1/2	1	-1/40	0	1/40	0	7/2	
R_2	0	20	0	1/2	-1	-1/2	1	50	6

❖ Two-Phase Method

➢ Phase 1

B

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solution	ratio
z	1	20	0	1/2	-1	-3/2	0	50	
x_2	0	1/2	1	-1/40	0	1/40	0	7/2	7
R_2	0	20	0	1/2	-1	-1/2	1	50	5/2

C

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solution	ratio
z	1	0	0	0	0	-1	-1	0	
x_2	0	0	1	-3/80	0	3/80	-1/40	9/4	7
x_1	0	1	0	1/40	-1/20	-1/40	1/20	5/2	5/2

❖ Two-Phase Method

➢ Phase 2

- 단계 I에서 찾은 초기 실행가능해에서 인공변수 열들을 제거하고, 단계 I의 목적식 대신 원문제의 목적을 대체

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	Solution	ratio
z	1	0	0	0	0	-1	-1	0	
x_2	0	0	1	-3/80	0	3/80	-1/40	9/4	7
x_1	0	1	0	1/40	-1/20	-1/40	1/20	5/2	5/2

❖ Two-Phase Method

➢ Phase 2

- 단계 I에서 찾은 초기 실행가능해에서 인공변수 열들을 제거하고, 단계 I의 목적식 대신 원문제의 목적을 대체

$$Min\ \ z = 100x_1 + 100x_2$$

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	-100	-100	0	0	0	
x_2	0	0	1	-3/80	0	9/4	7
x_1	0	1	0	1/40	-1/20	5/2	5/2

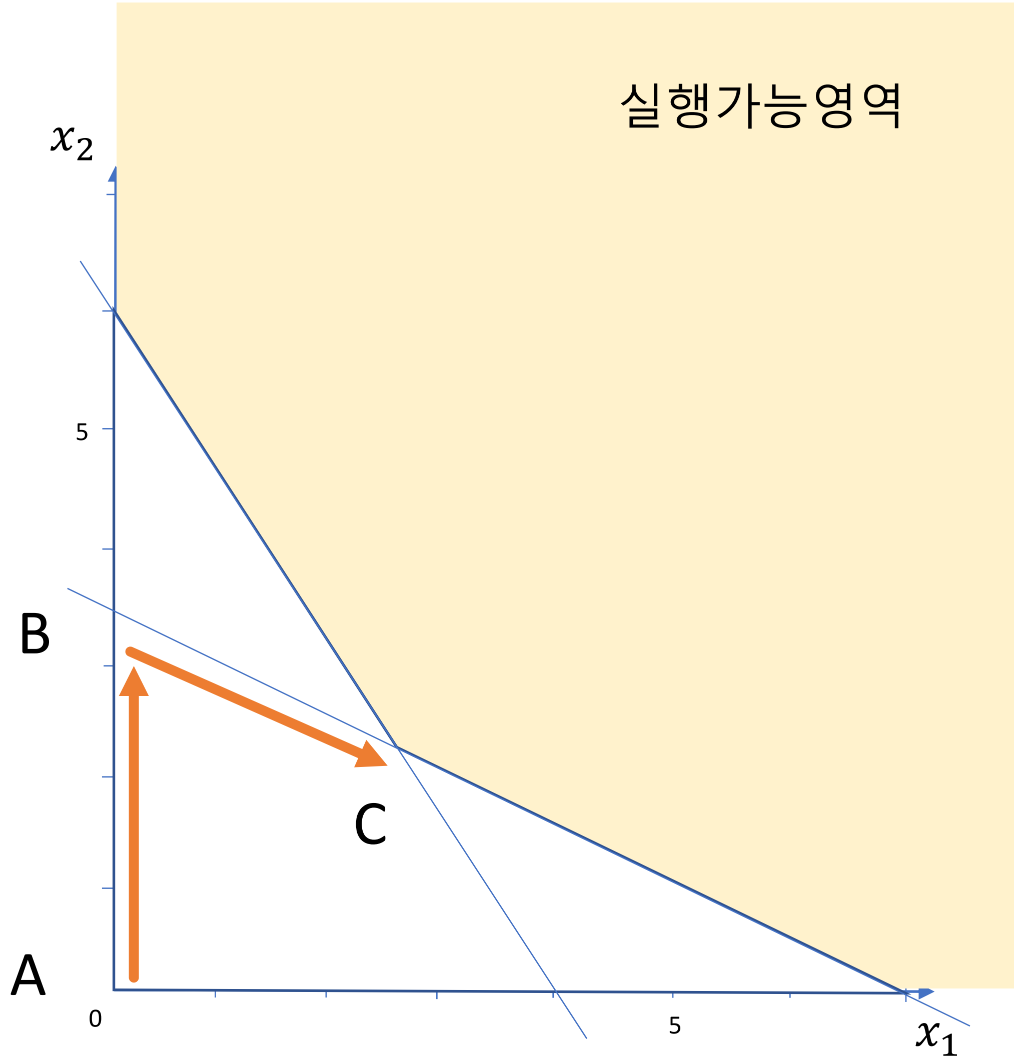
❖ Two-Phase Method

- Phase 2

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	-100	-100	0	0	0	
x_2	0	0	1	-3/80	0	9/4	7
x_1	0	1	0	1/40	-1/20	5/2	5/2

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	0	0	-5/4	-5	475	
x_2	0	0	1	-3/80	0	9/4	
x_1	0	1	0	1/40	-1/20	5/2	

❖ Two-Phase Method



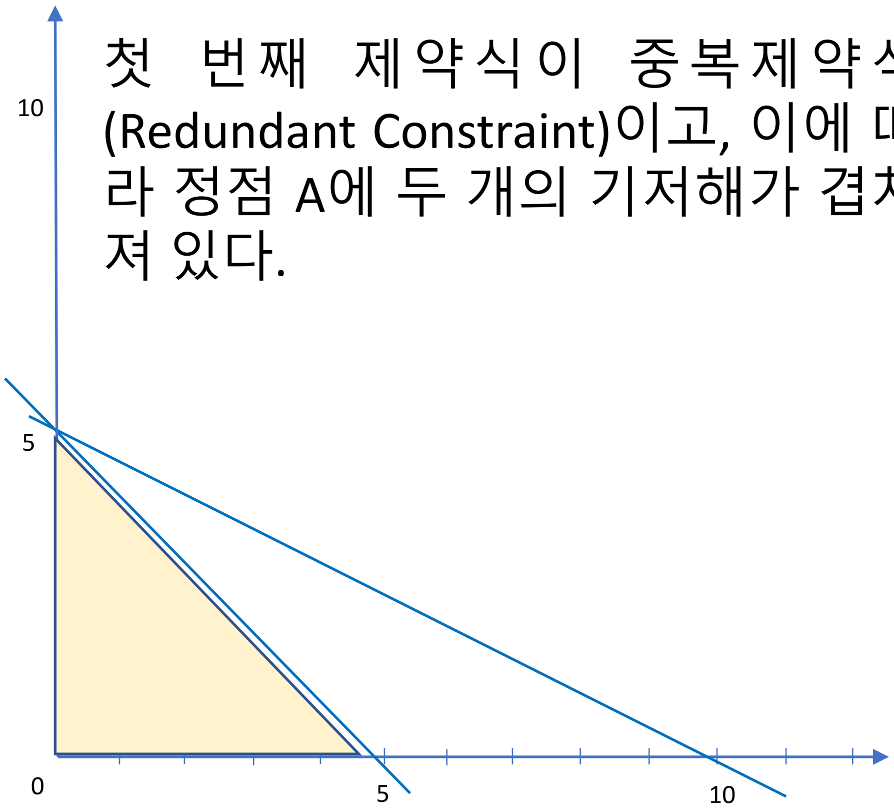
❖ 퇴화 현상(Degeneracy)

- 퇴화현상은 심플렉스법의 실행가능성조건(Feasibility Condition)검색에서 최소 비음비율에 동일한 값이 있는 경우 발생하며, 다음 단계에서 0의 값을 갖는 기저변수가 발생하게 된다.
- 아주 드물게 순환현상(cycling)이 발생하여 무한루프에 빠질 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 2x_1 + 3x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad x_1 + 2x_2 \le 10 \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 5 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

❖ 퇴화 현상(Degeneracy)

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 2x_1 + 3x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad x_1 + 2x_2 \ \le 10 \\
&\qquad x_1 + \ \ \ x_2 \ \le 5 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



첫 번째 제약식이 중복제약식(Redundant Constraint)이고, 이에 따라 정점 A에 두 개의 기저해가 겹쳐져 있다.

❖ 퇴화 현상(Degeneracy)

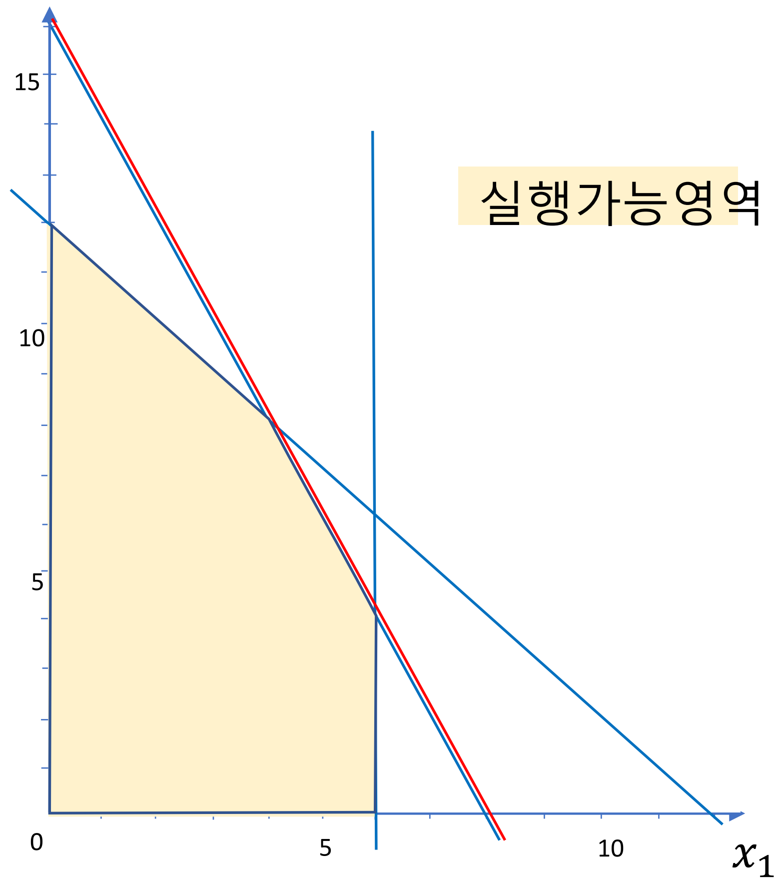
Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	-2	-3	0	0	0	
s_1	0	1	2	1	0	10	5
s_2	0	1	1	0	1	5	5

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	1	0	0	3	15	
s_1	0	-1	0	1	-2	0	
s_2	0	1	1	0	1	5	

❖ 다중 최적해(Alternative Optima)

➢ 최적해가 하나만 존재하는 것이 아니라 다중 최적해(Alternative Optima)를 제공

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 2x_1 + x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + \ x_2 \ \le 16 \\
&\qquad\ \ x_1 + \ x_2 \ \le 12 \\
&\qquad\ \ x_1 \qquad\ \ \le \ \ 6 \\
&\qquad\ \ x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



❖ 다중 최적해(Alternative Optima)

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 2x_1 + \ x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + \ x_2 \ \le 16 \\
&\qquad\ \ x_1 + \ x_2 \ \le 12 \\
&\qquad\ \ x_1 \qquad\quad \le \ \ 6 \\
&\qquad\ \ x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ z \quad - 2x_1 - x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + \ x_2 + \ s_1 \qquad\qquad = 16 \\
&\qquad\ \ x_1 + \ x_2 \qquad + \ s_2 \qquad = 12 \\
&\qquad\ \ x_1 + \qquad\qquad\qquad + s_3 \ = \ \ 6 \\
&\qquad\ \ x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	-2	-1	0	0	0	0	
s_1	0	2	1	1	0	0	16	
s_2	0	1	1	0	1	0	12	
s_3	0	1	0	0	0	1	6	

❖ 다중 최적해(Alternative Optima)

A

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	-2	-1	0	0	0	0	
s_1	0	2	1	1	0	0	16	8
s_2	0	1	1	0	1	0	12	12
s_3	0	1	0	0	0	1	6	6

B

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	0	-1	0	0	2	12	
s_1	0	0	1	1	0	-2	4	
s_2	0	0	1	0	1	-1	6	
x_1	0	1	0	0	0	1	6	

❖ 다중 최적해(Alternative Optima)

B

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	0	-1	0	0	2	12	
s_1	0	0	1	1	0	-2	4	4
s_2	0	0	1	0	1	-1	6	6
x_1	0	1	0	0	0	1	6	

C

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	0	0	1	0	0	16	
x_2	0	0	1	1	0	-2	4	
s_2	0	0	0	-1	1	1	2	
x_1	0	1	0	0	0	1	6	

❖ 다중 최적해(Alternative Optima)

C

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	0	0	1	0	0	16	
x_2	0	0	1	1	0	-2	4	
s_2	0	0	0	-1	1	1	2	2
x_1	0	1	0	0	0	1	6	6

D

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	0	0	1	0	0	16	
x_2	0	0	1	-1	2	0	8	
s_3	0	0	0	-1	1	1	2	
x_1	0	1	0	1	0	0	4	

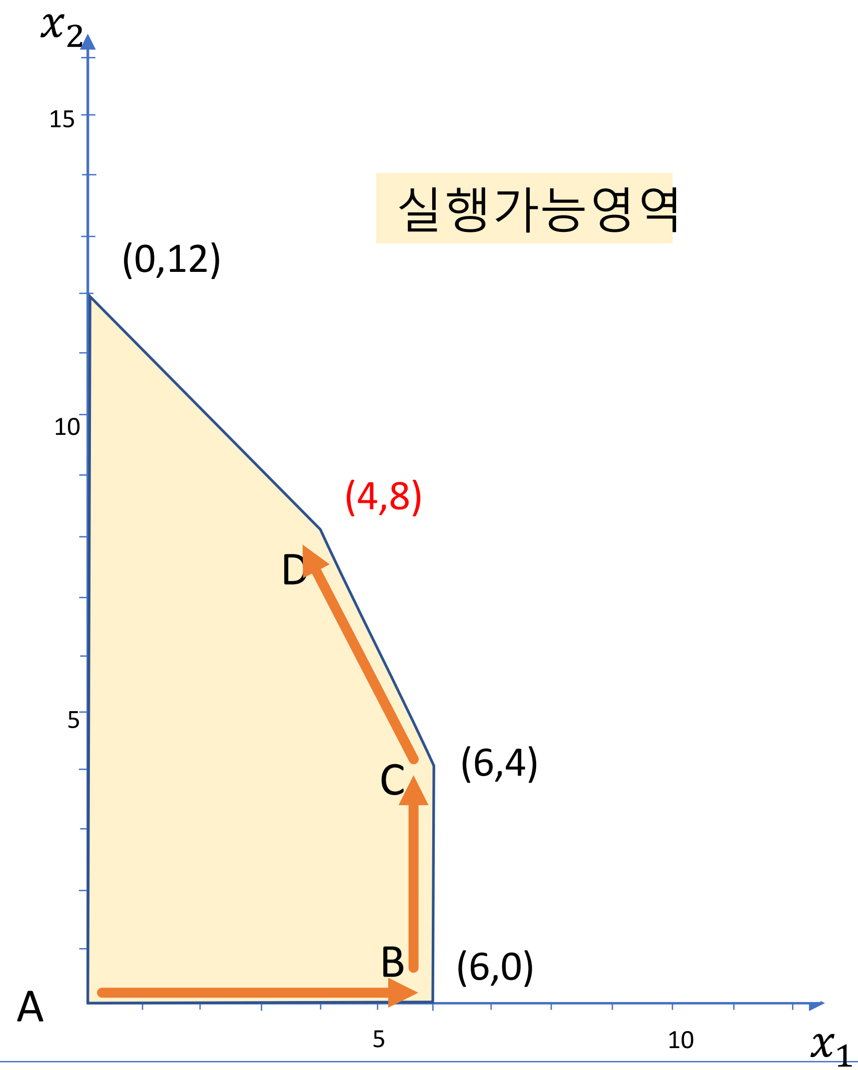
❖ 다중 최적해(Alternative Optima)

c

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	Solution	ratio
z	1	0	0	1	0	0	16	
x_2	0	0	1	1	0	-2	4	
s_2	0	0	0	-1	1	1	2	2
x_1	0	1	0	0	0	1	6	6

심플렉스법에서는 최적해를 나타내는 표에서 z행 값이 0인 비기저변수가 존재하고 이것으로 다중 최적해가 존재함을 판단할 수 있다. 최적해 표에서 z행 값이 0인 비기저변수를 진입변수로 선택하면 다른 최적해를 얻을 수 있다.

❖ 다중 최적해(Alternative Optima)

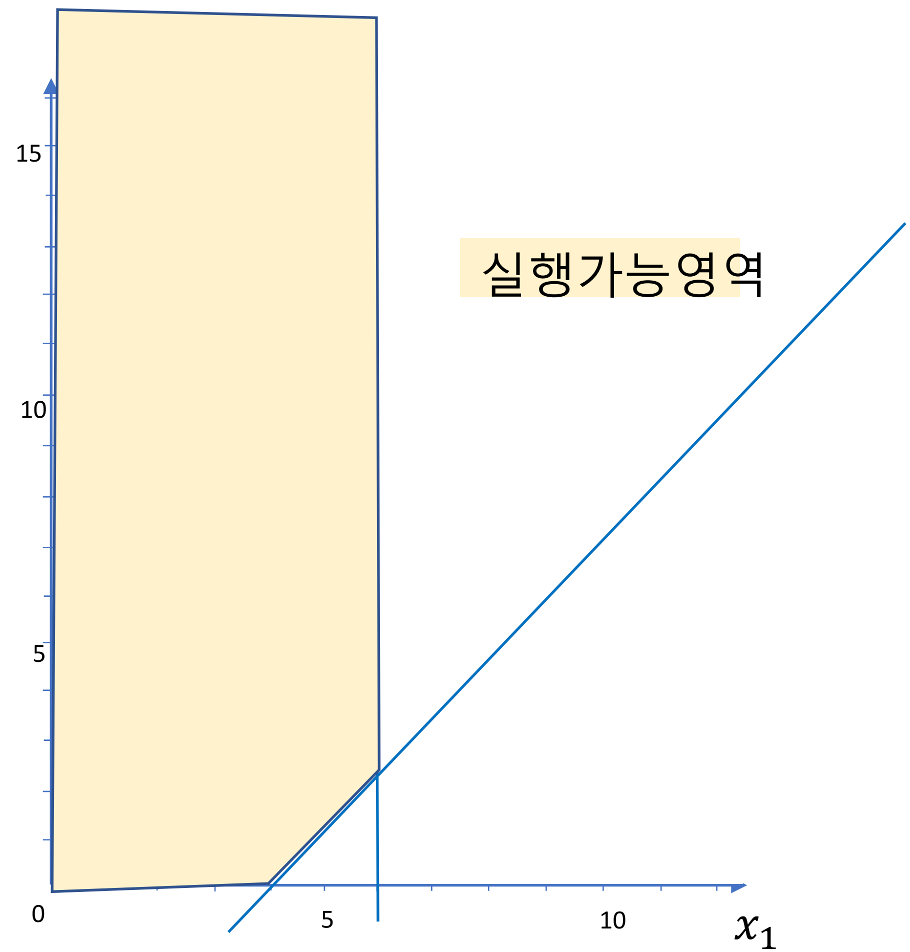


3.6 심플렉스법의 적용상 특수한 경우

❖ 무한해(Unbounded Solution)

- ➢ 목적함수의 값이 무한히 증가(최대화문제의 경우)하거나 감소(최소화문제의 경우)하는 선형계획문제

$$
\begin{aligned}
&Max \;\; 2x_1 + \; x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad x_1 - \; x_2 \le \; 4 \\
&\qquad x_1 \qquad\quad\;\; \le \; 6 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



❖ 무한해(Unbounded Solution)

A

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	-2	-1	0	0	0	
s_1	0	1	-1	1	0	4	4
s_2	0	1	0	0	1	6	6

B

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	0	-3	2	0	8	
x_1	0	1	-1	1	0	4	
s_2	0	0	1	-1	1	2	

❖ 무한해(Unbounded Solution)

B

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	0	-3	2	0	8	
x_1	0	1	-1	1	0	4	
s_2	0	0	1	-1	1	2	2

C

Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
z	1	0	0	-1	3	14	
x_1	0	1	0	0	1	6	
x_2	0	0	1	-1	1	2	

❖ 무한해(Unbounded Solution)

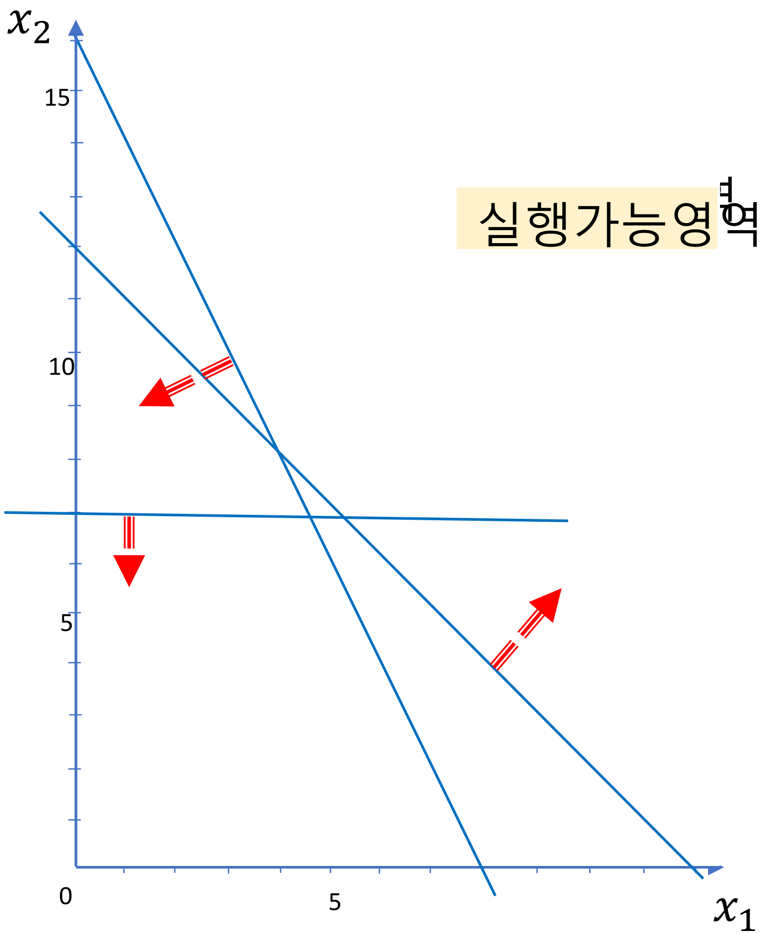
	Basic	z	x_1	x_2	s_1	s_2	Solution	ratio
	z	1	0	0	-1	3	14	
c	x_1	0	1	0	0	1	6	
	x_2	0	0	1	-1	1	2	

심플렉스법에서 제한 없는 해문제는 위의 마지막 표와 같이 진입변수는 있으나 s_1을 진입변수로 할 때 모든 비율이 음수 또는 무한대여서 퇴출변수를 선택할 수 없게 된다.
그러나 첫 번째 표의 어두운 표시처럼 진입 가능 변수에 대한 열값들이 모두 비양(nonpositive)이면 미리 무한해 문제임을 판단할 수 있다.

❖ 실행불가능해(Infeasible Solution)

➢ 실행가능해가 전혀 존재하지 않는 선형계획문제

$$Max \;\; 3x_1 + 2x_2$$
$$s.t.$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + x_2 \ge 12$$
$$x_2 \le 7$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



3.6 심플렉스법의 적용상 특수한 경우

❖ 실행불가능해(Infeasible Solution)

- 실행불가능해문제는 인공변수의 도입이 필수적이다.
- 이를 M - 방법으로 풀면 심플렉스표상으로 최적성 조건을 만족하지만 인공변수가 기저변수에 남아 있는 경우가 발생하고,
- 2단계법으로 풀 때는 단계 I에서 인공변수가 기저변수에 남아 있는 경우로 끝나게 된다.

3.7 심플렉스법 활용 프로그램

```
import numpy as np
import scipy as sp
import scipy.optimize

c = np.array([-150000, -100000])
A = np.array([[2, 1], [1, 1], [1, 0]])
b = np.array([16, 12, 6])


result = sp.optimize.linprog(c, A, b)
result
```

https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/

```
con: array([], dtype=float64)
     fun: -1399999.9967195382
 message: 'Optimization terminated successfully.'
     nit: 7
   slack: array([3.76628790e-08, 2.79463563e-08, 2.00000001e+00])
  status: 0
 success: True
       x: array([3.99999999, 7.99999998])
```

3.7 심플렉스법 활용 프로그램

```
pip install cvxpy
```

https://www.cvxpy.org/

```
import cvxpy as cp

# 변수의 정의
x1 = cp.Variable()  # A의 생산량
x2 = cp.Variable()  # B의 생산량

# 조건의 정의
constraints = [
    x1 >= 0,
    x2 >= 0,
    2*x1 + x2  <= 16,
    x1 + x2 <= 12,
    x1 <=6,
]
```

```
# 문제의 정의
obj = cp.Maximize(150000 * x1 + 100000 * x2)
prob = cp.Problem(obj, constraints)

# 계산
prob.solve()

# 결과
print("상태:", prob.status)
print("최적값:", x1.value, x2.value)
print("목적함수값:", obj.value)
```

```
상태: optimal
최적값: 4.000000003557277
7.999999984198859
목적함수값: 1399999.9989534775
```

3.7 심플렉스법 활용 프로그램

pip install pulp

https://coin-or.github.io/pulp/index.html

```
from pulp import *
# sense: LpMaximize or LpMinimize(default)
LP = LpProblem(name = "LP",    sense = LpMaximize )

# DEFINE decision variable
# cat: category, "Continuous"(default), "Integer", "Binary"
X1 = LpVariable(name='A', lowBound=None, upBound=None, cat='Integer')
X2 = LpVariable(name='B', lowBound=None, upBound=None, cat='Integer’ )

# OBJECTIVE function
LP.objective = 150000 * x1 + 100000 * x2

print('Objective: ', LP.objective, '\n')
```

```
# CONSTRAINTS
constraints = [
    x1 >= 0,
    x2 >= 0,
    2*x1 + x2  <= 16,
    x1 + x2 <= 12,
    x1 <=6,
]
print('Constraints: ')
for i in constraints:
    print(i)

for i, c in enumerate(constraints):
    constraint_name = f"const_{i}"
    LP.constraints[constraint_name] = c

# SOLVE model
res = LP.solve()
```

```
# 결과
print('\nResults: ')
for v in LP.variables():
    print(f"{v} Type: {v.varValue:5.1f} men")

print('\n', 'The objective funtion is ', value(LP.objective))
```

```
Objective:  150000*A + 100000*B

Constraints:
2*A + B <= 16
A + B <= 12
A <= 6
A >= 0
B >= 0

Results:
A Type:   4.0 men
B Type:   8.0 men

 The objective funtion is  1400000.0
```

❖ 선형계획모형 개발과정

- 문제를 이해
- 의사결정변수들을 결정
- 해의 우열을 결정하는 기준을 선택
- 이 기준이 의사결정변수들의 선형식으로 나타나도록 수식으로 표현하여 목적함수로 사용
- 모든 조건들이 의사결정변수들의 선형식으로 나타나도록 제약식들을 만듦
- 입력자료들을 수집하고 추정

3.8 선형계획법의 응용

❖ 생산계획

- 공유산업(주)은 다음 달에 제품 1, 2, 3을 각각 80개, 120개, 100개 생산하여 납품하라는 주문을 받았다.
- 회사에서 보유하고 있는 두 대의 기계를 사용하여 주문받은 세 종류의 제품을 생산할 수 있다.
  - ✓ 주문받은 제품의 생산을 위해 사용가능한 기계의 가동시간을 조사해보았더니,
  - ✓ 기계 1은 600시간, 기계 2는 500시간이 가능한 것으로 나타났다.
- 각 제품을 생산하기 위한 제품단위당 생산비용과 제품단위당 기계별 생산소요시간은 다음과 같을 때, 주문을 만족시키기 위하여 어느 기계에서 얼마나 생산하는 것이 전체 생산비용을 최소화하는 것인지를 결정하고자 한다.

	생산비용			**생산소요시간**		
	제품1	제품2	제품3	제품1	제품2	제품3
기계1	4	2	4	3	6	4
기계2	3	2	2	4	3	5

❖ 생산계획

➢ 의사결정변수

$x_{ij} = i$ 기계에서 생산하는 j 제품의 생산량 ($i = 1,2;\quad j = 1,2,3$)

➢ 제약조건

✓ 각 제품의 수요를 만족해야 한다는 제약 조건

$$x_{11} + x_{21} \geq 80$$
$$x_{12} + x_{22} \geq 120$$
$$x_{13} + x_{23} \geq 100$$

✓ 각 기계 별 사용 가능 시간을 초과할 수 없다는 조건

$$3\,x_{11} + 6\,x_{12} + 4\,x_{13} \leq 600$$
$$4\,x_{21} + 3\,x_{22} + 5\,x_{23} \leq 500$$

➢ 비음 조건

$$x_{ij} \geq 0\ (i = 1, 2\,;\ j = 1, 2, 3)$$

❖ 생산계획

➢ 선형계획모형

$$Minimize\ \ 4\,x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13} + 3x_{21} + 2x_{22} + 2x_{23}$$

s.t

$$x_{11} + x_{21} \geq 80$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 120$$

$$x_{13} + x_{23} \geq 100$$

$$3\,x_{11} + 6\,x_{12} + 4\,x_{13} \leq 600$$

$$4\,x_{21} + 3\,x_{22} + 5\,x_{23} \leq 500$$

$$x_{ij} \geq 0\ (i = 1, 2\,;\ j = 1, 2, 3)$$

❖ 투자계획

- 개인이나 기업이 일정금액을 투자하고자 할 때 주식이나 채권, 은행 예금 등과 같은 투자 대안들에 각각 얼마 씩 투자해야 하는지를 결정하는 문제
- 일반적으로 이러한 대안들에 투자하고자 하는 경우, 각 투자대안에 대한 수익률과 위험도를 고려
  - ✓ 투자수익률은 일정기간 동안 투자하여 얻게 되는 수익이 투자한 금액에 대해 어느 정도의 비율을 차지하는가를 나타내는 기준
  - ✓ 투자위험도란 투자에 대한 위험요인을 나타내는 기준
- 여러 가지 투자대안에서 투자를 선택하는 경우 이러한 수익률뿐 만 아니라 위험도를 함께 고려
- 동일한 상황에서 투자대안을 결정하는 문제의 경우 두 가지 종류의 문제 가능
  - ✓ 투자위험에 대한 제약조건을 만족하면서 투자수익률을 최대로 하는 문제
  - ✓ 일정한 투자수익률을 보장하는 범위 내에서 투자위험을 최소화

3.8 선형계획법의 응용

- 투자계획
  - JJ투자회사는 1억원의 여유자금을 투자하여 5년 후(6년 초)에 자금을 최대로 하는 투자방안을 결정하고자 함
  - 투자대안으로는 저축, 주식, 공채
  - 기초조사를 하여 다음과 같은 자료를 확보
    - ✓ 저축은 1년 단위로 투자가 가능하며 평균 이자율이 5%이며, 저축은 연이어 재투자가 가능
    - ✓ 주식은 2년 단위로 평균 수익률이 15%
    - ✓ 공채는 3년 단위로 투자가 이루어지며 평균 수익률이 25%
  - 회사는 투자전문 회사의 자문을 받아 다음 사항을 지키면서 투자방안을 결정하고자 함
    - ✓ 현금수요에 대비하여 주식과 공채에는 매년 투자 가용액의 80% 범위 내에서 투자
    - ✓ 주식에는 매년 투자가용액의 50%를 넘지 않도록 함

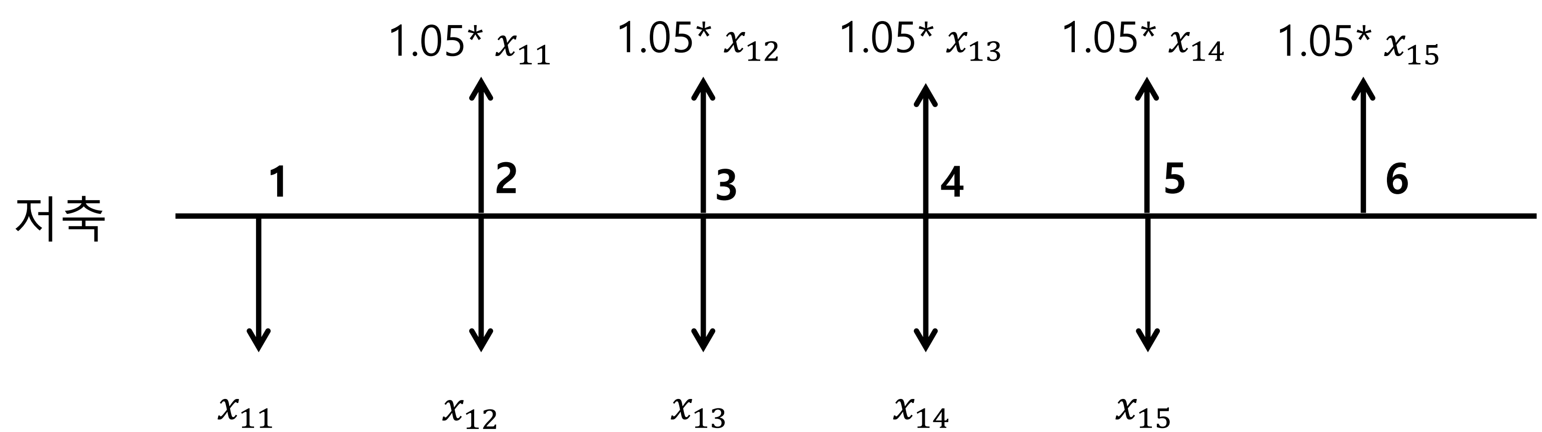
❖ 투자계획

➢ 의사결정변수

$x_{ij} = j$ 년도 초에 i 에 투자할 금액

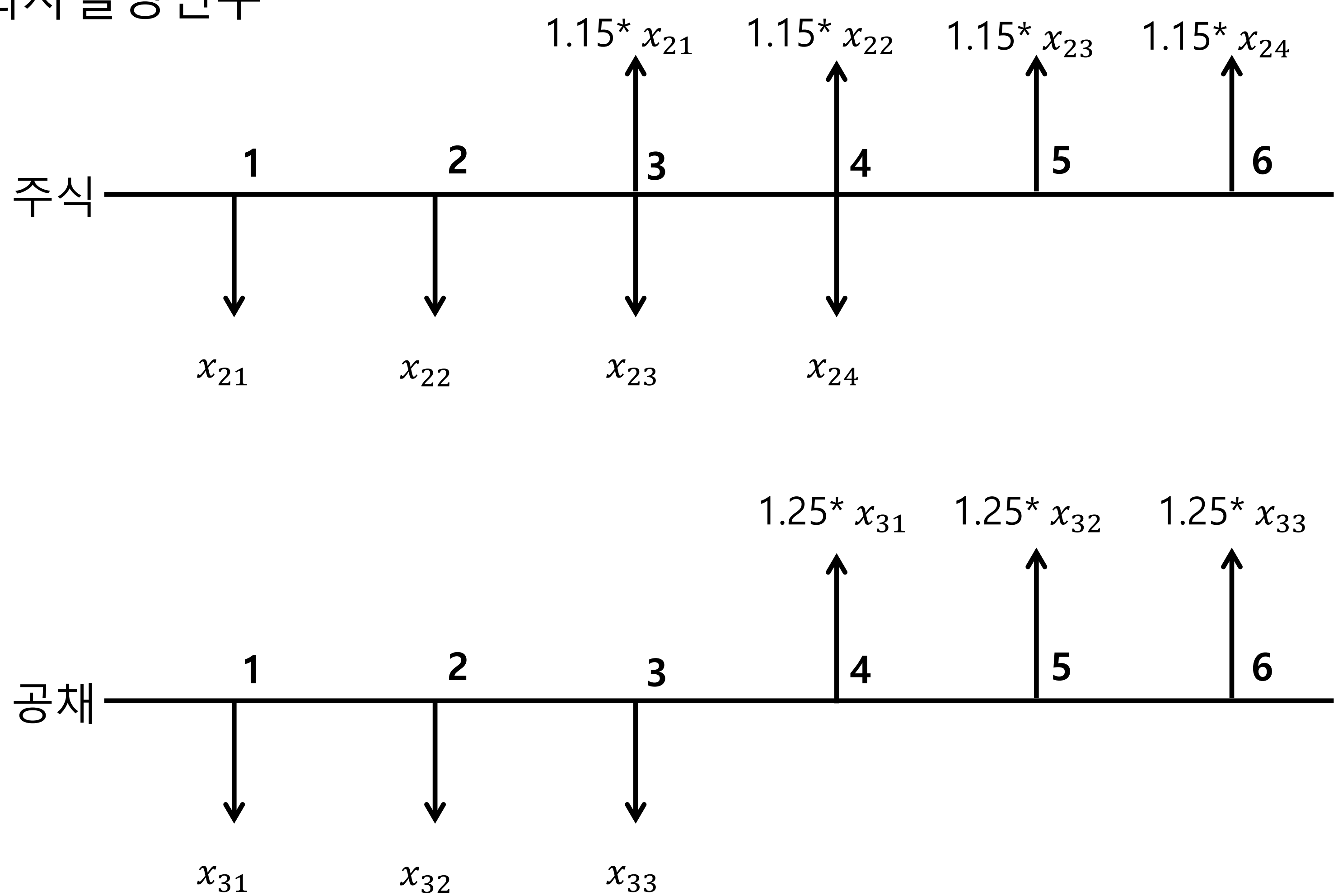
$$(i = 1(\text{저축}), 2(\text{주식}), 3(\text{공채}), 4(\text{현금보유});\quad j = 1,2,3,4,5)$$

✓ 각 대안별 투자 금액과 수익에 대한 현금 흐름도



❖ 투자계획

➢ 의사결정변수



1.15* x_{21}
1.15* x_{22}
1.15* x_{23}
1.15* x_{24}
주식
1
2
3
4
5
6
x_{21}
x_{22}
x_{23}
x_{24}
1.25* x_{31}
1.25* x_{32}
1.25* x_{33}
공채
1
2
3
4
5
6
x_{31}
x_{32}
x_{33}

❖ 투자계획

➢ 제약조건

- ✓ j년도 초에 투자 가능한 가용자금(단위 :만원)

1년: $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 10{,}000$

2년: $x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1.05x_{11} + x_{41}$

3년: $x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1.05x_{12} + 1.15x_{21} + x_{42}$

4년: $x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1.05x_{13} + 1.15x_{23} + 1.25x_{31} + x_{43}$

5년: $x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1.05x_{14} + 1.15x_{23} + 1.25x_{32} + x_{44}$

3.8 선형계획법의 응용

❖ 투자계획

➢ 제약조건

✓ 투자전문회사의 조언에 대한 제약 1

(주식과 공채 투자는 매년 가용액의 80% 범위)

1년: $x_{21} + x_{31} \leq 0.8 * 10000$

2년: $x_{22} + x_{32} \leq 0.8(1.05x_{11} + x_{41})$

3년: $x_{23} + x_{33} \leq 0.8(1.05x_{12} + 1.15x_{21} + x_{42})$

4년: $x_{24} + x_{34} \leq 0.8(1.05x_{13} + 1.15x_{22} + 1.25x_{31} + x_{43})$

5년: $x_{25} + x_{35} \leq 0.8(1.05x_{14} + 1.15x_{23} + 1.25x_{32} + x_{44})$

❖ 투자계획

➢ 제약조건

- ✓ 투자전문회사의 조언에 대한 제약 2

  (주식 투자는 매년 가용액의 50% 범위)

  1년: $x_{21} \leq 0.5 * 10000$

  2년: $x_{22} \leq 0.5(1.05x_{11} + x_{41})$

  3년: $x_{23} \leq 0.5(1.05x_{12} + 1.15x_{21} + x_{42})$

  4년: $x_{24} \leq 0.5(1.05x_{13} + 1.15x_{22} + 1.25x_{31} + x_{43})$

  5년: $x_{25} \leq 0.5(1.05x_{14} + 1.15x_{23} + 1.25x_{32} + x_{44})$

- ✓ 비음조건

  $x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3,4 \,;\, j = 1,2,3,4,5)$

❖ 투자계획

➢ 선형계획모형

$$Maximize\ 1.05\, x_{15} + 1.15x_{24} + 1.25x_{33} + x_{45}$$

s.t

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 10{,}000$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1.05x_{11} + \ x_{41}$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1.05x_{12} + 1.15x_{21} + \ x_{42}$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1.05x_{13} + 1.15x_{23} + 1.25x_{31} + x_{43}$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1.05x_{14} + 1.15x_{23} + 1.25x_{32} + x_{44}$$

❖ 투자계획

$$x_{21} + x_{31} \leq 0.8 * 10000$$

$$x_{22} + x_{32} \leq 0.8(1.05x_{11} + x_{41})$$

$$x_{23} + x_{33} \leq 0.8(1.05x_{12} + 1.15x_{21} + x_{42})$$

$$x_{24} + x_{34} \leq 0.8(1.05x_{13} + 1.15x_{22} + 1.25x_{31} + x_{43})$$

$$x_{25} + x_{35} \leq 0.8(1.05x_{14} + 1.15x_{23} + 1.25x_{32} + x_{44})$$

$$x_{21} \leq 0.5 * 10000$$

$$x_{22} \leq 0.5(1.05x_{11} + x_{41})$$

$$x_{23} \leq 0.5(1.05x_{12} + 1.15x_{21} + x_{42})$$

$$x_{24} \leq 0.5(1.05x_{13} + 1.15x_{22} + 1.25x_{31} + x_{43})$$

$$x_{25} \leq 0.5(1.05x_{14} + 1.15x_{23} + 1.25x_{32} + x_{44})$$

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = 1,2,3,4\,;\ j = 1,2,3,4,5)$$

3.8 선형계획법의 응용

❖ 생산 및 재고 계획

- JJ공유(주)는 앞으로 6개월간의 수요에 대한 차량용 내비게이션의 생산계획을 수립하고자 함(총비용을 최소화하는 생산계획과 재고계획 수립)
- 단위당 생산비용은 10만 원
- 생산된 제품이 당월에 팔리지 않고 재고로 넘어가게 되면 한 개당 재고유지비용은 1만 원이 소요
- 생산은 매월 초에 이루어지고 재고수준은 매월 말에 평가
- 단, 1월의 초기재고량은 50개이며 6월 말의 재고량은 100개가 이월되도록 함

	1월	2월	3월	4월	5월	6월
수요량	300	320	450	410	400	420
생산능력	400	350	400	400	380	400

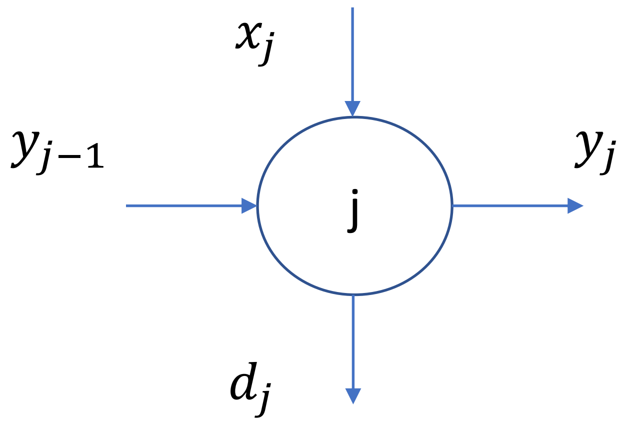
❖ 생산 및 재고 계획

➢ 의사결정변수

$x_j = j$월의 생산량 $(j = 1,2,3,4,5,6)$

$y_j = j$월말의 재고량 $(j = 1,2,3,4,5,6)$

➢ 재고균형방정식(Inventory Balance Equation)



❖ 생산 및 재고 계획

	1월	2월	3월	4월	5월	6월
수요량	300	320	450	410	400	420
생산능력	400	350	400	400	380	400

➢ 제약조건

✓ 재고균형방정식 표현 $(y_{j-1} + x_j - d_j = y_j)$

1월 : $50 + x_1 - 300 = y_1$

2월 : $y_1 + x_2 - 320 = y_2$

3월 : $y_2 + x_3 - 450 = y_3$

4월 : $y_3 + x_4 - 410 = y_4$

5월 : $y_4 + x_5 - 400 = y_5$

6월 : $y_5 + x_6 - 420 = y_6$

$$y_6 \geq 100$$

3.8 선형계획법의 응용

❖ 생산 및 재고 계획

	1월	2월	3월	4월	5월	6월
수요량	300	320	450	410	400	420
생산능력	400	350	400	400	380	400

➢ 제약조건

✓ 생산능력 제약

1월 : $x_1 \leq 400$

2월 : $x_2 \leq 350$

3월 : $x_3 \leq 400$

4월 : $x_4 \leq 400$

5월 : $x_5 \leq 380$

6월 : $x_6 \leq 400$

✓ 비음 제약

$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

$y_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$

3.8 선형계획법의 응용

❖ 생산 및 재고 계획

➢ 선형계획모형 (생산비용과 재고유지비용의 합을 최소화)

$$Minimize \quad 10(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) + 1(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6)$$

s.t

$$50 + x_1 - 300 = y_1$$
$$y_1 + x_2 - 320 = y_2$$
$$y_2 + x_3 - 450 = y_3$$
$$y_3 + x_4 - 410 = y_4$$
$$y_4 + x_5 - 400 = y_5$$
$$y_5 + x_6 - 420 = y_6$$
$$y_6 \geq 100$$
$$x_1 \leq 400$$
$$x_2 \leq 350$$
$$x_3 \leq 400$$
$$x_4 \leq 400$$
$$x_5 \leq 380$$
$$x_6 \leq 400$$
$$x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6), y_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

3.8 선형계획법의 응용

❖ 인력배치계획

- 시간대별로 서로 다른 수의 근무인원이 필요한 경우 각 근무조별로 몇 명의 인원을 배치할 것인지를 결정하는 문제
- JJ마트는 24시간 할인점이며, 고객들의 수요와 입고 물품의 처리 및 전시물품의 정리 등의 인원이 필요
- 근무인원은 하루 8시간을 근무하게 되며, 야간에 근무하는 경우 주간근무에 비해 30%의 야간근무 수당을 지급
- 야간근무 시간은 저녁 8시부터 다음날 아침 8시까지를 기준으로 함
- 마트에 근무하는 인원들은 6개조의 근무조로 관리
- 인력운영계획에 따라 지급되는 총임금과 수당을 최소화하는 인력배치계획을 수립하고자 함

3.8 선형계획법의 응용

❖ 인력배치 계획

➢ 하루를 4시간 단위로 나누어 필요한 인원수를 추정한 자료와 각 조별 근무시간은 아래표와 같음

✓ 근무시간대별 소요인원

시간	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24
소요인원	40	30	60	80	100	70
근무조	1조	1조				
		2조	2조			
			3조	3조		
				4조	4조	
					5조	5조
	6조					6조

3.8 선형계획법의 응용

❖ 인력배치 계획

➢ 의사결정변수

$x_j = j$조에 근무하는 인원$(j = 1,2,3,4,5,6)$

➢ 제약조건

✓ 4시간 단위의 시간대에 각각 2개조가 근무

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_6 &\geq 40 \\
x_1 + x_2 &\geq 30 \\
x_2 + x_3 &\geq 60 \\
x_3 + x_4 &\geq 80 \\
x_4 + x_5 &\geq 100 \\
x_5 + x_6 &\geq 70
\end{aligned}
$$

3.8 선형계획법의 응용

❖ 인력배치 계획

➢ 선형계획모형 (각 조별 근무인원에 따라 지급하는 임금과 수당의 최소화)

✓ 야간 근무시간이 20시부터 다음날 8시까지이므로

✓ 야간수당 : 1조와 6조(8시간), 2조와 5조(4시간), 3조와 4조(0시간)

$$Minimize \quad 1.6x_1 + 1.3x_2 + x_3 + x_4 + 1.3x_5 + 1.6x_6$$

s.t

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + x_6 &\geq 40 \\
x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad\qquad &\geq 30 \\
x_2 + x_3 \qquad\qquad\qquad &\geq 60 \\
x_3 + x_4 \qquad\qquad &\geq 80 \\
x_4 + x_5 \qquad &\geq 100 \\
x_5 + x_6 &\geq 70 \\
x_j \geq 0 \ (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)
\end{aligned}$$

3.8 선형계획법의 응용

❖ 영양성분 배합

- 영양분을 함유한 원재료를 섞어서 음식을 만들되 재료비를 최소화하고 각 영양소별로 요구되는 조건을 만족해야 하는 의사결정
- JJ 초등학교의 영양사는 학생들의 점심을 준비하고 있으며,
- 영양사는 비용은 가능한 줄이면서 학생들에게 필요한 영양소를 제공해야 함
  - ✓ 1인당 550칼로리에서 750칼로리 사이의 열량을 섭취
  - ✓ 단백질은 85그램 이상, 지방은 45그램 이상, 탄수화물은 90그램 이상 섭취
  - ✓ 식사의 전체량은 510그램 이상이 되어야 함

3.8 선형계획법의 응용

❖ 영양성분 배합

➢ 각 음식의 단위당 영양성분과 비용

음식(단위)	밥(100g)	콩나물(100g)	시금치(50g)	불고기(100g)	김치(50g)
단백질(g)	5	10	3	40	5
지방(g)	5	10	2	20	2
탄수화물(g)	40	10	20	10	10
열량(Cal)	140	40	10	200	30
단위당 비용	500원	600원	200원	1000원	400원

3.8 선형계획법의 응용

❖ 영양성분 배합

➢ 의사결정변수 (식단 구성재료의 양)

x_1 = 밥의 양

x_2 = 콩나물국의 양

x_3 = 시금치의 양

x_4 = 불고기의 양

x_5 = 김치의 양

➢ 제약조건

✓ 필요한 영양소 및 식사량 제공

❖ 영양성분 배합

➢ 선형계획모형

$$Minimize = 500x_1 + 600x_2 + 200x_3 + 1000x_4 + 400x_5$$

s.t

$$\begin{aligned}
140x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 200x_4 + 30x_5 &\geq 550 \\
140x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 200x_4 + 30x_5 &\leq 750 \\
5x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 40x_4 + 5x_5 &\geq 85 \\
5x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 20x_4 + 2x_5 &\geq 45 \\
40x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 10x_4 + 10x_5 &\geq 90 \\
100x_1 + 100x_2 + 50x_3 + 100x_4 + 50x_5 &\geq 510 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0
\end{aligned}$$

❖ 자투리 최소화 문제

- JJ 강철㈜에서는 직경 10cm짜리 파이프를 생산하여 판매하고 있음
- 파이프는 철판을 말아서 용접하는 공정을 거쳐 생산되는데 파이프 제조공정에서는 표준 길이 30m의 파이프가 생산됨
- 파이프 수요는 다양하여 길이가 5m, 7m, 9m인 파이프에 대한 수요가 발생
- 제조공정에서 나온 30m짜리 표준파이프를 절단하여 고객에게 판매
- 현재 주문이 들어온 바에 의하면 5m짜리 120개, 7m짜리 190개 그리고 9m짜리 150개
- 표준 길이 30m 파이프를 자르는 방법에 따라 자투리가 생기는데 이 자투리를 최소화하며 주문을 충족하기 위해서는 어떠한 방법으로 잘라서 공급하여야 하는가?

❖ 자투리 최소화 문제

➢ 절단방법과 규격별 산출량, 자투리

요구 규격	절단 방법										필요량
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
5m	6	4	3	1	4	2	1	0	2	1	120
7m	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	190
9m	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	150
자투리 길이	0	3	1	4	1	4	2	0	2	0	

3.8 선형계획법의 응용

❖ 자투리 최소화 문제

➢ 의사결정변수

x_i = 절단 방법 i를 사용하여 절단한 표준품의 수량 $\quad i = 1, \ldots, 10$

➢ 목적함수

✓ 발생하는 자투리 양의 최소화

- 자투리의 총량은 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 절단방법에서 나오는 자투리들의 총합이므로,

  $3x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 + 4x_6 + 2x_7 + 2x_9$

✓ 과잉생산량

- 5m : $5(6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + x_7 + 2x_9 + x_{10} - 120)$
- 7m : $7(x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + x_{10} - 190)$
- 9m : $9(x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10} - 150)$

3.8 선형계획법의 응용

❖ 자투리 최소화 문제

$$Min \quad 3x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 + 4x_6 + 2x_7 + 2x_9$$
$$+ 5(6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + x_7 + 2x_9 + x_{10} - 120)$$
$$+ 7(x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + x_{10} - 190)$$
$$+ 9(x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10} - 150)$$

$$\text{Min } z = \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}$$

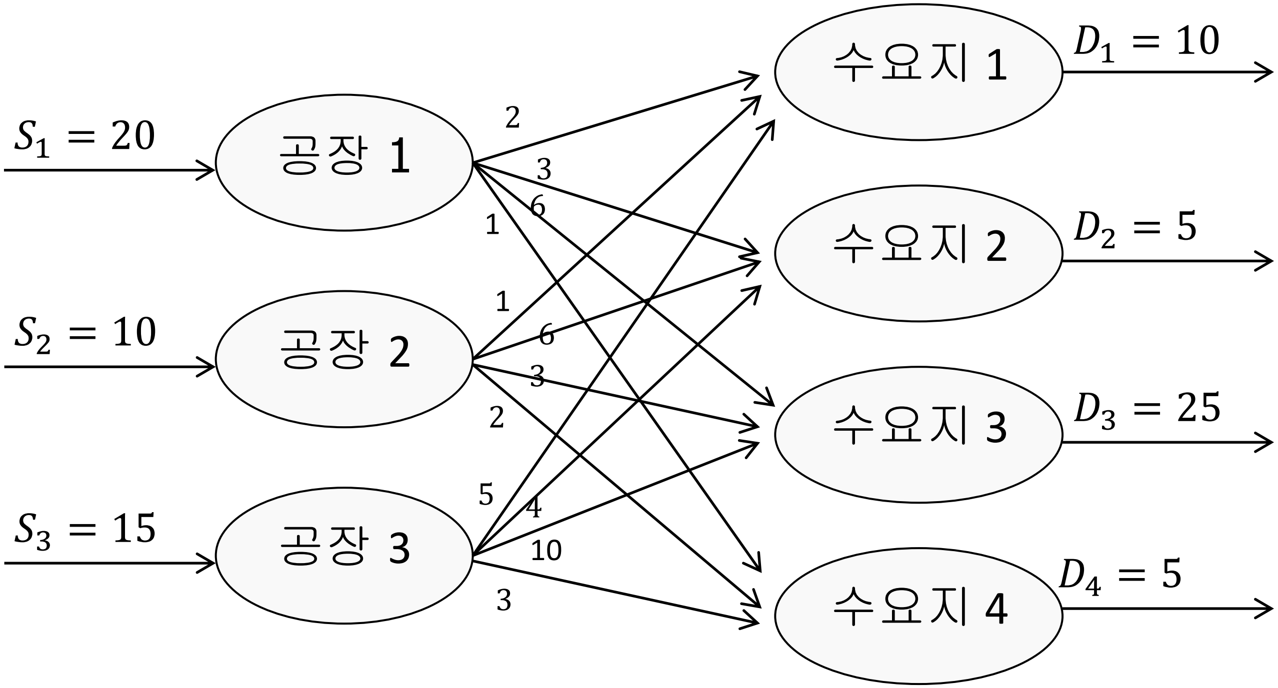
s.t.

$$6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + x_7 + 2x_9 + x_{10} \geq 120$$
$$x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + x_{10} \geq 190$$
$$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10} \geq 150$$

$$x_i \geq 0$$

❖ 수송문제

- 다수의 공급지(source)에서 다수의 수요지(destination)로 최소의 비용으로 제품들을 수송하기 위한 방안을 찾고자 하는 문제
- AI맥주㈜는 세 곳의 공장에서 제품을 생산하여 네 곳의 수요지에 제품을 공급하고 있음



3.8 선형계획법의 응용

❖ 수송문제

➢ 선형계획모형

$$Min\quad 2X_{11}+3X_{12}+6X_{13}+X_{14}+X_{21}+6X_{22}+3X_{23}+2X_{24}+5X_{31}+4X_{32}+10X_{33}+3X_{34}$$

s.t.

$$\begin{aligned}
&X_{11}+X_{12}+X_{13}+X_{14} &&= 20\\
&X_{21}+X_{22}+X_{23}+X_{24} &&= 10\\
&X_{31}+X_{32}+X_{33}+X_{34} &&= 15\\
&X_{11}+X_{21}+X_{31} &&= 10\\
&X_{12}+X_{22}+X_{32} &&= 5\\
&X_{13}+X_{23}+X_{33} &&= 25\\
&X_{14}+X_{24}+X_{34} &&= 5
\end{aligned}$$

$X_{ij} \geq 0$, i=1,2,3; j=1,2,3,4.

교육부
Ministry of Education

NRF 한국연구재단
National Research Foundation of Korea

thank you

본 과제(결과물)는 교육부와 한국연구재단의 재원으로 지원을 받아 수행된
디지털신기술인재양성 혁신공유대학사업의 연구결과입니다.

COSS Convergence and Open Sharing System 인공지능 전남대학교 CHONNAM NATIONAL UNIVERSITY 성균관대학교 SUNGKYUNKWAN UNIVERSITY KNU 경북대학교 KYUNGPOOK NATIONAL UNIVERSITY 전주대학교 JEONJU UNIVERSITY 서울시립대학교 UNIVERSITY OF SEOUL 서울과학기술대학교 SEOUL NATIONAL UNIVERSITY OF SCIENCE & TECHNOLOGY 영진전문대학교 YEUNGJIN UNIVERSITY