2장. 선형계획법의 기본개념

참고문헌: 최적 의사결정을 위한 경영과학, 권수태외 5인, 청람, 2018

Contents

2. 선형계획법의 기본개념

2-1 선형계획모형의 개념과 모형화
2-2 선형계획모형의 도해법
2-3 선형계획모형의 민감도 분석과 쌍대문제

2.1 선형계획법이란?

❖ 선형계획법(LP: Linear Programming)

- 의사결정을 위한 모형 중 수리적 모형(Mathematical Model)으로 개발
- 제한된 자원을 최적(Optimal)으로 활용하는 의사결정을 위한 모형
  - ✓ 제한된 자원(인력, 설비, 자재 등)을 목적(최대 이익 혹은 최소비용)에 따라 어떻게 배분할 것인지를 결정
  - ✓ 예) 제품 생산계획, 원료배합, 재고관리, 수송계획, 자본예산계획, 투자계획, 인력 및 공간배치, 농작물 재배계획, 영양관리 등
  - 여러 제약조건을 만족시키면서 특정한 목적을 달성하기 위해 가용한 자원을 배분하기 위한 수학적 방법

2.1 선형계획법이란?

❖선형계획법(LP: Linear Programming)

➢ 의미

✓ 선형(Linear): 함수관계에서 변수가 선형, 즉 일차함수

✓ 계획법(Programming): planning의 의미, 수리적 문제해결을 위한 순차적, 체계적 논리체계

➢ 정의

✓ 선형계획법은 일차함수로 표시되는 목적함수와 선형부등식으로 표시되는 제약조건들을 가지고 추구하고자 하는 최적의 목표를 찾는 순차적, 체계적인 논리 접근법

✓ 관리적 문제를 수학적 모형으로 작성하고, 선형의 여러 제약조건에서 선형의 목적함수를 최적화함으로써 해를 구하는 과정

✓ 목적함수와 제약식이 1차 함수로 이루어진 문제를 최적으로 푸는 방법

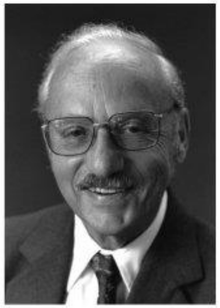
2.1 선형계획법이란?

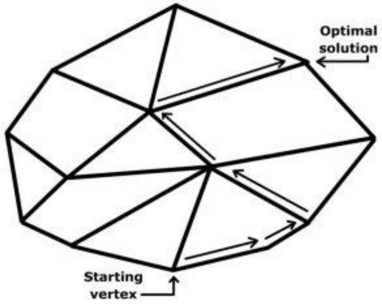
❖선형계획법 발전과정

- 제2차 세계대전 중 군수관리문제(생산, 할당, 수송, 배치 등) 를 효율적으로 해결하기 위한 의사결정모형으로 사용
- 1947년 단치히(George Dantzig)에 의해

  심플렉스법(Simplex Method)이 개발됨으로써

  선형계획법이 획기적으로 발전





- 1984년 카마카의 내부점 해법
- 기업경영문제(일정계획문제, 생산 및 재고문제, 제품선정, 인력선발 및 배치문제, 제품수송, 투자계획, 예산편성 등)에 적용되었으며, 농산물 경작, 경제의사결정 및 의료산업과 행태 및 사회과학적 의사결정에서도 활용
- 쿠프만과 칸토로비치가 선형계획모형을 통한 경제이론개발의 업적을 인정받아 1975년 노벨 경제학상을 수상
- 선형계획법은 수리적 기법으로 개발된 여러 기법들 중에서 기업경영 분야에 있어서 아직까지도 가장 많이 활용되고 있으며, 세계적으로 공공기관 및 기업들이 비용절감, 이익 극대화 등 의사결정상황에 활용하여 큰 성과를 거두고 있음

2.1 선형계획법이란?

❖선형계획법 발전과정

- ➢ 한정된 자원을 효율적으로 배분하는 문제에 있어서는 어디서나 이용
- ➢ 배합문제
  - ✓ 여러가지 원료들을 섞어 제품을 만드는데 있어서 성분함량조건을 만족시키면서 비용이 최소가 되는 배합비율을 구하는 문제
- ➢ 생산제품결정
  - ✓ 회사의 이익을 최대로 내기 위해서는 어떤 제품을 얼마만큼씩 생산하는 것이 좋은가를 결정
- ➢ 수송 및 배합문제
  - ✓ 적절한 수송 및 배분계획을 통하여 전체 수송비를 최소화
- ➢ 생산계획 및 재고관리
  - ✓ 생산비와 재고비용의 합을 최소로 줄이기 위한 생산계획을 수립

2.2 선형계획문제의 모형화

❖ 선형계획모형 개발과정

- 문제를 이해
- 의사결정변수들을 결정
- 해의 우열을 결정하는 기준을 선택
- 이 기준이 의사결정변수들의 선형식으로 나타나도록 수식으로 표현하여 목적함수로 사용
- 모든 조건들이 의사결정변수들의 선형식으로 나타나도록 제약식들을 만듦
- 입력자료들을 수집하고 추정

2.2 선형계획문제의 모형화

❖선형계획모형 개발과정

- 선형계획모형은 비음조건을 포함한 모든 제약식들을 만족하는 의사결정변수들의 조합 중에서 목적함수의 값을 가장 좋게 만드는 조합을 찾는 것
- 실행가능해(Feasible Solution)
  - ✓ 비음조건을 포함한 모든 제약식들을 만족하는 의사결정변수들의 조합
- 최적해(Optimal Solution)
  - ✓ 실행가능해 중에서 목적함수의 값을 가장 좋게 만드는 조합

2.2 선형계획문제의 모형화

❖선형계획모형의 기본가정

- 선형성(Linearity) : Additivity + Proportionality
  - ✓ 자원의 사용량이나 수익이 결정변수의 값에 비례한다는 것
  - ✓ 총이익은 산출물 하나하나의 이익을 합계한 것과 같고, 총사용 자원은 산출물 하나하나의 사용분을 합계한 것과 같다
- 가분성(Divisibility)
  - ✓ 선형계획법에서의 의사결정변수의 값이 실수가 될 수 있다
- 확정성(Certainty)
  - ✓ 사용되는 모든 상수와 계수는 확정적으로 알려져 있다

❖ 선형계획법의 구성요소

- 목적함수(Objective Function)
- 제약조건(Constraint)
- 비음조건(Nonnegativity Constraint)

2.2 선형계획문제의 모형화

❖선형계획법의 일반구조

$$Max(or\ Min)\ \ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le (or \ge) b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le (or \ge) b_2 \\ & \quad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le (or \ge) b_m \\ & x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \ge 0 \end{aligned}$$

x_j = 활동 j의 양 $(j = 1,2,\cdots,n)$

c_j = 활동 j에 단위당 기여도

a_{ij} = 활동 j의 한 단위를 생산하기 위해 필요한 자원 i의 양

b_i = 자원 i의 보유량

❖예제 (최대화문제)

전주스마트팜㈜는 환경과 영상정보를 수집하는 2가지 제품(보급형, 고급형)을 생산하고 있다. 보급형을 생산하기 위해서는 센서 3개와 CCTV 2개가 필요하고 고급형을 생산하기 위해서는 센서 2개와 CCTV 3개가 필요하다. 사용할 수 있는 센서와 CCTV는 각각 60개와 50개이고, 제품당 이익은 보급형이 4만원이고 고급형은 5만원이다. 이익을 최대화하기 위해 보급형과 고급형을 각각 얼마만큼 생산하여야 하는가?

❖ 예제 (최대화문제)

➢ 의사결정변수의 결정

x_1 = 보급형의 생산량
x_2 = 고급형의 생산량

➢ 목적함수

$$Max \quad 4x_1 + 5x_2$$

➢ 제약조건

✓ 센서 $3x_1 + 2x_2 \le 60$

✓ CCTV $2x_1 + 3x_2 \le 50$

✓ 비음조건 $x_1, x_2 \ge 0$

$$\begin{aligned} &Max \quad 4x_1 + 5x_2 \\ &s.t. \\ &\qquad 3x_1 + 2x_2 \le 60 \\ &\qquad 2x_1 + 3x_2 \le 50 \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

❖예제 (최소화문제)

AI공유대학교의 영양사는 학생들을 위해 매일 간식을 준비하고 있다. 영양사의 역할은 비타민 K와 J의 매일 최소요구량을 맞추고, 메뉴의 비용은 가능한 한 낮게 유지해야 한다. 비타민 K와 J를 제공하는 주요 간식 메뉴는 전통 한과와 떡이다. 비타민 요구량과 각 메뉴의 단위당 비타민 함유량은 다음과 같다.

비타민 함유량			1일 최소 요구량(mg)
비타민	mg/한과(개)	mg/떡(조각)	
K	20	40	140
J	30	20	120

한과의 개당 원가는 150원, 떡 조각당 원가는 100원이다. 영양사는 총비용을 최소화하는 반면에 최소 1일 비타민 요구량을 충족시키도록 하려면 간식 메뉴를 어떻게 제공해야 하는가를 알고자 한다.

❖예제 (최소화문제)

- 의사결정변수의 결정

  X_1 = 한과 개수

  X_2 = 떡의 조각수

- 목적함수

  $Min \quad 150x_1 + 100x_2$

- 제약조건

  ✓ 비타민 K $20x_1 + 40x_2 \geq 140$

  ✓ 비타민 J $30x_1 + 20x_2 \geq 120$

  ✓ 비음조건 $x_1, x_2 \geq 0$

$$\begin{aligned} &Min \;\; 150x_1 + 100x_2 \\ &s.t. \\ &\qquad 20x_1 + 40x_2 \geq 140 \\ &\qquad 30x_1 + 20x_2 \geq 120 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

❖ 예제 (생산계획)

공유가구㈜에서는 목재, 가죽 , 섬유 등 세 가지 원료를 사용하여 침대와 소파 등 두 가지 가구를 만들고 있다. 앞으로 1달 간 사용하기 위하여 확보한 원료는 목재가 16m^3 , 가죽은 12m^2, 섬유는 6m^2 이다. 침대를 하나 만드는 데는 목재가 2m^3, 가죽은 1m^2, 섬유는 1m^2가 필요하고, 소파를 하나 만드는 데는 목재가 1m^3, 가죽은 1m^2 필요하고 섬유는 필요하지 않다. 침대는 개당 100만원에 판매하여 원료비 등의 비용을 제외하고 15만원의 이익을 내고 있으며, 소파는 개당 60만원에 판매하여 원료비 등의 비용을 제외하고 10만원의 이익을 내고 있다. 이익을 최대로 만들기 위해서는 1달 간 침대와 소파를 각각 몇 개씩 만들어야 하는가?

❖ 예제 (생산계획)

- 의사결정변수의 결정

x_1 = 침대생산량

x_2 = 소파생산량

- 목적함수

$$Max\ \ 150000x_1 + 100000x_2$$

- 제약조건
  - ✓ 목재 $2x_1 + x_2 \le 16$
  - ✓ 가죽 $x_1 + x_2 \le 12$
  - ✓ 섬유 $x_1 \le 6$
  - ✓ 비음조건 $x_1, x_2 \ge 0$

$$\begin{aligned} &Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\ &s.t. \\ &\qquad 2x_1 + x_2 \le 16 \\ &\qquad x_1 + x_2 \le 12 \\ &\qquad x_1 \le 6 \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

2.3 선형계획문제의 도해법

❖ 선형계획법의 해법

- 도해법(Graphic Method)
- 심플렉스법(Simplex Method)
- 프로그램 이용법(Excel, Lingo, R, Python)

❖ 도해법

- 도표(graph)를 이용하여 선형계획법의 해를 찾는 방법
- 제약식을 이용하여 실행가능영역(feasible region)을 그래프로 표시
- 그 중에서 목적함수값을 최적화하는 최적해를 찾음
  - ✓ 선형계획법의 이론적 개념을 이해하는데 유용
  - ✓ 변수가 3개 이상일 경우에는 이를 표현하기가 어렵다

❖ 도해법의 절차

- 의사결정변수들로 이루어진 좌표계를 설정
- 실행가능영역(개별 제약식을 만족하는 영역의 교집합)을 좌표계에 표시
  - ✓ 비음조건을 반영하여 좌표계의 1사분면을 기본으로 함
  - ✓ 개별 제약식들을 하나씩 추가적으로 고려하면서 개별제약식을 만족시키는 영역들의 교집합을 형성해 나감. 만족시키는 영역을 좌표계에 표시
- 목적함수로부터 기울기를 구하고 어느 방향으로의 평행이동이 목적함수의 값을 더 좋게 하는지를 찾아서 목적함수를 평행이동 시킴
- 평행이동 과정에서 실행가능영역과 목적함수가 겹치다가 마지막으로 겹치고 빠져나가는 순간 겹침 부분에 있는 실행가능해가 최적해

2.3 선형계획문제의 도해법

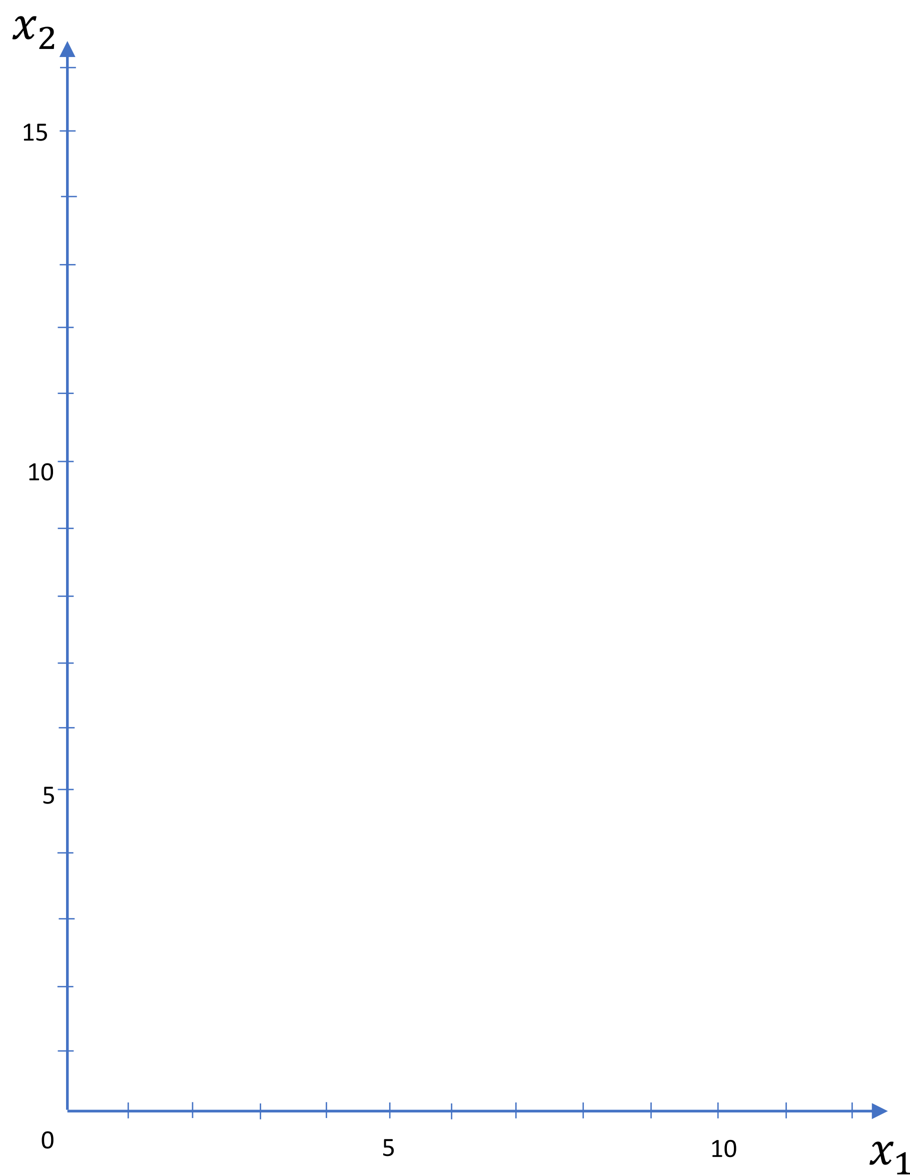
❖ 도해법의 절차

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + \ \ x_2 \ \le 16 \\
&\qquad \ \ x_1 + \ \ x_2 \ \le 12 \\
&\qquad \ \ x_1 \qquad\quad\ \ \le \ \ 6 \\
&\qquad \ \ x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

2.3 선형계획문제의 도해법

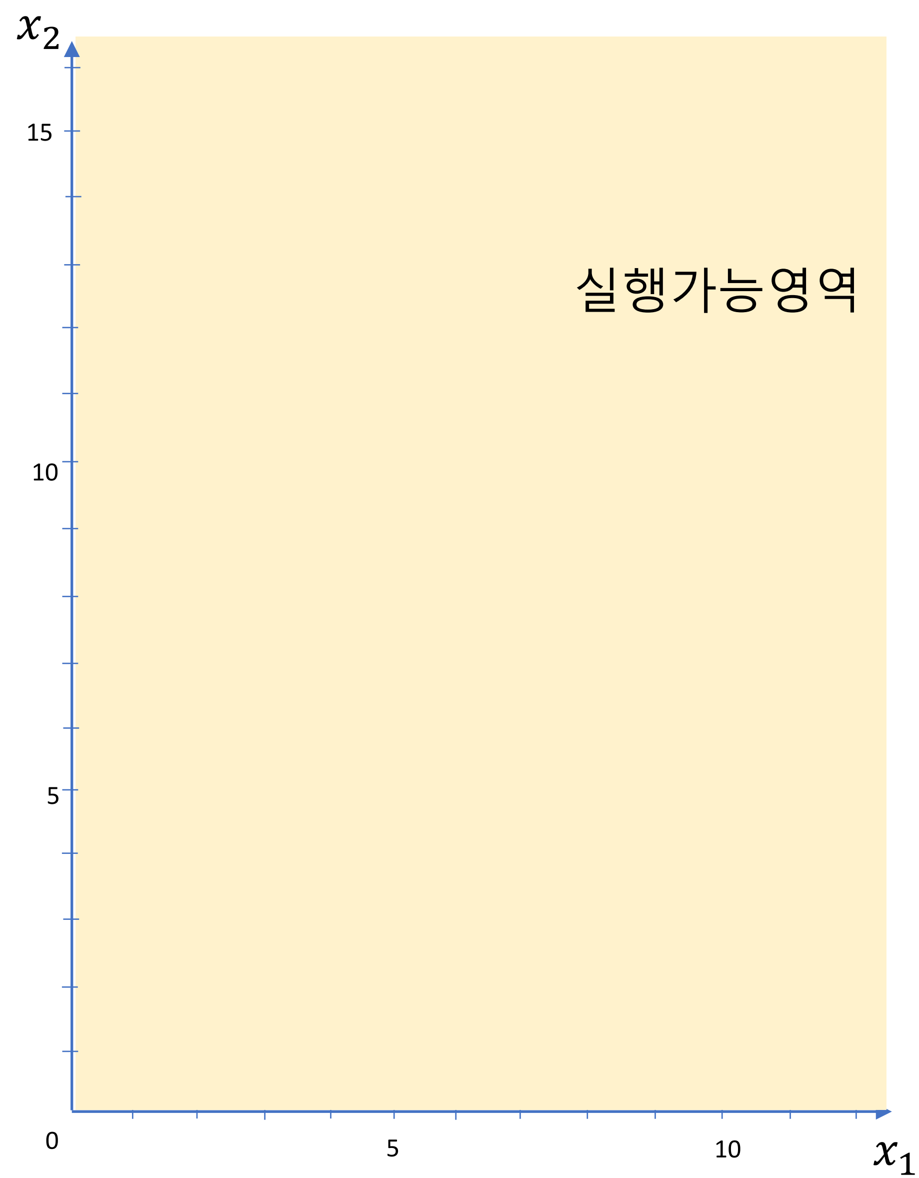
❖ 도해법의 절차(1단계)

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 16 \\
&\qquad x_1 + x_2 \le 12 \\
&\qquad x_1 \le 6 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



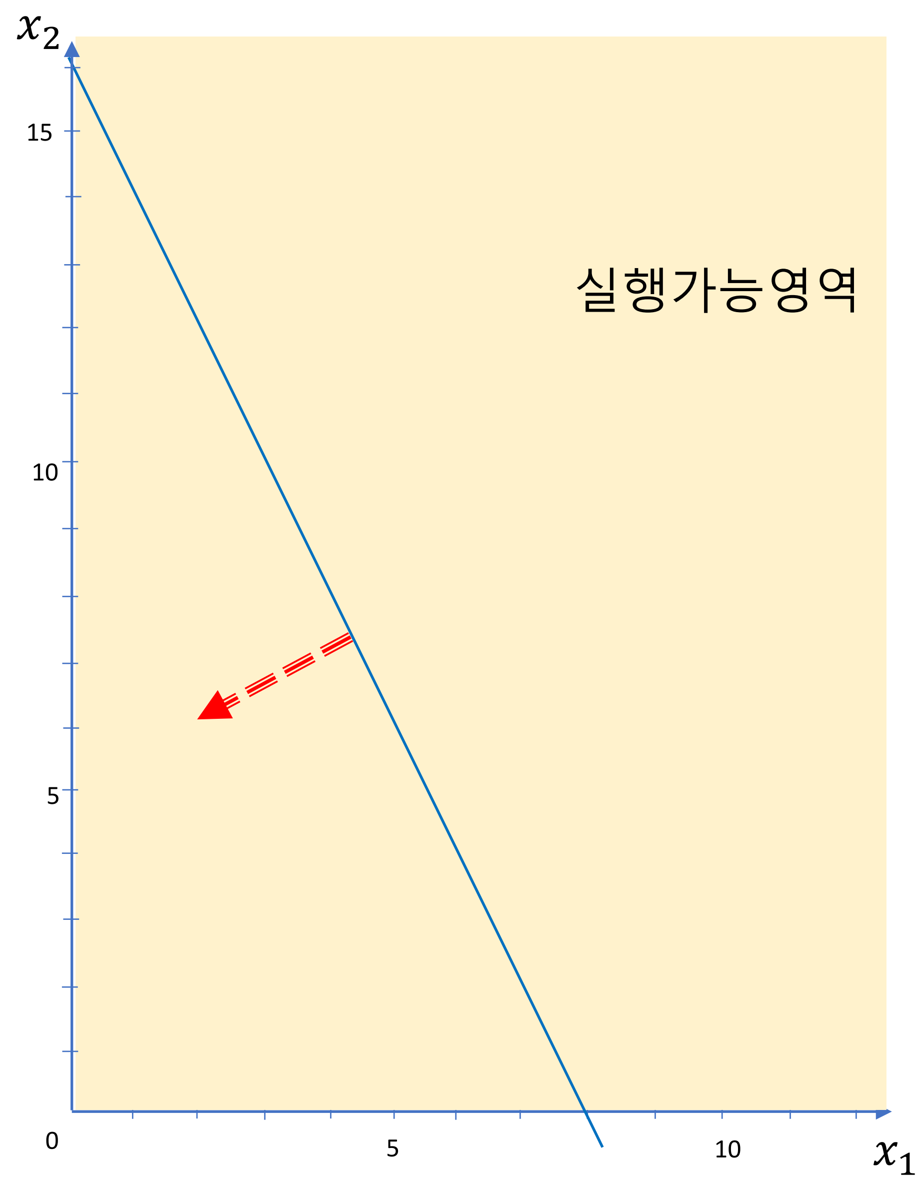
❖ 도해법의 절차(2단계)

$$Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2$$
$$s.t.$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + x_2 \le 12$$
$$x_1 \le 6$$
$$\boxed{x_1, x_2 \ge 0}$$



❖ 도해법의 절차(2단계)

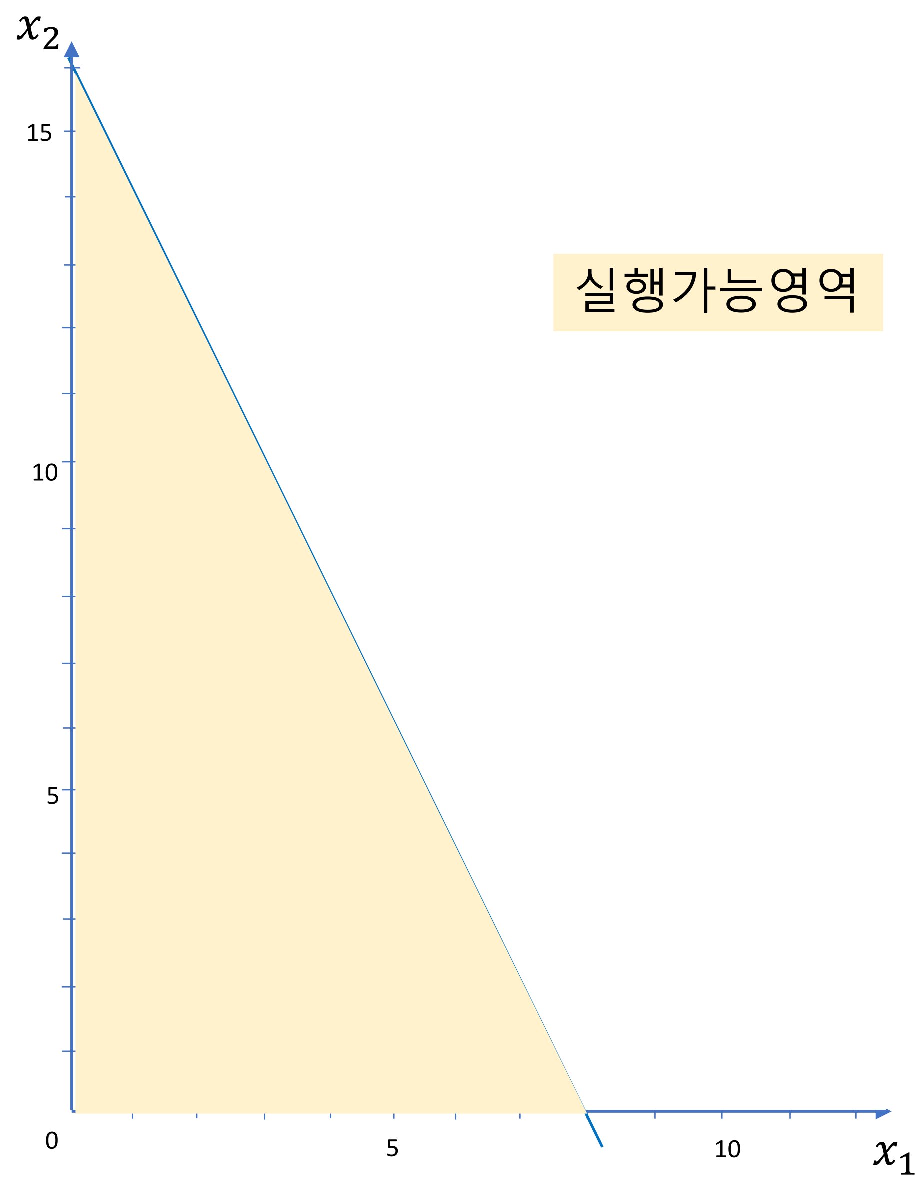
$$Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2$$
$$s.t.$$
$$\boxed{2x_1 + x_2 \le 16}$$
$$x_1 + x_2 \le 12$$
$$x_1 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



2.3 선형계획문제의 도해법

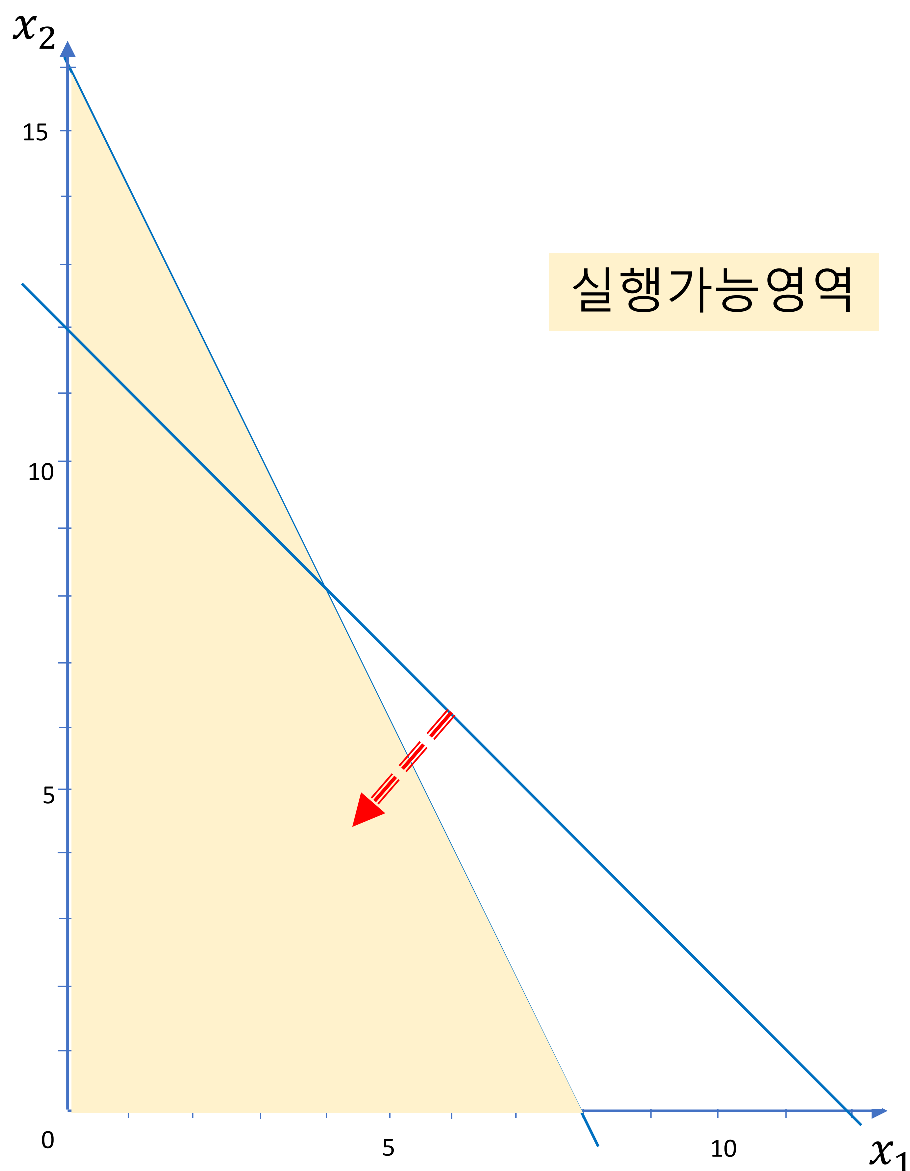
❖ 도해법의 절차(2단계)

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad \boxed{2x_1 + \ \ x_2 \ \le 16} \\
&\qquad \ \ x_1 + \ \ x_2 \ \le 12 \\
&\qquad \ \ x_1 \qquad\quad \le \ \ 6 \\
&\qquad \ \ x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



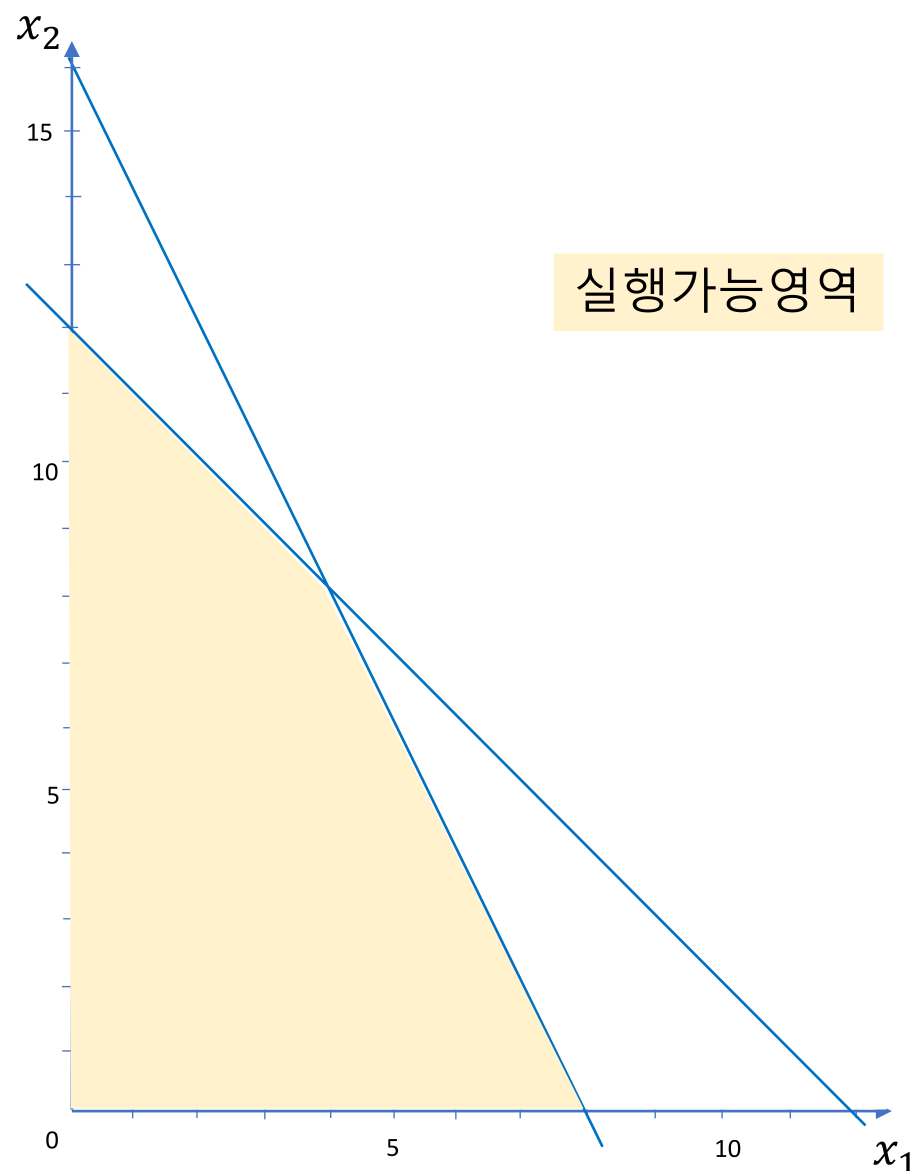
❖ 도해법의 절차(2단계)

$$\begin{aligned} &Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\ &s.t. \\ &\qquad 2x_1 + x_2 \le 16 \\ &\qquad \boxed{x_1 + x_2 \le 12} \\ &\qquad x_1 \le 6 \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



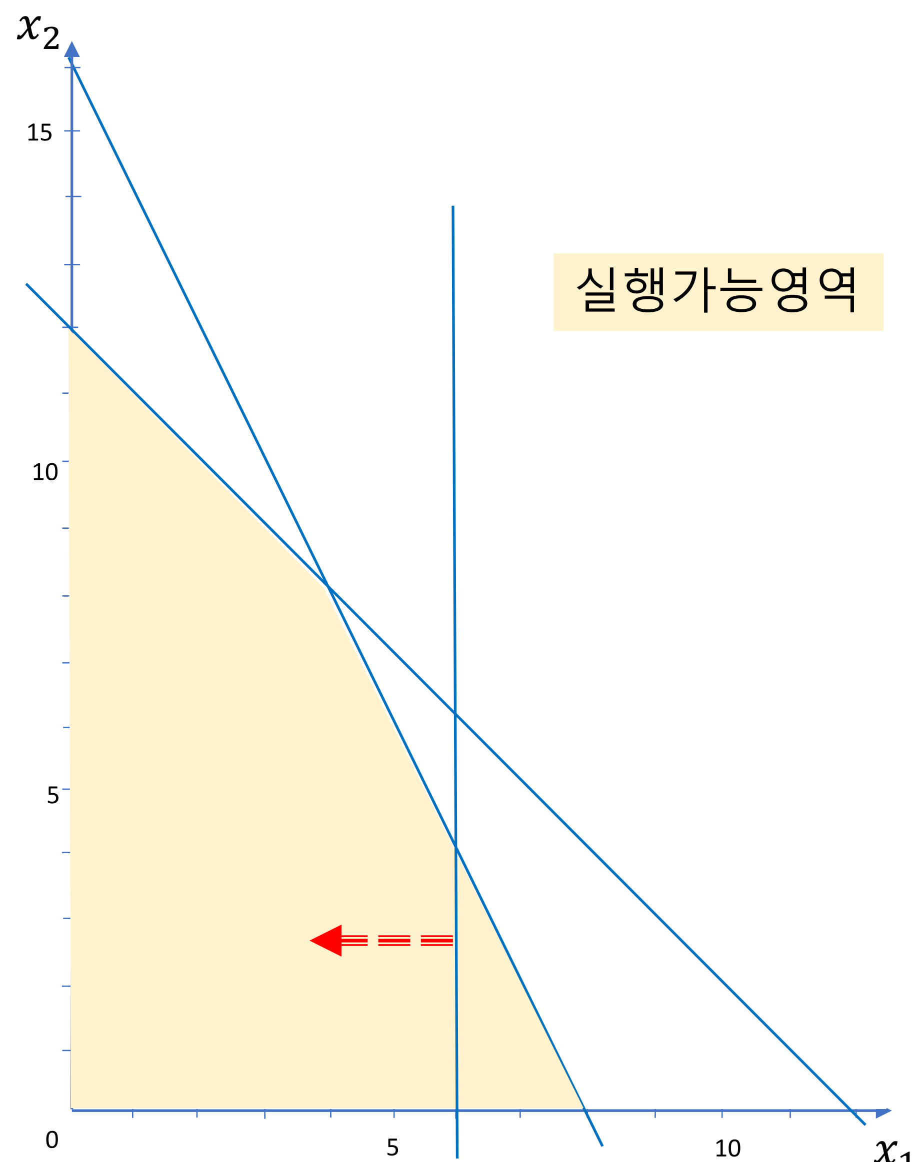
❖ 도해법의 절차(2단계)

$$Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2$$
$$s.t.$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$\boxed{x_1 + x_2 \le 12}$$
$$x_1 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$



❖ 도해법의 절차(2단계)

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\quad 2x_1 + x_2 \le 16 \\
&\quad x_1 + x_2 \le 12 \\
&\quad \boxed{x_1 \le 6} \\
&\quad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

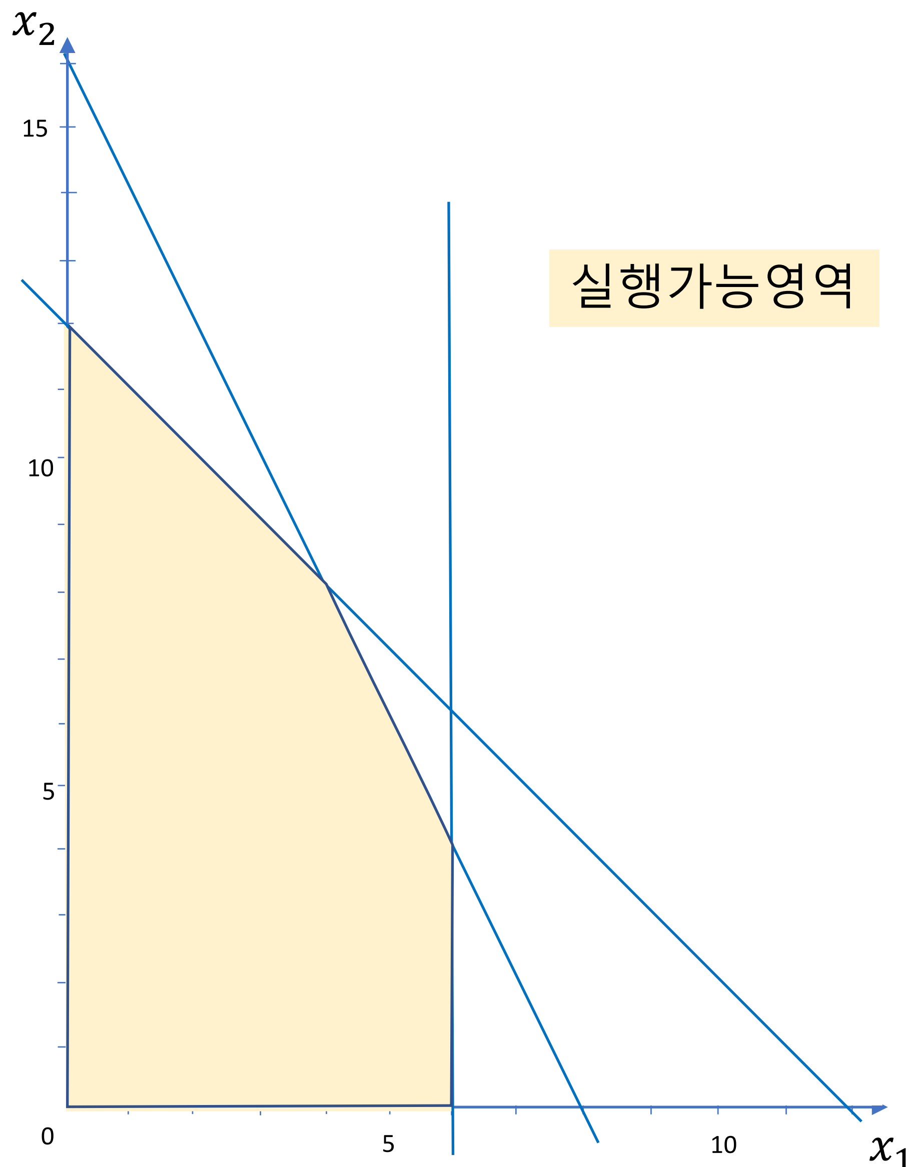


❖ 도해법의 절차(2단계)

$$Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2$$

$s.t.$

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ x_2 &\le 16 \\ x_1 + \ x_2 &\le 12 \\ \boxed{x_1 \qquad\qquad \le \ 6} & \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

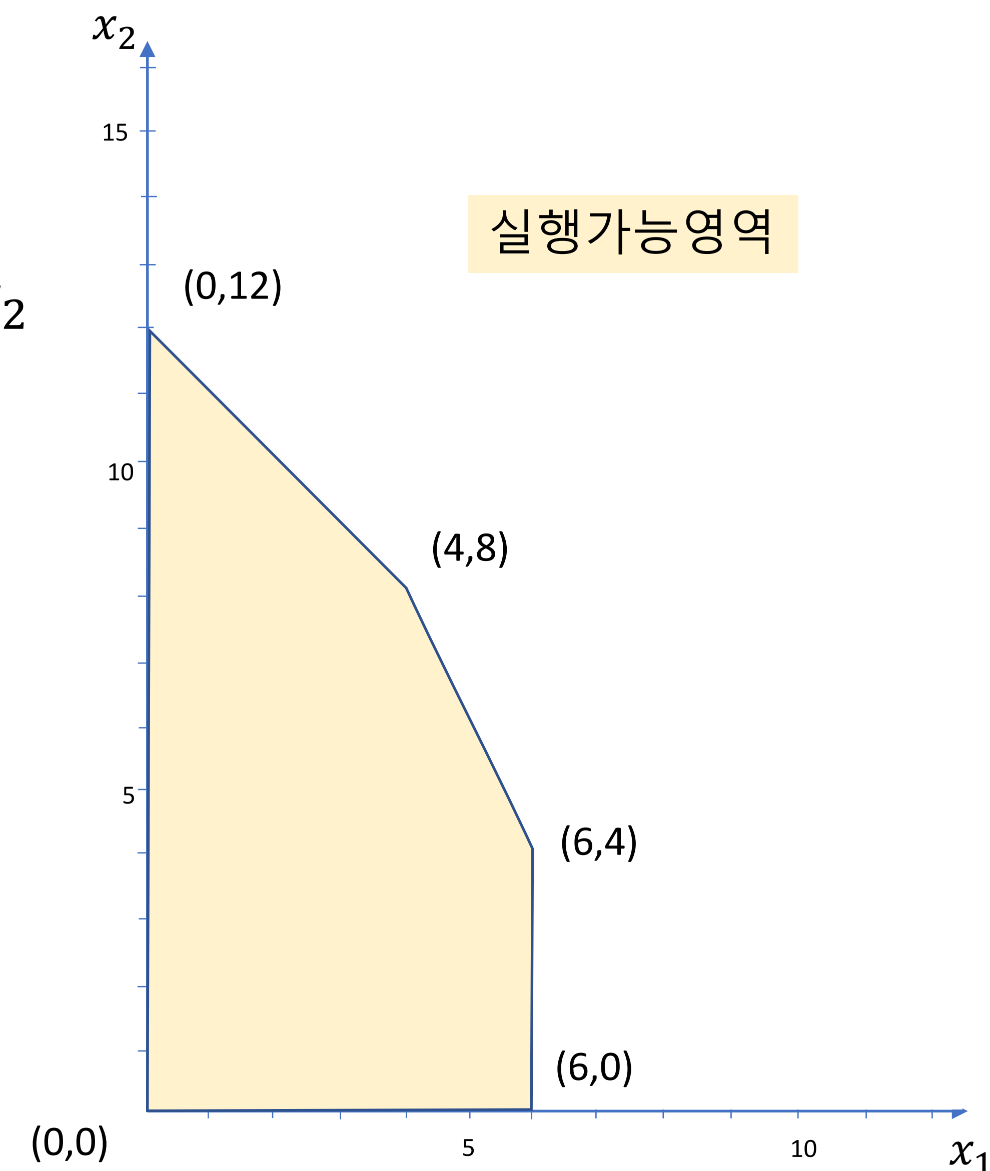


2.3 선형계획문제의 도해법

❖ 도해법의 절차(2단계)

$$Max \;\; 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2$$
$$s.t.$$

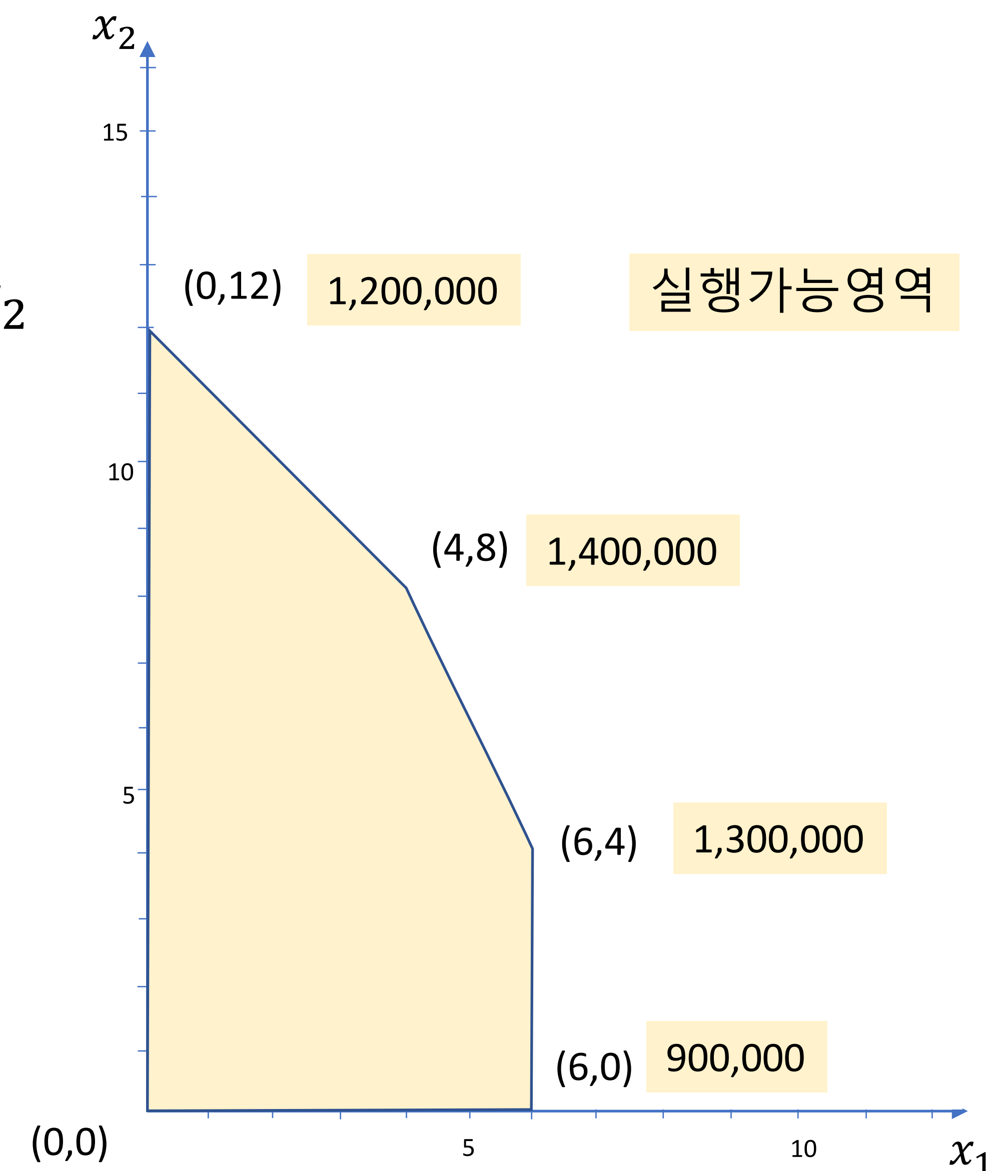
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 16 \\ x_1 + x_2 &\le 12 \\ x_1 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$



2.3 선형계획문제의 도해법

❖ 도해법의 절차(2단계)

$$Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2$$
$$s.t.$$
$$\begin{aligned} 2x_1 + \ x_2 &\le 16 \\ x_1 + \ x_2 &\le 12 \\ x_1 \qquad &\le \ 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

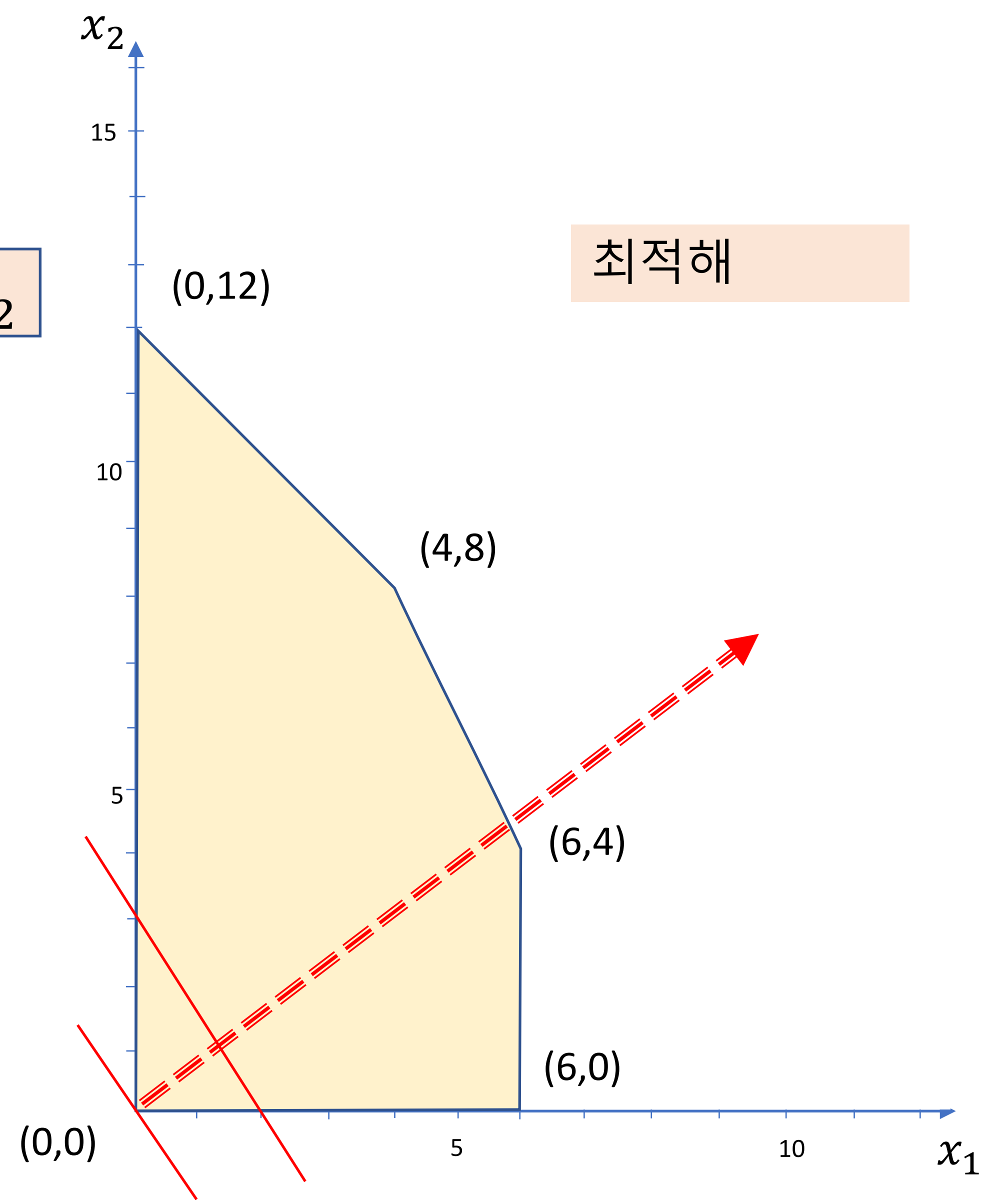


❖ 도해법의 절차(3단계)

$$Max\ \boxed{150{,}000x_1 + 100{,}000x_2}$$

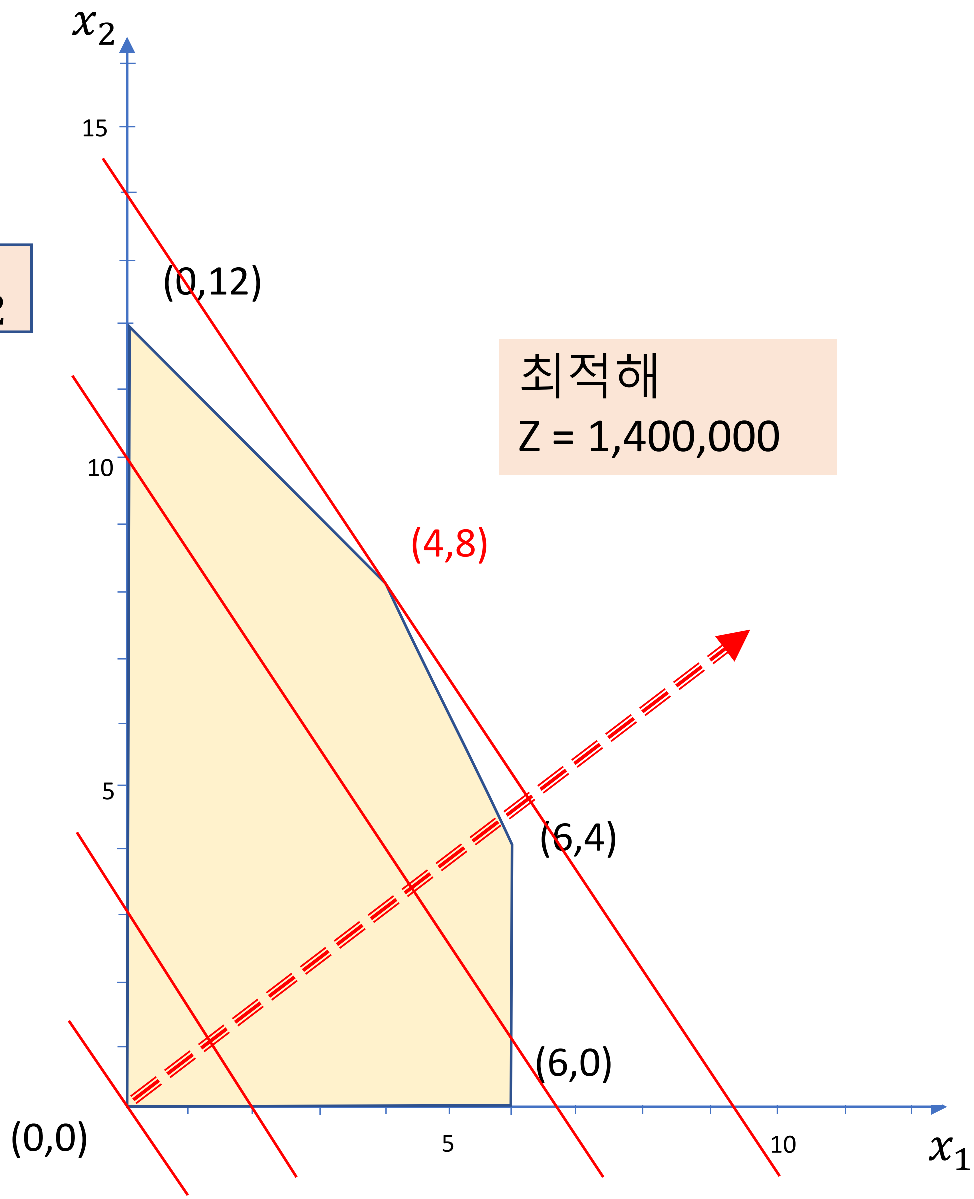
$s.t.$

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\leq 16 \\
x_1 + x_2 &\leq 12 \\
x_1 \qquad &\leq 6 \\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$



❖ 도해법의 절차(3단계)

$$Max\ \boxed{150{,}000x_1 + 100{,}000x_2}$$
$$s.t.$$
$$2x_1 + x_2 \le 16$$
$$x_1 + x_2 \le 12$$
$$x_1 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

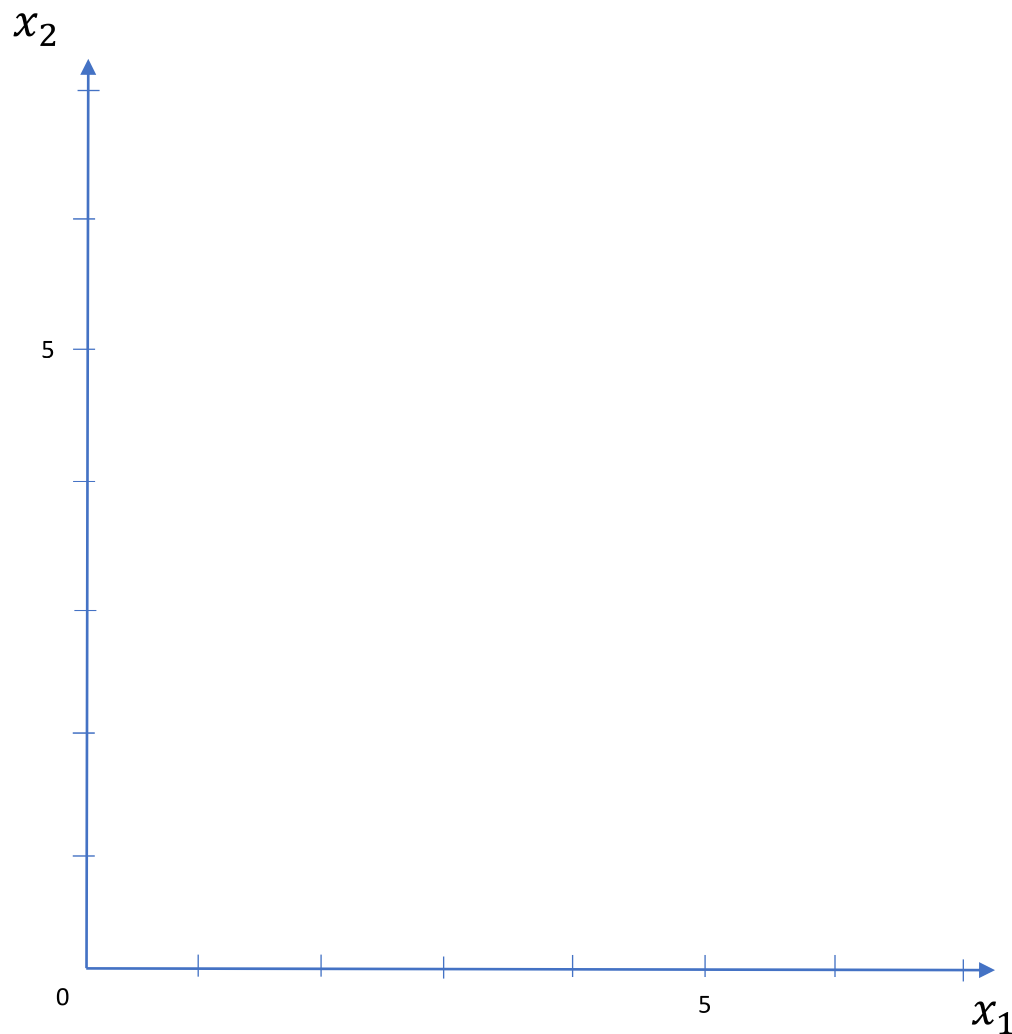


2.3 선형계획문제의 도해법

❖ 최소화문제

$$Min \;\; 100x_1 + 100x_2$$
$$s.t.$$
$$20x_1 + 40x_2 \geq 140$$
$$30x_1 + 20x_2 \geq 120$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



2.3 선형계획문제의 도해법

❖ 최소화문제

$$Min\ \ 100x_1 + 100x_2$$

$$s.t.$$

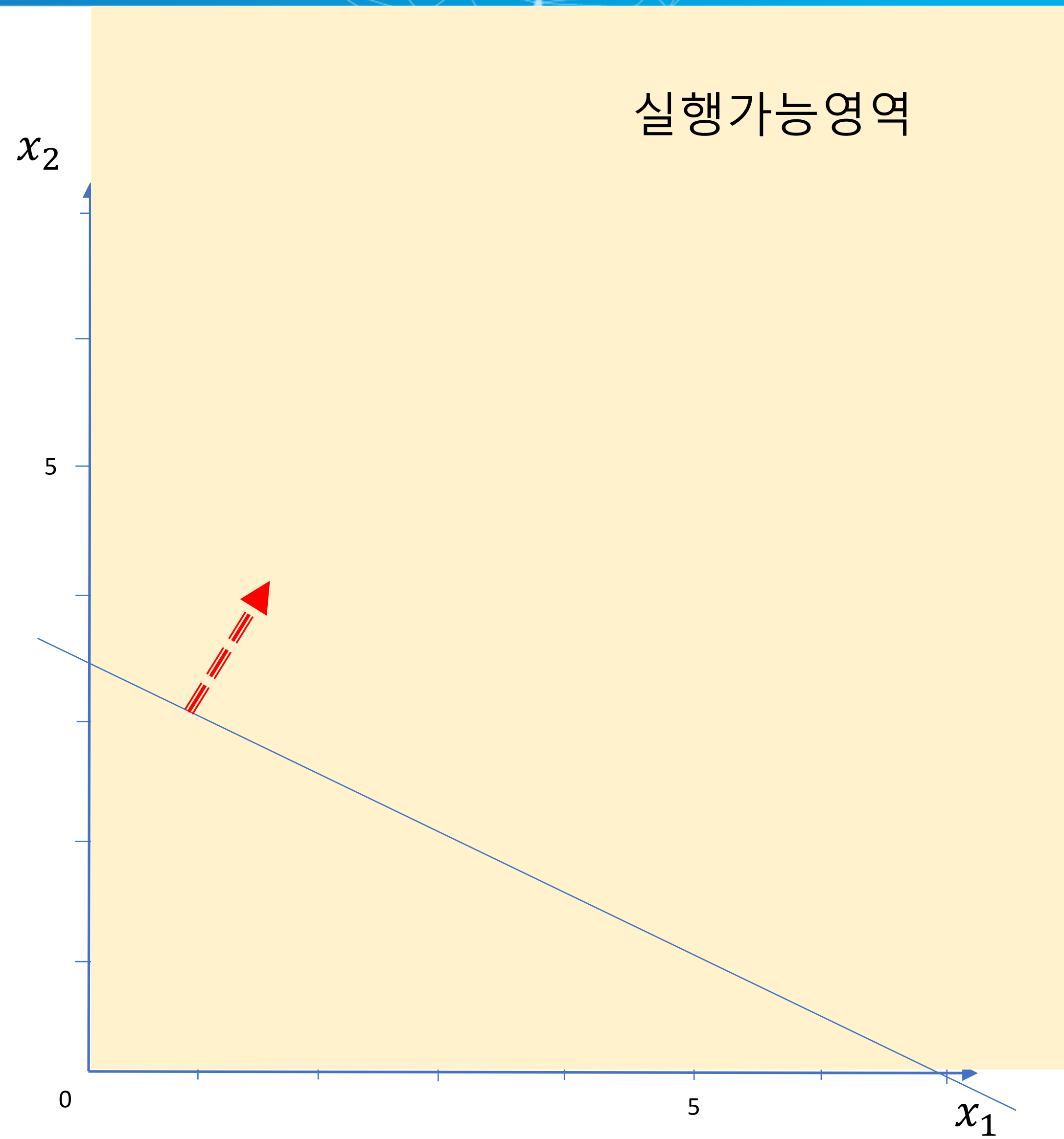
$$20x_1 + 40x_2 \geq 140$$

$$30x_1 + 20x_2 \geq 120$$

$$\boxed{x_1, x_2 \geq 0}$$

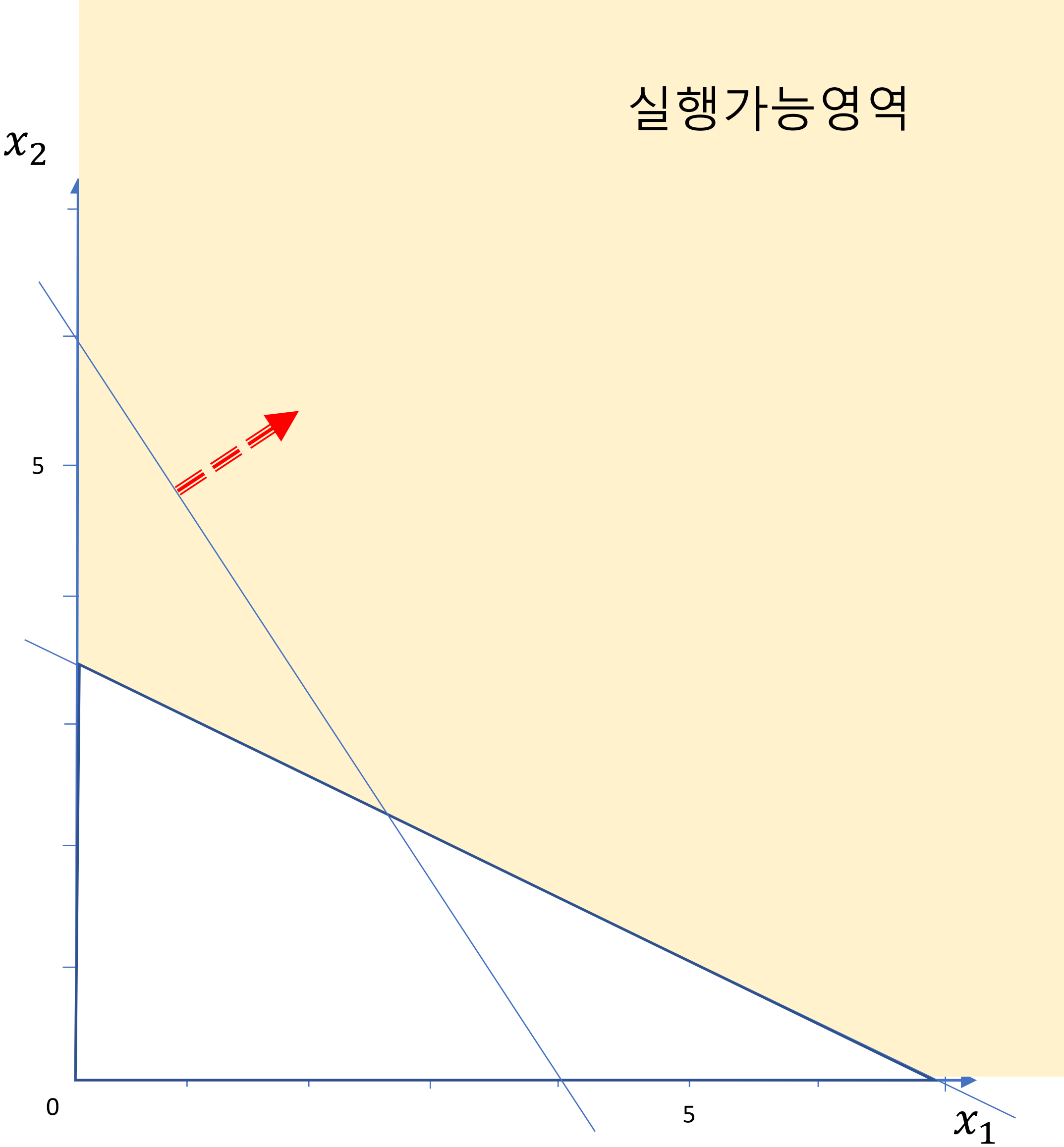
❖ 최소화문제

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ 100x_1 + 100x_2\\
&s.t.\\
&\qquad \boxed{20x_1 + 40x_2 \geq 140}\\
&\qquad 30x_1 + 20x_2 \geq 120\\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



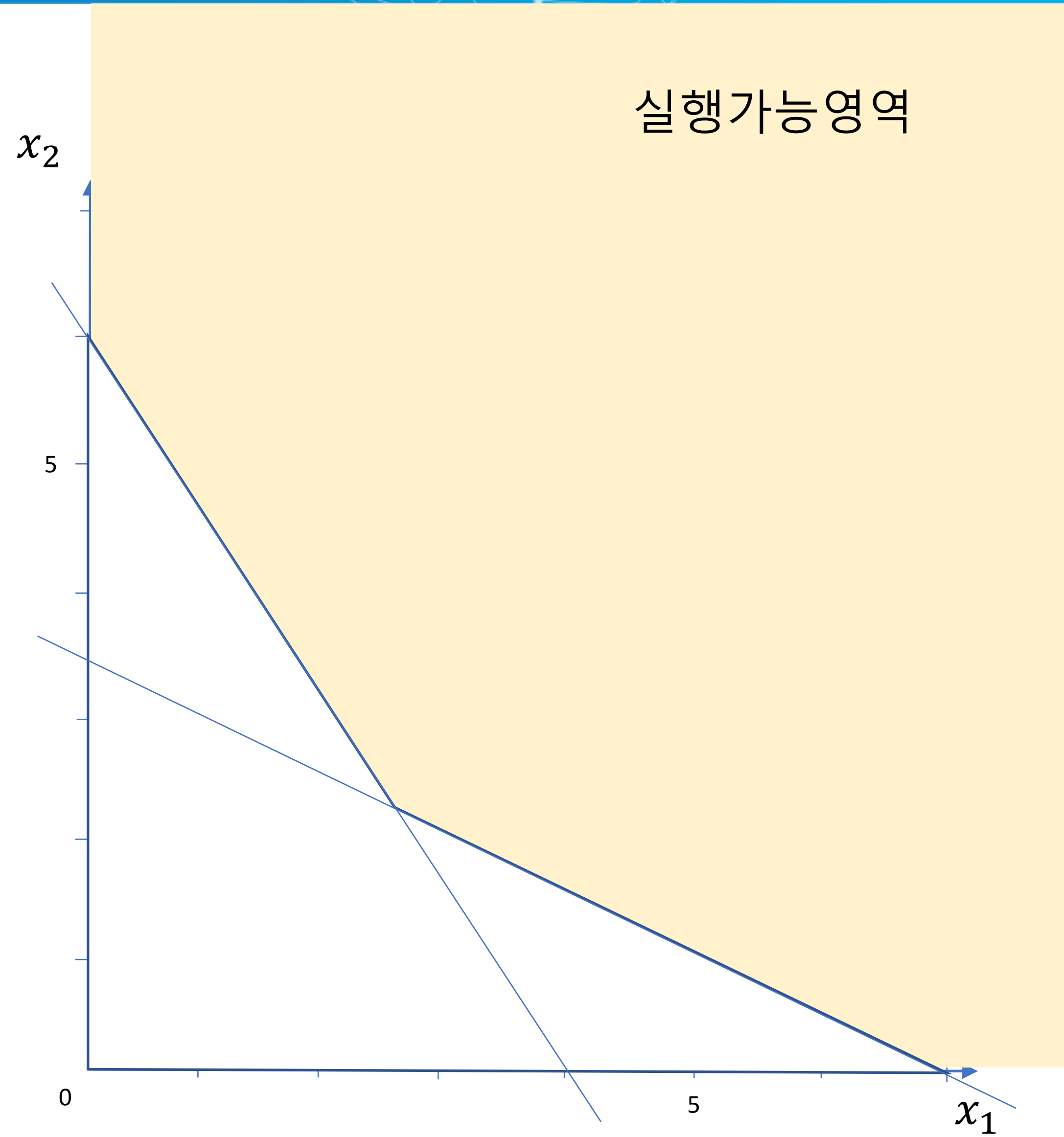
❖ 최소화문제

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ 100x_1 + 100x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 20x_1 + 40x_2 \geq 140 \\
&\qquad \boxed{30x_1 + 20x_2 \geq 120} \\
&\qquad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



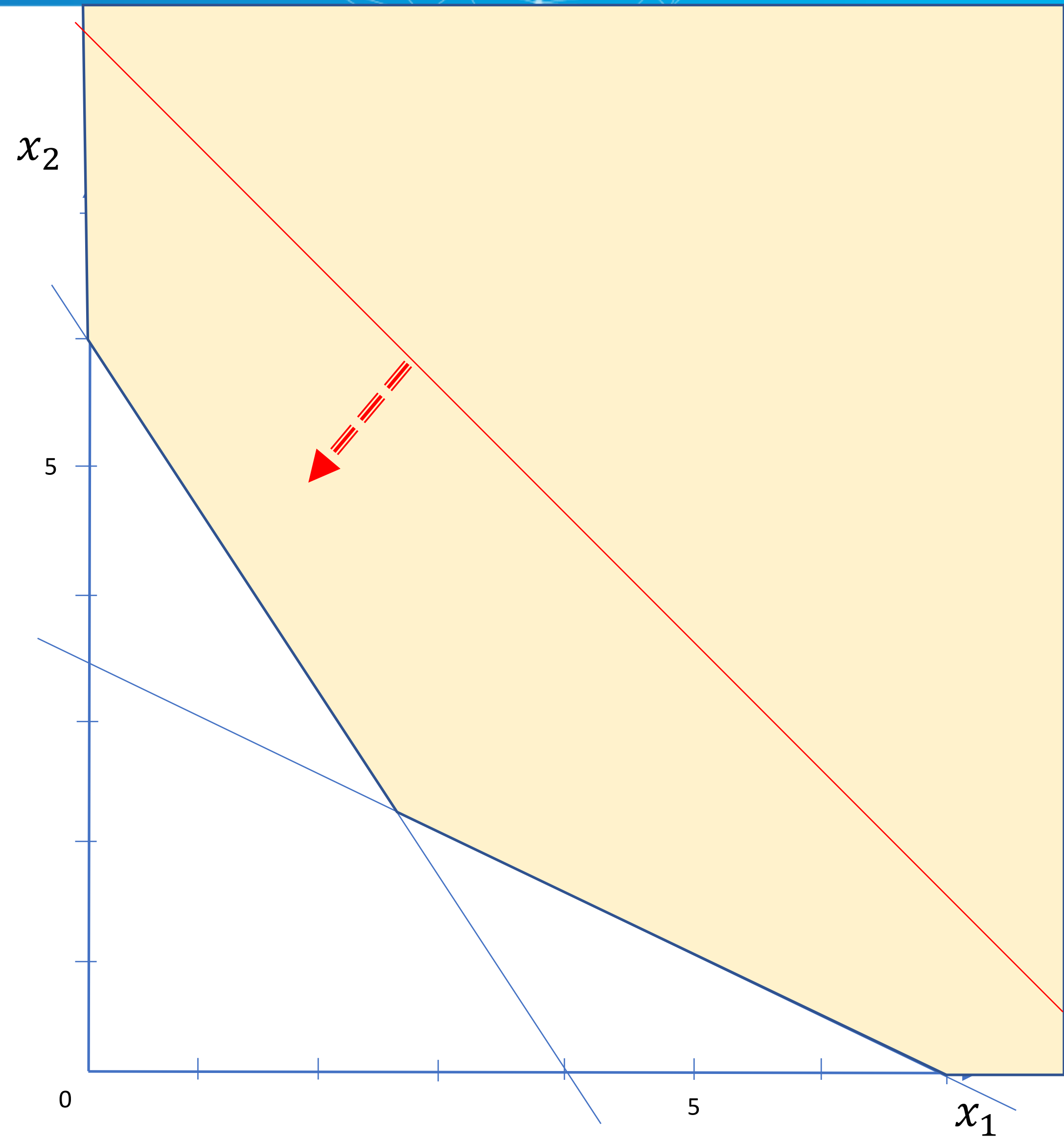
❖ 최소화문제

$$Min\ \ 100x_1 + 100x_2$$
$$s.t.$$
$$20x_1 + 40x_2 \geq 140$$
$$30x_1 + 20x_2 \geq 120$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



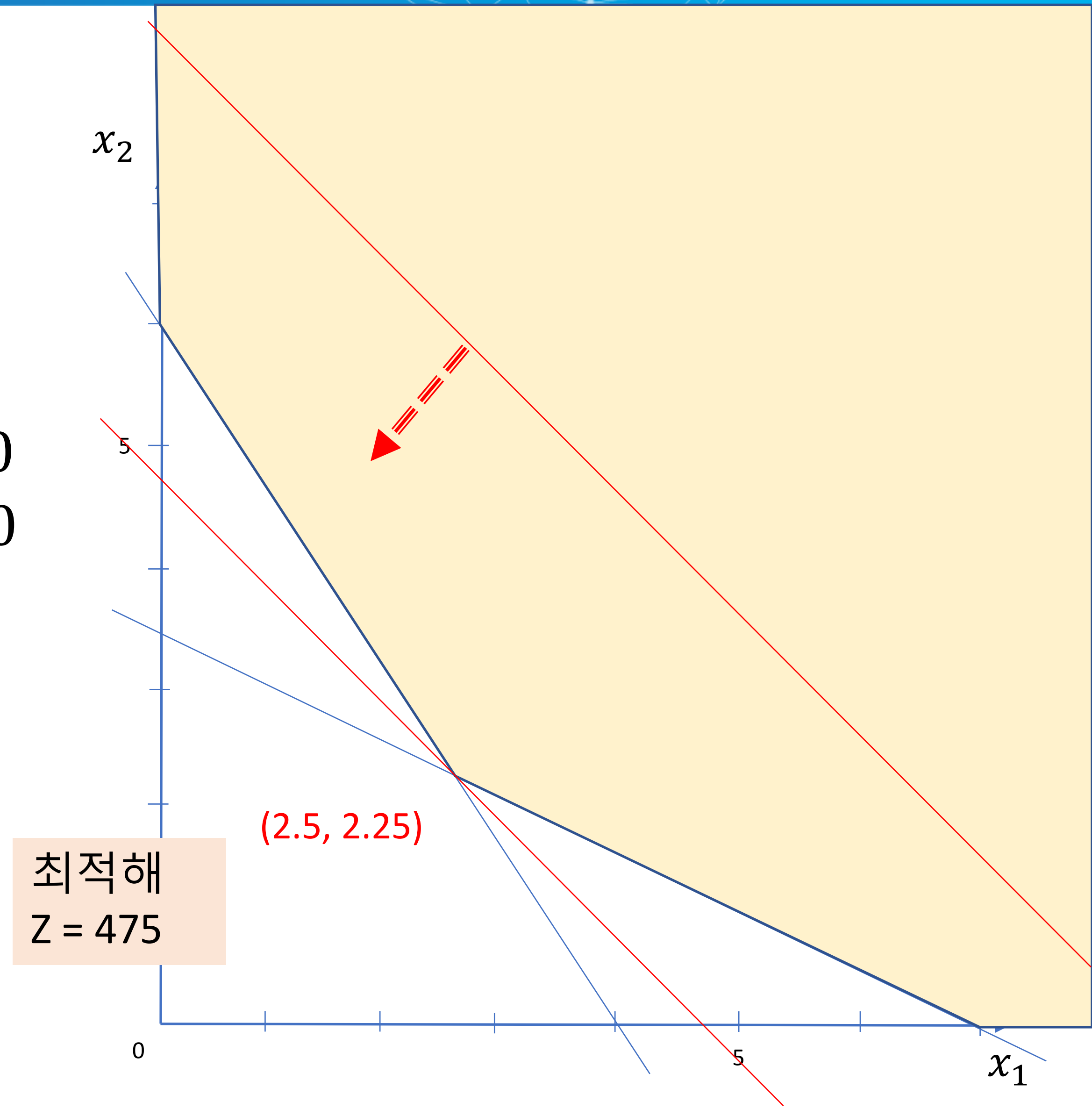
❖ 최소화문제

$$\begin{aligned} &Min\ \boxed{100x_1 + 100x_2} \\ &s.t. \\ &\qquad 20x_1 + 40x_2 \geq 140 \\ &\qquad 30x_1 + 20x_2 \geq 120 \\ &\qquad x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



❖ 최소화문제

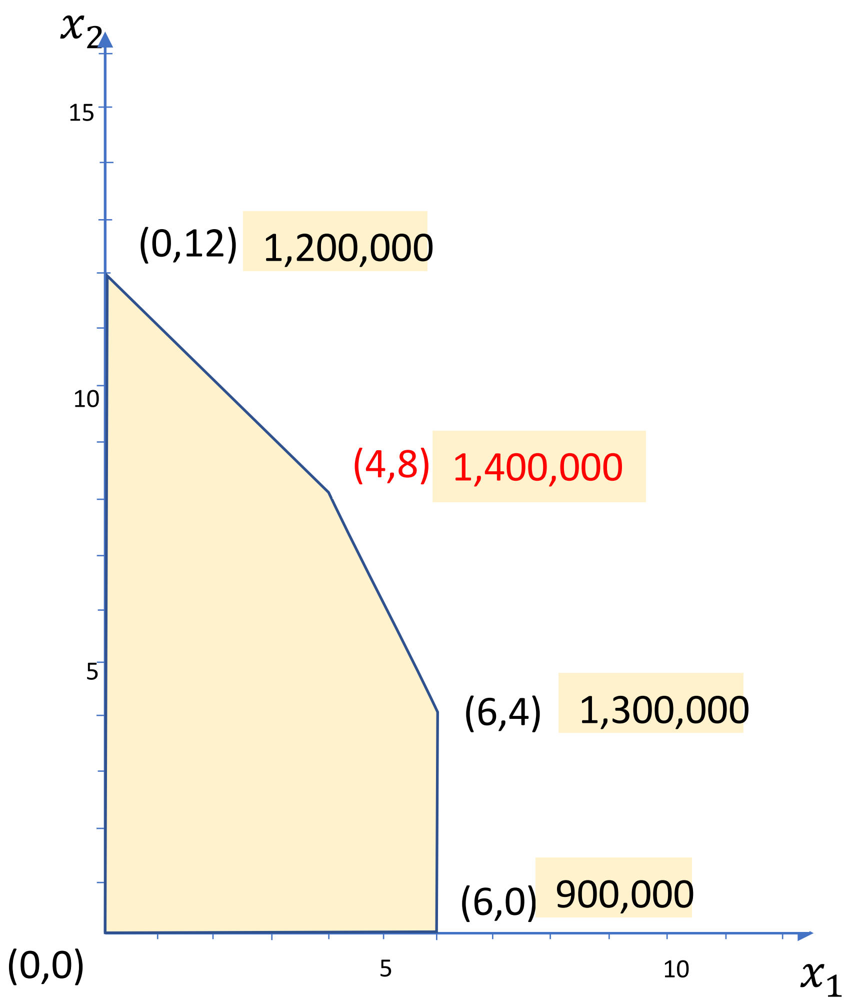
$$Min\ \ 100x_1 + 100x_2$$
$$s.t.$$
$$20x_1 + 40x_2 \geq 140$$
$$30x_1 + 20x_2 \geq 120$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

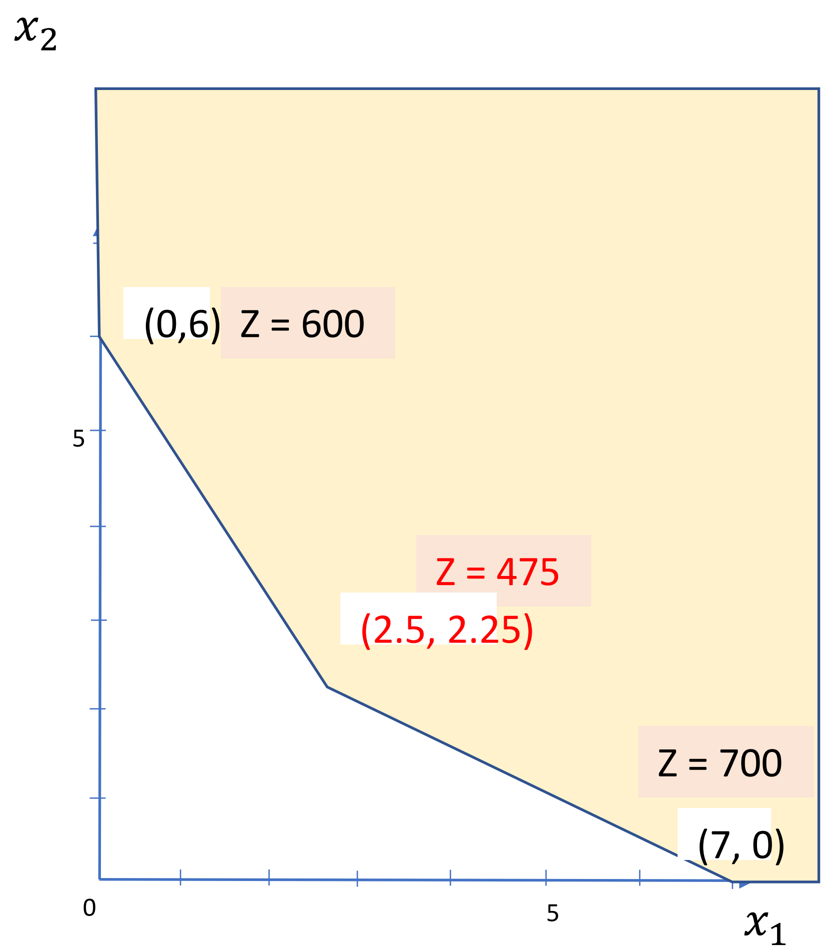


2.3 선형계획문제의 도해법

❖ 도해법의 시사점

최적해가 존재한다면 실행가능영역의 정점에 존재한다

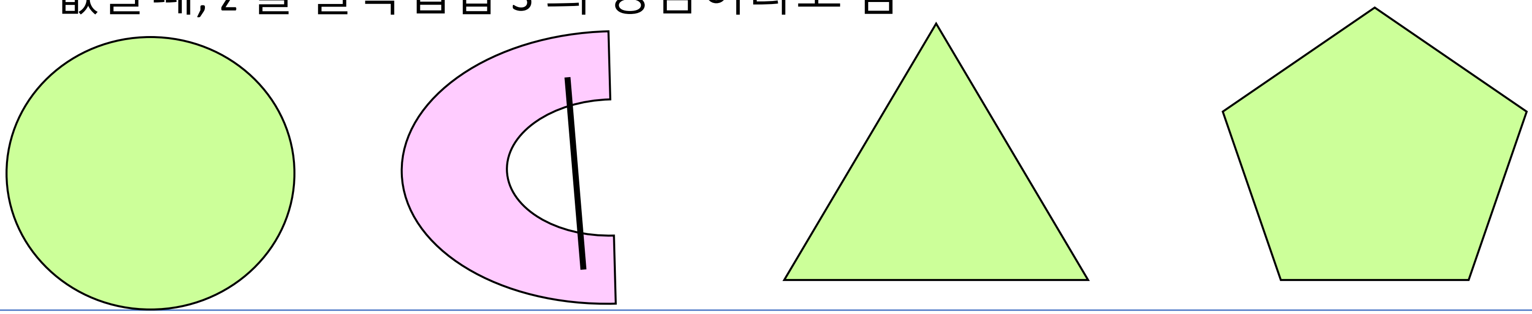




2.3 선형계획문제의 도해법

❖ 볼록집합과 정점

- 선형계획모형의 실행가능영역은 볼록집합
- 볼록집합(Convex Set)
  - ✓ 집합 s 내의 임의의 두 점 **x**, **y** 이 있을때, 두 점의 선형결합으로 나타나는 점이 집합 s 내의 점일때, 집합 s 를 볼록집합이라고 함
  - ✓ $0 \le \alpha \le 1$, α**x** + (1-α)**y**
- 정점(Extreme Point)
  - ✓ 집합 s 내의 한 점 z 가 s 내의 임의의 두 점 **x**, **y** 의 선형결합으로 나타낼 수 없을때, z 를 블록집합 s 의 정점이라고 함

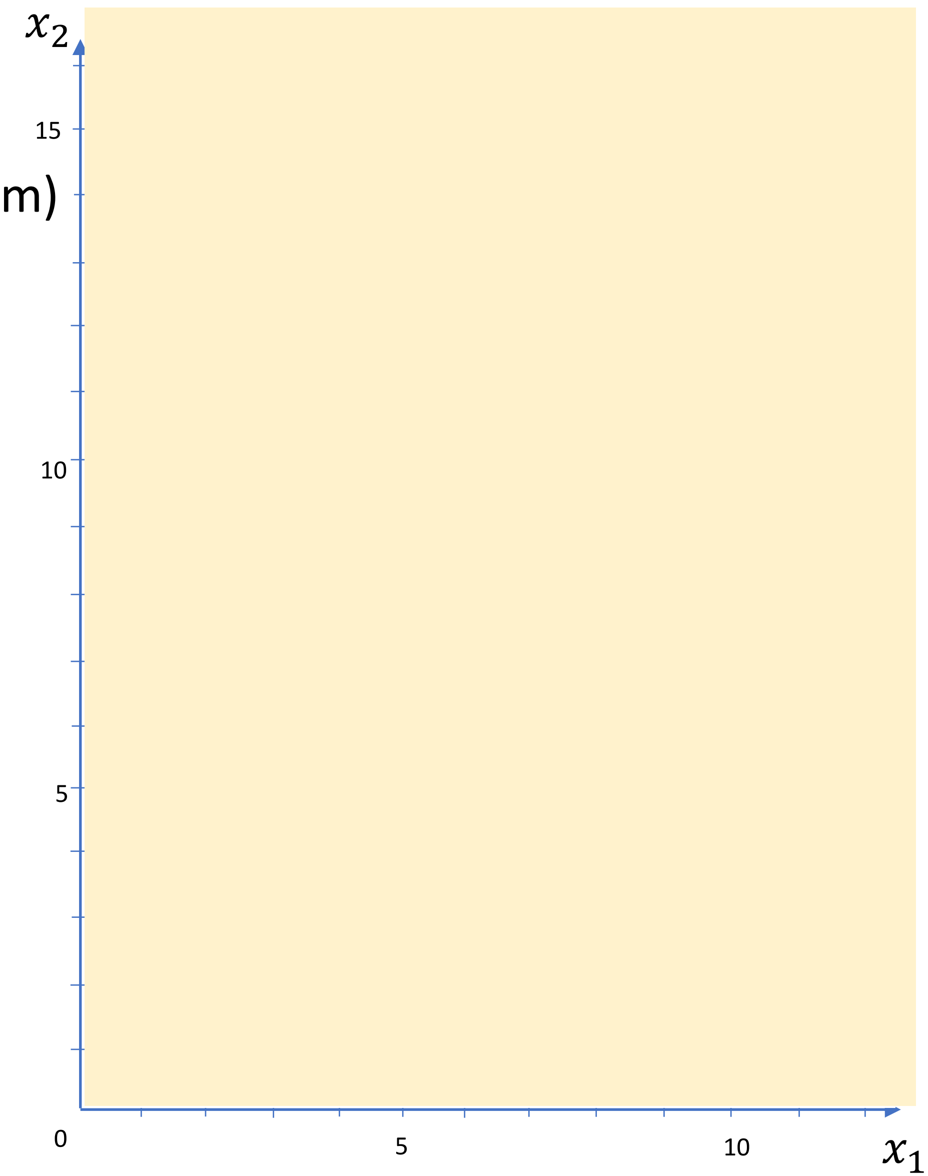


2.3 선형계획문제의 도해법

❖ 선형계획모형의 특별한 경우

- 실행불가능 문제(infeasible problem)

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 16 \\
&\qquad x_1 + x_2 \ge 12 \\
&\qquad x_1 \le 6 \\
&\qquad x_2 \le 7 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

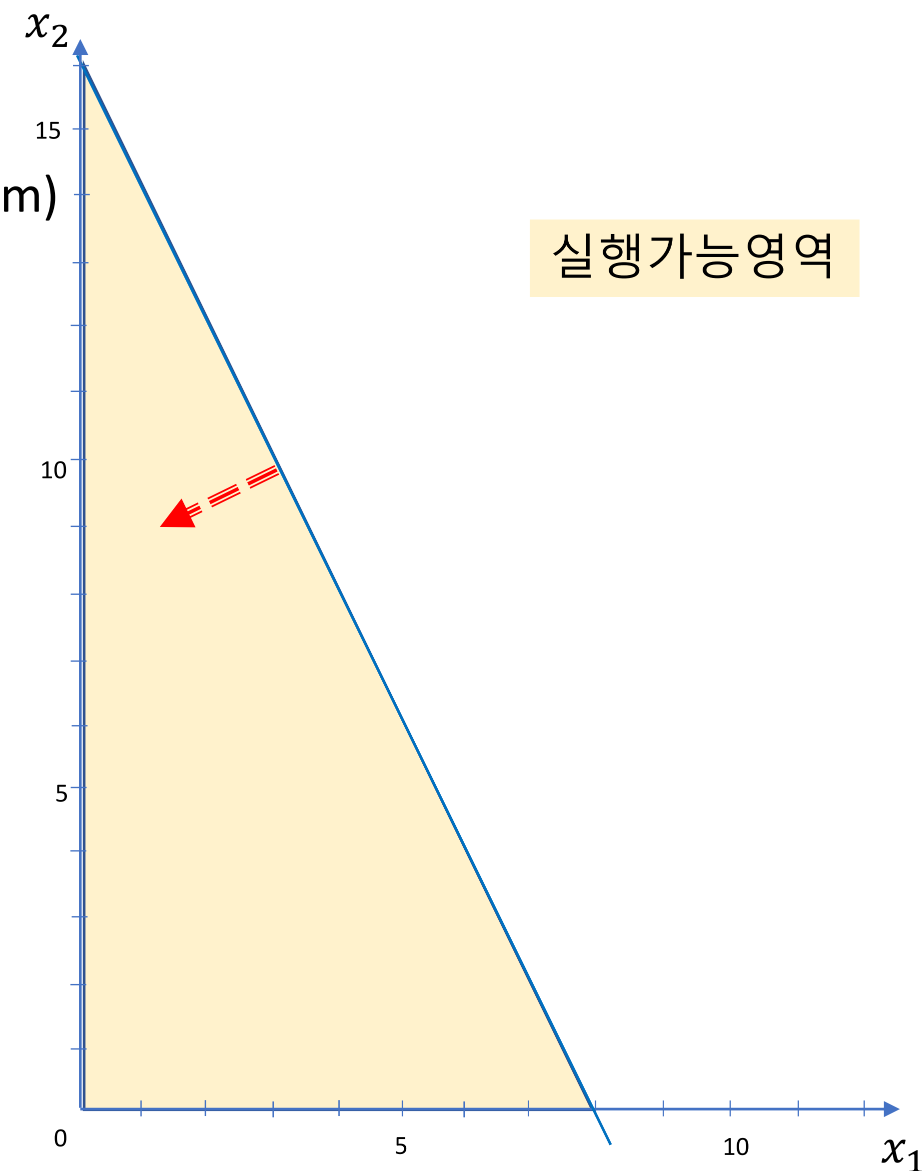


2.3 선형계획문제의 도해법

❖ 선형계획모형의 특별한 경우

➢ 실행불가능 문제(infeasible problem)

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 16 \\
&\qquad x_1 + x_2 \ge 12 \\
&\qquad x_1 \le 6 \\
&\qquad x_2 \le 7 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

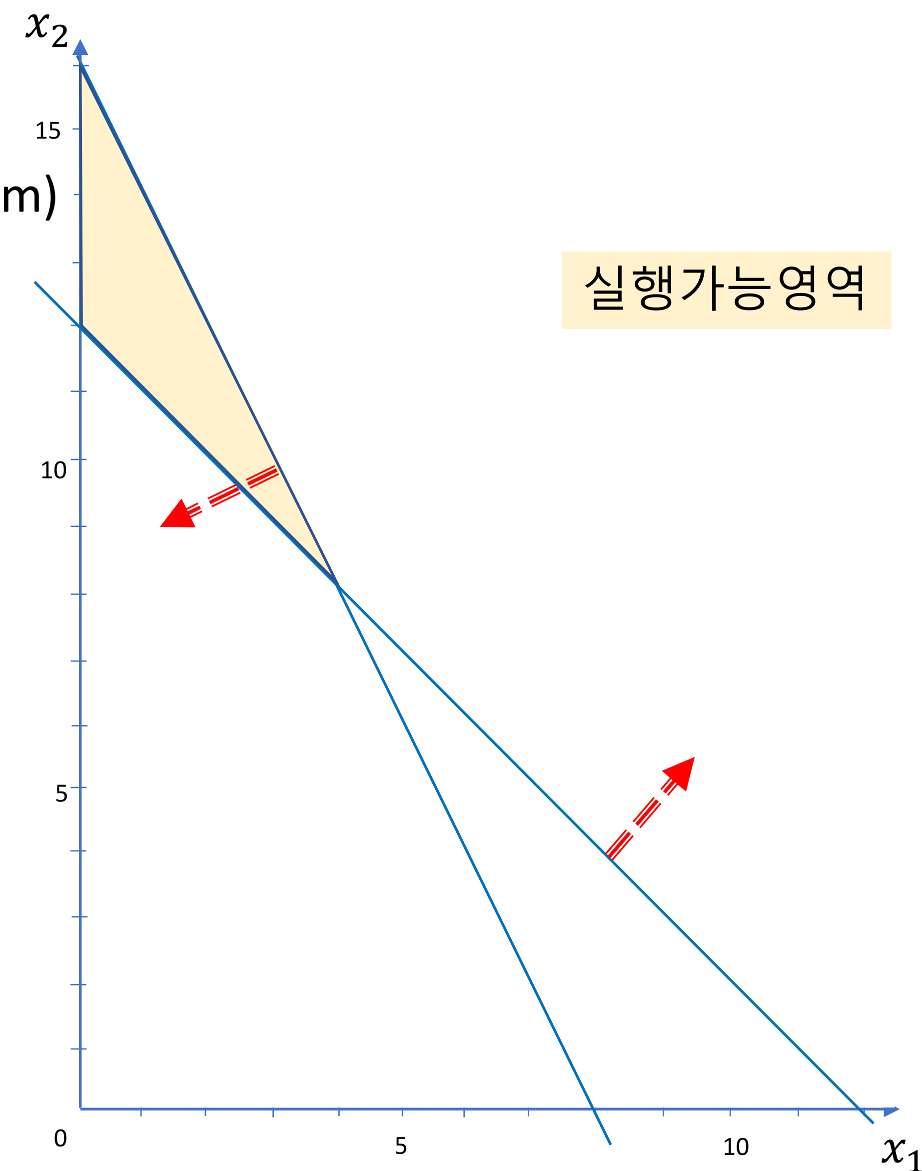


2.3 선형계획문제의 도해법

❖ 선형계획모형의 특별한 경우

➢ 실행불가능 문제(infeasible problem)

$$
\begin{aligned}
&Max \;\; 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 16 \\
&\qquad x_1 + x_2 \ge 12 \\
&\qquad x_1 \le 6 \\
&\qquad x_2 \le 7 \\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

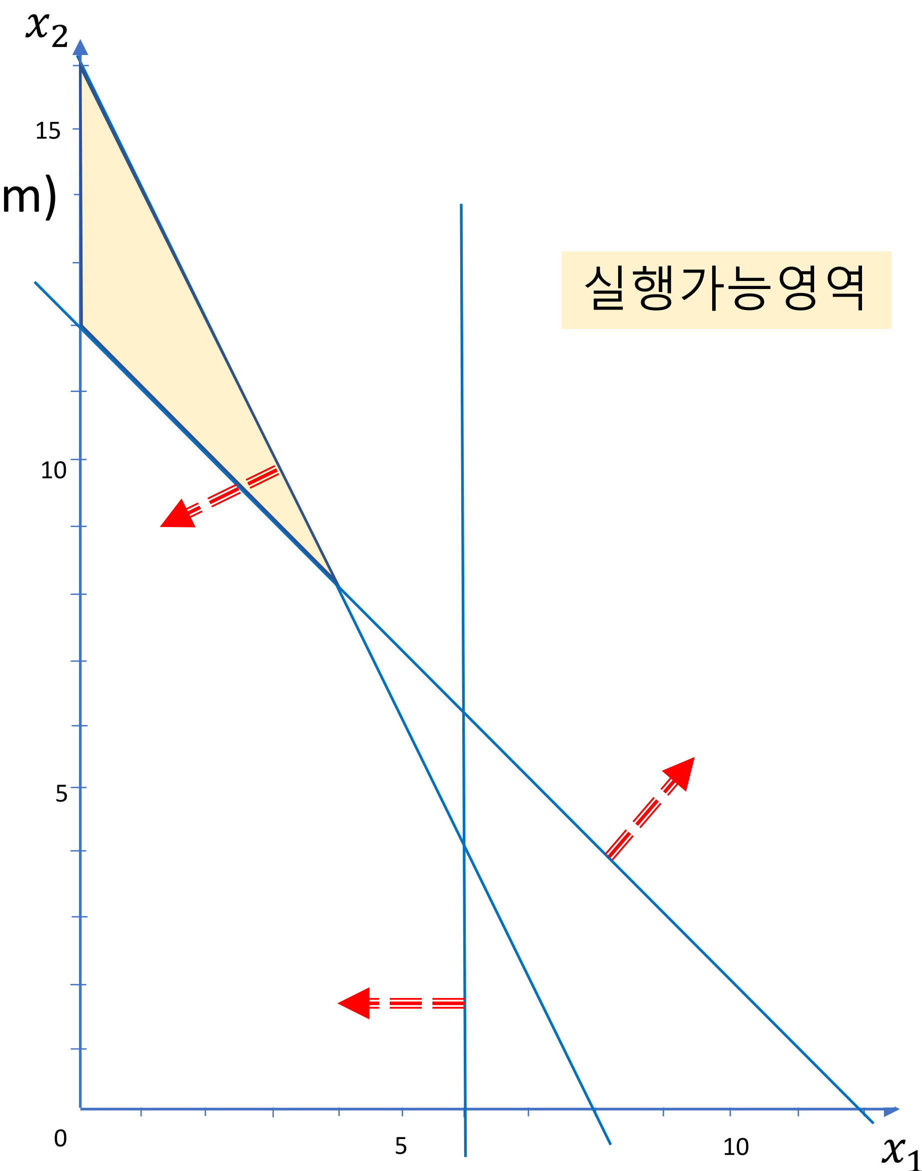


2.3 선형계획문제의 도해법

❖ 선형계획모형의 특별한 경우

➢ 실행불가능 문제(infeasible problem)

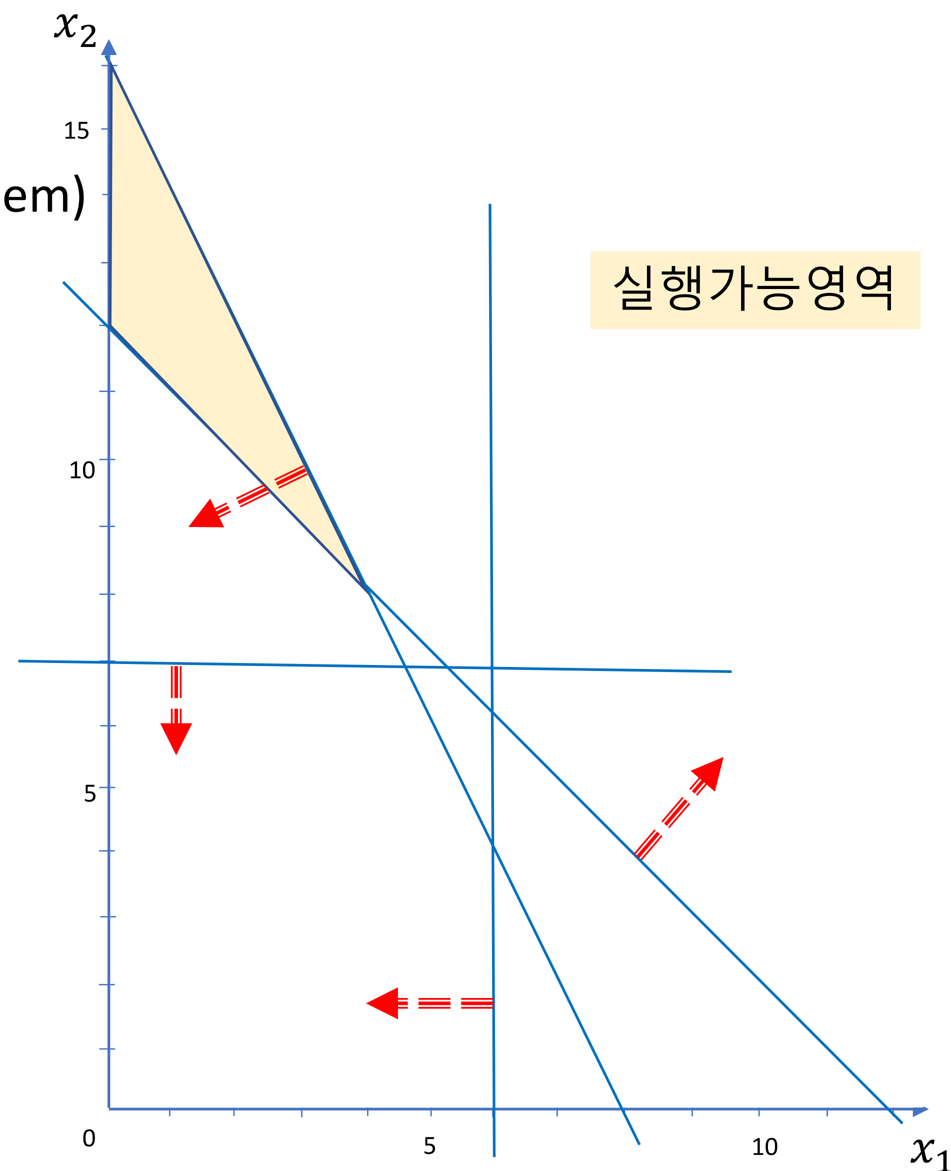
$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + \ x_2 \ \le 16 \\
&\qquad \ \ x_1 + \ x_2 \ \ge 12 \\
&\qquad \ \ x_1 \qquad\quad \le \ 6 \\
&\qquad\qquad\quad x_2 \le \ 7 \\
&\qquad \ \ x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



❖ 선형계획모형의 특별한 경우

➢ 실행불가능 문제(infeasible problem)

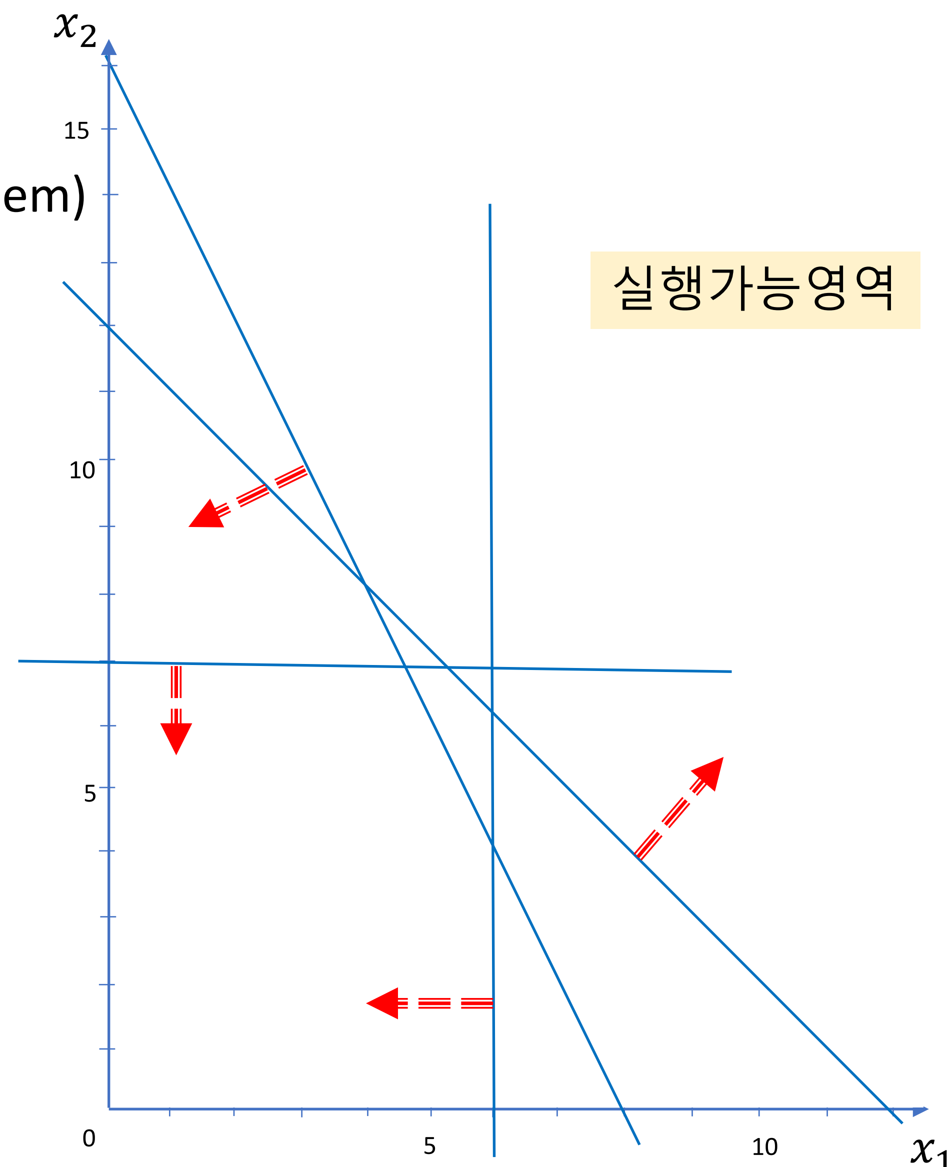
$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2\\
&s.t.\\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 16\\
&\qquad x_1 + x_2 \ge 12\\
&\qquad x_1 \le 6\\
&\qquad x_2 \le 7\\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



❖ 선형계획모형의 특별한 경우

➢ 실행불가능 문제(infeasible problem)

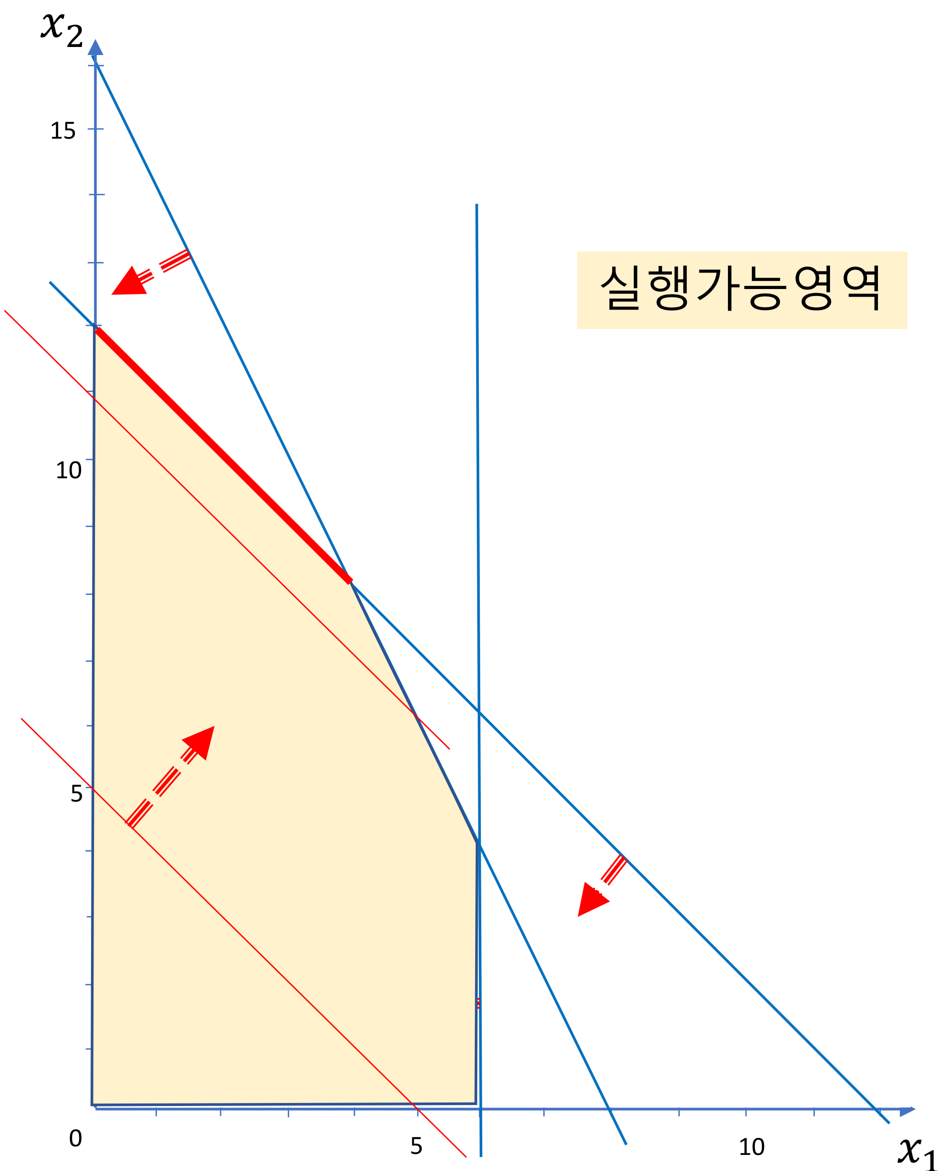
$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2\\
&s.t.\\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 16\\
&\qquad x_1 + x_2 \ge 12\\
&\qquad x_1 \le 6\\
&\qquad x_2 \le 7\\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



❖ 선형계획모형의 특별한 경우

➢ 다중 최적해

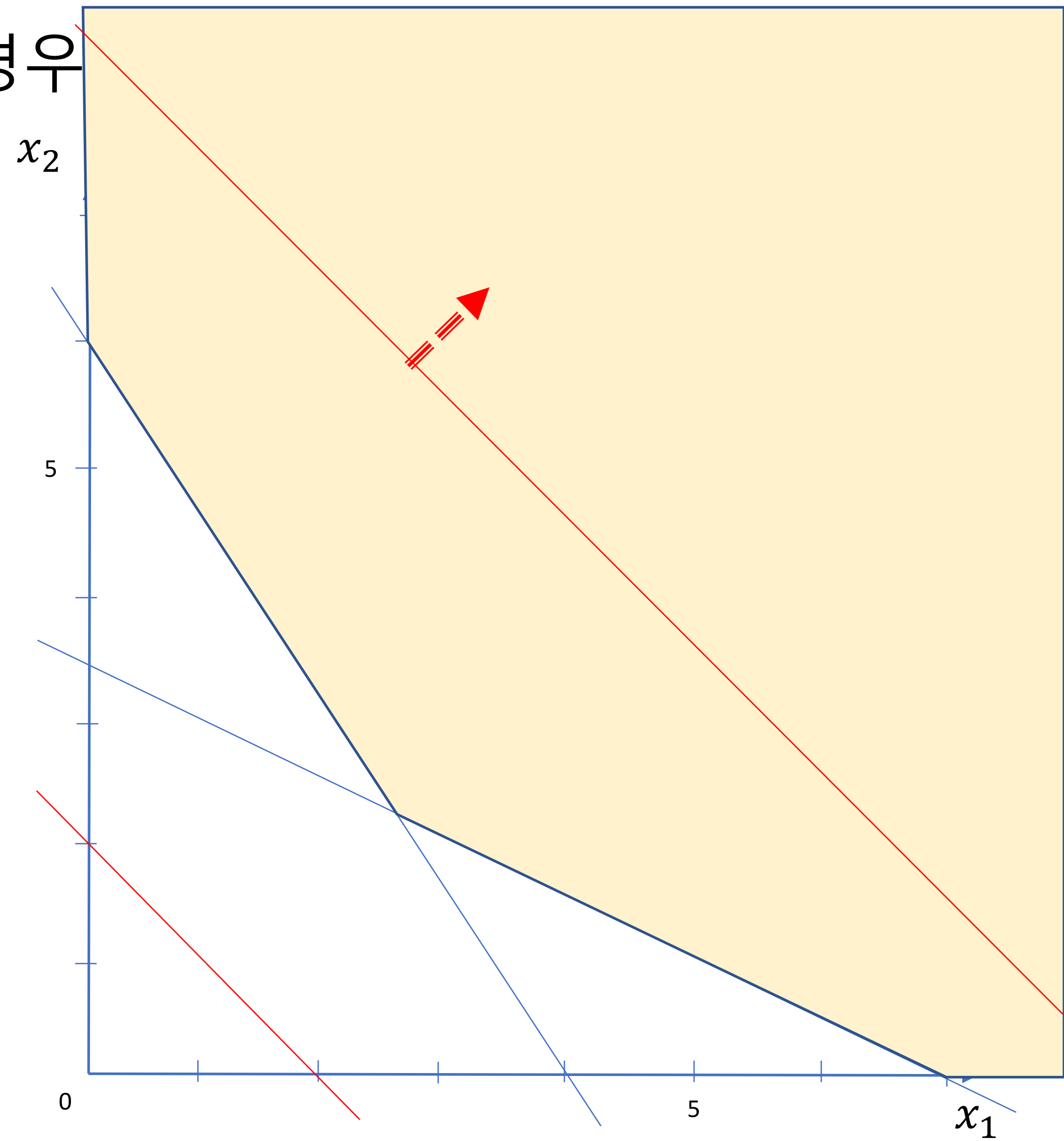
$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 100{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + \ x_2 \le 16 \\
&\qquad x_1 + \ x_2 \le 12 \\
&\qquad x_1 \qquad\quad \le \ 6 \\
&\qquad\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



❖ 선형계획모형의 특별한 경우

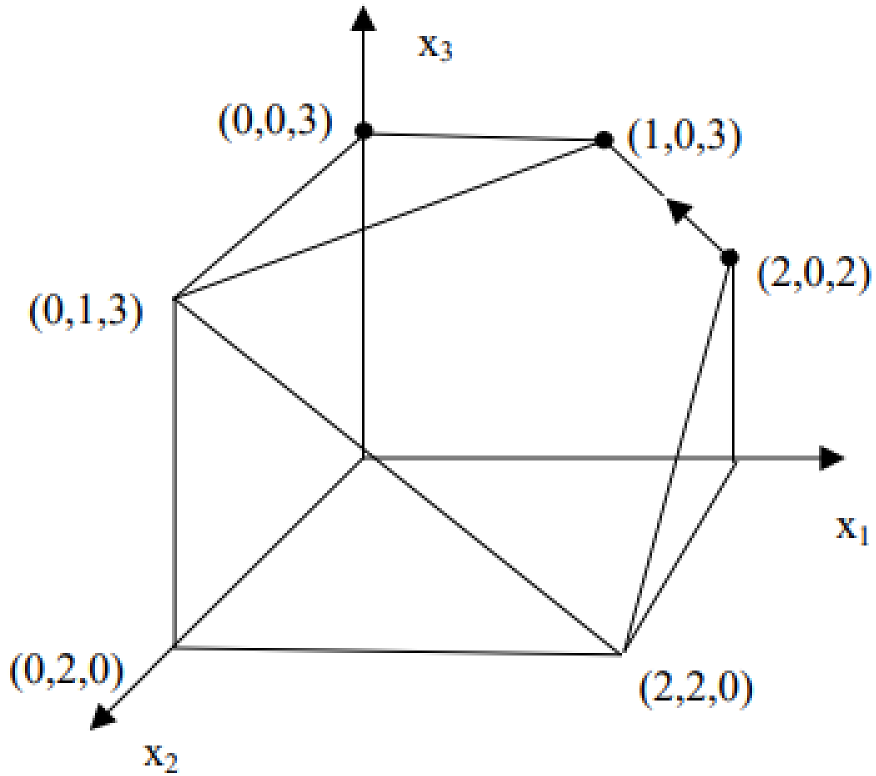
➢ 무한해

$$Max\ \ 150x_1 + 100x_2$$
$$s.t.$$
$$20x_1 + 40x_2 \geq 140$$
$$30x_1 + 20x_2 \geq 120$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



2.3 선형계획문제의 도해법

❖ 선형계획모형(3차원)



2.4 선형계획문제의 민감도분석

❖ 민감도 분석(Sensitivity Analysis, What-if Analysis)

- 의사결정 환경의 변화가 선형계획모형과 최적해, 목적함수 등에 미치는 영향을 분석
  - ✓ 계수 추정치와 매개변수의 정보 제공
  - ✓ 의사결정분석 후, 상황이 바뀌면 모형을 다시 세웠을 때 계수의 변화가 최적해를 변화시키는지 알아 봄
  - ✓ 경영정책과 직결되는 환경적 모수들이 변할 때 효과를 측정 함

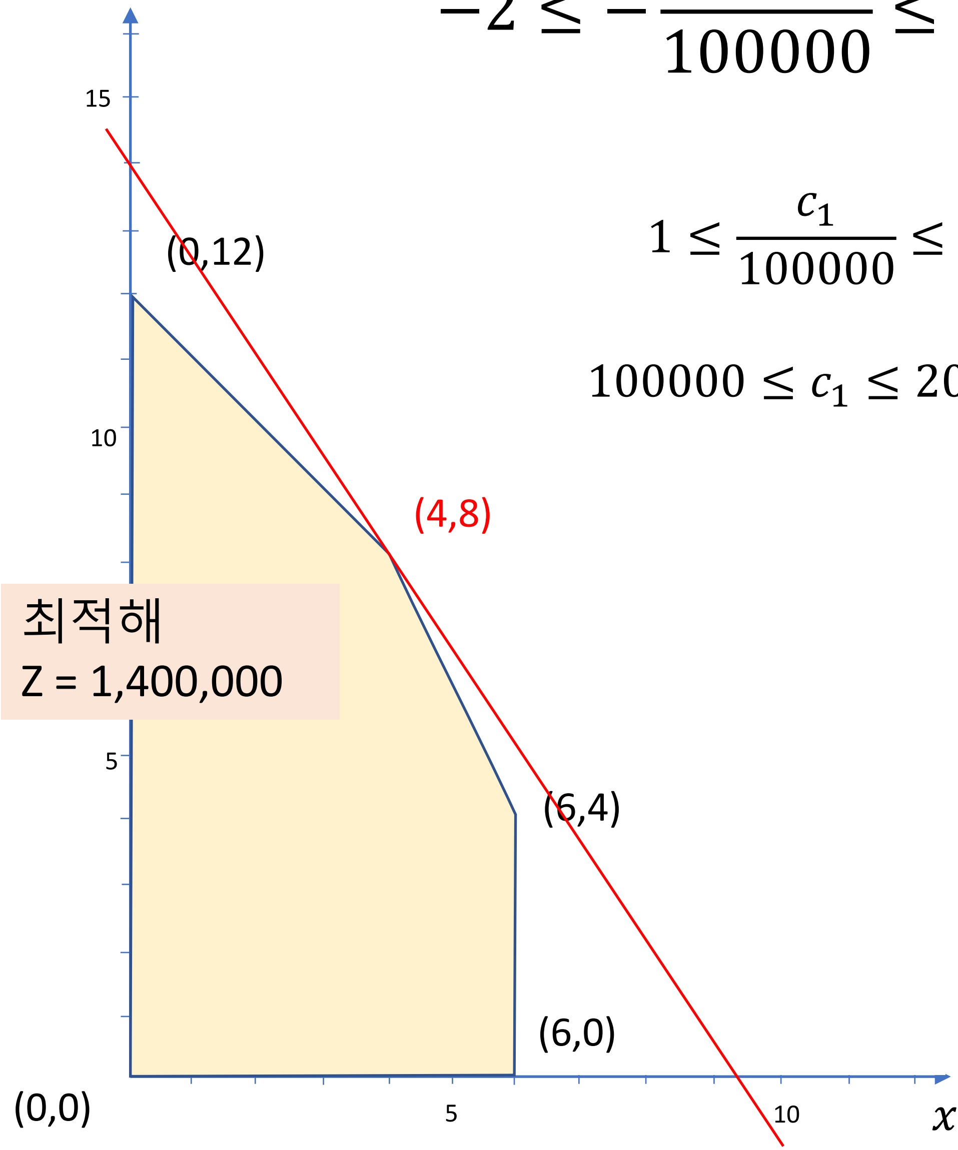
❖ 민감도 분석(Sensitivity Analysis, What-if Analysis)

- 목적함수의 변화
  - ✓ 목적함수식을 구성하는 의사결정변수 중 하나의 계수가 부정확하거나 다른 값을 갖게 되면 우리가 내린 의사결정이 어떠한 영향을 받게 되는가?
  - ✓ 목적함수식을 구성하는 의사결정변수 중 여러 개의 계수가 부정확하거나 다른 값을 갖게 되면 우리가 내린 의사결정이 어떠한 영향을 받게 되는가?
- 자원가용량의 변화
  - ✓ 쓸 수 있거나 획득할 수 있는 자원의 가용량 중에 하나가 변화하면 우리가 내린 의사 결정이 어떠한 영향을 받게 되는가?
  - ✓ 쓸 수 있거나 획득할 수 있는 자원의 가용량 들이 여러 개 변화하면 우리가 내린 의사결정이 어떠한 영향을 받게 되는가?

❖ 민감도 분석

➢ 목적함수의 변화

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad c_1 \qquad\qquad\qquad c_2 \\ Max\ \boxed{150{,}000x_1 + 100{,}000x_2} \\ s.t. \\ \qquad 2x_1 + x_2 \le 16 \\ \qquad x_1 + x_2 \le 12 \\ \qquad x_1 \qquad \le 6 \\ \qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{array}$$



최적해

Z = 1,400,000

$$-2 \le -\frac{c_1}{100000} \le -1$$

$$1 \le \frac{c_1}{100000} \le 2$$

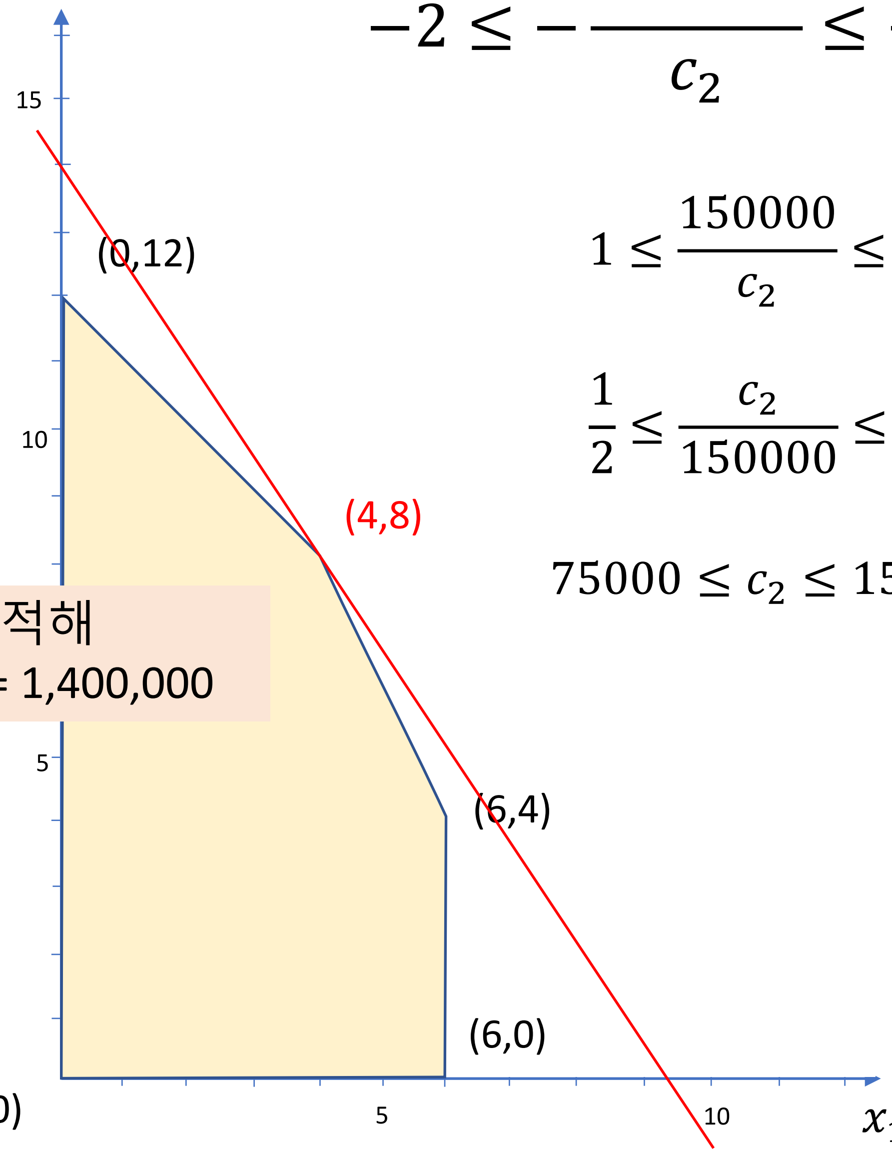
$$100000 \le c_1 \le 200000$$

❖ 민감도 분석

➢ 목적함수의 변화

$$\qquad\quad c_1 \qquad\qquad\qquad c_2$$

$$\begin{aligned} Max\ & \boxed{150{,}000x_1 + 100{,}000x_2} \\ s.t.\ & \\ & 2x_1 + x_2 \le 16 \\ & x_1 + x_2 \le 12 \\ & x_1 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$



최적해

Z = 1,400,000

$$-2 \le -\frac{150000}{c_2} \le -1$$

$$1 \le \frac{150000}{c_2} \le 2$$

$$\frac{1}{2} \le \frac{c_2}{150000} \le 1$$

$$75000 \le c_2 \le 150000$$

❖ 민감도 분석

➢ 목적함수의 변화

- ✓ 목적함수 계수들이 동시에 변할 때의 100% 법칙
- ✓ 만약 목적함수 계수들이 동시에 변하면 각 계수의 허용범위에서 허용가능한 변화(증가 또는 감소)와 각계수가 변한 변화량과의 대비 %를 구한다. 이렇게 구한 변화의 % 합을 모든 변수들에 대하여 더해서 100%를 넘지 않으면 원래의 최적해는 변하지 않는다(합이 100%를 초과하면 알 수 없다.)

$$
\begin{aligned}
& \qquad\quad c_1 \qquad\qquad\quad c_2 \\
Max\ & \boxed{150{,}000x_1 + 100{,}000x_2} \\
s.t.\ & \\
& 2x_1 + x_2 \le 16 \\
& x_1 + x_2 \le 12 \\
& x_1 \le 6 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$c_1: 150000 \gg 160000$$

$$100\left(\frac{(160000-150000)}{100000}\right) = 10\%$$

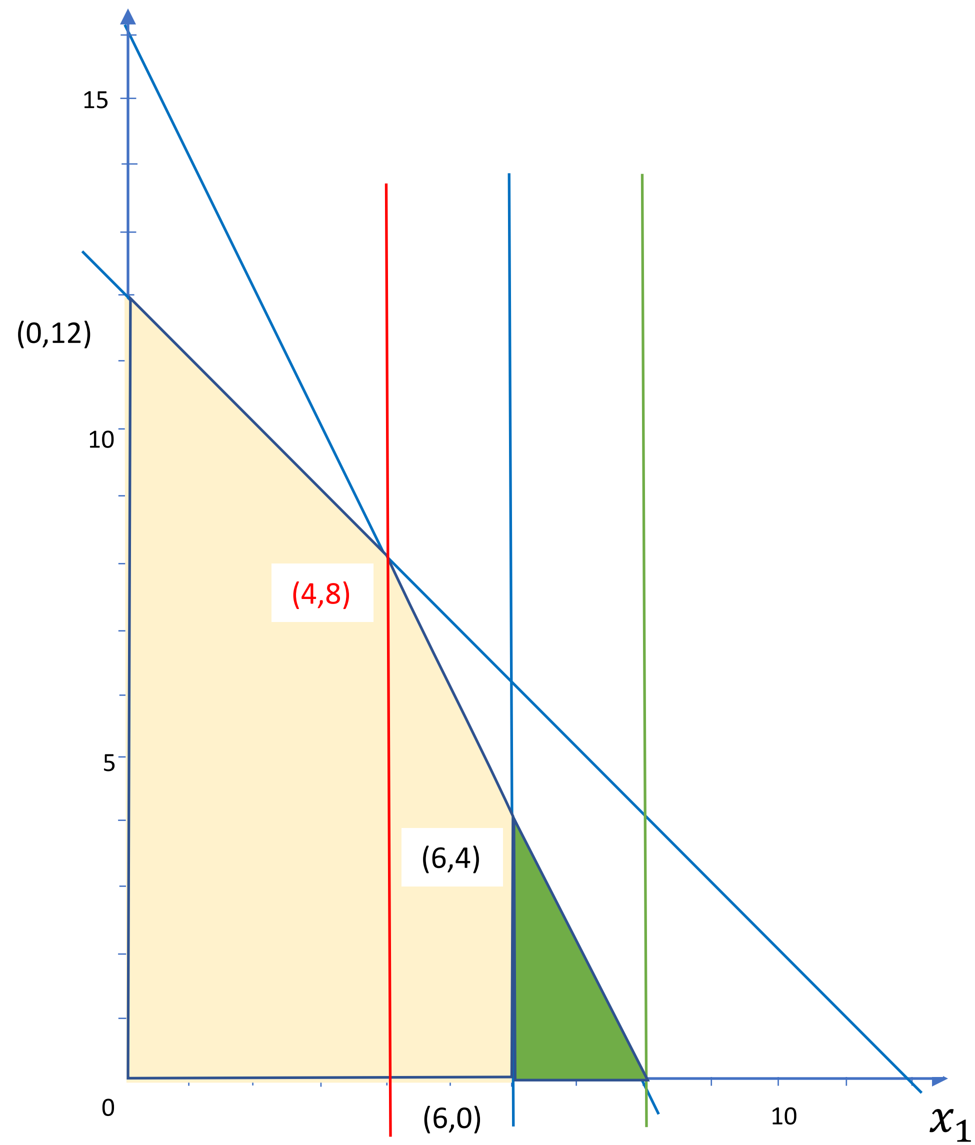
$$c_2: 100000 \gg 120000$$

$$100\left(\frac{(120000-100000)}{50000}\right) = 40\%$$

❖ 민감도 분석

➢ 가용자원의 변화

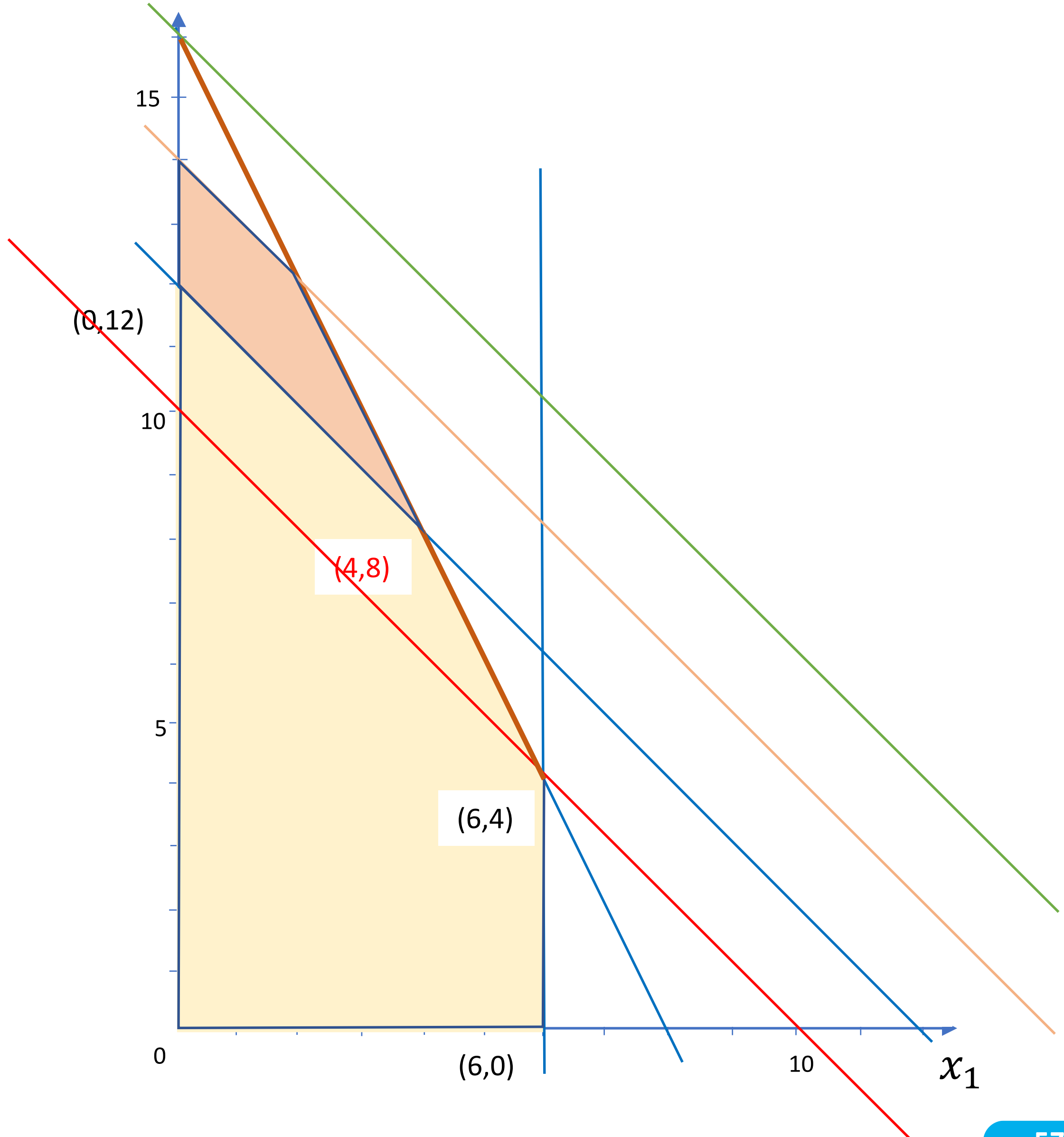
$$\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
&s.t. \\
&\qquad 2x_1 + \ \ x_2 \le \boxed{16} \\
&\qquad \ \ x_1 + \ \ x_2 \le \boxed{12} \\
&\qquad \ \ x_1 \qquad\quad \le \boxed{6} \\
&\qquad \ \ x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$



❖ 민감도 분석

➢ 가용자원의 변화

$$
\begin{aligned}
& Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\
& s.t. \\
& \qquad 2x_1 + x_2 \le \boxed{16} \\
& \qquad x_1 + x_2 \le \boxed{12} \\
& \qquad x_1 \le \boxed{6} \\
& \qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$



2.5 선형계획문제의 쌍대문제

❖모든 선형계획법(LP)문제는 쌍을 이루는 또 다른 선형계획문제인 쌍대문제(Dual Problem)와 밀접히 연관되어 있다.

❖잠재가격

➢자원의 공급능력이 한 단위 추가됨으로써 발생하는 목적함수의 증가량

➢수학적으로는 이를 쌍대변수라 함

❖수정비용

➢최적해에서 0의 값을 가지는 변수의 값을 1단위 증가시킬때에 발생하는 목적함수값의 변화

➢상대비용이라고도 함

2.5 선형계획문제의 쌍대문제

❖원문제(Primal Problem)

$$Max \;\; 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2$$
$$s.t.$$
$$\begin{aligned} 2x_1 + \;\; x_2 &\le 16 \\ x_1 + \;\; x_2 &\le 12 \\ x_1 \qquad\quad &\le \;\; 6 \\ x_1, x_2 \ge 0 & \end{aligned}$$

❖쌍대문제(Dual Problem)

$$Min \;\; 16y_1 + 12y_2 + 6y_3$$
$$s.t.$$
$$\begin{aligned} 2y_1 + \;\; y_2 + \;\; y_3 &\ge 150000 \\ y_1 + \;\; y_2 \qquad\quad &\ge 100000 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 & \end{aligned}$$

2.5 선형계획문제의 쌍대문제

❖ 쌍대문제의 경제학적 해석

➢ ㈜소유가구에서는 ㈜공유가구와 마찬가지로 목재, 가죽, 섬유를 원료로 제품을 생산하고 있다. 원료를 확보하지 못한 ㈜소유가구는 ㈜공유가구에게 시장가격보다 웃돈(premium)을 붙여줄테니 확보한 원료를 팔라는 제안을 하고 있다. 이때 ㈜소유가구는 과연 각 원료별로 시장가격보다 얼마 정도의 웃돈을 책정하는 것이 합리적인 의사결정인가?

2.5 선형계획문제의 쌍대문제

❖쌍대문제의 경제학적 해석

- 웃돈은 아직 결정된 것이 아니므로 목재, 가죽, 섬유의 시장가격에 얹어 줄 웃돈을 각각 y_1, y_2, y_3 라고 하자.
- ㈜소유가구로서는 가능하면 지불하는 웃돈의 총액을 최소화하고 싶을 것이다. 따라서 ㈜소유가구는 다음의 값을 최소화하려 한다.

$$w = 16y_1 + 12y_2 + 6y_3$$

- 원료를 확보하려는 경쟁이 심하다고 하였으므로 ㈜공유가구는 확보한 원료 들을 언제든지 시장가격 이상으로 팔 수 있으므로 웃돈은 음수가 될 수 없다. 따라서

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

2.5 선형계획문제의 쌍대문제

❖쌍대문제의 경제학적 해석

- ㈜공유가구의 입장에서 침대를 하나 만드는 데 목재가 2m³ , 가죽은 1m², 섬유는 1m² 가 필요하므로 침대를 하나 만들지 않고 이것을 만드는 데 필요한 원료를 ㈜소유가구에 판다면 이때 얻게 되는 웃돈이 침대 하나에서 얻을 수 있는 이익 150,000원보다 커야 한다. 따라서 다음 조건을 만족하여야 한다.

$$2y_1 + y_2 + y_3 \geq 150000$$

- 마찬가지로 소파를 하나 만드는 데 필요한 원료를 ㈜소유가구에 판다면 , 이때 얻게 되는 웃돈이 소파 하나에서 얻을 수 있는 이익 100,000원 보다 커야 한다. 따라서 다음 조건을 만족해야 한다.

$$y_1 + y_2 \geq 100000$$

❖쌍대문제의 경제학적 해석

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ 16y_1 + 12y_2 + 6y_3 \\
&s.t. \\
&\qquad 2y_1 + \ y_2 + \ y_3 \geq 150000 \\
&\qquad\ \ y_1 + \ y_2 \qquad\quad \geq 100000 \\
&\qquad\ \ y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

❖원문제를 쌍대문제로 만드는 과정

➢ 원문제를 표준형(Standard Form)으로 전환

✓ 표준형이란 변수에 대한 제약을 제외한 모든 제약식이 등식이고 제약식에서 변수들은 모두 좌변으로 정리되고 상수인 우변(Right-Hand-Side) 값은 0보다 크거나 같아야 하고 모든 변수가 비음조건을 만족하는 형태를 의미

✓ 표준형이 아닌 선형계획모형을 표준형으로 변환하는 절차

- [≤] 부등식 형태의 제약식: 부등식의 우측값과 좌측값의 차이를 나타내는 비음의 여유변수(Slack Variable)를 제약식의 좌측에 더한다.

$$2x_1 + x_2 \le 16 \qquad\qquad 2x_1 + x_2 + s_1 = 16\,,\ \ s_1 \ge 0$$

- [≥] 부등식 형태의 제약식: 부등식의 좌측값과 우측값의 차이를 나타내는 비음의 잉여변수(Surplus Variable)을 제약식의 좌측에서 뺀다.

$$2x_1 + x_2 \ge 16 \qquad\qquad 2x_1 + x_2 - s_1 = 16\,,\ \ s_1 \ge 0$$

2.5 선형계획문제의 쌍대문제

❖ 원문제를 쌍대문제로 만드는 과정

➢ 원문제를 표준형(Standard Form)으로 전환

✓ 표준형이 아닌 선형계획모형을 표준형으로 변환하는 절차

- 제약식의 우측상수가 항상 비음 조건: 양변에 -1 곱하고 등식처리

$$2x_1 + x_2 \le -16$$

$$-2x_1 - x_2 \ge 16 \qquad -2x_1 - x_2 - s_1 = 16,\ s_1 \ge 0$$

- 변수가 음수를 허용하는(Unrestricted Variable) 특수한 경우: 해당변수 대신 양수의 두변수를 대입함으로써 비음제약을 갖는 표준형 변수로 전환

$$x_1 \qquad x_1 = x_1' - x_1'',\ (x_1' \ge 0, x_1'' \ge 0)$$

- 목적함수는 최대화 문제로 전환: 최소화 문제는 목적함수에 (-1)을 곱하여 줌으로써 최대화 문제로 전환

2.5 선형계획문제의 쌍대문제

❖ 원문제를 쌍대문제로 만드는 과정

➢ 원문제를 표준형(Standard Form)으로 전환

$$
\begin{aligned}
&Max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&s.t. \\
&\qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
&\qquad x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

2.5 선형계획문제의 쌍대문제

❖원문제를 쌍대문제로 만드는 과정

- 원문제의 제약식 하나에 쌍대문제의 쌍대변수(Dual Variable) 하나를 대응시킨다. $(y_1, y_2, \cdots, y_m)$
- 목적함수:
  - ✓ 원문제 제약식의 우변상수(b_1)와 이 제약식에 대응하는 쌍대변수 (y_1)의 곱을 구한 후 이것들을 모두 합하여 쌍대문제의 목적함수로 만든다
  - ✓ $(b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m)$. 이 때 쌍대목적함수의 최적화 방향은 최소화.
- 제약식:
  - 원문제의 원변수(Primal Variable)의 숫자만큼 쌍대문제의 제약식이 있다.
  - 쌍대제약식의 좌변은 x_j 에 대응하는 원문제의 제약식들의 계수(a_{ij})와 각 제약식들에 대응하는 쌍대변수(y_i) 들의 곱을 구한 후 이것들을 모두 합하여 만든다. 쌍대 제약식의 우변은 이 변수에 대응하는 원목적함수의 계수(c_j)이고 부등 관계는 좌변이 우변보다 크거나 같은 관계로 정의된다.
  - $a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m \geq c_j$
  - 모든 쌍대변수는 부호의 제약을 갖지 않는다.

❖원문제의 표준형

$$
\begin{aligned}
&Max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&s.t. \\
&\qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\
&\qquad x_1, x_2, \cdots, x_n \geq 0
\end{aligned}
$$

❖쌍대문제

$$
\begin{aligned}
&Min \quad b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\
&s.t. \\
&\qquad a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\
&\qquad a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\
&\qquad \vdots \\
&\qquad a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \geq c_n
\end{aligned}
$$

2.5 선형계획문제의 쌍대문제

❖원문제(Primal Problem)

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2\\
&s.t.\\
&\qquad 2x_1 + x_2 \le 16\\
&\qquad x_1 + x_2 \le 12\\
&\qquad x_1 \le 6\\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2\\
&s.t.\\
&\qquad 2x_1 + x_2 + x_3 = 16\\
&\qquad x_1 + x_2 + x_4 = 12\\
&\qquad x_1 + x_5 = 6\\
&\qquad x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

❖쌍대문제(Dual Problem)

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ 16y_1 + 12y_2 + 6y_3\\
&s.t.\\
&\qquad 2y_1 + y_2 + y_3 \ge 150000\\
&\qquad y_1 + y_2 \ge 100000\\
&\qquad y_1, y_2, y_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

2.5 선형계획문제의 쌍대문제

❖원문제의 일반형

$$
\begin{aligned}
&Max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&s.t. \\
&\qquad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
&\qquad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\
&\qquad x_1, x_2, \cdots, x_n \ge 0
\end{aligned}
$$

❖쌍대문제의 일반형

$$
\begin{aligned}
&Min \quad b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\
&s.t. \\
&\qquad a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \cdots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\
&\qquad a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\qquad a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \cdots + a_{mn}y_m \ge c_n \\
&\qquad y_1, y_2, \cdots, y_m \ge 0
\end{aligned}
$$

2.5 선형계획문제의 쌍대문제

❖ 원문제를 쌍대문제로 변환 방법

- ➢ 원문제의 각 제약식에 대해 한 개의 쌍대변수를 도입
- ➢ 원문제의 우변항으로 쌍대문제의 목적식을 만들며 이를 최소화
- ➢ 원문제의 각 변수에 대해 쌍대문제의 제약식을 하나씩 만듬
- ➢ 원문제의 제약식들에서 갖는 계수들을 가지고 쌍대문제 제약식의 계수를 만들고,
- ➢ 원문제의 목적함수의 계수를 가지고 우변항을 만듬

원문제	MAX	제약식 <= 형태	제약식 = 형태	변수 >=0	변수 비음제약없음
쌍대문제	MIN	변수>=0	비음제약없음	제약식 >=	제약식 =

❖원문제를 쌍대문제로 변환

$$Min\ \ 150x_1 + 100x_2$$
$$s.t.$$
$$20x_1 + 40x_2 \geq 140 \qquad y_1$$
$$30x_1 + 20x_2 \geq 120 \qquad y_2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$140y_1 + 120y_2$$
$$20y_1 + \ 30y_2 \qquad 150$$
$$40y_1 + \ 20y_2 \qquad 100$$
$$y_1,\ y_2 \qquad 0$$

Max

$\leq$

$\geq$

$$Max\ \ 140y_1 + 120y_2$$
$$s.t.$$
$$20y_1 + \ 30y_2 \leq 150$$
$$40y_1 + \ 20y_2 \leq 100$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

COSS 인공지능

❖원문제를 쌍대문제로 변환

$$Min\ \ 150x_1 + 100x_2$$
$$s.t.$$
$$20x_1 + 40x_2 = 140$$
$$30x_1 + 20x_2 \geq 120$$
$$x_1 \geq 0$$

y_1

y_2

$140y_1 + 120y_2$

$20y_1 + \ 30y_2 \quad 150$

$40y_1 + \ 20y_2 \quad 100$

$y_2 \quad 0$

$$Max\ \ 140y_1 + 120y_2$$
$$s.t.$$
$$20y_1 + \ 30y_2 \leq 150$$
$$40y_1 + \ 20y_2 = 100$$
$$y_2 \geq 0$$

Max

$\leq$

$=$

$\geq$

2.5 선형계획문제의 쌍대문제

❖원문제를 쌍대문제로 변환

$$Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2$$
$$s.t.$$
$$2x_1 + x_2 \le 16 \qquad y_1$$
$$x_1 + x_2 \le 12 \qquad y_2$$
$$x_1 \le 6 \qquad y_3$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$16y_1 + 12y_2 + 6\,y_3$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 \quad 150000$$

$$y_1 + y_2 \quad 100000$$

$$y_1, y_2, y_3 \quad 0$$

$$Min\ \ 16y_1 + 12y_2 + 6y_3$$
$$s.t.$$
$$2y_1 + y_2 + y_3 \ge 150000$$
$$y_1 + y_2 \ge 100000$$
$$y_1, y_2, y_3 \ge 0$$

Min

$\ge$

$\ge$

$\ge$

2.5 선형계획문제의 쌍대문제

❖원문제와 쌍대문제 상관관계

- 원문제가 최대화문제이면 쌍대문제는 최소화문제이고, 원문제가 최소화문제이면 쌍대문제는 최대화문제이다.
- 원문제로부터 정의된 쌍대문제로부터 이의 쌍대문제를 구하면 원문제가 된다.
- 원문제가 무한 최적해(제한없는 목적함수 값)를 가지면 쌍대문제는 실행불가능 문제(해결할 수 없는 문제)이다. (역의 경우로 쌍대문제가 무한 최적해를 가지면 원문제는 실행불가능한 문제이다)

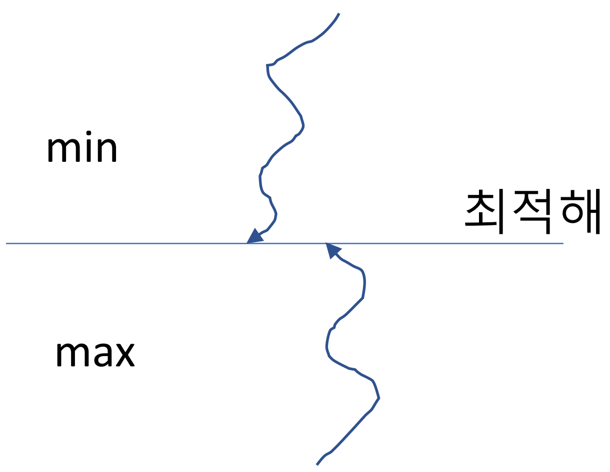
min

최적해

max

❖원문제와 쌍대문제 상관관계

- 원문제가 유한한 최적해를 가지면 쌍대문제도 유한한 최적해를 가지며 원문제의 최적값과 쌍대문제의 최적값은 같다.
- 원문제가 유한한 최적해를 가지는 최대화 문제인 경우에 원문제에서 찾은 실행가능해가 주는 목적함수값은 쌍대문제의 실행가능해가 주는 목적함수값 보다 항상 작거나 같다.



❖상보여유정리(complementary slackness theorem)

➢최적해가 X, Y 인 경우

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n < b_i \quad \text{이면} \quad y_i = 0$$

$$y_i > 0 \quad \text{이면} \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

$$x_j > 0 \quad \text{이면} \quad a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m = c_j$$

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \cdots + a_{mj}y_m > 0 \quad \text{이면} \quad x_j = 0$$

2.5 선형계획문제의 쌍대문제

❖상보여유정리(complementary slackness theorem)

$$\begin{aligned} &Min\ \ 16y_1 + 12y_2 + 6y_3 \\ &s.t. \\ &\qquad 2y_1 + \ \ y_2 + \ \ y_3 \geq 150000 \\ &\qquad\ \ y_1 + \ \ y_2 \qquad\qquad \geq 100000 \\ &\qquad\ \ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

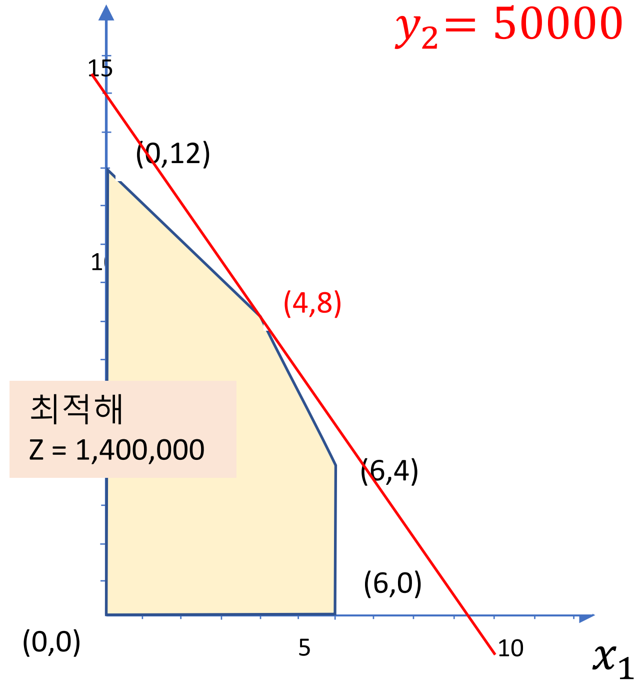
$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} &Max\ \ 150{,}000x_1 + 100{,}000x_2 \\ &s.t. \\ &\qquad 2x_1 + \ \ x_2 \ \leq 16 \\ &\qquad\ \ x_1 + \ \ x_2 \ \leq 12 \\ &\qquad\ \ x_1 \qquad\quad \leq \ \ 6 \\ &\qquad\ \ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$y_3 = 0$$

$$\begin{aligned} 2y_1 + \ \ y_2 &= 150000 \\ y_1 + \ \ y_2 &= 100000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 50000 \\ y_2 &= 50000 \end{aligned}$$



thank you

본 과제(결과물)는 교육부와 한국연구재단의 재원으로 지원을 받아 수행된
디지털신기술인재양성 혁신공유대학사업의 연구결과입니다.