AI알고리즘

선형계획법의 기본 개념

수퍼스타를 키우는 곳
전주대학교

선형계획모형의 도해법

도해법

도해법

❖ 도해법

- 도표(Graph)를 이용하여 선형계획법의 해를 찾는 방법

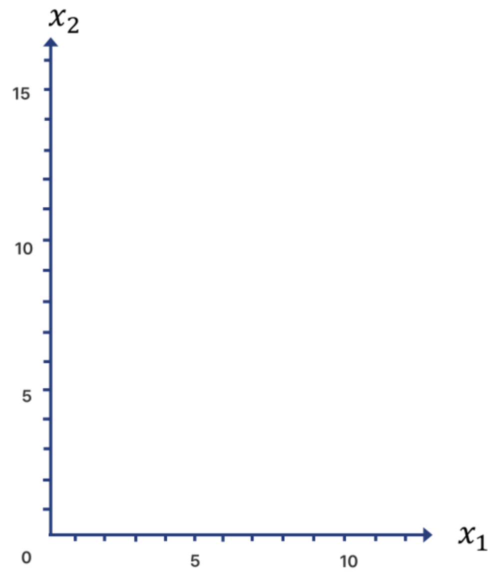
❖ 도해법의 절차

1. 의사결정 변수들로 이루어진 좌표계를 설정
2. 실행 가능 영역을 좌표계에 표시
   - 개별 제약식을 만족시키는 영역들의 교집합을 형성해 나감
3. 어느 방향으로의 평행이동이 목적 함수의 값을 더 좋게 하는지를 찾아서 목적함수를 평행 이동시킴
4. 실행 가능 영역과 목적함수가 겹치는 부분에 있는 실행가능해가 최적해

❖ 도해법의 절차-최대화 문제

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 16 \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 12 \\
&\qquad x_1 \le 6 \\
&\qquad \boxed{x_1, x_2 \ge 0}
\end{aligned}
$$

비음 조건



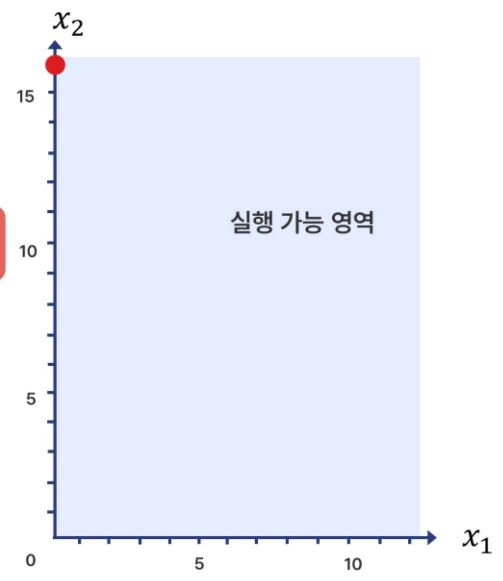
도해법

❖ 도해법의 절차-최대화 문제

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2\\
&s.t.\\
&\qquad \boxed{2x_1 + x_2 \le 16}\\
&\qquad x_1 + x_2 \le 12\\
&\qquad x_1 \le 6\\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

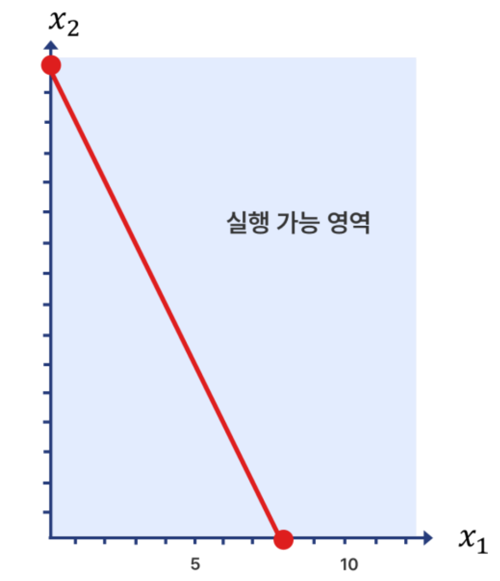
x_1에 0 대입 시 x_2는 16

부등호가 아닌 =으로 처리 후 계산



$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2\\
&s.t.\\
&\qquad \boxed{2x_1 + x_2 \le 16}\\
&\qquad x_1 + x_2 \le 12\\
&\qquad x_1 \le 6\\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

x_2에 0 대입 시 x_1는 8

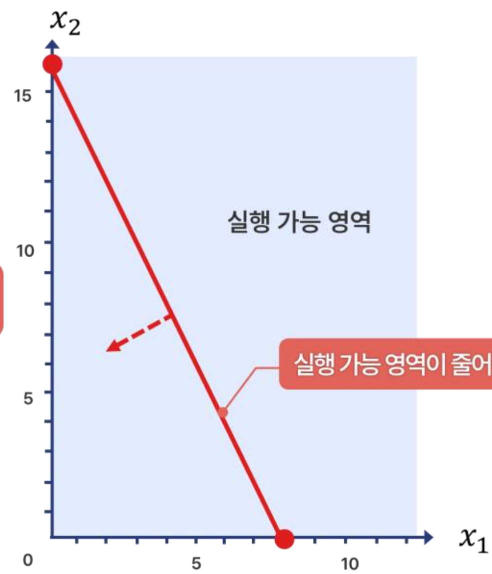


도해법

❖ 도해법의 절차-최대화 문제

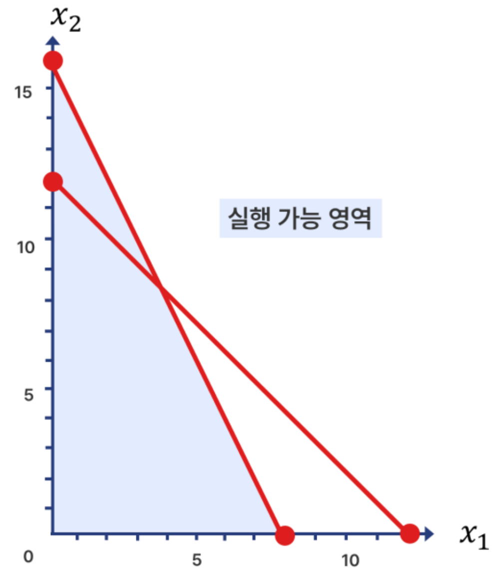
$$\begin{aligned} &Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\ &s.t. \\ &\qquad \boxed{2x_1 + x_2 \le 16} \\ &\qquad x_1 + x_2 \le 12 \\ &\qquad x_1 \le 6 \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

x_1, x_2에 0 대입 시 성립



$$\begin{aligned} &Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\ &s.t. \\ &\qquad 2x_1 + x_2 \le 16 \\ &\qquad \boxed{x_1 + x_2 \le 12} \\ &\qquad x_1 \le 6 \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

이전과 동일하게 진행

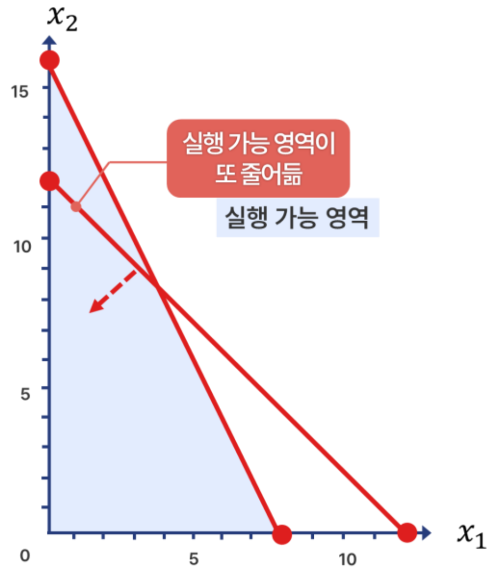


도해법

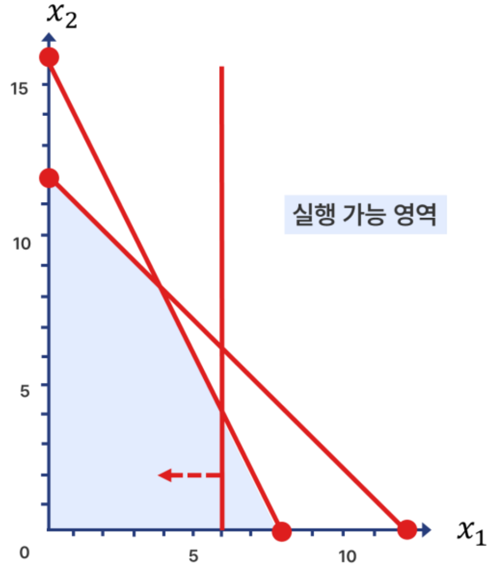
❖ 도해법의 절차-최대화 문제

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + \ x_2 \ \le 16 \\
&\qquad \boxed{x_1 + \ x_2 \ \le 12} \\
&\qquad x_1 \qquad\ \ \le \ 6 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

x_1, x_2에 0 대입 시 성립



$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + \ x_2 \ \le 16 \\
&\qquad x_1 + \ x_2 \ \le 12 \\
&\qquad \boxed{x_1 \qquad\ \ \le \ 6} \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

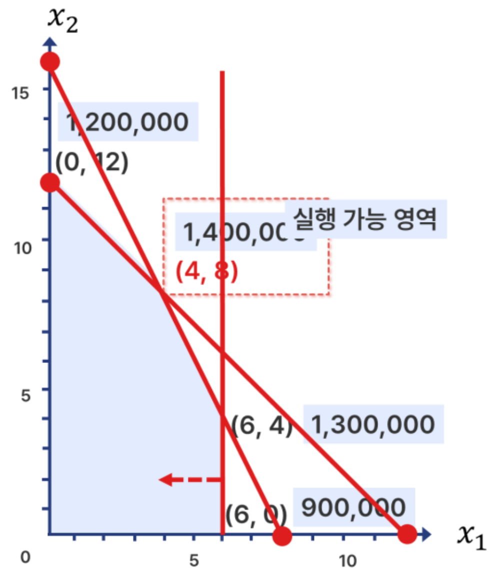


도해법

❖ 도해법의 절차-최대화 문제

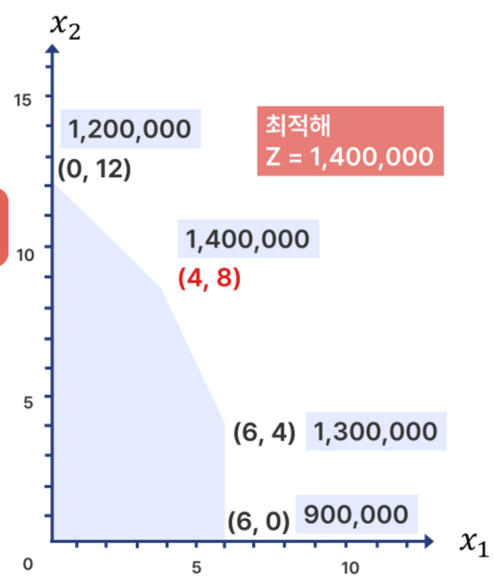
$$
\begin{aligned}
&\boxed{Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2} \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + \ \ x_2 \le 16 \\
&\qquad \ \ x_1 + \ \ x_2 \le 12 \\
&\qquad \ \ x_1 \qquad\quad \le \ \ 6 \\
&\qquad \ \ x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

목적 함수의 기울기를 보는 것



$$
\begin{aligned}
&\boxed{Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2} \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + \ \ x_2 \le 16 \\
&\qquad \ \ x_1 + \ \ x_2 \le 12 \\
&\qquad \ \ x_1 \qquad\quad \le \ \ 6 \\
&\qquad \ \ x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

기울기는 $-\frac{3}{2}$

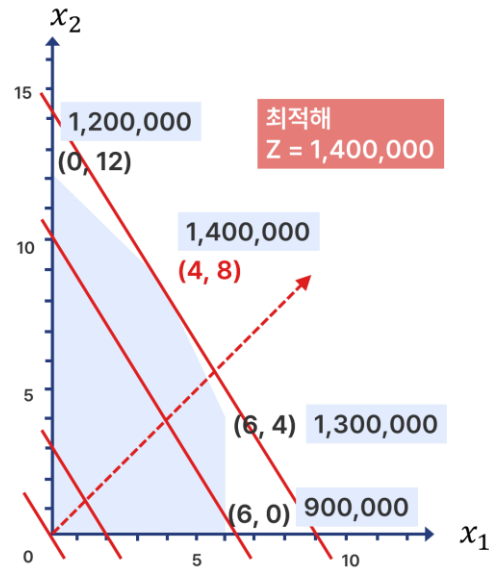


도해법

❖ 도해법의 절차-최대화 문제

$$
\begin{array}{l}
Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
s.t. \\
\qquad 2x_1 + \ x_2 \ \le 16 \\
\qquad\ \ x_1 + \ x_2 \ \le 12 \\
\qquad\ \ x_1 \qquad\quad\ \le \ \ 6 \\
\qquad\ \ x_1,\ x_2 \ge 0
\end{array}
$$

(4, 8) 대입



❖ 도해법의 절차 정리

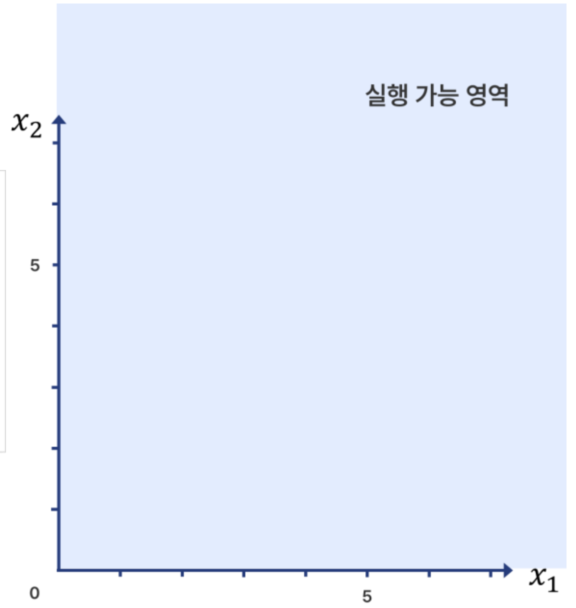
1. 제약식을 만족하는 실행 가능 영역 구하기
2. 목적 함수의 기울기를 구하기
3. 해당 직선을 평행 이동하여 필요한 값 구하기

도해법

❖ 도해법의 절차-최소화 문제

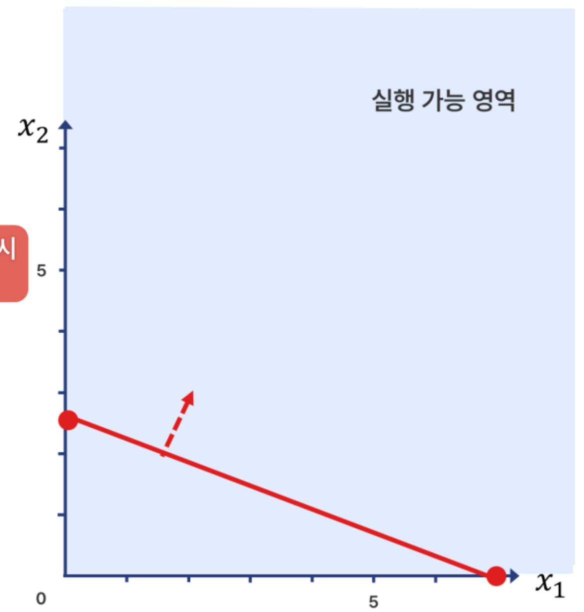
$$
\begin{aligned}
&Min\ \ 100x_1 + 100x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 20x_1 + 40x_2 \geq 140 \\
&\qquad 30x_1 + 20x_2 \geq 120 \\
&\qquad \boxed{x_1, x_2 \geq 0}
\end{aligned}
$$

비음 조건



$$
\begin{aligned}
&Min\ \ 100x_1 + 100x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad \boxed{20x_1 + 40x_2 \geq 140} \\
&\qquad 30x_1 + 20x_2 \geq 120 \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

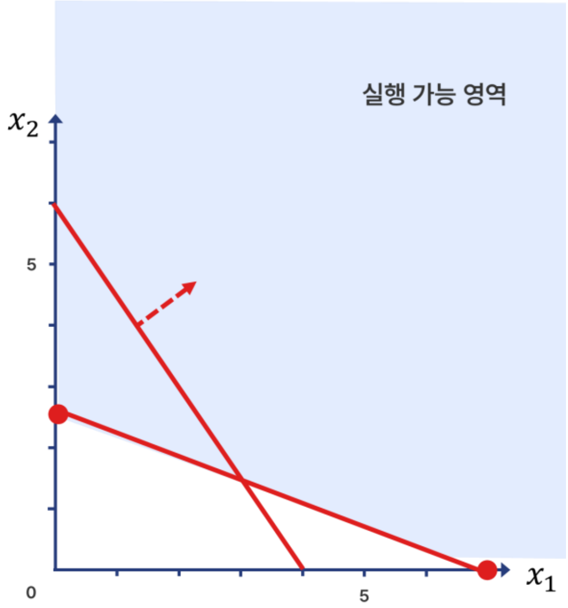
x_1, x_2에 0 대입 시 성립하지 않음



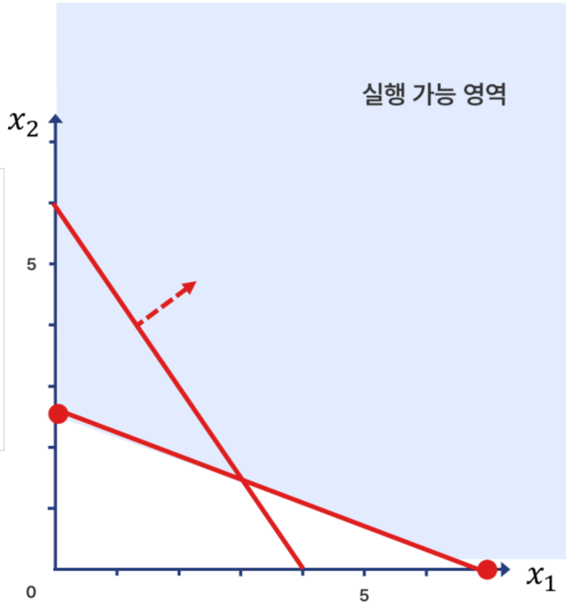
도해법

❖ 도해법의 절차-최소화 문제

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ 100x_1 + 100x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 20x_1 + 40x_2 \geq 140 \\
&\qquad \boxed{30x_1 + 20x_2 \geq 120} \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



$$
\begin{aligned}
&Min\ \ 100x_1 + 100x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 20x_1 + 40x_2 \geq 140 \\
&\qquad 30x_1 + 20x_2 \geq 120 \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

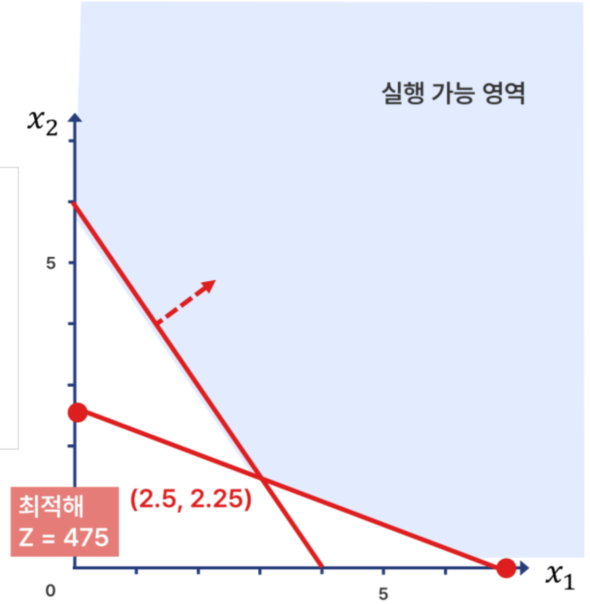


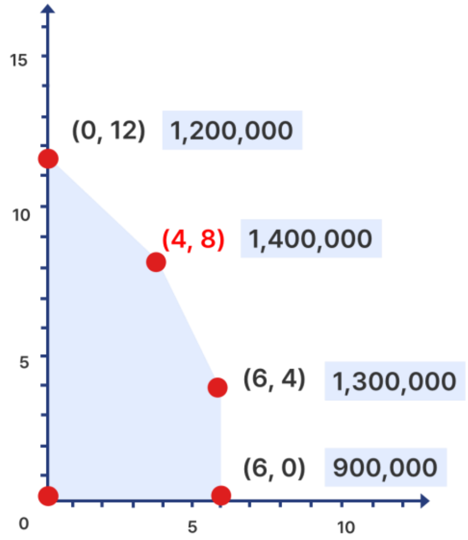
도해법

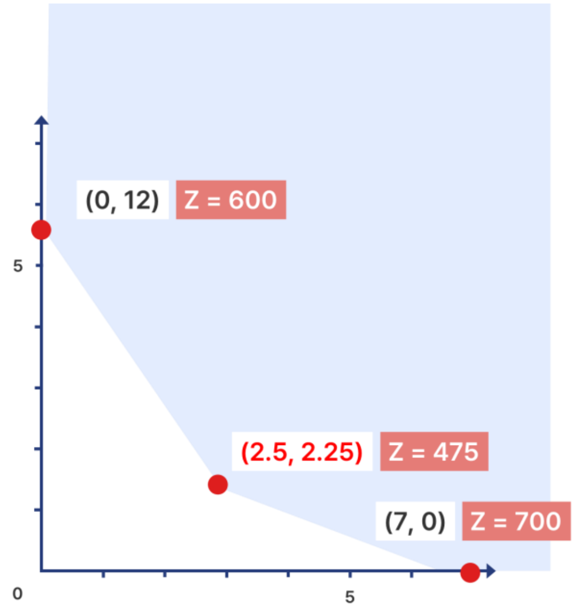
❖ 도해법의 절차-최소화 문제

$$
\begin{aligned}
Min\ & \boxed{100x_1 + 100x_2} \\
s.t.\ & \\
& 20x_1 + 40x_2 \geq 140 \\
& 30x_1 + 20x_2 \geq 120 \\
& \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

기울기 -1



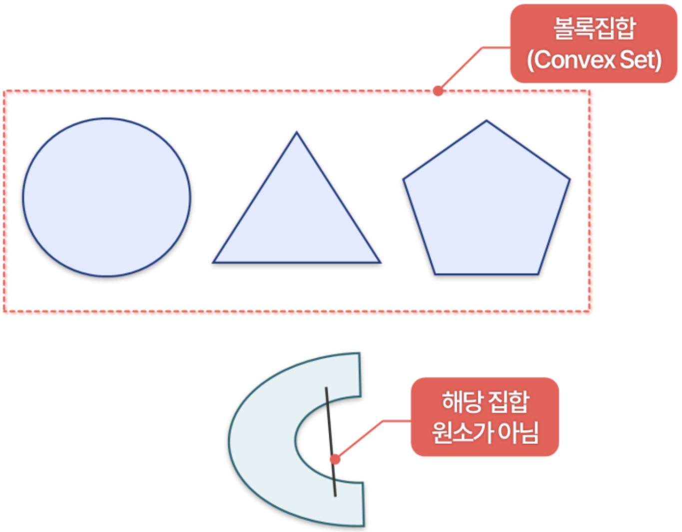




도해법

❖ 볼록 집합과 정점

- 선형계획모형의 실행가능 영역은 볼록 집합
- 볼록집합(Convex Set)
  - 집합 S 내의 임의의 두 점 x, y를 선분으로 이음
  - 두 점집합 S는 볼록집합
  - 의 선형결합으로 나타나는 점이 집합 S 내의 점일 때



- 정점(Extreme Point)
  - 집합 S 내의 한 점 z가 집합 S 내의 임의의 두 점 x, y의 선형결합으로 나타낼 수 없을 때의 점 z
  - 선형계획법에서 제약식을 만족하는 모든 실행가능 영역은 볼록 집합
- 선형계획법의 해 구하기
  - 실행가능 영역 중 정점에서 최적화

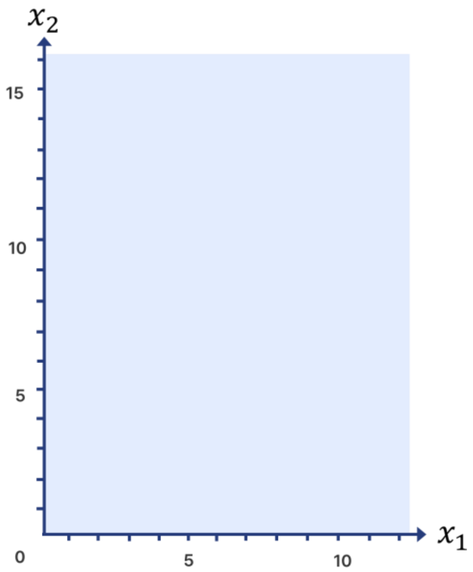
선형계획모형의 도해법

특수한 선형계획모형

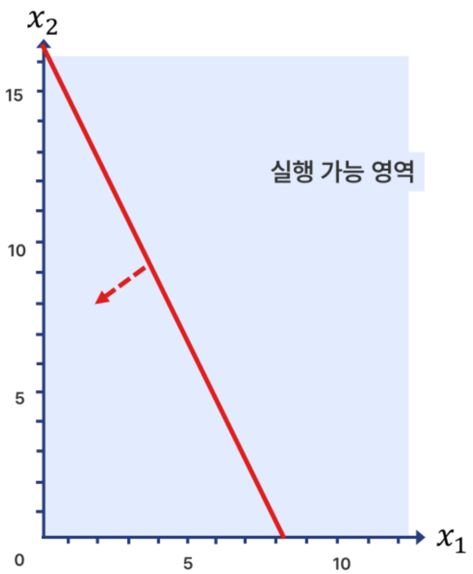
특수한 선형계획모형

❖ 실행 불가능 문제(Infeasible Problem)

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 16 \\
&\qquad x_1 + x_2 \ge 12 \\
&\qquad x_1 \le 6 \\
&\qquad x_2 \le 7 \\
&\qquad \boxed{x_1, x_2 \ge 0}
\end{aligned}
$$



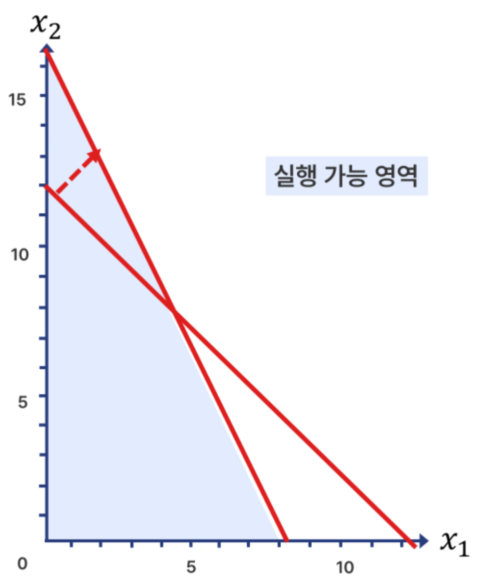
$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad \boxed{2x_1 + x_2 \le 16} \\
&\qquad x_1 + x_2 \ge 12 \\
&\qquad x_1 \le 6 \\
&\qquad x_2 \le 7 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



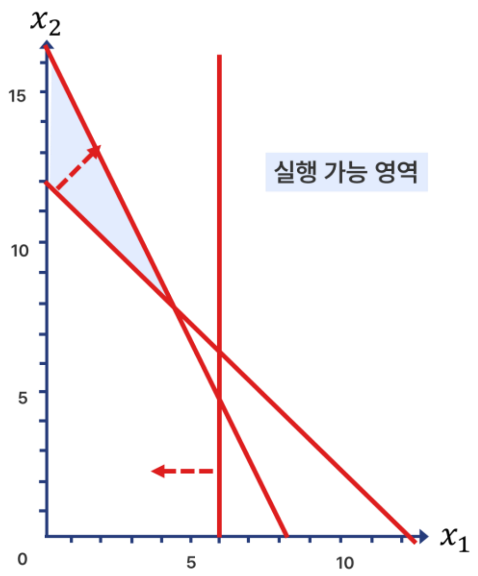
특수한 선형계획모형

❖ 실행 불가능 문제(Infeasible Problem)

$$\begin{aligned} &Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\ &s.t. \\ &\quad 2x_1 + x_2 \le 16 \\ &\quad \boxed{x_1 + x_2 \ge 12} \\ &\quad x_1 \le 6 \\ &\quad x_2 \le 7 \\ &\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



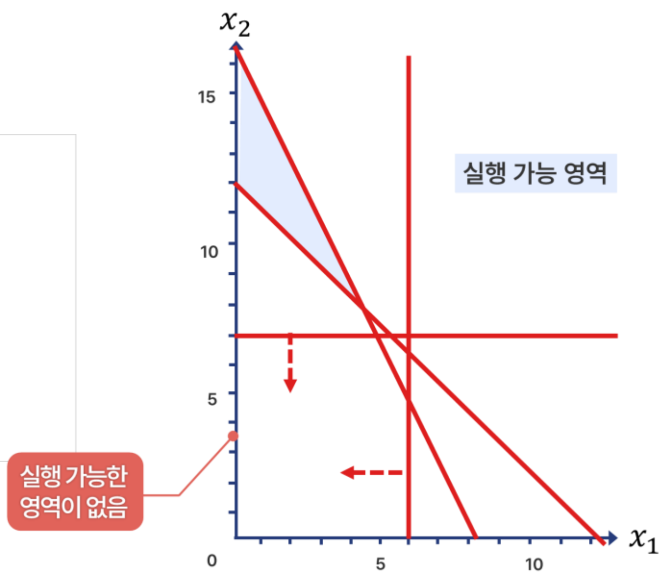
$$\begin{aligned} &Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\ &s.t. \\ &\quad 2x_1 + x_2 \le 16 \\ &\quad x_1 + x_2 \ge 12 \\ &\quad \boxed{x_1 \le 6} \\ &\quad x_2 \le 7 \\ &\quad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



특수한 선형계획모형

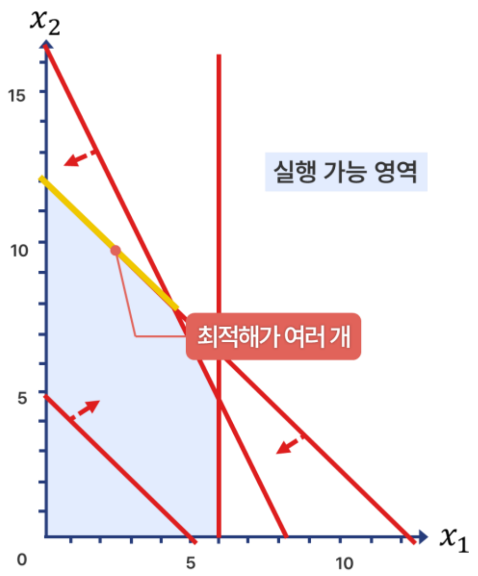
❖ 실행 불가능 문제(Infeasible Problem)

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 16 \\
&\qquad x_1 + x_2 \ge 12 \\
&\qquad x_1 \le 6 \\
&\qquad \boxed{x_2 \le 7} \\
&\qquad x_1,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



❖ 다중 최적해

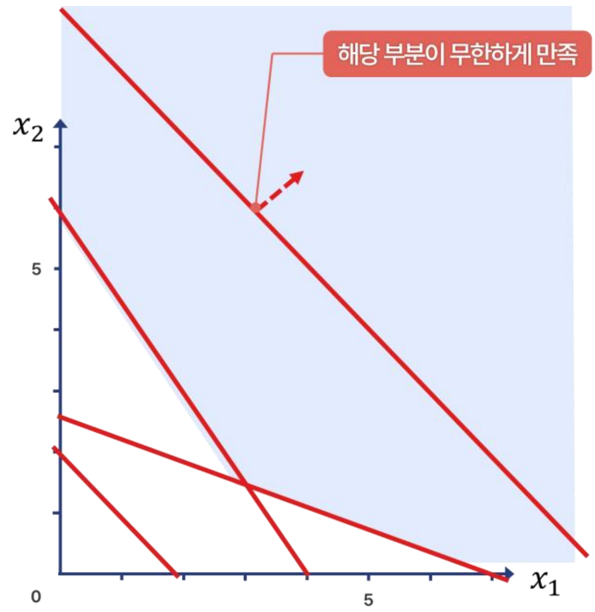
$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 100{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 16 \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 12 \\
&\qquad x_1 \le 6 \\
&\qquad x_1,\ x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



특수한 선형계획모형

❖ 무한해

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150x_1 + 100x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 20x_1 + 40x_2 \geq 140 \\
&\qquad 30x_1 + 20x_2 \geq 120 \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



❖ 차원 선형계획모형