AI알고리즘

비선형계획법

수퍼스타를 키우는 곳
전주대학교

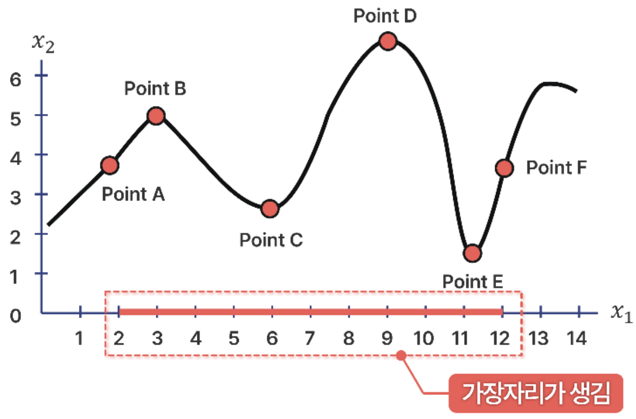
라그랑지 방법과 쿤-터커 조건법

라그랑지 방법

라그랑지 방법

❖ 일반적인 비선형계획문제의 해법

- 제약조건이 없는 경우 미분법을 통한 필요조건과 충분조건에 의해 극값을 판단
- 제약조건이 있는 경우 해영역의 정점들에서도 국소 최적해가 나올 수 있음



- 제약조건이 없는 것처럼 할 수 없을까?

❖ 제약 조건이 있는 경우의 최적해 도출방법

- 제약조건 등식인 경우 → 라그랑지 방법 사용
- 제약조건 부등식인 경우 → 쿤-터커 조건법 사용

❖ 라그랑지 방법(Lagrange Method)

- 미분이 가능하고 제약 조건식에 부등호 대신 등호만을 가진 비선형계획문제는 라그랑지 승수를 이용하여 최적해를 찾을 수 있음
- 편미분 함수 활용한 최적해 도출은 명확한 정보가 없으므로 적용이 불가능함
- 이러한 경우에는 라그랑지 승수(Lagrange Multiplier)를 도입
  - 제약이 있는 비선형계획모형
  - 제약이 없는 비선형계획모형으로 변경

라그랑지 방법

❖ 라그랑지 방법(Lagrange Method)

$$Maximize(Minimize)Z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$s.t. \quad g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = b_i$$
$$x_j \geq 0, \quad i = 1, \cdots, m, \quad j = 1, \cdots, n$$

$\lambda_i \geq 0$,
라그랑지 승수 도입

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m)$$
$$= f(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)]$$

- 라그랑지 방법을 이용하여 제약식 제거
- 변경된 비선형계획모형의 최적해가 원 비선형계획모형의 최적해가 되기 위한 조건
  - $\frac{\partial L}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, \cdots, n), \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (i = 1, \cdots, m)$
  - 즉, $\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$
- $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$가 볼록함수이고, $g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$가 선형함수
- $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$가 오목함수이고, $g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$가 선형함수

❖ 라그랑지 승수의 의미

- 다른 변수들이 일정할 때 제약조건식의 우변 상수인 b가 변화함으로써 목적함수 f가 변화되는 양을 의미
- 새로운 알고리즘을 배울 때 상당히 유용할 수 있음
  - 결국 λ 는 g(X)에서의 변화에 따른 f(x)에서의 변화를 나타냄

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda(b - g(x))$$
$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x)}{\partial x} = 0$$
$$\lambda = \frac{\partial f(x)}{\partial g(x)} = 0$$

라그랑지 방법

❖ 예제

- 함수 충분조건에 의해 최대, 최솟값을 구할 수 있음

등식인 제약식을 없애는 것

$$\begin{aligned} &Minimize \quad z(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ &s.t \qquad\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &L(x,\lambda) \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(6 - x_1 - x_2 - x_3) \end{aligned}$$

편미분을 활용하여
자기 변수 외에 모두 상수로 취급

$$L(x,\lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(6 - x_1 - x_2 - x_3)$$

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda = 0 \qquad \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda} = 6 - x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda = 0 \qquad \frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_3} = 2x_3 - \lambda = 0$$

$$\lambda = 4 \qquad x_1 = x_2 = x_3 = 2$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad M_1 = 2,\ M_2 = 4,\ M_3 = 8$$

함수 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 는 완전
볼록함수이므로 최적해를 가짐

라그랑지 방법과 쿤-터커 조건법

쿤 – 터커 조건법

쿤 – 터커 조건법

❖ 쿤 – 터커 조건법 개념

- 비선형계획모형의 제약조건이 전부 또는 일부가 부등식이면 라그랑지 방법을 적용할 수 없음
- 라그랑지 방법을 확장하여 최적해를 구함
  - 이 때 최적해를 얻기위한 필요충분조건이 쿤-터커 조건
- 일반적인 비선형계획문제 고려

$$
\begin{aligned}
&Maximize\ \ Z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&s.t. \qquad g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le b_1 \\
&\qquad\qquad g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le b_2 \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\qquad g_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \le b_m
\end{aligned}
$$

- 제약식의 부등식을 등식으로 전환
  - 새로운 인위 변수를 좌변에 더해줌

$$s_i^2 = b_i - g_i(x_j)$$

$$
\begin{aligned}
&Maximize\ \ Z = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&s.t. \qquad g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) - b_1 + s_1^2 = 0 \\
&\qquad\qquad g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) - b_2 + s_2^2 = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad\qquad g_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) - b_m + s_m^2 = 0
\end{aligned}
$$

- 등식 제약조건으로 전환되었으므로 라그랑지 승수 도입

$$L(x_j, s_i, \lambda_i) = f(x_j) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\left(g_i(x_j) - b_i + s_i^2\right)$$

쿤 – 터커 조건법

❖ 쿤 – 터커 조건법 개념

- 극점이 되기 위한 필요조건

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = -\left(g_i(x_j) - b_i + s_i^2\right) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = -2\lambda_i s_i = 0$$

- λ_i 또는 s_i 중 적어도 하나는 0
- $s_i = 0$ 일때,
  $g_i(x_j) - b_i = 0$이므로 $\lambda_i(g_i(x_j) - b_i) = 0$
- 또한, 두 번째 제약 조건식을 표시한 것이므로 $g_i(x_j) - b_i < 0$으로 나타낼 수 있음
- 따라서, 인위 변수 없이 조건을 표시할 수 있음

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = g_i(x_j) - b_i \le 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = \lambda_i(g_i(x_j) - b_i) = 0$$

- 필요조건은 만일 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$가 오목하고, $g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 의 실행가능영역이 볼록하면 충분조건이 되기도 함
- 이것은 함수 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$이 오목하고, $g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)$이 볼록할 경우 라그랑지함수 $L(x_j, s_i, \lambda_i)$ 가 오목하기 때문
- $L(x_j, s_i, \lambda_i) = f(x_j) - \sum_{i=1}^{m}[\lambda_i(g_i(x_j) - b_i) + \lambda_i s_i^2]$에서 $\lambda_i s_i^2$=0이고,
  $g_i(x_j) - b_i$ 는 볼록하고 $\lambda_i \ge 0$ 이므로 $\lambda_i(g_i(x_j) - b_i)$ 도 볼록하고, $-\lambda_i(g_i(x_j) - b_i)$ 는 오목
- 따라서, $f(x_j) - \sum_{i=1}^{m}[\lambda_i(g_i(x_j) - b_i) + \lambda_i s_i^2]$ 도 오목

쿤 – 터커 조건법

❖ 예제

$$\begin{aligned} &Max\ \ x_1\, x_2 \\ &s.t. \\ &\qquad 2x_1 + \ x_2 \ \le 16 \\ &\qquad\ x_1,\, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

- 라그랑지 함수

$$\begin{aligned} L(x,s,\lambda) = \ & x_1x_2 - \lambda_1(2x_1 + x_2 - 16 + s_1^2) \\ & - \lambda_2(-x_1 + s_2^2) - \ \lambda_3(-x_2 + s_3^2) \end{aligned}$$

$$L(x,s,\lambda) = \ x_1x_2 - \lambda_1(2x_1 + x_2 - 16 + s_1^2) - \lambda_2\,(-x_1 + s_2^2) - \ \lambda_3(-x_2 + s_3^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \qquad \lambda_1(2x_1 + x_2 - 16) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \qquad \lambda_2\, x_1 = 0$$

$$\lambda_3\, x_2 = 0$$

$$2x_1 + \ x_2 \ \le 16 \qquad \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ge 0$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

- $\lambda_2 \neq 0,\, \lambda_3 \neq 0$인 경우
  - 물리적 모형
  - $\lambda_2\, x_1 = 0$에 의해 $x_1 = 0, \lambda_3\, x_2 = 0$에 의해 $x_2 = 0$
  - $\lambda_1(2x_1{+}x_2 - 16) = 0$에 의해 $\lambda_1 = 0$
  - 이를 $\frac{\partial L}{\partial x_1}$ 과 $\frac{\partial L}{\partial x_2}$ 에 대입하면, $\lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$
  - 조건을 만족시키지 못함

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

쿤 – 터커 조건법

❖ 예제

- $\lambda_2 \neq 0,\ x_2 \neq 0$인 경우
  - $\lambda_2 x_1 = 0$에 의해 $x_1 = 0$, $\lambda_3 x_2 = 0$에 의해 $\lambda_3 = 0$
  - 이를 $\frac{\partial L}{\partial x_1}$과 $\frac{\partial L}{\partial x_2}$에 대입하면, $x_2 + \lambda_2 = 0,\ \lambda_1 = 0$
  - $x_2 = -\lambda_2$ 둘다 양수에 위배
  - 조건을 만족시키지 못함

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

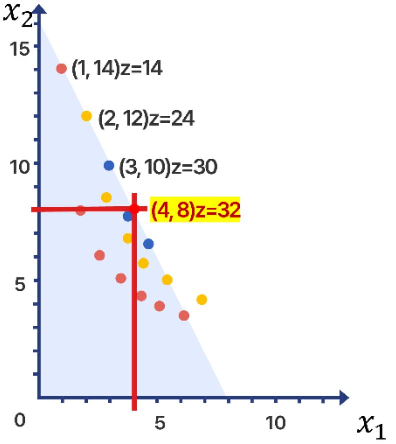
- $x_1 \neq 0,\ \lambda_3 \neq 0$인 경우
  - $\lambda_2 x_1 = 0$에 의해 $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 x_2 = 0$에 의해 $x_2 = 0$
  - 이를 $\frac{\partial L}{\partial x_1}$과 $\frac{\partial L}{\partial x_2}$에 대입하면, $\lambda_1 = 0, x_1 + \lambda_3 = 0$
  - $x_1 = -\lambda_3$ 둘다 양수에 위배
  - 조건을 만족시키지 못함

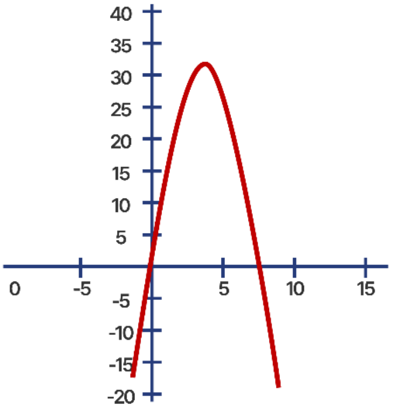
$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

쿤 – 터커 조건법

❖ 예제

- $x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0$인 경우
  - $\lambda_2 x_1 = 0$에 의해 $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 x_2 = 0$ 에 의해 $\lambda_3 = 0$
  - 이를 $\frac{\partial L}{\partial x_1}$과 $\frac{\partial L}{\partial x_2}$에 대입하면, $x_2 - 2\lambda_1 = 0, x_1 - \lambda_1 = 0$
  - $\lambda_1 = 0,\ 2x_1 + x_2 - 16 \neq 0$ 이면
    - $x_1 = \lambda_1 = 0,\ x_2 = 2\lambda_1 = 0,$ 위배
  - $\lambda_1 \neq 0,\ 2x_1 + x_2 - 16 = 0$이면
    - $x_1 = \lambda_1, x_2 = 2\lambda_1, 2\lambda_1 + 2\lambda_1 - 16 = 0$
    - 따라서, $\lambda_1 = 4,\ x_1 = 4,\ x_2 = 8,\ Z = 32$
- $\lambda_1 = 4,\ x_1 = 4,\ x_2 = 8,\ Z = 32$





쿤 – 터커 조건법

❖ 쿤 – 터커 정리(Kuhn – Tucker Theorem)

$$Minimize\ z(x_1, x_2, \dots, x_n)$$
$$subject\ to\ h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$$
$$g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \le 0, \mathrm{k} \in \{1, 2, \dots, r\}$$

$\lambda_j\ \mu_k$, 라그랑지 승수 도입

$$L(x, \lambda, \mu) = z(x) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j h_j(x) + \sum_{k=1}^{r} \mu_k g_k(x)$$

$A(x) = \{k | g_k(x) = 0\}$ **활성부등식**

- 주어진 비선형계획모형에 대해 국소 최솟값($x*, \lambda*, \mu*$)이 존재한다면

$$\nabla L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0$$
$$\mu_k^* \ge 0, \forall k \in \{1, 2, \dots, r\}$$
$$\mu_j^* = 0, \forall j \notin A(x)$$

❖ 2차 계획기법(Quadratic Programming)

- 목적함수 중 2차 함수 부분이 오목(최대화) 하거나 볼록(최소화) 하고 제약 조건이 모두 1차인 경우에 적용되는 해법
- 비선형계획법의 쿤-터커 조건을 선형계획법으로 해결하는 기법

❖ 분리볼록계획기법(Separable Convex Programming)

- 목적함수나 제약 조건이 변수에 따라 분리될 수 있는 함수
- 목적함수가 최대화의 경우 오목하고 제약 조건이 볼록한 경우에 적용되는 해법

❖ 기하계획기법(Geometric Programming)

- 목적함수의 지수가 음이 될 수 있는 고차다항식으로 되어 있을 때 적용될 수 있는 해법