AI알고리즘

마아코프 분석

수퍼스타를 키우는 곳
전주대학교

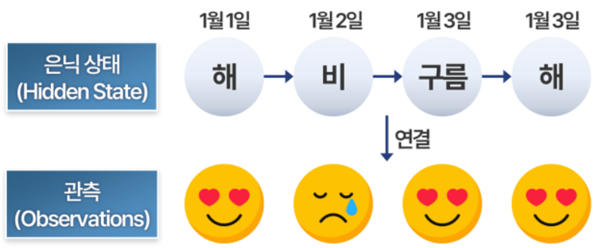
은닉 마아코프 모델

은닉 마아코프 모델의 확률 평가

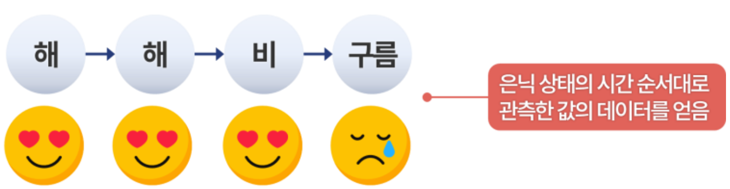
은닉 마아코프 모델의 확률 평가

❖ 확률 평가 문제

- 두 종류의 상태 순서 각각의 특성과 관계를 이용해 모델링
  - 관측(Observations)은 은닉 상태에 종속
    - 주류 판매량에 따른 날씨 추측



  - 은닉 마아코프 모델의 파라미터
    - 전이 확률
    - 방출 확률
    - 초기 확률 분포
    - 확률들(Transition, Emission Probabilities)을 어떻게 찾는가?
- 확률들을 어떻게 찾는가?



전이확률(Transition Probability)

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{비} \\ \text{구름} \\ \text{해} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{비} & \text{구름} & \text{해} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

방출 확률(Emission Probability)

$$B = \begin{array}{c} \\ \text{비} \\ \text{구름} \\ \text{해} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{좋음} & \text{나쁨} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

  - 은닉 상태의 시간 순서대로 관측한 값의 데이터를 얻음

은닉 마아코프 모델의 확률 평가

❖ 확률 평가 문제

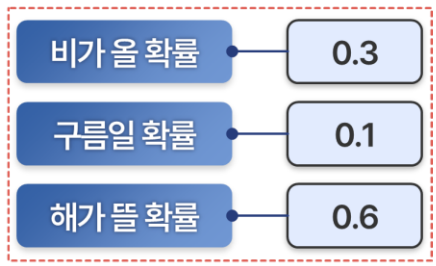
- 임의의 날의 날씨가 비, 구름, 해일 확률은?
  - 전이 확률(Transition Probability)을 곱할 경우
    - 안정 상태로 돌아감

$$\pi = \pi \times p$$

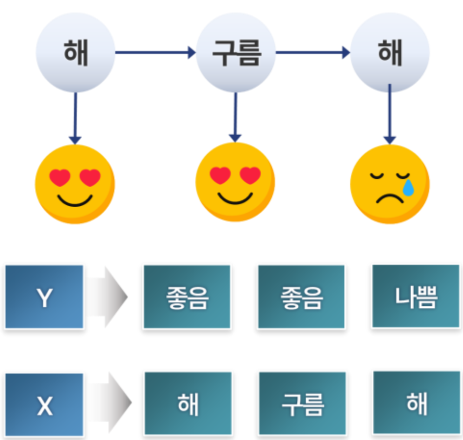
안정 상태 = 안정 상태 x 전이 확률

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

$$A = \begin{array}{c|ccc} & \text{비} & \text{구름} & \text{해} \\ \hline \text{비} & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ \text{구름} & 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ \text{해} & 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{array}$$



- 안정 상태 = 안정 상태 x 전이 확률
- π가 의미하는 것 = 각각의 안정 상태 → 각 파이를 다 더하면 항상 1



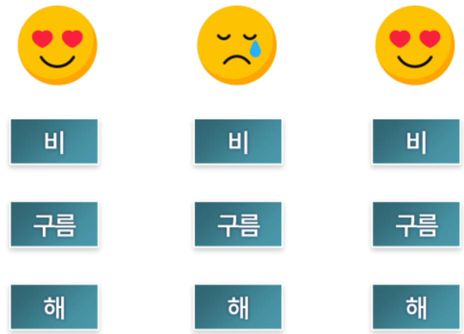
$$P(Y = \text{좋음, 좋음, 나쁨}, X = \text{해, 구름, 해})$$

$$P(X_1 = \text{해})P(Y_1 = \text{좋음}|\ X_1 = \text{해})$$
$$P(X_2 = \text{구름}|\ X_1 = \text{해})\ P(Y_2 = \text{좋음}|X_2 = \text{구름})$$
$$P(X_3 = \text{해}|\ X_2 = \text{구름})\ P(Y_3 = \text{나쁨}|X_3 = \text{해})$$

은닉 마아코프 모델의 확률 평가

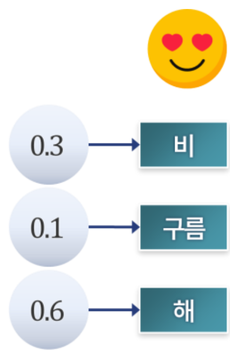
❖ 확률 평가 문제

- 순방향 알고리즘(Forward Algorithm)



- 첫째 날

$$B = \begin{array}{c} \\ 비 \\ 구름 \\ 해 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 좋음 & 나쁨 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$



$0.3 \times 0.4 = 0.12$

$0.1 \times 0.6 = 0.06$

$0.6 \times 0.8 = 0.48$

- 둘째 날

$$A = \begin{array}{c} \\ 비 \\ 구름 \\ 해 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 비 & 구름 & 해 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ 비 \\ 구름 \\ 해 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 좋음 & 나쁨 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$(0.12 \times 0.5 + 0.06 \times 0.2 + 0.48 \times 0.1) \times 0.6 = 0.072$

$(0.12 \times 0.3 + 0.06 \times 0.6 + 0.48 \times 0.2) \times 0.4 = 0.0672$

$(0.12 \times 0.2 + 0.06 \times 0.2 + 0.48 \times 0.7) \times 0.2 = 0.0774$

은닉 마아코프 모델의 확률 평가

❖ 확률 평가 문제

- 순방향 알고리즘(Forward Algorithm)
  - 마지막 날

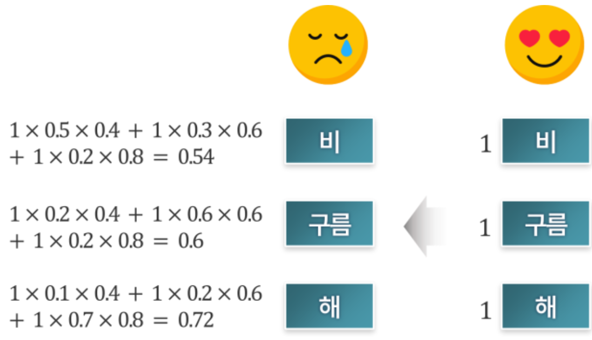
$$A = \begin{array}{c} \\ \text{비} \\ \text{구름} \\ \text{해} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{비} & \text{구름} & \text{해} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ \text{비} \\ \text{구름} \\ \text{해} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{좋음} & \text{나쁨} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

- 역방향 알고리즘(Backward Algorithm)

$$A = \begin{array}{c} \\ \text{비} \\ \text{구름} \\ \text{해} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{비} & \text{구름} & \text{해} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ \text{비} \\ \text{구름} \\ \text{해} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{좋음} & \text{나쁨} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$



은닉 마아코프 모델의 확률 평가

❖ 확률 평가 문제

- 역방향 알고리즘(Backward Algorithm)

$$A = \begin{array}{c} \\ 비 \\ 구름 \\ 해 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 비 & 구름 & 해 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ 비 \\ 구름 \\ 해 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 좋음 & 나쁨 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$1 \times 0.5 \times 0.4 + 1 \times 0.3 \times 0.6 + 1 \times 0.2 \times 0.8 = 0.54$

$1 \times 0.2 \times 0.4 + 1 \times 0.6 \times 0.6 + 1 \times 0.2 \times 0.8 = 0.6$

$1 \times 0.1 \times 0.4 + 1 \times 0.2 \times 0.6 + 1 \times 0.7 \times 0.8 = 0.72$

$$A = \begin{array}{c} \\ 비 \\ 구름 \\ 해 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 비 & 구름 & 해 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c} \\ 비 \\ 구름 \\ 해 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} 좋음 & 나쁨 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$0.54 \times 0.5 \times 0.6 + 0.6 \times 0.3 \times 0.4 + 0.72 \times 0.2 \times 0.2 = 0.2628$

$0.54 \times 0.2 \times 0.6 + 0.6 \times 0.6 \times 0.4 + 0.72 \times 0.2 \times 0.2 = 0.2376$

$0.54 \times 0.1 \times 0.6 + 0.6 \times 0.2 \times 0.4 + 0.72 \times 0.7 \times 0.2 = 0.1812$

순방향 알고리즘과 동일

$$0.132768 = 0.2628 \times 0.3 \times 0.4 = 0.031536 + 0.2376 \times 0.1 \times 0.6 = 0.014256 + 0.1812 \times 0.6 \times 0.8 = 0.086976$$

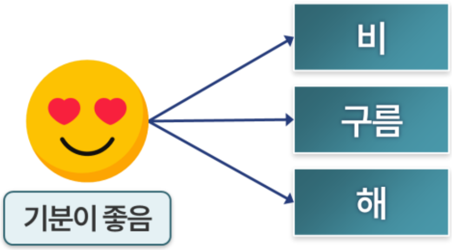
- 순방향 알고리즘과 동일
  - 관측 확률 → 은닉 상태를 고려해서 연관지어 계산

은닉 마아코프 모델

은닉 마아코프 모델의 최적 상태

은닉 마아코프 모델의 최적 상태

❖ 최적 상태 문제



- 조건부 확률
  - 어떤 사건이 발생했을 때 다른 사건이 일어날 확률

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$P(A)$: 사전확률(Prior Probability)
$P(A|B)$: 사후확률(Posterior Probability)

- 결합 확률
  - 두 사건이 독립인 경우

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

  - 두 사건이 독립이 아닌 경우

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

은닉 마아코프 모델의 최적 상태

❖ 최적 상태 문제

- 베이지안 정리
  - 일어나지 않았거나 불확실한 사건에 대한 확률로 정보를 업데이트하면서 사후 확률을 구하는 것

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

주관적인 가설의 사전 확률을 정함

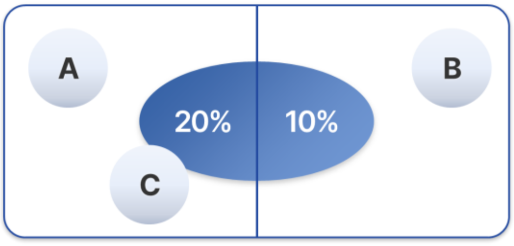
$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap A')$$

관찰된 데이터 기반으로 가능도 계산

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A')P(A')}$$

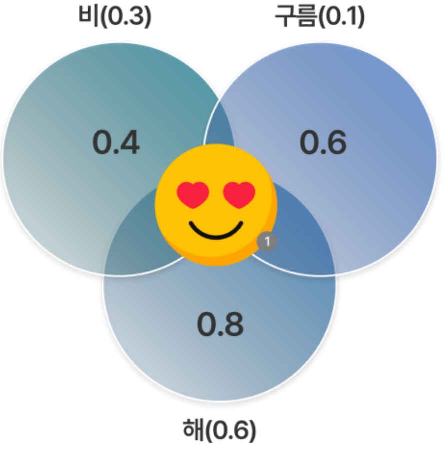
처음 설정한 주관적 확률 보정

- 베이지안 정리의 예제
  - 기계 A에서 불량제품을 생산할 확률이 20%, 기계 B에서 불량제품을 생산할 확률이 10% 라고 할 때, 제품 검사결과 불량품이 나온 경우 기계 A에서 생산되었을 확률은?



$$P(A|C) = \frac{0.2 \times 0.5}{0.2 \times 0.5 + 0.1 \times 0.5}$$

$$P(A|C) = \frac{(\text{A의 불량 확률})}{(\text{A의 불량 확률}) + (\text{B의 불량 확률})}$$



$$P(\text{비}|\text{좋음}) = \frac{0.3 \times 0.4}{0.3 \times 0.4 + 0.1 \times 0.6 + 0.6 \times 0.8} = 0.1818$$

$$P(\text{구름}|\text{좋음}) = \frac{0.1 \times 0.6}{0.3 \times 0.4 + 0.1 \times 0.6 + 0.6 \times 0.8} = 0.0909$$

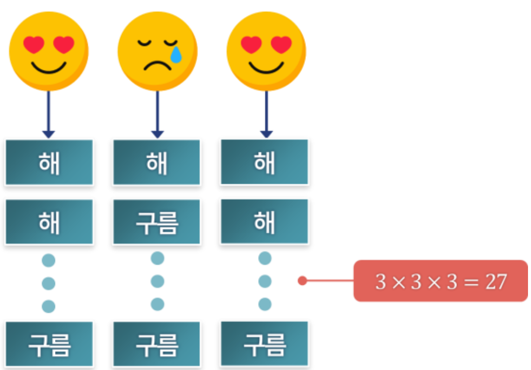
$$P(\text{해}|\text{좋음}) = \frac{0.6 \times 0.8}{0.3 \times 0.4 + 0.1 \times 0.6 + 0.6 \times 0.8} = 0.7272$$

은닉 마아코프 모델의 최적 상태

❖ 최적 상태 문제

- 베이지안 정리
  - 결과 → 원인
    - 결과의 확률을 각각 더한 후
      확인하고 싶은 값을 분자에 넣어 구하기
- 은닉 상태에서의 좋음과 나쁨의 순서 시퀀스 중 가장 좋은 상태는 무엇일까?
  - 관측된 시퀀스 데이터(Y)에 대한 가장 적합한 기상 시퀀스는?

$$\underset{X = X_1, X_2, \cdots, X_n}{argmax} \quad P(X = X_1, X_2, \cdots, X_n \mid Y = Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$$



  - 결합 확률과 베이지안 이론만으로 계산 및 나열의 어려움 존재

초기확률(Initial Probability)

$$(0.3, 01, 0.6)$$

전이확률(Transition Probability)

$$A = \begin{array}{c|ccc} & \text{비} & \text{구름} & \text{해} \\ \hline \text{비} & 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ \text{구름} & 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ \text{해} & 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{array}$$

방출확률(Emission Probability)

$$B = \begin{array}{c|cc} & \text{좋음} & \text{나쁨} \\ \hline \text{비} & 0.4 & 0.6 \\ \text{구름} & 0.6 & 0.4 \\ \text{해} & 0.8 & 0.2 \end{array}$$

  - 해 → 해 → 해

$$\begin{aligned} & P(\text{해, 해, 해; 좋음, 나쁨, 좋음}) \\ & = P(\text{해})P(\text{좋음} \mid \text{해}) \\ & \quad P(\text{해} \mid \text{해})P(\text{나쁨} \mid \text{해}) \\ & \quad P(\text{해} \mid \text{해})P(\text{좋음} \mid \text{해}) \end{aligned}$$

$$= 0.6 \times 0.8 \times 0.7 \times 0.2 \times 0.7 \times 0.8 = 0.037632$$

은닉 마아코프 모델의 최적 상태

❖ 최적 상태 문제

- 은닉 상태에서의 좋음과 나쁨의 순서 시퀀스 중 가장 좋은 상태는 무엇일까?
  - 해 → 구름 → 해

$$\begin{aligned} &P(\text{해}, \text{구름}, \text{해}; \text{좋음}, \text{나쁨}, \text{좋음}) \\ &= P(\text{해})P(\text{좋음} \mid \text{해}) \\ &\quad P(\text{구름} \mid \text{해})P(\text{나쁨} \mid \text{구름}) \\ &\quad P(\text{해} \mid \text{구름})P(\text{좋음} \mid \text{해}) \end{aligned}$$

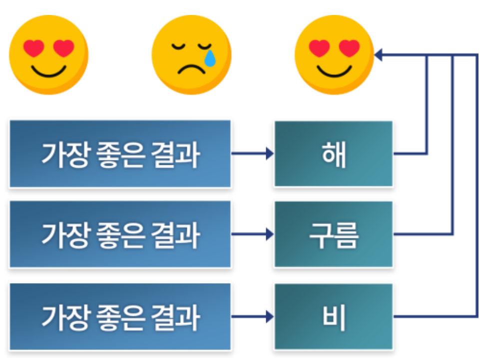
$$= 0.6 \times 0.8 \times 0.2 \times 0.4 \times 0.2 \times 0.8 = 0.006144$$

  - 구름 → 해 → 해

$$\begin{aligned} &P(\text{구름 해}, \text{해}; \text{좋음}, \text{나쁨}, \text{좋음}) \\ &= P(\text{구름})P(\text{좋음} \mid \text{구름}) \\ &\quad P(\text{해} \mid \text{구름})P(\text{나쁨} \mid \text{구름}) \\ &\quad P(\text{해} \mid \text{해})P(\text{좋음} \mid \text{해}) \end{aligned}$$

$$= 0.1 \times 0.6 \times 0.2 \times 0.2 \times 0.7 \times 0.8 = 0.001344$$

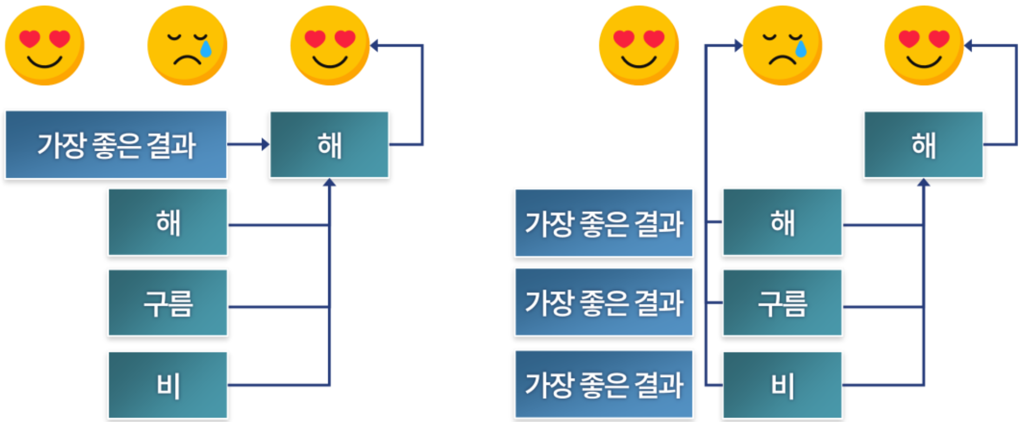
- 동적계획법



은닉 마아코프 모델의 최적 상태

❖ 최적 상태 문제

- 동적계획법



  - 단계가 3가지 있음

초기확률(Initial Probability)

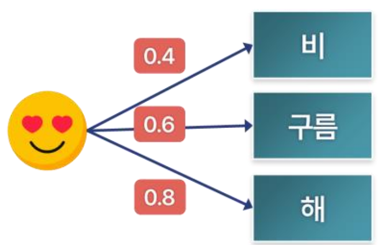
$$(0.3, 01, 0.6)$$

전이확률(Transition Probability)

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{비} & \text{구름} & \text{해} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{비} \\ \text{구름} \\ \text{해} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}$$

방출확률(Emission Probability)

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \text{좋음} & \text{나쁨} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{비} \\ \text{구름} \\ \text{해} \end{array} & \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix} \end{array}$$



$0.3 \times 0.4 = 0.12$

$0.1 \times 0.6 = 0.06$

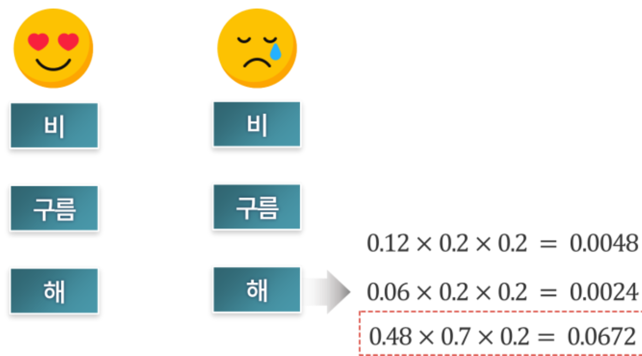
$0.6 \times 0.8 = 0.48$

  - 안정 상태 확률 0.3 / 0.1 / 0.6

은닉 마아코프 모델의 최적 상태

❖ 최적 상태 문제

- 동적계획법



- 마지막 단계에서도 같은 방법으로 최적 상태 결정