# noip 模拟赛题解

p_b_p_b

2022.9

## 1 彩票 (lottery)

注意到，在题目的限制下，一组合法的 $X, Y, Z_1, Z_2, Z_3$ 一定满足一个彩票至多只能中一个奖。因此不同奖之间可以看做是独立的。

因为只是要求后两位不一样，所以完全可以把一二等奖的后两位都先枚举了，这样三等奖的三个两位数都只需要无脑取剩下的两位数里最优的那个就行。

现在我们只枚举了 $10^4$ 种情况，所以干脆把二等奖的前两位也枚举掉，这样能中二等奖的彩票个数也确定下来了。

最后只需要看能否有一个中一等奖的彩票，只要有就给答案加上一等奖的奖金。

复杂度 $O(10^6)$ 。~~也就是常数。~~

## 2 战斗 (battle)

不难看出一共有 $(n-1)!$ 种战斗的顺序：共有 $n-1$ 个空位，每次会取出一个之前没有取出过的空位，让这个空位两边的人打一架。

这有一个很好的性质：在取出这个空位之前，它两边的人是互相没有见过的，所以左右是独立的。

因此可以看出一个划分子问题的方式：枚举最后一个被取出来的空位是哪个，那么左右就独立了，可以分别计算。

最暴力的做法当然是直接设 $dp_{l,r,x}$ 表示只考虑 $[l, r]$ 的人时，经过一番战斗之后 $x$ 把其他人全都干烂了的概率。转移就直接枚举区间内最后一个被取出的空位是第几个，并且枚举另一边的胜者是谁，进行转移。复杂度 $O(n^5)$ ，但常数很小。

从样例解释就不难看出，如果我们希望 $x$ 在 $[l, r]$ 中胜出，那么 $[l, x]$ 和 $[x, r]$ 是独立的，只需要分别求出答案即可。

于是可以设 $f_{l,r}$ 表示 $l$ 在 $[l,r]$ 中胜出的概率，$g_{l,r}$ 表示 $r$ 在 $[l,r]$ 中胜出的概率，于是 $dp_{l,r,x} = f_{l,x} \times g_{x,r}$ 。

$f, g$ 如何转移呢？以 $f$ 为例，仍然可以有一个非常暴力的做法，即直接枚举最后一个空位在哪，以及另一边的胜者是谁。尽管转移和 $dp$ 几乎一致，但是状态数的减少使得复杂度降为 $O(n^4)$ 。

状态数已经不太可能再往下减了，所以考虑优化转移。现在的转移需要同时枚举最后一个空位和另一边的胜者，但是可以发现，我们可以先枚举胜者，再枚举最后一个空位，把这两个循环解耦。

仍然以 $f$ 为例，另外设一个辅助数组 $h_{l,x}$ ，表示另一边的胜者是 $x$ 时，所有可能的最后一个空位得到的概率之和。那么最终的转移就是

$$
\begin{aligned}
f_{l,r} &= \sum_{x=l+1}^{r} \frac{1}{r-l} h_{l,x} f_{x,r} \\
h_{l,x} &= \sum_{p=l}^{x-1} f_{l,p} g_{p+1,x}
\end{aligned}
$$

$g$ 的转移同理。

最终复杂度 $O(n^3)$ ，且常数仍然不大。

# 3 扑克 (poker)

显然我们只能抽出至多 $O(\log n + \log p)$ 个质数相乘，否则就太大了。

既然抽出来的质数很少，那么它们加起来自然也就很小了。

既然抽出来的质数加起来很小，那么剩下的质数的和也就没几种情况了。

因此无脑枚举剩下的质数的和，然后用 $< 500$ 的质数尝试分解一下，判一下是不是个合法方案即可。

# 4 排队 (queue)

直接维护队列里每个人的编号和小组是不太现实的。

但是注意到题目给的一个关键性质：一个人只要选择插队，旁边就必然有一个相同小组的人，从而如果把连续的相同小组的人缩在一起，那么插队其实是不会产生影响的。

于是可以先维护一下队列里连续的小组相同的人的连续段，那么加入一个人时要么连续段不变，要么在最后新增一个连续段。还可以用线段树维护每个连续段里的人数，从而能够快速确定新加入的这个人能插后面的几个连续段。

既然连续段的相对顺序不会发生变化，就可以对每个小组维护其连续段的位置集合。那么确定了新加入的这个人能插几个连续段之后，再一个二分就可以找到最靠前的相同小组的连续段在哪里。

所以复杂度 $O(n \log n)$ 。