

AI 알고리즘

비선형계획법

제약 조건이 없는 비선형계획모형

비선형계획모형

비선형계획모형

❖ 볼록성과 오목성

■ 정리1

- 만약 함수 $f(x)$ 가 S 에서 오목하다면 이 비선형계획문제에 대한 어떤 국부 극댓값은 이 문제의 최적해가 됨
 - 가장 높은 봉우리를 찾는 것

■ 정리2

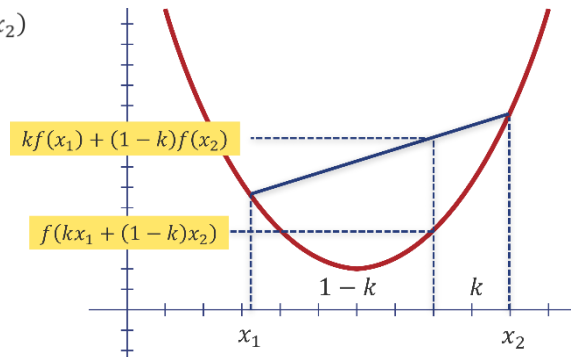
- 만약 함수 $f(x)$ 가 S 에서 볼록하다면 이 비선형계획문제에 대한 어떤 국부 극솟값은 이 문제의 최적해가 됨
 - 가장 낮은 골짜기가 극솟값이며 최적해

■ 볼록함수

- 함수 $f(x)$ 가 x 의 정의역 내에 있는 임의의 x_1, x_2 에 대해서 다음 조건을 만족하면 볼록함수라고 함

$$f(kx_1 + (1-k)x_2) \leq kf(x_1) + (1-k)f(x_2)$$

단, k 는 $0 < k < 1$ 인 실수

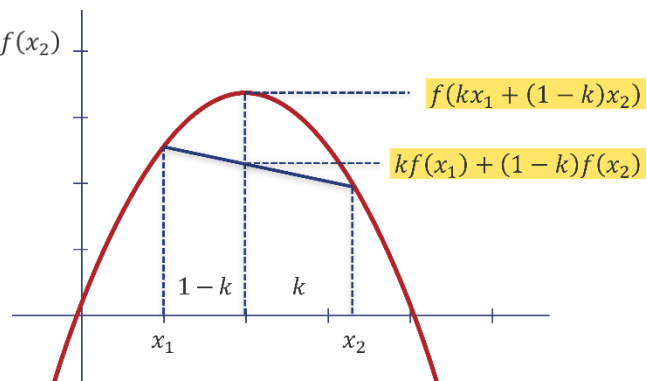


■ 오목함수

- 함수 $f(x)$ 가 x 의 있는 임의의 x_1, x_2 에 대해서 다음 조건을 만족하면 오목함수라고 함

$$f(kx_1 + (1-k)x_2) \geq kf(x_1) + (1-k)f(x_2)$$

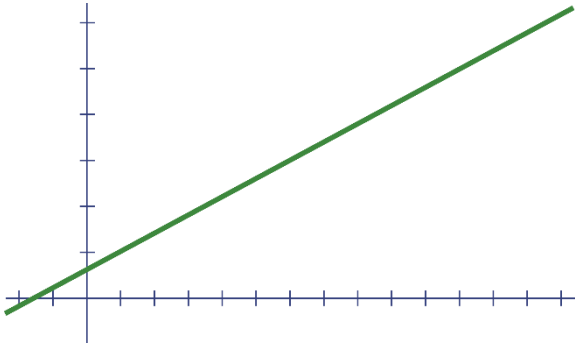
단, k 는 $0 < k < 1$ 인 실수



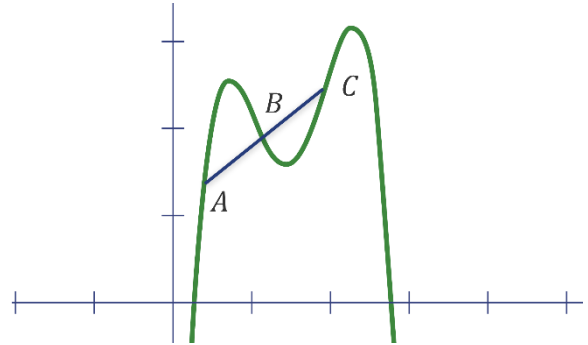
비선형계획모형

❖ 볼록성과 오목성

■ 볼록함수&오목함수



■ 볼록함수아님&오목함수아님



❖ 국부극값(Local Extremum)

■ 어떤 최대화의비선형계획문제

- $|x_i - x'_i| < \epsilon$ (매우작은값)를 가지고있는어떤실행가능점
 $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ 이 $f(x) \geq f(x')$ 를 보인다면
 $\rightarrow x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 을 국부극댓값이라고 함

■ x 와가까운 실행가능한 x' 에대해 $f(x) \geq f(x')$ 이라면점 x 는 국부극댓값

■ 최소화문제에서는 x 와가까운 실행가능한 x' 에대해 $f(x) \leq f(x')$ 이라면점 x 는 국부극솟값

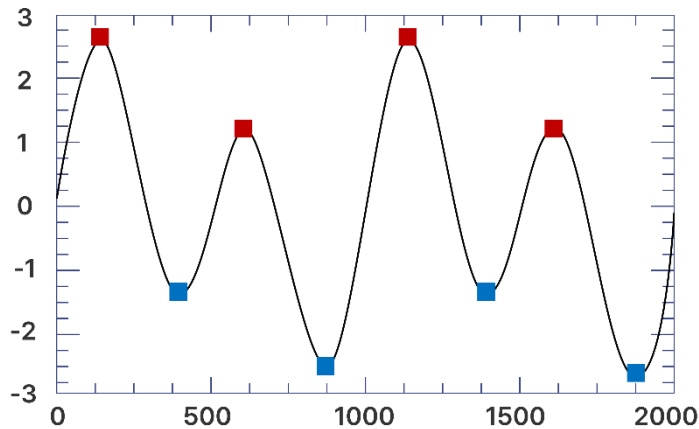
■ 주변에있는점보다작은점은 그로컬에서극솟값이며, 주변점보다큰점은극댓값

■ 최대화선형계획문제에서는어떤 국부극댓값이 선형계획문제의 최적해이지만비선형계획문제의 경우에는 그렇지않음

비선형계획모형

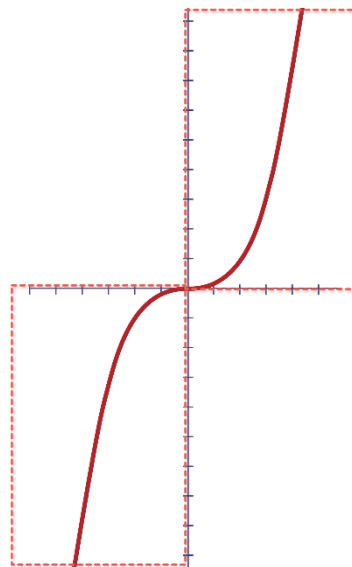
❖ 비선형목적함수를 가지는 최적화문제의 극값

- 가장높은봉우리가 무엇인가?



❖ 2차 도함수를 이용하여 볼록(오목)함수 결정방법

- $x_1 \leq x \leq x_2$ 일때, 함수 $f(x)$ 에 대해
 - 물리적 모형
 - $f''(x) \geq 0$ 이면 볼록함수 ($f''(x)$ 가 x_1, x_2 구간에서 연속적)
 - $f''(x) \leq 0$ 이면 오목함수 ($f''(x)$ 가 x_1, x_2 구간에서 연속적)
- $f(x) = x^3$
 - $f'(x) = 3x^2, f''(x) = 6x$ (x 범위에 따라 다름)



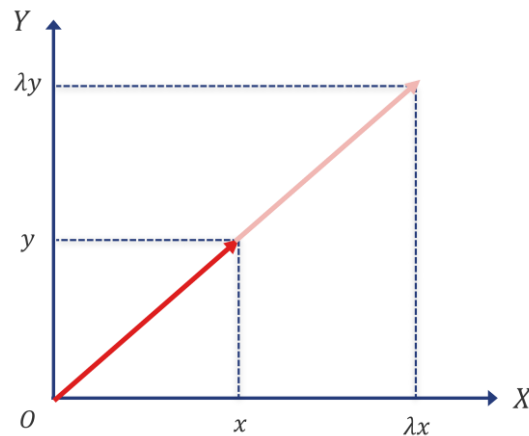
제약 조건이 없는 비선형계획모형

Hessian 행렬식

Hessian 행렬식

❖ Hessian 행렬식

- 기본적인지식을가지고어떻게푸는가?
- 고윳값과고유벡터
 - 특정한벡터와행렬은선형변환을취해주었을때,크기만바뀌고방향은바뀌지않을수도있음



- 그렇다면,그크기는얼마만큼변했나?
- $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
 - $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$
 - $\det(A - \lambda I) = 0$
- 행렬식(Determinant)
 - 정사각행렬에서만정의되는값으로, 행렬의가역성을판별해줌
 - 표기법

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

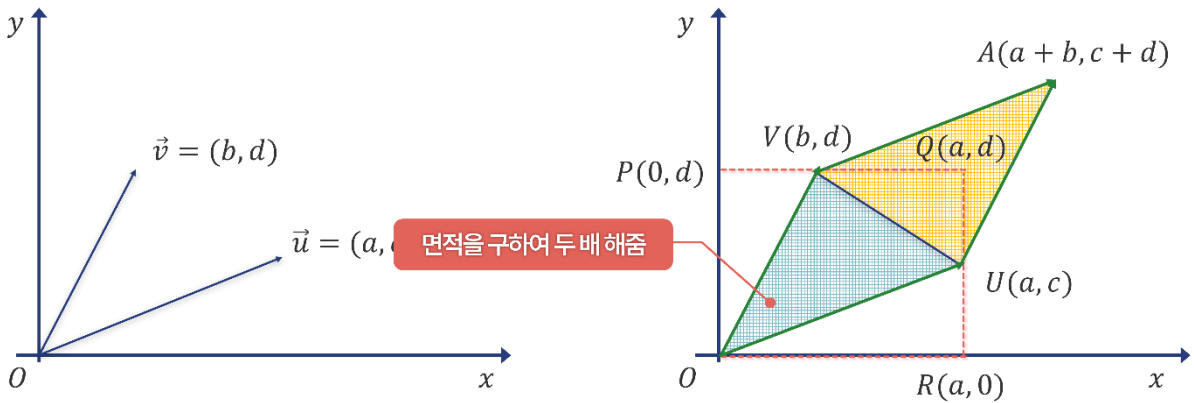
$$= \det A = \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

- 다른공간으로이동했지만,같은성질을가지는벡터
- 선형변환후의두기저벡터가이루고있는평행사변형의넓이
 - 행렬은일종의선형변환 $(1,0),(0,1) \rightarrow (a,c),(b,d)$

Hessian 행렬식

❖ Hessian 행렬식

- 선형변환후의 두 기저 벡터가 이루고 있는 평행사변형의 넓이
 - 면적의 변화가 바로 행렬식(Determinant)



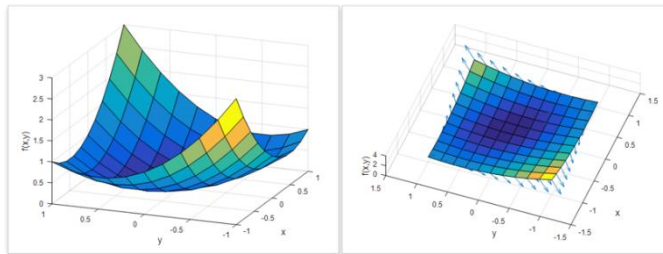
- 편미분(Differentiation)
 - 함수에서 미분의 개념은 기울기를 의미
 - 여러 개의 변수를 가짐
 - 다변수함수에서 임의의 점 하나를 찍어 보면 그 점에서 기울기 직선은 하나로 결정되지 않음
 - 수직인 두 방향으로만 기울기를 구하기 위하여 필요
 - $f(x, y)$ 의 x 축으로의 기울기와 y 축으로의 기울기를 각각 구할 수 있음
 - y 또는 x 를 상수로 놓고 미분하여 x 방향만으로도의 기울기와 y 방향만으로도의 기울기를 구함
 - 함수 f 의 x 방향으로의 편미분
 - f_x 혹은 $\frac{\partial f}{\partial x}$
 - 함수 f 의 y 방향으로의 편미분
 - f_y 혹은 $\frac{\partial f}{\partial y}$

Hessian 행렬식

❖ Hessian 행렬식

■ 기울기(Gradient)

- x방향으로의 편미분값과y방향으로의 편미분값을 원소로 하는 벡터로 출력
- 즉, 기울기를 각각 벡터 형태로 만들어 놓은 것
- 스칼라 함수로부터 벡터장을 형성하는 연산자
- 해당 포인트에서 $f(x,y)$ 평면의 기울기가 가장 가파른 곳으로의 방향을 의미



■ Hessian 행렬

- 어떤 함수의 2계 도함수들을 이용하여 행렬을 만든 것
- 실함수 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 의 Hessian 행렬
- 특정 고유벡터에 대해 고윳값의 크기가 클수록 해당 방향으로 더 볼록한 것
- 고윳값이 모두 양수라면 함수는 아래로 볼록하며, 이것이 임계점이라면 극솟값
- 모두 음수라면 함수는 위로 볼록할 것이며, 이것이 임계점이라면 극댓값
- 주소행렬식(Principal Minor)
 - Hessian 행렬의 $n-i$ 열에 대응하는 $n-i$ 행을 제거함으로써 얻어진 $i \times i$ 행렬의 행렬식
 - $M_1 \geq 0, M_2 \geq 0, \dots, M_n \geq 0$ 이면 볼록
 - $M_1 \leq 0, M_2 \geq 0, \dots, M_n(-1)^n \geq 0$ 이면 오목

■ Hessian 행렬 활용 이유

- 특정 위치가 위로 볼록한지, 아래로 볼록한지, 안장점인지를 판단할 수 있음

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

제약 조건이 없는 비선형계획모형

제약 조건이 없는 비선형계획모형

제약조건이 없는비선형계획모형

❖ 일변수함수의 최적화

- 제약식이없고, 두 번의미분만있으면 됨
- 점 x_0 가 일변수함수 $f(x)$ 의 극점이 되는 필요조건
 - $\frac{(\partial f(x_0))}{\partial f(x)} = 0$
- 점 x_0 에서 함수의 기울기는 0
- 그런 점을 정점(Stationary Point)이라고 함
- 정점은 극대점, 극소점, 변곡점이 됨
 - $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} > 0$ 이면 x_0 에서 함수 $f(x)$ 가 국부극솟값을 갖는 충분조건
 - $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} < 0$ 이면 x_0 에서 함수 $f(x)$ 가 국부극댓값을 갖는 충분조건
- $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} = 0$ 이면 고차도함수를 구하여 $\frac{\partial^{n-1} f(x_0)}{\partial x^{n-1}} = 0$ 이고, $\frac{\partial^n f(x_0)}{\partial x^n} \neq 0$ 일때
 - n 이 홀수이면 변곡점
 - n 이 짝수이고, $\frac{\partial^n f(x_0)}{\partial x^n} > 0$ 이면
함수 $f(x)$ 는 국부극솟값
 - n 이 짝수이고, $\frac{\partial^n f(x_0)}{\partial x^n} < 0$ 이면
함수 $f(x)$ 는 국부극댓값

제약조건이 없는비선형계획모형

❖ 일변수함수의 최적화 예제

- $f(x) = x^2 - 4x + 8$
 - $\frac{\partial f(x_0)}{\partial f(x)} = 2x - 4 = 0, x = 2$
 - $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} = 2 > 0$
 - $f(x)$ 는 볼록함수이고, $x = 2$ 는 국부극소값
- $f(x) = x^3 - 3x$
 - $\frac{\partial f(x_0)}{\partial f(x)} = 3x^2 - 3 = 0, x = \pm 1$
 - $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} = 6x,$
 - $x > 0$ 이면 국부극소값($x=1$)
 - $x < 0$ 이면 국부극대값($x=-1$)
 - $x=0$ 이면 $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x^2} = 0$ 이므로 고차도함수를 구함
 - $\frac{\partial^3 f(x_0)}{\partial x^3} = 6 > 0$ 이고, n 은 홀수이므로 $x=0$ 은 변곡점

❖ 이변수함수의 최적화

- 이변수함수 $f(x_1, x_2)$ 에서 극값을 갖게 되는 필요조건

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial f(x_1)} = 0, \quad \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial f(x_2)} = 0$$

- 위 두식을 만족하는 $x^* = (x_1^*, x_2^*)$ 는 정점
- 정점에서 Hessian 행렬의 주소 행렬식 M_1, M_2 를 구함
 - $M_1 > 0, M_2 > 0$ 이면 (x_1^*, x_2^*) 는 국부극솟값
 - $M_1 < 0, M_2 > 0$ 이면 (x_1^*, x_2^*) 는 국부극댓값
 - $M_2 < 0$ 이면 변곡점
 - $M_2 = 0$ 이면 추가적인 분석이 필요

제약조건이 없는비선형계획모형

❖ 이변수함수의 최적화 예제

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_1x_2 + x_2^2$$

$$\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial f(x_1)} = 3x_1^2 + x_2 = 0, \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial f(x_2)} = x_1 + 2x_2 = 0$$

$$M_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$$

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = (0, 0), (1/6, -1/12)$$

$(1/6, -1/12)$ 는 국부극솟값

$$M_1 = (3x_1^2 + x_2)' = 6x_1 = 1 > 0$$

$$M_2 = 12x_1 - 1 = 1 > 0$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}$$

$(0, 0)$ 는 변곡점

$$M_2 = -1 < 0$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 6x_1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

❖ 다변수함수의 최적화

- 함수 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 가 $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ 에서 극값을 갖게 되는 필요조건
 - 기울기라는 의미가 편미분

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

- $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ 가 극값을 갖게 되는 충분조건
 - $M_1 > 0, M_2 > 0, \dots, M_n \geq 0$ 이면 국부극솟값
 - $M_1 < 0, M_2 > 0, \dots, M_n (-1)^n > 0$ 이면 국부극댓값
 - 위와 다른 형태가 나타날 경우 복잡한 분석이 필요

❖ 일반적인 비선형함수에 적용

- 최적해에서는 비선형함수의 1차 미분함수 기울기가 0이 되어야 함
- 이해의 최소값, 최대값 여부를 판단하기 위해서는 2차 미분함수의 기울기를 파악하여야 함

제약 조건이 없는 비선형 계획 모형

제약조건이없는비선형계획모형