AI알고리즘

선형계획법의 대수적 해법

수퍼스타를 키우는 곳
전주대학교

선형계획모형의 파이썬 프로그래밍

심플렉스법 활용 프로그램

심플렉스법 활용 프로그램

❖ 파이썬 관련 라이브러리

1. Scipy

- https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/
- 선형계획법 이외에도 최적화와 관련된 프로그램이 존재함
- 행렬을 그대로 구현하는 형태

```
import numpy as np
import scipy as sp
import scipy.optimize

c = np.array([-150000, -100000])
A = np.array([[2, 1], [1, 1], [1, 0]])
b = np.array([16, 12, 6])


result = sp.optimize.linprog(c, A, b)
result
```

```
con: array([], dtype=float64)
    fun: -1399999.9967195382
 message: 'Optimization terminated successfully.'
    nit: 7
   slack: array([3.76628790e-08, 2.79463563e-08, 2.00000001e+00])
  status: 0
 success: True
      x: array([3.99999999, 7.99999998])
```

도해법으로 썼던 내용을 프로그래밍 한 결과

심플렉스법 활용 프로그램

❖ 파이썬 관련 라이브러리

2. CVXPY

- https://www.cvxpy.org/
- Pip을 통해 설치 가능

```
import cvxpy as cp

# 변수의 정의
x1 = cp.Variable()  # A의 생산량
x2 = cp.Variable()  # B의 생산량

# 조건의 정의
constraints = [
    x1 >= 0,
    x2 >= 0,
    2*x1 + x2  <= 16,
    x1 + x2 <= 12,
    x1 <=6,
]
```

```
# 문제의 정의
obj = cp.Maximize(150000 * x1 + 100000 * x2)
prob = cp.Problem(obj, constraints)

# 계산
prob.solve()

# 결과
print("상태:", prob.status)
print("최적값:", x1.value, x2.value)
print("목적함수값:", obj.value)
```

```
상태: optimal
최적값: 4.000000003557277 7.999999984198859
목적함수값: 1399999.9989534775
```

심플렉스법 활용 프로그램

❖ 파이썬 관련 라이브러리

3. PuLP

- https://coin-or.github.io/pulp/index.html
- Pip을 통해 설치 가능

```
from pulp import *
# sense: LpMaximize or LpMinimize(default)
LP = LpProblem(name = "LP",    sense = LpMaximize )

# DEFINE decision variable
# cat: category, "Continuous"(default), "Integer", "Binary"
X1 = LpVariable(name='A', lowBound=None, upBound=None, cat='Integer')
X2 = LpVariable(name='B', lowBound=None, upBound=None, cat='Integer' )

# OBJECTIVE function
LP.objective = 150000 * x1 + 100000 * x2

print('Objective: ', LP.objective, '\n')
```

```
# CONSTRAINTS
constraints = [
    x1 >= 0,
    x2 >= 0,
    2*x1 + x2  <= 16,
    x1 + x2 <= 12,
    x1 <=6,
]
print('Constraints: ')
for i in constraints:
    print(i)

for i, c in enumerate(constraints):
    constraint_name = f"const_{i}"
    LP.constraints[constraint_name] = c

# SOLVE model
res = LP.solve()
```

```
# 결과
print('\nResults: ')
for v in LP.variables():
    print(f"{v} Type: {v.varValue:5.1f} men")

print('\n', 'The objective funtion is ', value(LP.objective))
```

```
Objective:  150000*A + 100000*B

Constraints:
2*A + B <= 16
A + B <= 12
A <= 6
A >= 0
B >= 0

Results:
A Type:   4.0 men
B Type:   8.0 men

 The objective funtion is  1400000.0
```

선형계획모형의 파이썬 프로그래밍

선형계획법의 응용

선형계획법의 응용

❖ 선형계획모형 개발과정

- 문제를 이해
- 의사결정변수들을 결정
- 해의 우열을 결정하는 기준을 선택
- 이 기준이 의사결정변수들의 선형식으로 나타나도록 수식으로 표현하여 목적함수로 사용
- 모든 조건들이 의사결정변수들의 선형식으로 나타나도록 제약식들을 만듦
- 입력자료들을 수집하고 추정

❖ 생산계획 사례

- 공유산업(주)은 다음 달에 제품 1, 2, 3을 각각 80개, 120개, 100개 납품 주문을 받음
- 회사에서 보유하고 있는 두 대의 기계를 사용하여 세 종류 제품 생산 가능
  - 각 기계의 가동시간: 기계 1은 600시간, 기계 2는 500시간
- 각 제품을 생산하기 위한 제품 단위당 생산 비용과 제품 단위당 기계별 생산 소요시간은 다음과 같을 때, 주문을 만족시키기 위하여 어느 기계에서 얼마나 생산하는 것이 전체 생산 비용을 최소화하는 것인지를 결정

	생산 비용			생산 소요시간		
	제품1	제품2	제품3	제품1	제품2	제품3
기계1	4	2	4	3	6	4
기계2	3	2	2	4	3	5

선형계획법의 응용

❖ 생산계획 사례

- 의사결정변수

- 계약조건
  - 각 제품의 수요를 만족해야 한다는 제약조건

$$x_{11}+x_{21}\geq 80$$
$$x_{12}+x_{22}\geq 120$$
$$x_{13}+x_{23}\geq 100$$

  - 각 기계 별 사용 가능 시간을 초과할 수 없다는 조건

$$3x_{11}+6x_{12}+4x_{13}\leq 600$$
$$4x_{21}+3x_{22}+5x_{23}\leq 500$$

- 비음조건

$$x_{ij}\geq 0\ (i=1,2\ ;\ j=1,2,3)$$

- 선형계획모형

$$\begin{aligned}
&Minimize\ 4\,x_{11}+2x_{12}+4x_{13}+3x_{21}+2x_{22}+2x_{23}\\
&s.t\\
&\qquad x_{11}+x_{21}\geq 80\\
&\qquad x_{12}+x_{22}\geq 120\\
&\qquad x_{13}+x_{23}\geq 100\\
&\qquad 3x_{11}+6x_{12}+4x_{13}\leq 600\\
&\qquad 4x_{21}+3x_{22}+5x_{23}\leq 500\\
&\qquad\quad x_{ij}\geq 0\ (i=1,2\ ;\ j=1,2,3)
\end{aligned}$$

선형계획법의 응용

❖ 투자계획 사례

- 주식, 채권, 은행 예금 등과 같은 투자 대안들
- 각 투자 대안에 대한 수익률과 위험도를 고려
  - 투자수익률: 투자하여 얻게 되는 수익이 투자한 금액에 대해 어느 정도의 비율을 차지하는가를 나타내는 기준
  - 투자위험도: 투자에 대한 위험요인을 나타내는 기준
- 여러 가지 투자 대안에서 투자를 선택하는 경우 이러한 수익률뿐 만 아니라 위험도를 함께 고려
- 동일한 상황에서 투자 대안을 결정하는 문제의 경우 두 가지 종류의 문제 가능
  - 투자위험에 대한 제약조건을 만족하면서 투자수익률을 최대로 하는 문제
  - 일정한 투자수익률을 보장하는 범위 내에서 투자위험을 최소화
- JJ투자회사는 1억 원의 여유자금을 투자하여 5년 후(6년 초)에 자금을 최대로 하는 투자방안을 결정하고자 함
- 투자 대안으로는 저축, 주식, 공채
  - 저축은 1년 단위로 투자가 가능하며 평균 이자율이 5%이며, 저축은 연이어 재투자가 가능
  - 주식은 2년 단위로 평균 수익률이 15%
  - 공채는 3년 단위로 투자가 이루어지며 평균 수익률이 25%
- 회사는 투자 전문 회사의 자문을 받아 다음 사항을 지키면서 투자방안을 결정하고자 함
  - 현금 수요에 대비하여 주식과 공채에는 매년 투자 가용액의 80% 범위 내에서 투자
  - 주식에는 매년 투자가용액의 50%를 넘지 않도록 함

선형계획법의 응용

❖ 투자계획 사례

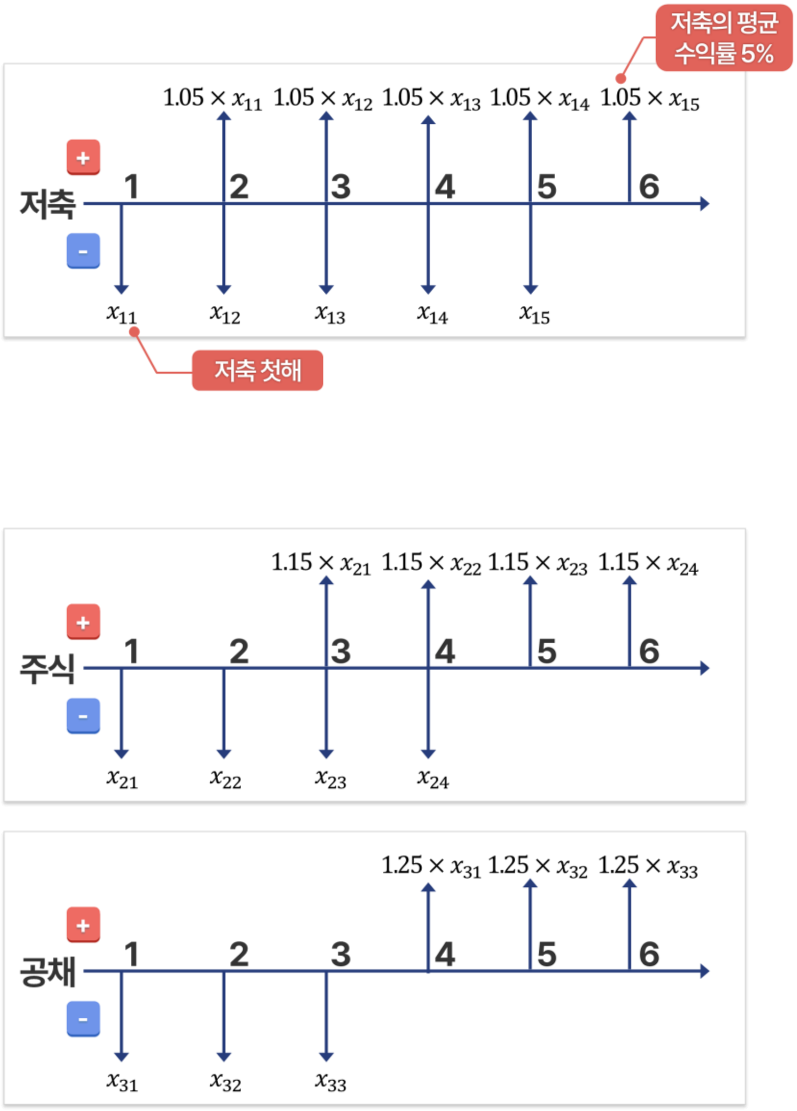
- 의사결정변수

x_{ij} = j년도 초에 i 에 투자할 금액
(i = 1(저축), 2(주식), 3(공채), 4(현금 보유);
j = 1,2,3,4,5)

선형계획법의 응용

❖ 투자계획 사례

- 의사결정변수
  - 각 대안별 투자 금액과 수익에 대한 현금 흐름도
  - 1년 단위로 나타나는 수익률



선형계획법의 응용

❖ 투자계획 사례

- 제약조건
  - j년도 초에 투자 가능한 가용자금(단위:만 원)

$$1\text{년}:\ x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=10{,}000$$

내가 지금 보유한 돈

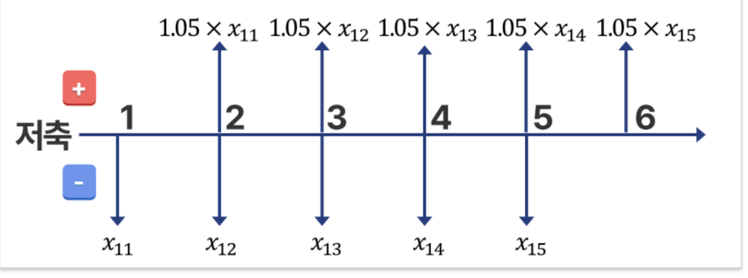
$$2\text{년}:\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1.05x_{11}+x_{41}$$

$$3\text{년}:\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1.05x_{12}+1.15x_{21}+x_{42}$$

$$4\text{년}:\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1.05x_{13}+1.15x_{23}+1.25x_{31}+x_{43}$$

$$5\text{년}:\ x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}=1.05x_{14}+1.15x_{23}+1.25x_{32}+x_{44}$$

$$1\text{년}:\ x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=10{,}000$$
$$2\text{년}:\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1.05x_{11}+x_{41}$$



선형계획법의 응용

❖ 투자계획 사례

- 제약조건
  - 투자 전문 회사의 조언에 대한 제약 1(주식과 공채 투자는 매년 가용액의 80% 범위)

1년: $x_{21} + x_{31} \leq 0.8 \times 10000$

2년: $x_{22} + x_{32} \leq 0.8(1.05x_{11} + x_{41})$ 저축해서 번 돈과 현금

3년: $x_{23} + x_{33} \leq 0.8(1.05x_{12} + 1.15x_{21} + x_{42})$ 15% 수익률 포함

4년: $x_{24} + x_{34} \leq 0.8(1.05x_{13} + 1.15x_{22} + 1.25x_{31} + x_{43})$ 25% 공채+주식+저축+현금

5년: $x_{25} + x_{35} \leq 0.8(1.05x_{14} + 1.15x_{23} + 1.25x_{32} + x_{44})$

  - 투자 전문 회사의 조언에 대한 제약 1(주식과 공채 투자는 매년 가용액의 80% 범위)

1년: $x_{21} \leq 0.5 \times 10000$

2년: $x_{22} \leq 0.5(1.05x_{11} + x_{41})$

3년: $x_{23} \leq 0.5(1.05x_{12} + 1.15x_{21} + x_{42})$

4년: $x_{24} \leq 0.5(1.05x_{13} + 1.15x_{22} + 1.25x_{31} + x_{43})$

5년: $x_{25} \leq 0.5(1.05x_{14} + 1.15x_{23} + 1.25x_{32} + x_{44})$

  - 비음 조건: $x_{ij} \geq 0$ (i=1,2,3,4; j=1,2,3,4,5)

선형계획법의 응용

❖ 투자계획 사례

- 선형계획모형

$$Maximize\ 1.05\,x_{15} + 1.15\,x_{24} + 1.25\,x_{33} + x_{45}$$
$$s.t$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 10{,}000$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1.05x_{11} + x_{41}$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1.05x_{12} + 1.15x_{21} + x_{42}$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1.05x_{13} + 1.15x_{23} + 1.25x_{31} + x_{43}$$
$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1.05x_{14} + 1.15x_{23} + 1.25x_{32} + x_{44}$$

$$x_{21} + x_{31} \le 0.8 \times 10000$$
$$x_{22} + x_{32} \le 0.8(1.05x_{11} + x_{41})$$
$$x_{23} + x_{33} \le 0.8(1.05x_{12} + 1.15x_{21} + x_{42})$$
$$x_{24} + x_{34} \le 0.8(1.05x_{13} + 1.15x_{22} + 1.25x_{31} + x_{43})$$
$$x_{25} + x_{35} \le 0.8(1.05x_{14} + 1.15x_{23} + 1.25x_{32} + x_{44})$$
$$x_{21} \le 0.5 \times 10000$$
$$x_{22} \le 0.5(1.05x_{11} + x_{41})$$
$$x_{23} \le 0.5(1.05x_{12} + 1.15x_{21} + x_{42})$$
$$x_{24} \le 0.5(1.05x_{13} + 1.15x_{22} + 1.25x_{31} + x_{43})$$
$$x_{25} \le 0.5(1.05x_{14} + 1.15x_{23} + 1.25x_{32} + x_{44})$$
$$x_{ij} \ge 0\,(i = 1,2,3,4;\ j = 1,2,3,4,5)$$

선형계획법의 응용

❖ 생산 및 재고 계획 사례

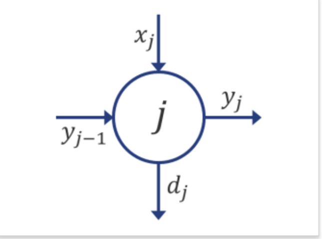
- JJ공유(주)는 앞으로 6개월간의 수요에 대한 차량용 내비게이션의 생산계획을 수립하고자 함
  - 총비용을 최소화하는 생산계획과 재고계획 수립
- 단위당 생산 비용은 10만 원
- 생산된 제품이 당월에 팔리지 않고 재고로 넘어가게 되면 한 개당 재고 유지 비용은 1만 원이 소요
- 단, 1월의 초기 재고량은 50개이며 6월 말의 재고량은 100개가 이월되도록 함

	1월	2월	3월	4월	5월	6월
수요량	300	320	450	410	400	420
생산능력	400	350	400	400	380	400

- 의사결정변수

y_j = j**월말의 재고량** $(j = 1,2,3,4,5,6)$
x_j = j**월의 생산량** $(j = 1,2,3,4,5,6)$

- 재고균형방정식(Inventory Balance Equation)



선형계획법의 응용

❖ 생산 및 재고 계획 사례

- 제약조건
  - 재고균형방정식 표현(y_{j-1})+x_j−d_j=y_j)

$$
\begin{aligned}
&1\text{월}: 50 + x_1 - 300 = y_1 \\
&2\text{월}: y_1 + x_2 - 320 = y_2 \\
&3\text{월}: y_2 + x_3 - 450 = y_3 \\
&4\text{월}: y_3 + x_4 - 410 = y_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&5\text{월}: y_4 + x_5 - 400 = y_5 \\
&6\text{월}: y_5 + x_6 - 420 = y_6 \\
&\qquad y_6 \geq 100
\end{aligned}
$$

	1월	2월	3월	4월	5월	6월
수요량	300	320	450	410	400	420
생산능력	400	350	400	400	380	400

  - 생산능력 제약

$$
\begin{aligned}
&1\text{월}: x_1 \leq 400 \\
&2\text{월}: x_2 \leq 350 \\
&3\text{월}: x_3 \leq 400 \\
&4\text{월}: x_4 \leq 400 \\
&5\text{월}: x_5 \leq 380 \\
&6\text{월}: x_6 \leq 400
\end{aligned}
$$

  - 생산능력 제약

$$
\begin{aligned}
&x_j \geq 0 \ (j = 1,2,3,4,5,6) \\
&y_j \geq 0 \ (j = 1,2,3,4,5,6)
\end{aligned}
$$

	1월	2월	3월	4월	5월	6월
수요량	300	320	450	410	400	420
생산능력	400	350	400	400	380	400

선형계획법의 응용

❖ 생산 및 재고 계획 사례

- 선형계획모형(생산비용과 재고 유지 비용의 합을 최소화)

$$Maximize\ 10(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) + 1(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6)$$

$s.t$

$$\begin{aligned}
&50 + x_1 - 300 = y_1 &\quad& x_1 \leq 400 \\
&y_1 + x_2 - 320 = y_2 && x_2 \leq 350 \\
&y_2 + x_3 - 450 = y_3 && x_3 \leq 400 \\
&y_3 + x_4 - 410 = y_4 && x_4 \leq 400 \\
&y_4 + x_5 - 400 = y_5 && x_5 \leq 380 \\
&y_5 + x_6 - 420 = y_6 && x_6 \leq 400 \\
&y_6 \geq 100 && x_j \geq 0\ (j = 1,2,3,4,5,6), \\
& && y_j \geq 0\ (j = 1,2,3,4,5,6)
\end{aligned}$$

선형계획법의 응용

❖ 인력 배치 계획 사례

- JJ마트는 24시간 할인점이며, 근무인원은 하루 8시간을 근무
- 야간에 근무하는 경우 주간 근무에 비해 30%의 야간근무 수당을 지급
  - 야간근무 시간: 저녁 8시부터 다음날 아침 8시까지
- 마트에 근무하는 인원들은 6개 조의 근무조로 관리
- 인력운영계획에 따라 지급되는 총임금과 수당을 최소화하는 인력배치계획을 수립하고자 함
- 하루를 4시간 단위로 나누어 필요한 인원수를 추정한 자료와 각 조별 근무시간
  - 근무시간대별 소요인원

시간	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20	20-24
소요인원	40	30	60	80	100	70
근무조	1조	1조				
		2조	2조			
			3조	3조		
				4조	4조	
					5조	5조
	6조					6조

- 의사결정변수

$$x_j = j\text{조에 근무하는 인원}(j = 1,2,3,4,5,6)$$

- 제약조건
  - 4시간 단위의 시간대에 각각 2개조가 근무

$$\begin{aligned}
x_1 + x_6 &\geq 40 \\
x_1 + x_2 &\geq 30 \\
x_2 + x_3 &\geq 60 \\
x_3 + x_4 &\geq 80 \\
x_4 + x_5 &\geq 100 \\
x_5 + x_6 &\geq 70
\end{aligned}$$

선형계획법의 응용

❖ 인력 배치 계획 사례

- 선형계획모형 (각 조별 근무인원에 따라 지급하는 임금과 수당의 최소화)
  - 야간수당: 1조와 6조(8시간), 2조와 5조(4시간), 3조와 4조(0시간)

$$
\begin{aligned}
&Maximize\ 1.6x_1 + 1.3x_2 + x_3 + x_4 + 1.3x_5 + 1.6x_6\\
&s.t\\
&\quad x_1 + x_6 \geq 40\\
&\quad x_1 + x_2 \geq 30\\
&\quad x_2 + x_3 \geq 60\\
&\quad x_3 + x_4 \geq 80\\
&\quad x_4 + x_5 \geq 100\\
&\quad x_5 + x_6 \geq 70\\
&\quad x_j \geq 0\ (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)
\end{aligned}
$$

선형계획법의 응용

❖ 영양성분 배합 사례

- 영양분을 함유한 원재료를 섞어서 음식을 만들되 재료비를 최소화하고 각 영양소별로 요구되는 조건을 만족해야 하는 의사결정
- 비용은 가능한 줄이면서 학생들에게 필요한 영양소를 제공해야 함
  - 1인당 550칼로리에서 750칼로리 사이의 열량을 섭취
  - 단백질은 85그램 이상, 지방은 45그램 이상, 탄수화물은 90그램 이상 섭취
  - 식사의 전체량은 510그램 이상이 되어야 함
- 각 음식의 단위당 영양성분과 비용

음식(단위)	밥 (100g)	콩나물 (100g)	시금치 (50g)	불고기 (100g)	김치 (50g)
단백질(g)	5	10	3	40	5
지방(g)	5	10	2	20	2
탄수화물(g)	40	10	20	10	10
열량(Cal)	140	40	10	200	30
단위당 비용	500원	600원	200원	1000원	400원

- 의사결정변수(식단 구성재료의 양)

x_1 = 밥의 양
x_2 = 콩나물국의 양
x_3 = 시금치의 양
x_4 = 불고기의 양
x_5 = 김치의 양

- 제약조건
  - 필요한 영양소 및 식사량 제공
- 선형계획모형

$$Minimize = 500x_1 + 600x_2 + 200x_3 + 1000x_4 + 400x_5$$

$s.t$

$$\begin{aligned}
&140x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 200x_4 + 30x_5 \geq 550\\
&140x_1 + 40x_2 + 10x_3 + 200x_4 + 30x_5 \leq 750\\
&5x_1 + 10x_2 + 3x_3 + 40x_4 + 5x_5 \geq 85\\
&5x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 20x_4 + 2x_5 \geq 45\\
&40x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 10x_4 + 10x_5 \geq 90\\
&100x_1 + 100x_2 + 50x_3 + 100x_4 + 50x_5 \geq 510\\
&x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

선형계획법의 응용

❖ 자투리 최소화 문제

- JJ 강철㈜에서는 직경 10cm짜리 파이프를 생산하여 판매하고 있음
- 파이프 수요: 5m, 7m, 9m인 파이프 수요 발생
- 제조공정에서 나온 30m짜리 표준 파이프를 절단하여 고객에게 판매
  - 주문: 5m짜리 120개, 7m짜리 190개, 9m짜리 150개
- 표준 길이 30m 파이프를 자르는 방법에 따라 자투리가 생기는데 이 자투리를 최소화하며 주문을 충족하기 위해서는 어떠한 방법으로 잘라서 공급하여야 하는가?
- 절단 방법과 규격별 산출량, 자투리

요구 규격	절단 방법										필요량
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
5m	6	4	3	1	4	2	1	0	2	1	120
7m	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	190
9m	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	150
자투리 길이	0	3	1	4	1	4	2	0	2	0	

- 의사결정변수

x_i = 절단 방법 i를 사용하여 절단한 표준품의 수량 $\quad i = 1, \dots, 10$

- 목적함수
  - 발생하는 자투리 양의 최소화

자투리의 총량은 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 절단 방법에서 나오는 자투리들의 총합이므로,
$3x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 + 4x_6 + 2x_7 + 2x_9$

- 과잉생산량

$$\begin{aligned}
&5\text{m: } 5(6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + x_7 + 2x_9 + x_{10} - 120) \\
&7\text{m: } 7(x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + x_{10} - 190) \\
&9\text{m: } 9(x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10} - 150)
\end{aligned}$$

선형계획법의 응용

❖ 자투리 최소화 문제

$$
\begin{aligned}
Min\ \ & 3x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 + 4x_6 + 2x_7 + 2x_9 \\
& + 5(6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + x_7 + 2x_9 + x_{10} - 120) \\
& + 7(x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + x_{10} - 190) \\
& + 9(x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10} - 150)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \text{Min } z = \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} \\
& \text{s.t.} \\
& \quad 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 4x_5 + 2x_6 + x_7 + 2x_9 + x_{10} \geq 120 \\
& \quad x_2 + 2x_3 + 3x_4 + x_6 + 2x_7 + 3x_8 + x_{10} \geq 190 \\
& \quad x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + 2x_{10} \geq 150 \\
& \qquad\qquad x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

❖ 수송문제

- 다수의 공급지(Source)에서 다수의 수요지(Destination)로 최소의 비용으로 제품들을 수송하기 위한 방안을 찾고자 하는 문제