AI알고리즘

정수계획법 개요

수퍼스타를 키우는 곳
전주대학교

학습내용

- 정수계획법 개요
- 정수계획법 예제

학습목표

- 정수계획법의 개요를 알고 설명할 수 있다.
- 정수계획법의 예제를 풀고 설명할 수 있다.

정수계획법 개요 및 예제

정수계획법 개요

정수계획법 개요

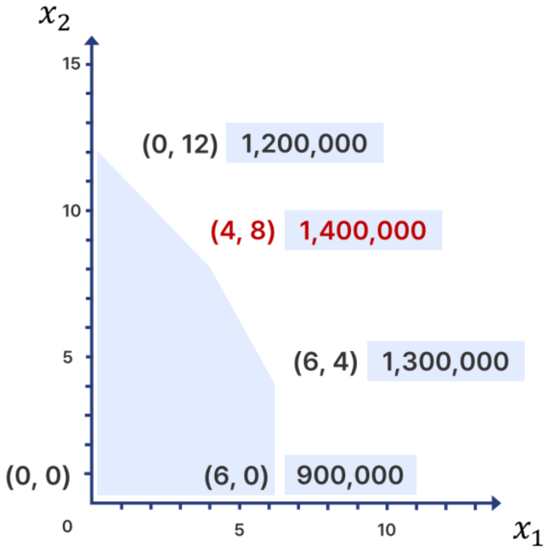
❖ 예제

앞으로 1달간 사용하기 위하여 확보한 원료는 목재가 16m³ , 가죽은 12m², 섬유는 6m²이다.
침대를 하나 만드는 데는 목재가 2m³, 가죽은 1m², 섬유는 1m² 가 필요하고, 소파를 하나 만드는 데는 목재가 1m³, 가죽은 1m² 필요하고 섬유는 필요하지 않다. 침대는 개당 100만 원에 판매하여 원료비 등의 비용을 제외하고 15만 원의 이익을 내고 있으며, 소파는 개당 60만 원에 판매하여 원료비 등의 비용을 제외하고 10만원의 이익을 내고 있다.
이익을 최대로 만들기 위해서는 1달간 침대와 소파를 각각 몇 개씩 만들어야 하는가?

- 의사결정변수의 결정

x_1 = 침대생산량
x_2 = 소파생산량

$$
\begin{aligned}
& Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
& s.t. \\
& \qquad 2x_1 + x_2 \le 16 \\
& \qquad x_1 + x_2 \le 12 \\
& \qquad x_1 \le 6 \\
& \qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

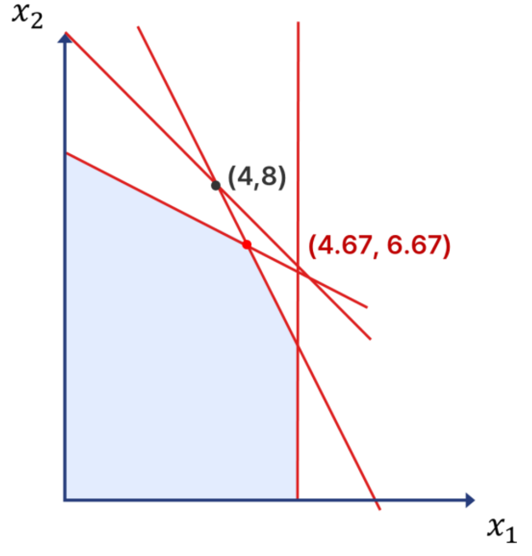


❖ 예제(실수해)

- 최적해가 정수가 아닌 경우 사용하는 정수 계획법
  - 가죽 원료 18㎡, 소파를 만드는 가죽 사용량 2㎡ 수정

x_1 = 침대 생산량
x_2 = 소파 생산량

$$
\begin{aligned}
& Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
& s.t. \\
& \qquad 2x_1 + x_2 \le 16 \\
& \qquad x_1 + 2x_2 \le 18 \\
& \qquad x_1 \le 6 \\
& \qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



정수계획법 개요

❖ 예제(실수해)

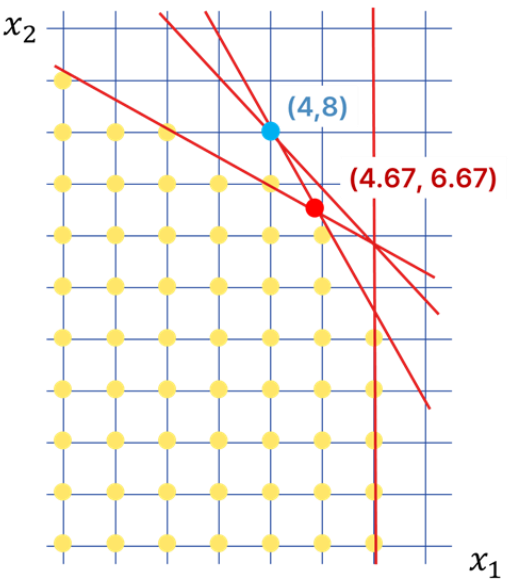
- 도해법으로 인사이트를 얻음
- 실행 가능 영역 중 최소화 점을 찾음
- 정점 꼭짓점을 찾아 나가는 형태

❖ 예제(정수해)

- 의사결정 변수의 결정

x_1 = 침대 생산량
x_2 = 소파 생산량

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + \ \ x_2 \le 16 \\
&\qquad x_1 + 2x_2 \le 18 \\
&\qquad x_1 \qquad\ \le \ 6 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



- 의사결정 변수의 정수
  - 반올림 →(5,7)
  - 내림 →(4,6)

- 최적해를 올림, 내림 처리하는 과정이 변수가 많을수록 복잡해지는 문제 발생
- 정수가능해가 최적해인지 여부를 판단하기 어려움
- 정수해 조건이 붙는 경우에는 선형계획법과 다른 정수 계획모형을 위한 해법이 필요

정수계획법 개요

❖ 정수계획모형

- 제약식은 선형계획모형과 동일하고 변수만 정수해 조건이 붙는 경우

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 16 \\
&\qquad x_1 + 2x_2 \le 18 \\
&\qquad x_1 \le 6 \\
&\qquad x_1, x_2 \in \{1, 2, \cdots\}
\end{aligned}
$$

- 종류
  - 순수정수계획모형(Pure Integer Programming Model):
  - 모든 변수가 정수
  - 혼합정수계획모형(Mixed Integer Programming Model)
  - 일부 변수가 정수
  - 이진정수계획모형(Binary Integer Programming Model)
  - 모든 변수가 정수 중 0, 1

정수계획법 개요 및 예제

정수계획법 예제

정수계획법 예제

❖ 배낭 문제(Knapsack Problem)

전통적 정수계획모형으로서 주어진 아이템들을 하나의 배낭에 최대한 할당하는 문제를 의미

- 크기와 수익 정보를 가지고 있으며 배낭 역시 최대 할당 가능 크기 정보를 가지고 있음

기호 정의	
K	아이템(제품)의 집합
k	각각의 아이템, $k \in K$
x_k	의사결정 변수 (배낭에 할당되는지 여부를 나타냄)
C	배낭의 크기
c_k	아이템의 크기 정보
p_k	아이템의 수익 정보

$$Max \quad \sum_{k\in K} p_k x_k$$

$$s.t. \quad \sum_{k\in K} c_k x_k \le C$$

$$x_k \in \{0,1\}$$

- 선형계획모형으로 최적해 구하기
- 복잡한 문제도 모형화 가능

❖ 복수 배낭 문제 예제(정수해)

- 어떤 아이템을 취할 것인가
- 어떤 배낭에 집어넣을 것인가

기호 정의	
K	아이템(제품)의 집합
k	각각의 아이템, $k \in K$
I	배낭의 집합
x_{ik}	의사결정 변수(아이템이 어떤 배낭에 할당되는지 여부를 나타냄)
C_i	배낭의 크기
c_k	아이템의 크기 정보
p_k	아이템의 수익 정보

$$Max \quad \sum_{i\in I}\sum_{k\in K} p_k x_{ik}$$

$$s.t. \quad \sum_{k\in K} c_k x_{ik} \le C_i$$

$$x_{ik} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in I, k \in K$$

정수계획법 예제

❖ 할당 문제(Assignment Problem)

- 수행해야 하는 일이 n개 있고, 이를 수행할 수 있는 인력이 m명으로 가정
- 수행해야 하는 일의 개수가 인력보다 적다고(n<m) 가정하면 일을 하지 않는 사람이 생김
  - 전체 비용을 최소화하면서 인력들을 일에 할당하는 문제
- n < m

$$
\begin{aligned}
Max \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \\
s.t. \quad & \\
& \textstyle\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \\
& \textstyle\sum_{j \in J} x_{ij} \leq 1 \\
& x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in I, j \in J
\end{aligned}
$$

- n = m(이진 매칭 문제)

$$
\begin{aligned}
Max \quad & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \\
s.t. \quad & \\
& \textstyle\sum_{i \in I} x_{ij} = 1 \\
& \textstyle\sum_{j \in J} x_{ij} = 1 \\
& x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in I, j \in J
\end{aligned}
$$

정수계획법 예제

❖ 할당 문제(Assignment Problem)

- 수행해야 하는 일이 n개 있고, 이를 수행할 수 있는 인력이 m명으로 가정
- 수행해야 하는 일의 개수가 인력보다 적다고(n<m) 가정하면 일을 하지 않는 사람이 생김
  - 전체 비용을 최소화하면서 인력들을 일에 할당하는 문제
- n < m

$$
\begin{aligned}
& Max \quad \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} C_{ij}x_{ij} \\
& s.t. \\
& \qquad \textstyle\sum_{i\in I} x_{ij} = 1 \\
& \qquad \textstyle\sum_{j\in J} x_{ij} \le 1 \\
& \qquad x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in I, j \in J
\end{aligned}
$$

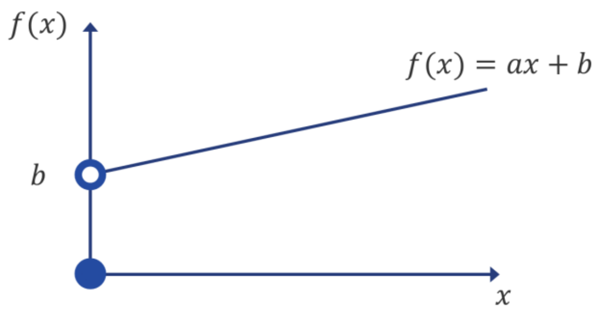
- n = m(이진 매칭 문제)

$$
\begin{aligned}
& Max \quad \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} C_{ij}x_{ij} \\
& s.t. \\
& \qquad \textstyle\sum_{i\in I} x_{ij} = 1 \\
& \qquad \textstyle\sum_{j\in J} x_{ij} = 1 \\
& \qquad x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in I, j \in J
\end{aligned}
$$

정수계획법 예제

❖ 고정비용 문제(Fixed Charge Problem)

- 일을 수행하면 고정적으로 발생하는 비용이지만 일을 수행하지 않으면 발생하지 않음



$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & if\ x > 0 \\ 0 \quad , & if\ x = 0 \end{cases}$$

- 자동차 생산 시
  - 자동차 생산을 위한 준비 비용
- 냉장고 생산 라인
  - 여러 용량을 번갈아가며 생산하는 것이 아니라 같은 용량을 한번에 생산

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & if\ x > 0 \\ 0 \quad , & if\ x = 0 \end{cases}$$

- 고정비와 변동비를 하나의 함수로 표현할 경우, 이는 선형계획모형의 기본 가정인 선형성과 연속성에 위배
- 이러한 경우 이진 정수 변수를 도입하여 정수계획모형으로 모형화

$$\begin{aligned} Min\ f(x) &= ax + by \\ s.t. \quad x &\le My \\ y = 0 &\quad or \quad 1 \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & if\ x > 0 \\ 0 \quad , & if\ x = 0 \end{cases}$$

① y = 1인 경우
② y = 0인 경우

$$\begin{aligned} Min\ f(x) &= ax + by \\ s.t. \quad x &\le M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Min\ f(x) &= ax + by \\ s.t. \quad x &\le 0 \end{aligned}$$

정수계획법 예제

❖ 고정비용 문제(Fixed Charge Problem)

- 공장 위치 선정 문제
  - 후보 위치의 개수와 수요지의 개수가 주어져 있을 때, 전체 수요지에 물건을 공급하면서 비용을 최소화하는 후보지를 결정하는 문제

$$
\begin{aligned}
&Min \quad \sum_{j\in J} f_j\, z_j + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}x_{ij} \\
&s.t. \\
&\qquad \textstyle\sum_{j\in J} x_{ij} \quad = 1 \\
&\qquad \textstyle\sum_{i\in I} x_{ij} \quad \le M z_j \\
&\qquad z_j,\ x_{ij} \ \in \{0,1\}, \quad \forall i \in I, j \in J
\end{aligned}
$$

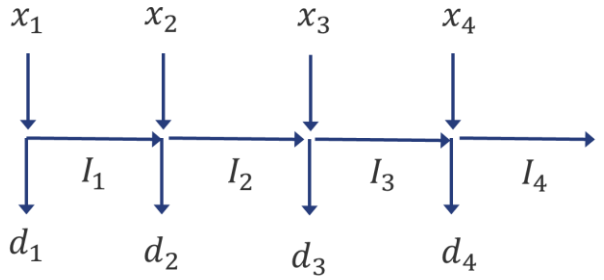
❖ 로트 크기 결정 문제(Lot Sizing Problem)

- 고정비용 문제를 생산계획 문제에 확장 적용하면 생산계획 시 중요한 문제로 부각되고 있는 로트 크기 결정 문제를 해결할 수 있음
- 생산량 결정의 중요성
  - 상당한 비용 문제
  - 수요보다 적게 생산할 수 없음
  - 재고 유지 비용
- 대상 생산품에 대해 계획 주기 내 단위 기간별 생산량을 결정하는 문제

정수계획법 예제

❖ 로트 크기 결정 문제(Lot Sizing Problem)

- 고정비용 문제를 생산계획 문제에 확장 적용하면 생산계획 시 중요한 문제로 부각되고 있는 로트 크기 결정 문제를 해결할 수 있음
- 생산량 결정의 중요성
  - 상당한 비용 문제
  - 수요보다 적게 생산할 수 없음
  - 재고 유지 비용
- 대상 생산품에 대해 계획 주기 내 단위 기간별 생산량을 결정하는 문제
  - 단위 기간 $t \in \{1, \cdots, n\}$에서의 생산고정비용 f_t, 생산에 따른 단위생산비용 c_t, 재고유지비용 h_t, 수요량 d_t이 주어져 있다고 할 때, 전체 비용을 최소화하는 매 기간별 생산량 x_t와 기간말 재고량 I_t를 구하는 것이 로트 크기 결정 문제의 목표
  - 추가 변수로서 z_t를 도입하면, 기간 t에 생산이 이루어질 때 z_t=1이 되고, 생산이 이루어지지 않으면 z_t=0이 되는 이진 정수 변수가 됨



$$I_1 + x_2 = d_2 + I_2$$

$$
\begin{aligned}
Min \quad & \sum_{t \in T} f_t \, z_t + \sum_{t \in T} c_t \, x_t + \sum_{t \in T} h_t \, I_t \\
s.t. \quad & \\
& x_t \le M z_t \\
& I_{t-1} + x_t = d_t + I_t \\
& z_t, x_t \in \{0, 1\}, \qquad \forall t \in T
\end{aligned}
$$