

# AI 알고리즘

네트워크 모형(최단경로, CPM/PERT 등)

# CPM/PERT

CPM



## ❖ 정의

- CPM(Critical Path Method)
- PERT(Program Evaluation and Review Technique)
  - 아파트 건설
  - 소프트웨어 개발 등

## ❖ 기본 용어

- 활동(Activity)
- 작업기간(Duration)
- 선행활동(Predecessor)
- 최초시작기간(Earliest Start Time)
- 최지 시작시간(Latest Start Time)
- 여유시간(Slack Time)

## ❖ 시스템

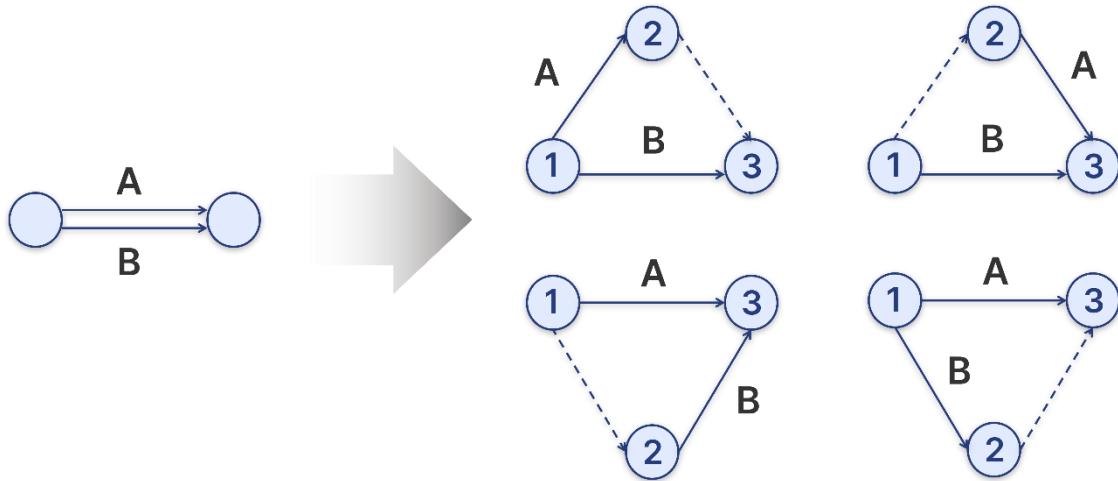
1. 각 활동은 반드시 하나의 호로만 표현
2. 각 활동은 2개의 서로 다른 마디들로 표현
3. 하나의 활동이 네트워크에 추가될 때마다 정확한 상호 선행 관련성을 유지해야 함
  - ① 현 활동 바로 전에 작업해야 하는 활동
  - ② 현 활동 이후에 작업해야 하는 활동
  - ③ 현 활동과 동시에 작업해야 하는 활동



# CPM

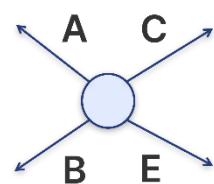
## ❖ 가상 활동의 사용 예

- 동시발생활동의 표현

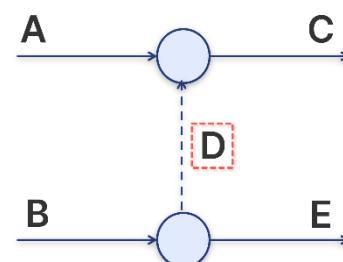


- 정확한선행관계표현

- 활동C는 활동A와 B가 완료된 이후에 즉시 시작
- 활동E는 활동B만 완료되면 시작



잘못된 표현



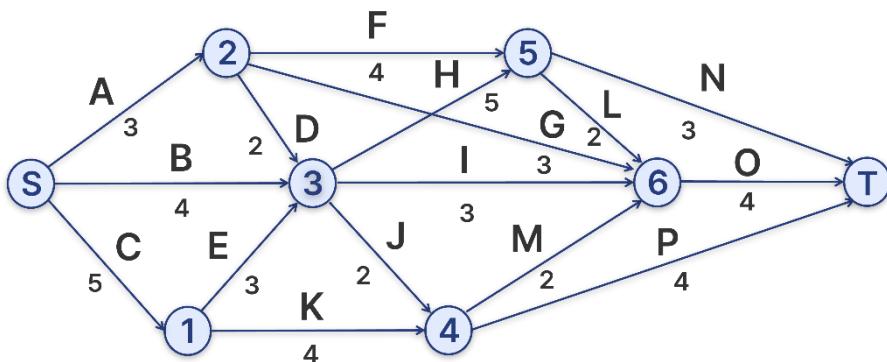
올바른 표현



## ❖ CPM의 예제

- 아래 프로젝트의 주경로와 최단 완성 시간은?

활동	시간	선행작업	활동	시간	선행작업
A	3	-	I	3	B, D, E
B	4	-	J	2	B, D, E
C	5	-	K	4	C
D	2	A	L	2	F, H
E	3	C	M	2	J, K
F	4	A	N	3	F, H
G	3	A	O	4	G, I, L, M
H	5	B, D, E	P	4	J, K



- 과거 한국, 이 방법을 몰라서 외국 회사에 수주를 맡김



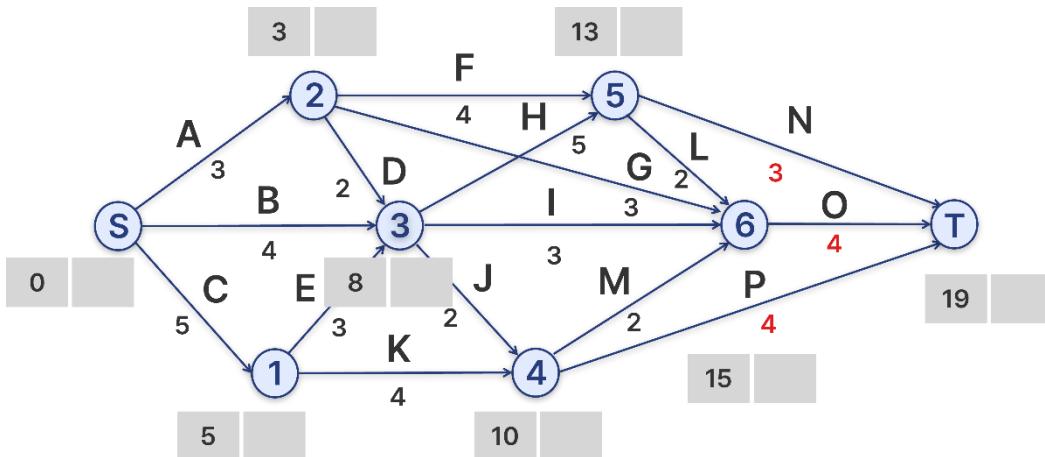
## ❖ CPM의 예제 설명

- 주경로(Critical Path)
  - 어떤 프로젝트에서 기간이 제일 오래 걸리는 임의의 활동 K가 있다고 가정
  - 해당 프로젝트 네트워크에서 시작마디로부터 마디 K까지의 최장 경로의 길이
- 최소완료시간
  - 해당 프로젝트 네트워크에서 시작마디로부터 종료마디까지의 최장 경로 혹은 주경로의 길이와 같음
- 새로운 알고리즘을 사용할지, 수정하여 사용할지 결정해야 함
- 기호정의
  - $v[i]$ : 시작마디 1로부터 마디  $i$  까지의 최장 경로의 길이
  - $s[i]$ : 최장 경로상 마디  $i$ 의 직전선행마디
  - $a_i$ : 활동  $i$ 를 완료하기 위해 요구되는 시간
- 알고리즘
  - 단계0
    - 현실의 물체와 유사한 형태를 갖게 만들어 놓은 것  
네트워크상의 모든 선행관계를 나타내는 호  $(i, j)$  가  
 $i < j$  를 만족하도록 마디 번호를 새롭게 정렬하며  
시작마디는  $v[S] = 0$
  - 단계1
    - 현실의 물체와 유사한 형태를 갖게 만들어 놓은 것  
종료마디의 최초시작시간이 발견되었다면 종료하고 아니라면 남아 있는 마디들 중 번호가 가장 작은 마디  $p$  선택 후 레이블 붙임
  - 단계2
    - 마디  $p$ 에 대한 최초 시작 시간을 계산  $v[p] = \max\{v[i] + a_i\}$ 이며  $i$ 는  $p$ 의 선행활동  $s[p]$ 에 최댓값을 제공하는 마디의 번호를 저장 후 [단계1]로 돌아감



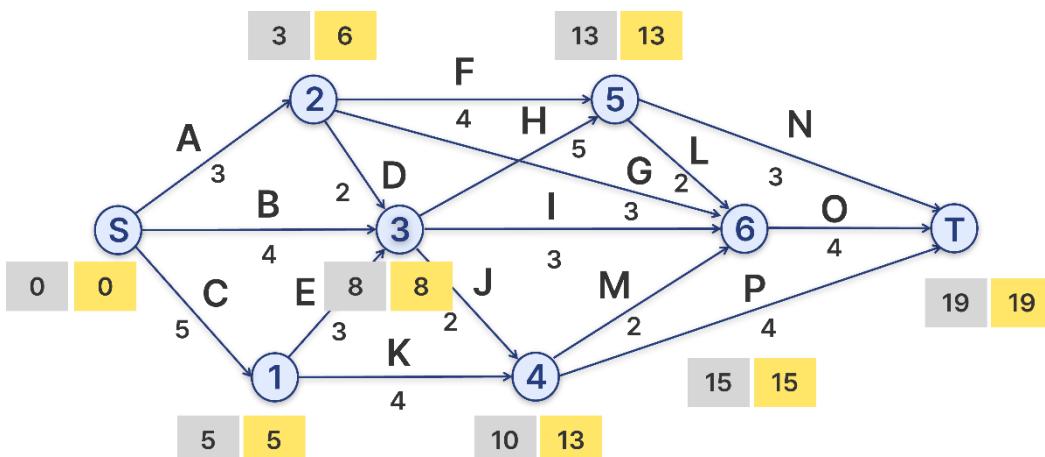
## ❖ CPM의 예제 풀이

- 최초시작인정알고리즘



- 최지시작일정알고리즘

- CPM최지시작일정알고리즘을 역순으로 적용하여 간단히 계산 가능



- 주경로를 더 줄이다보면 여러개의 주경로가 나올 수도 있음



## ❖ CPM의 예제 풀이

- 선형계획모형
  - 입력변수
    - 현실의 물체와 유사한 형태를 갖게 만들어놓은 것  
 $d_{ij}$  = 마디  $i$ 로부터 마디  $j$  까지의 작업시간
  - 의사결정변수
    - $x_{ij}$  = 마디  $i$ 로부터 마디  $j$  까지의 흐름량
  - 목적함수: 총 흐름양의 최대화
    - $\text{Maximize } \sum_{(i,j)} d_{ij}x_{ij}$
  - 제약식: 총 진출흐름양 = 총 진입흐름양
    - $\sum_{\{(k,j) \in A\}} x_{kj} - \sum_{\{(i,k), \in A\}} x_{ik} = \text{순수요량}(-1, 0, 1)$

# **CPM/PERT**

**PERT**



## ❖ 정의

- 작업기간의 불확실성을 고려하기 위해서는 작업기간에 대한 확률이나 확률분포를 가정
- 프로젝트 관리를 위한 확률적 접근방법을 PERT라 함

## ❖ PERT 네트워크로 제안하는 3가지 추정치

1. 낙관적 시간(a): 프로젝트가 최선의 경우로 진행될 때 활동의 작업기간
  2. 최빈시간(m): 프로젝트가 정상적인 상태에서 진행될 때 활동의 작업기간
  3. 비관적 시간(b): 프로젝트가 최악의 경우로 진행될 때 활동의 작업기간
- 활동 k의 평균 작업시간과 분산

$$\mu_k = \frac{a+4m+b}{6} \quad \sigma_k^2 = \left( \frac{b-a}{6} \right)^2$$

- CPM 네트워크에서 CPM의 계산은 작업 기간 대신에 평균 작업기간  $\mu_k$ 를 대체하여 계산
- 활동들의 작업기간이 확률변수들이므로 주경로상의 활동들의 작업기간의 합인 프로젝트 기간도 확률변수
- 중심극한정리(Central Limit Theorem)에 의해, 프로젝트 완료 시간은 평균과 분산이 개별 활동들의 평균들과 분산들의 합과 같은 정규분포(Normal Distribution)를 따른다고 가정

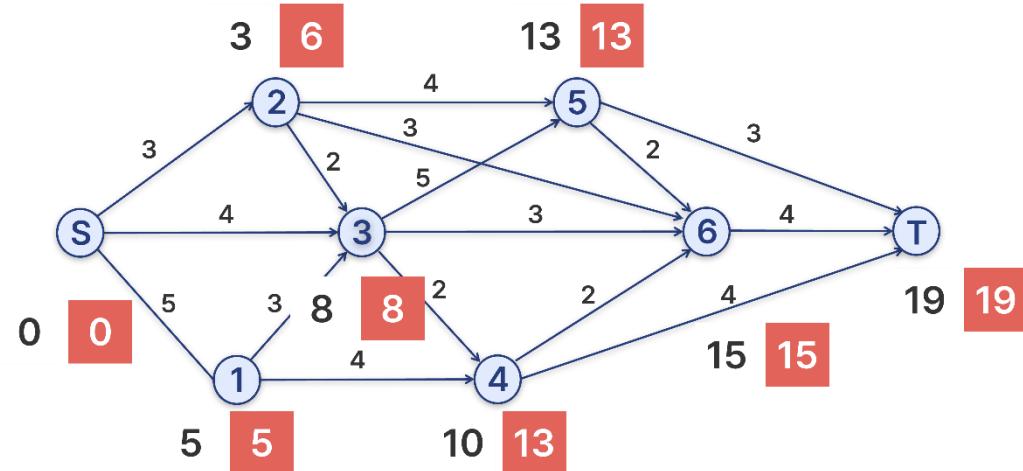
활동	a	m	b	$\mu_k$	$\sigma_k^2$
A	2	3	4	3	0.11
B	2	4	6	4	0.44
C	4	5	6	5	0.11
D	1	2	3	2	0.11
E	1	3	5	3	0.44
F	3	4	5	4	0.11
G	2	3	4	3	0.11
H	2	5	8	5	1

활동	a	m	b	$\mu_k$	$\sigma_k^2$
I	1	3	5	3	0.44
J	1	2	3	2	0.11
K	3	4	5	4	0.11
L	1	2	3	2	0.11
M	1	2	3	2	0.11
N	1	3	5	3	0.44
O	3	4	5	4	0.11
P	2	4	6	4	0.44

# PERT

## ❖ PERT

- 주경로 기대기간=19
- 주경로 분산=1.78



## ❖ 프로젝트가 21일에 완료될 확률

- 시스템관련용어

$$\begin{aligned}
 & P(X \leq 21) \quad \text{기간} \\
 & = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{21 - 19}{1.33}\right) \quad \text{표준정규분포} \\
 & = P(Z \leq 1.503) \cong 0.9332 \quad \text{프로젝트를 21일 내로} \\
 & \qquad \qquad \qquad \text{끝낼 확률 93%}
 \end{aligned}$$