前言

微积分是一门数学的分支，主要研究函数的**极限**、**导数{微分}**、**积分**以及它们之间的关系。微积分在科学、工程、经济学等领域具有广泛的应用，对于解决实际问题和理论探索具有重要意义。

微积分的发展历程可以追溯到古希腊时代，但直到17世纪才由**莱布尼茨**和**牛顿**独立发展起来。两位数学家分别提出了微积分的基本概念和方法，并在数学史上留下了重要贡献。此后，微积分得到了不断的发展和完善，成为现代数学体系中的核心组成部分。

本书为微积分的讲义，并不会去叙述太多的基本概念，而是对微积分方面的问题进行探究和思考，希望本书可以帮助到你。

> 数学是在不断探索中前进的，它本身对人类充满重要意义且充满启发，本书作为第一版，虽经过仔细审阅，难免存在疏漏或不足，恳请各位读者指正，我们会认真核实并在后续的版本中修订完善。

编者
2025年9月13日

目录

1. 第一章：极限，连续
2. 第二章：导数
3. 第三章：不定积分
4. 第四章：定积分
5. 第五章：定积分的运用
6. 第六章：微分方程

关于我们

广山理工大学是一所理工科为特色，由多学科领域优秀研究者共同发起建立的学术机构。主要以数学、物理、化学、计算机科学与工程技术为核心发展方向，始终坚持理论与实际相结合，并以此系统推动教学资源的建设与创新。我们尤其注重将高深的专业知识转化为清晰有序、易于理解的表述，使每本教材内容严谨，更具备良好的可读性与自学适用性。

在教材建设方面，我们建立了包括内容审定、语言润色和版型设计三个环节在内的标准化流程，确保每一部教学材料在科学性、表达准确性和视觉与精神体验上的优良水准。教科书被不同学习的人试用，持续吸纳意见，不断提升教材质量，致力于为教师学生提供更加舒适、高效的学习体验。

面向未来，我们将持续完善教学资源体系，重点扩充分析与习题库，优化章节知识结构，最终形成一套模块完整、可持续更新、广泛适用于教学和自主学习的参考教材。我们将吸纳人才与年轻学者，共同打造一个开放、合作、充满创新活力的高等研究院。

我们立志通过扎实而富有成效的工作，不断提高学术影响和教育品质，努力将广山理工大学建设成为一所理工教育领域备受尊敬、广受认可的高等研究院！

广山理工大学编写组

第1章 极限

1.1 引入

数列极限的定义是现代数学分析中最基本的概念之一，它的产生经历了漫长的历史过程，是数学家们在研究无限过程和逼近思想时逐步发展起来的。

引入问题

例如 $a_n = 1 - \frac{1}{2^n}$，如果 n 大到极限时，则 2^n 会非常大，$\frac{1}{2^n}$ 会变得非常小，最终这个数列会趋近于 1。

下面给出极限的严格定义，通常被称为 **“ε-N”定义**，是现代数学分析中的重要概念，由19世纪数学家魏尔斯特拉斯等人完善。

1.2 极限的定义

设 a_n 是一个数列，a 是一个实数。如果对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$，总存在一个正整数 N，使得当 $n > N$ 时，不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 恒成立，则称数列 a_n 收敛于 a，记作：

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

定义的详细解释

1. **任意小的正数** ε：ε 可任意小但必须大于 0，它描述数列的项与极限 a 之间的“接近程度”。
2. **存在正整数** N：N 依赖于 ε（不同 ε 对应不同 N），用于确定“从哪一项开始，数列项与 a 的距离小于 ε”。
3. **当 $n > N$ 时**：一旦 n 超过 N，所有后续项 a_n 都满足 $|a_n - a| < \varepsilon$，即数列项无限逼近 a。

1.3 举例说明

以数列 `{a_n} = \left{\frac{1}{n}\right}` 为例，证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$，步骤如下：

1. **给定** $\varepsilon > 0$：取 $\varepsilon = 0.1$（可任意取正数）。
2. **寻找正整数** N：要求 $n > N$ 时，$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < 0.1$，即 $\frac{1}{n} < 0.1$，解得 $n > 10$，因此取 $N = 10$。
3. **验证条件**：当 $n > 10$ 时，$\frac{1}{n} < 0.1$，满足 $|a_n - 0| < \varepsilon$。

由此可见，无论 ε 取多么小的正数，总能找到对应的 N，使 $n > N$ 时数列项与极限的差距小于 ε。

数学广角

1. 为什么要引入极限?

古典微积分的发展中，最早出现的是**积分**（求曲边梯形面积），随后是**微分**、**级数**，最后才是**极限。**早期求曲边梯形面积的思路是：用无数个小矩形面积之和逼近，”小矩形的宽”被称为**微分**，”求和过程”被称为**积分**。但这

一逻辑存在矛盾，贝克莱主教指出：

> "小矩形的宽不能为 0（否则面积和为 0），也不能非无限小（否则总能取更小的宽，如 $\frac{a}{2}$，与'最小'矛盾）。"

为解决这一矛盾，数学家开始推动微积分严格化：

1. **柯西的贡献**：用"数列逼近"描述矩形求和过程，给出数列极限的早期定义：

   > 若数列无限趋于某实数，且与该实数的差可任意小，则此实数为数列的极限。
   > 这一定义避开了"无限小矩形"的争议，奠定了**极限微积分**的基础。

2. **魏尔斯特拉斯的完善**：柯西的定义未明确"如何确定极限存在"，经过百年研究，魏尔斯特拉斯提出"ε-N"定义，彻底解决了极限的严格化问题，被称为"现代分析之父"。

课后习题

根据数列极限的"ε-N"定义，证明下列极限：

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n+1} = \frac{3}{2}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{0.999\cdots9}_{n\text{个}} = 1$