第一章 实变函数

俗话说："实变函数学十遍，泛函分析心泛函"接下来我们简要了解实变函数

1.1 集合论

所谓集合论，作为代数学基础，有必要深入浅出。

1. 集合的直观定义与表示

- **直观描述**：集合是 "由确定的、可区分的对象（称为**元素**）组成的整体"。

  例："所有正整数""平面上的所有圆""字母 a、b、c" 都是集合；而 "所有大的数""好看的颜色" 因 "不确定"，不构成集合。

- **符号表示**：
  - 集合用大写字母表示（如A、B、S），元素用小写字母表示（如x、y、a）；
  - 元素与集合的关系：若x是集合A的元素，记为$\boldsymbol{x \in A}$（读作 "x属于A"）；若不是，记为$\boldsymbol{x \notin A}$；
  - 集合的两种表示法：

1. **列举法**：直接列出所有元素，如$A = 1, 2, 3$ （有限集）、$\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, \ldots$ （无限集）；
2. **描述法**：通过元素的属性定义，如$B = x \mid x$ 是偶数（读作 "B是所有满足x为偶数的元素x的集合"）。

2. 集合间的基本关系与运算

集合论的核心是研究集合之间的 "关系" 与 "操作"，这是后续所有抽象概念的基础。

（1）基本关系

关系名称	定义	符号表示	示例
子集	若A的所有元素都属于B，则A是B的子集	$A \subseteq B$（等价于$\forall x, x \in A \implies x \in B$）	$1, 2 \subseteq 1, 2, 3$
真子集	$A \subseteq B$且B中存在元素不属于A	$A \subset B$（等价于$A \subseteq B \land \exists x, x \in B \land x \notin A$）	$1, 2 \subset 1, 2, 3$
相等	$A \subseteq B$且$B \subseteq A$（元素完全相同）	$A = B$（等价于$A \subseteq B \land B \subseteq A$）	$x \mid x^2 = 1 = 1, -1$
空集	没有任何元素的集合（唯一）	$\emptyset = x \mid x \neq x$	$x \mid x + 1 = x = \emptyset$

关键性质：

- 空集是所有集合的子集：$\forall A, \emptyset \subseteq A$；
- 子集的传递性：若$A \subseteq B$且$B \subseteq C$，则$A \subseteq C$。

（2）基本运算

运算名称	定义（逻辑表达式）	符号表示	示例
并集	由A或B的所有元素组成	$A \cup B = x \mid x \in A \lor x \in B$	$1, 2 \cup 2, 3 = 1, 2, 3$
交集	由A且B的所有元素组成	$A \cap B = x \mid x \in A \land x \in B$	$1, 2 \cap 2, 3 = 2$
补集	不属于A但属于全集U的元素组成	$A^c = x \mid x \in U \land x \notin A$ （或记为$\complement_U A$）	若$U = 1, 2, 3$，则$1, 2^c = 3$
差集	属于A但不属于B的元素组成	$A \setminus B = x \mid x \in A \land x \notin B$	$1, 2, 3 \setminus 2, 4 = 1, 3$

运算律（核心）：

- 交换律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$；
- 结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$；
- 分配律：$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$，$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$；
- 德摩根律：$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$，$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ （"并的补等于补的交，交的补等于补的并"）。

3. 集合论的核心问题：为何需要公理？

19 世纪末，康托尔（集合论创始人）提出 "朴素集合论"，仅通过 "集合是元素的整体" 这一直观定义研究集合，但很快出现了**罗素悖论**：

考虑集合$R = x \mid x \notin x$（“所有不属于自身的集合组成的集合”），问：R是否属于自身？

- 若$R \in R$，则R满足 “$x \notin x$”，矛盾；
- 若$R \notin R$，则R满足 “$x \notin x$”，应属于R，矛盾。

罗素悖论说明 “朴素集合论” 的定义太宽泛，会导致逻辑矛盾。因此，数学家需要一套**公理系统**来严格限制 “集合” 的定义 —— 只有满足公理的 “整体” 才被称为集合，从而排除悖论。这就是 ZFC 公理系统的诞生背景。

二、ZFC 公理系统：10 条核心公理详解

ZFC 公理系统由 10 条公理（或公理模式）组成，每条公理均基于一阶逻辑表述，以下结合逻辑公式与通俗语言解释其核心含义与作用。

公理名称	**一阶逻辑表述**	**通俗含义**	**作用**
1. 外延公理（Axiom of Extensionality）	$\forall A, \forall B, (\forall x, x \in A \leftrightarrow x \in B) \implies A = B$	若两个集合的元素完全相同，则这两个集合相等	定义 “集合相等” 的标准，确保集合由其元素唯一确定
2. 空集公理（Axiom of Empty Set）	$\exists A, \forall x, x \notin A$（记该集合为$\emptyset$）	存在一个没有任何元素的集合（空集$\emptyset$）	保证 “最小集合” 存在，是构造其他集合的起点
3. 配对公理（Axiom of Pairing）	$\forall x, \forall y, \exists A, \forall z, z \in A \leftrightarrow (z = x \vee z = y)$ （记为$A = x, y$）	对任意两个元素x、y，存在集合x, y	构造有限集（如$1, 2$），推广得单元素集$x = x, x$
4. 并集公理（Axiom of Union）	$\forall \mathcal{F}, \exists A, \forall x, x \in A \leftrightarrow \exists B, (B \in \mathcal{F} \wedge x \in B)$ （记为$A = \bigcup \mathcal{F}$）	对集合的集合$\mathcal{F}$，存在其所有元素的并集	从 “集合的集合” 构造更大集合，如$\mathcal{F} = 1, 2, 3, 4$，则$\bigcup \mathcal{F} = 1, 2, 3, 4$
5. 幂集公理（Axiom of Power Set）	$\forall A, \exists \mathcal{P}, \forall B, B \in \mathcal{P} \leftrightarrow B \subseteq A$ （记为$\mathcal{P} = \mathcal{P}(A)$）	对任意集合A，存在其所有子集组成的幂集$\mathcal{P}(A)$	构造 “更高层次” 的集合，如$A = 1, 2$，则$\mathcal{P}(A) = \emptyset, 1, 2, 1, 2$
6. 分离公理模式（Axiom Schema of Separation）	$\forall A, \exists B, \forall x, x \in B \leftrightarrow (x \in A \wedge \varphi(x))$ （$\varphi(x)$是不含B的公式）	从已有集合A中，筛选出满足性质$\varphi(x)$的元素组成新集合B	限制集合构造范围，避免罗素悖论（若用分离公理，$R = x \in A \mid x \notin x$ 是合法集合，无矛盾）
7. 替换公理模式（Axiom Schema of Replacement）	$\forall A, (\forall x \in A, \exists! y, \varphi(x, y)) \implies \exists B, \forall y, y \in B \leftrightarrow \exists x \in A, \varphi(x, y)$	若$\varphi(x, y)$定义了从A到集合的函数，则存在函数的像集B	构造 “与A等势” 的集合，支持无限集合的基数理论（如从$\mathbb{N}$构造$\mathbb{Z}$、$\mathbb{Q}$）
8. 无穷公理（Axiom of Infinity）	$\exists A, (\emptyset \in A \wedge \forall x, x \in A \implies x \cup x \in A)$	存在一个 “无限集合”：包含$\emptyset$，且若x在其中，则$x \cup x$也在其中	保证 “无限集合” 存在，是自然数集$\mathbb{N}$的定义基础（该公理的集合可对应$\mathbb{N} = \emptyset, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \ldots$）
9. 正则公理（Axiom of Regularity）	$\forall A, A \neq \emptyset \implies \exists x, (x \in A \wedge x \cap A = \emptyset)$	非空集合A中存在 “最小元素” x，与A无交集	排除 “无限递降属于关系”（如$x_1 \in x_2 \in x_3 \in \ldots$）和 “自属于集合”（如$x \in x$）

公理名称	一阶逻辑表述	通俗含义	作用
10. 选择公理（Axiom of Choice, AC）	$\forall \mathcal{F}, (\forall B \in \mathcal{F}, B \neq \emptyset \wedge \forall B_1, B_2 \in \mathcal{F}, B_1 \cap B_2 = \emptyset) \implies \exists f, (\forall B \in \mathcal{F}, f(B) \in B)$	对互不相交的非空集合族$\mathcal{F}$，存在选择函数f从每个集合选一个元素	解决 "无限集合的选择问题"，在分析、拓扑、代数中不可或缺（如证明 "任意向量空间有基"）

三、集合论与 ZFC 公理的典型例题

以下例题覆盖 "集合运算""幂集计算""公理应用" 三类核心题型，所有公式均用 LaTeX 表示。

例题 1：集合运算与德摩根律验证

已知全集$U = 1, 2, 3, 4, 5, 6$，集合$A = 2, 3, 5$，$B = 1, 3, 4, 6$，$C = 2, 4$，计算：

（1）$A \cup (B \cap C)$；（2）$(A \cup B)^c$；（3）验证德摩根律：$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$。

解答：

（1）第一步计算交集$B \cap C$：

由交集定义，$B \cap C = x \mid x \in B \wedge x \in C = 4$；

第二步计算并集$A \cup (B \cap C)$：

由并集定义，$A \cup (B \cap C) = x \mid x \in A \vee x \in 4 = 2, 3, 4, 5$。

（2）第一步计算并集$A \cup B$：

$A \cup B = x \mid x \in A \vee x \in B = 1, 2, 3, 4, 5, 6 = U$；

第二步计算补集$(A \cup B)^c$：

由补集定义，$(A \cup B)^c = x \mid x \in U \wedge x \notin (A \cup B) = U^c = \emptyset$。

（3）左侧验证$(A \cap B)^c$：

先算$A \cap B = x \mid x \in A \wedge x \in B = 3$，

再算补集$(A \cap B)^c = x \mid x \in U \wedge x \notin 3 = 1, 2, 4, 5, 6$；

右侧验证$A^c \cup B^c$：

先算$A^c = x \mid x \in U \wedge x \notin A = 1, 4, 6$，

$B^c = x \mid x \in U \wedge x \notin B = 2, 5$，

再算并集$A^c \cup B^c = x \mid x \in A^c \vee x \in B^c = 1, 2, 4, 5, 6$；

左侧 = 右侧，德摩根律得证。

例题 2：幂集计算与有限集幂集性质

设集合$A = a, b, c$，回答下列问题：

（1）计算A的幂集$\mathcal{P}(A)$；

（2）证明：若A是有限集（元素个数为n，记为$|A| = n$），则$|\mathcal{P}(A)| = 2^n$。

解答：

（1）由幂集定义，$\mathcal{P}(A)$是A的所有子集组成的集合，需包含：

- 空集：$\emptyset$；
- 单元素子集：a, b, c；
- 双元素子集：a, b, a, c, b, c；
- 自身：a, b, c；

因此，$\mathcal{P}(A) = \emptyset, a, b, c, a, b, a, c, b, c, a, b, c$。

（2）证明：构造A的子集等价于 “对每个元素选择‘包含’或‘不包含’”：

- 对A的第 1 个元素，有 2 种选择（包含 / 不包含）；
- 对A的第 2 个元素，有 2 种选择；
- ……
- 对A的第n个元素，有 2 种选择；

根据乘法原理，总子集数为$2 \times 2 \times \cdots \times 2$ （共n个 2 相乘），即2^n。

又因幂集$\mathcal{P}(A)$的元素个数等于A的子集个数，故$|\mathcal{P}(A)| = 2^n$。

本题中$|A| = 3$，故$|\mathcal{P}(A)| = 2^3 = 8$，与（1）的结果一致。

例题 3：正则公理的应用（排除自属于集合）

证明：不存在集合A，使得$A \in A$（即没有集合能包含自身作为元素）。

解答：

采用**反证法**，假设存在集合A满足$A \in A$。

第一步：由配对公理构造单元素集$B = A$（配对公理中取$x = y = A$，则存在集合B，使得$\forall z, z \in B \leftrightarrow z = A$，即$B = A$）。

第二步：分析B的非空性与正则公理的矛盾：

- 显然$B \neq \emptyset$（因$A \in B$）；
- 根据**正则公理**：对非空集合B，存在元素$x \in B$，使得$x \cap B = \emptyset$。

  但B中仅有一个元素$x = A$，因此需满足$A \cap B = \emptyset$。

第三步：导出矛盾：

由假设$A \in A$，且$A \in B$（$B = A$），故A是A与B的公共元素，即$A \in A \cap B$。

这与$A \cap B = \emptyset$（正则公理要求）矛盾，因此假设不成立。

综上，不存在集合A使得$A \in A$。

例题 4：选择公理的直观理解（有限与无限集合族）

（1）设集合族$\mathcal{F} = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ （有限个非空集合组成），构造$\mathcal{F}$的一个选择函数f；

（2）若集合族$\mathcal{F} = \mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \mathbb{N}_3, \ldots$，其中$\mathbb{N}_k = k, 2k, 3k, \ldots$ （无限个非空集合组成），说明为何构造f需要选择公理。

解答：

（1）选择函数的定义：对集合族$\mathcal{F}$，选择函数$f: \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}$ 满足$\forall B \in \mathcal{F}, f(B) \in B$。

对$\mathcal{F} = 1, 2, 3, 4, 5, 6$，可直接构造：

$f(1, 2) = 1$，$f(3, 4) = 3$，$f(5, 6) = 5$（即选择每个集合的最小元素）。

显然f满足 “对每个$B \in \mathcal{F}$，$f(B) \in B$”，是合法的选择函数（有限集合族可 “逐一选择”，无需选择公理）。

（2）对无限集合族$\mathcal{F} = \mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \ldots$，虽可构造$f(\mathbb{N}_k) = k$（选择每个$\mathbb{N}_k$的最小元素），但需选择公理的原因是：

当集合族$\mathcal{F}$是**无限**时，无法通过 “有限步操作逐一列举” 确定每个$B \in \mathcal{F}$ 的选择元素 —— 即使能写出具体规则（如 “选最小元素”），选择公理仍需 “统一断言”：“对任意非空集合族，存在至少一个选择函数”。

若无法写出具体选择规则（如$\mathcal{F}$是 “所有非空实数子集”），选择公理仍是断言选择函数存在性的唯一依据（否则无法保证存在这样的函数）。

四、延伸：ZFC 公理的地位与争议

- **基础地位**：ZFC 公理系统是目前数学界公认的 “标准基础”，几乎所有数学定理（如 “微积分基本定理”“代数基本定理”）都可转化为 ZFC 中的命题并证明。
- **独立性结果**：1963 年，科恩（Paul Cohen）通过 “力迫法” 证明：

1. 选择公理（AC）与 ZFC 的其他公理**独立**（无法在 ZFC 中证明或否定 AC）；
2. 连续统假设（CH：$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$，即 “自然数集的基数与实数集的基数之间没有其他基数”）与 ZFC**独立**。

   这说明 ZFC 并非 “万能”，仍有未解决的基础问题。

- **应用场景**：在分析（如证明 “闭区间上的连续函数可积”）、代数（如证明 “任意环有极大理想”）、拓扑（如证明 “吉洪诺夫定理”）中，选择公理是必需的；但在构造性数学（强调 “能具体构造对象” 而非 “断言存在”）中，数学家会避免使用选择公理（因它不提供具体构造方法）。

通过集合论与 ZFC 公理，数学获得了严谨的基础，而对其边界的探索（如独立性问题、大基数公理）仍在推动数学基础研究的发展。