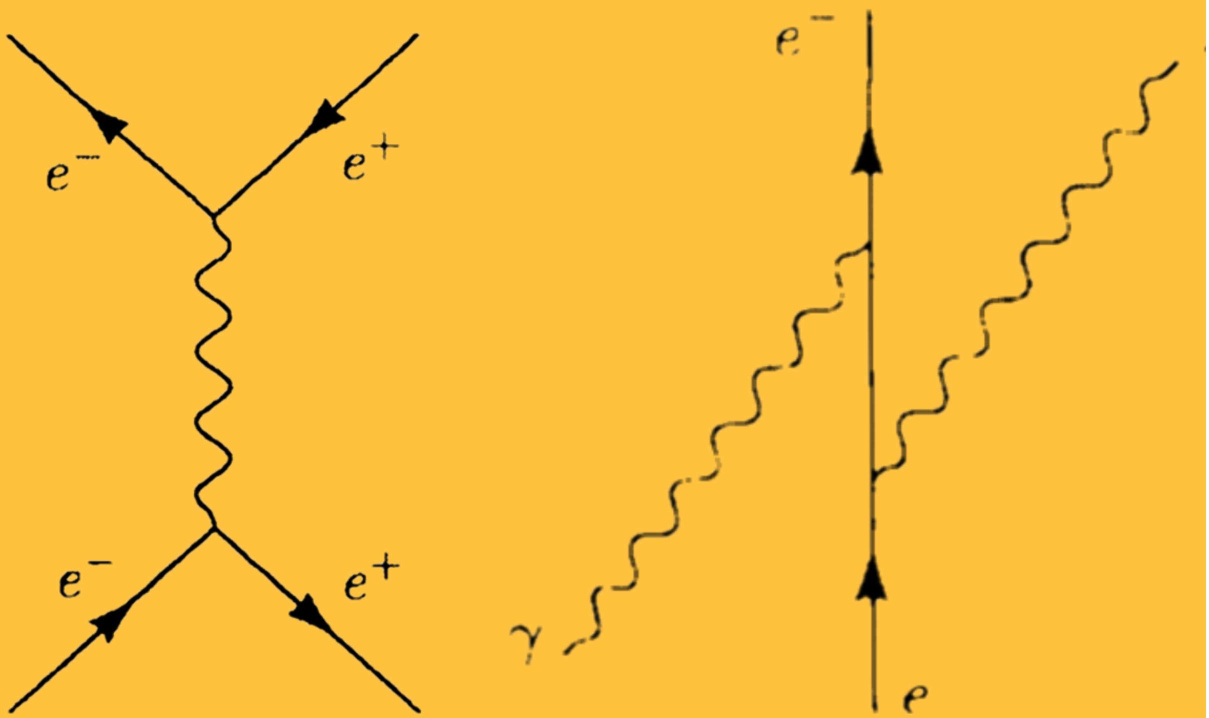
THE WAY TO MAKE QUANTUM FIELD THEORY

Mr.Lin

Quantum Field Theory



Department of Physics, Guan Shan University of Technology

量子场论构造方法

目录

第一章 绪论

第一章 绪论

1.1 基本介绍

所谓量子场论，可以理解为狭义相对论下的量子力学，本书将展示其构造的方法和基本原理，确保每一个公式都有推导过程，以深入浅出其原理

1.2 量子力学基础

下面我们来回顾**薛定谔方程**（Schrödinger equation）的推导过程： 对于波函数$\psi = A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(k\mathbf{r}+\omega t)}$,根据德罗布意（de Broglie）关系

$$\boxed{p = \hbar k = \frac{h}{\lambda}, E = \hbar\omega = h\nu}$$

其中ω是角频率，k是波矢，λ是波数，ν是频率,$\hbar = \frac{h}{2\pi}$是约化普朗克常数

有

$$\psi = A\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}+Et)}$$

考虑三维情况

对其$t, \mathbf{r}$求1、2阶偏导$\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} = -\frac{iE}{\hbar}\psi(\mathbf{r},t)$, $\nabla^2\psi(\mathbf{r},t) = -\frac{\mathbf{p}^2}{\hbar^2}Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} = -\frac{\mathbf{p}^2}{\hbar^2}\psi(\mathbf{r},t)$,得

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t} = E\psi(\mathbf{r},t)$$

根据经典能量-动量关系：

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$$

考虑哈密顿量$H=E+V$

得

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}=H\psi(\mathbf{r},t)=(\frac{\mathbf{p}^2}{2m}+V)\psi(\mathbf{r},t)$$

又

$$\nabla^2\psi(\mathbf{r},t)=-\frac{\mathbf{p}^2}{\hbar^2}Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}=-\frac{\mathbf{p}^2}{\hbar^2}\psi(\mathbf{r},t)$$

即

$$\mathbf{p}=-i\hbar\nabla$$

得Schrödinger equation：

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t}=(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V)\psi(\mathbf{r},t)$$

下面我们根据这个方法推导QFT中的一个运动方程

1.3 相对论能量-动量关系

我们知道，Schrödinger equation的推导基于经典的能量-动量关系$E=\frac{\mathbf{p}^2}{2m}$,缺陷是显然的，当电子接近光速运动时，Schrödinger equation就失效了.1905年，狭义相对论就被创立，薛定谔最初构建物质波的波动方程时，用的就是狭义相对论的能量-动量关系，但是，他写出的方程求不出氢原子能级公式，这说明那个方程是错的.

根据相对论能量-动量关系$E^2=m^2c^4+\mathbf{p}^2c^2$,由

$$\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}=-\frac{E^2}{\hbar^2}Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}=-\frac{iE}{\hbar}\psi(\mathbf{r},t)\text{,即}E^2\psi(\mathbf{r},t)=-\hbar^2\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2}$$

所以，

$$E^2\psi=m^2c^4\psi+\mathbf{p}^2c^2\psi$$
$$-\hbar^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=m^2c^4\psi-\hbar^2c^2\nabla^2\psi$$

两边同时除$-\hbar^2c^2$得

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\frac{m^2c^2}{\hbar^2}\psi+\nabla^2\psi$$

引入达朗贝尔算符(d'Alembertian operator):

$$\Box=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2$$

移项得

$$\boxed{(\Box+\frac{m^2c^2}{\hbar^2})\psi=0}$$

上面这个方程就是所谓的克莱因-高登方程(Klein-Gordon equation)　如果求解这个方程，算不出氢原子能级公式也就算了，竟然还会出现负的概率和负的能量，实际上，它只能描述自旋为0的粒子(希格斯玻色子、介子).

1.4 Dirac方程

狄拉克(Dirac)这时站了出来，他发现事情并不简单，问题出在能量的平方$E^2\psi$,但如果去掉平方，又会出现不便于运算的根号.

观察我们小学就学过的完全平方公式$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$，我们自然要问，能否使得$(Ax+By)^2=x^2+y^2$？显然，要满足$AB=0$和$A^2=B^2=1$,A和B完全没有解.

但我们要是换种思路，$AB\neq BA$,即不满足交换律.相信答案已经呼之欲出了，这不就是线性代数里的矩阵嘛，接下来我们可以开始推导场方程了，由$\frac{E^2}{c^2}=m^2c^2+\mathbf{p}^2$,得$\frac{E}{c}\psi=mcB\psi+A\mathbf{p}\psi$.

由$\nabla\psi(\mathbf{r},t)=\frac{i\mathbf{p}}{\hbar}Ae^{-\frac{i}{\hbar}(Et-\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})}=\frac{i\mathbf{p}}{\hbar}\psi(\mathbf{r},t)$,$\mathbf{p}=-i\hbar\nabla$

显然有

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-i\hbar\nabla A\psi+mcB\psi$$

得Dirac equation:

$$\boxed{(\frac{1}{c}B\frac{\partial}{\partial t}+i\hbar\nabla BA-mc)\psi=0}$$

1.5 量子场论的一些记号

引入Dirac γ矩阵，记$\gamma^0=B,\gamma^1=BA^1,\gamma^2=BA^2,\gamma^3=BA^3$（注意这里不是幂而是上标，$A=(A^1,A^2,A^3)$）,下面介绍两种表象

1.5.1 Chiral 表象（手征表象）

Chiral 表象的核心是将γ^5对角化，直接分离左旋（L）和右旋（R）手征分量，是量子场论（尤其是 QCD）中最常用的表象。其显式表达式如下：

矩阵符号	显式表达式（4×4 复矩阵）	物理意义
γ^0	$\begin{pmatrix}0 & I_2\\ I_2 & 0\end{pmatrix}$	时间分量，关联粒子与反粒子
γ^1	$\begin{pmatrix}0 & -\sigma_1\\ \sigma_1 & 0\end{pmatrix}$	空间 x 分量，描述自旋与 x 方向动量的耦合
γ^2	$\begin{pmatrix}0 & -\sigma_2\\ \sigma_2 & 0\end{pmatrix}$	空间 y 分量，描述自旋与 y 方向动量的耦合
γ^3	$\begin{pmatrix}0 & -\sigma_3\\ \sigma_3 & 0\end{pmatrix}$	空间 z 分量，描述自旋与 z 方向动量的耦合
γ^5	$\begin{pmatrix}-I_2 & 0\\ 0 & I_2\end{pmatrix}$	手征算子，对角元直接区分左旋（上 2×2）和右旋（下 2×2）

1.5.2 Dirac 表象（标准表象）

Dirac 表象的核心是将γ^0对角化，使 Dirac 旋量的 “上半部分” 对应非相对论极限下的 “粒子分量”，“下半部分” 对应 “反粒子分量”，适合分析非相对论近似（如原子物理中的电子）。其显式表达式如下：

矩阵符号	显式表达式（4×4 复矩阵）	物理意义
γ^0	$\begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}$	时间分量，对角化分离粒子（上 2×2）与反粒子（下 2×2）
γ^1	$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ -\sigma_1 & 0 \end{pmatrix}$	空间 x 分量，与 Chiral 表象仅符号差异
γ^2	$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ -\sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$	空间 y 分量，与 Chiral 表象仅符号差异
γ^3	$\begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ -\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}$	空间 z 分量，与 Chiral 表象仅符号差异
γ^5	$\begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$	手征算子，非对角化（需通过表象变换与 Chiral 表象关联）

1.5.3 度规

无论采用何种表象，γ矩阵均需满足以下**基本反对易关系**（定义式）：

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}I_4$$

其中：

- $\mu, \nu \in 0, 1, 2, 3$，对应 Minkowski 时空的 4 个坐标（$x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$）；
- $g^{\mu\nu}$是**Minkowski 度规**，即$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$，是粒子物理的主流选择；
- I_4是 4×4 单位矩阵。

此外，通常还定义第 5 个γ矩阵（γ^5），用于描述手征性（左旋 / 右旋粒子），其定义为：

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

γ^5与所有γ^μ（$\mu = 0, 1, 2, 3$）均反对易，即$\gamma^5, \gamma^\mu = 0$。

1.5.4 四维坐标

为了简化我们前面推导的两个方程，我们定义

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}) = (t, x, y, z) = \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

其中$\mathbf{x}=(x^1,x^2,x^3),\mu=0,1,2,3$　　而$x_\mu=(x^0,-x^1,-x^2,-x^3)=(x^0,-\mathbf{x})$　　定义内积

$x^2=(x_0)^2-(x_1)^2-(x_2)^2-(x_3)^2=\sum\limits_{\mu,\nu=0}^{3}g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu=g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu=x^\mu x_\mu$

用了**Einstein 求和约定**：不写出求和符号，重复的指标即表示求和.

定义

$$\partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x^\mu}=\begin{cases}\partial_0=\frac{\partial}{\partial x^0}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} & (\mu=0,\text{时间分量，描述时间变化率})\\ \partial_1=\frac{\partial}{\partial x^1}=\frac{\partial}{\partial x} & (\mu=1,\text{空间x分量，描述x方向空间变化率})\\ \partial_2=\frac{\partial}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial y} & (\mu=2,\text{空间y分量，描述y方向空间变化率})\\ \partial_3=\frac{\partial}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial z} & (\mu=3,\text{空间z分量，描述z方向空间变化率})\end{cases}$$

$$\partial^\mu=\begin{cases}\partial^0=g^{00}\partial_0=\partial_0=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} & (\text{时间分量，与}\partial_0\text{相同，因}g^{00}=1)\\ \partial^1=g^{11}\partial_1=-\partial_1=-\frac{\partial}{\partial x} & (\text{空间x分量，符号反转，因}g^{11}=-1)\\ \partial^2=g^{22}\partial_2=-\partial_2=-\frac{\partial}{\partial y} & (\text{空间y分量，符号反转，因}g^{22}=-1)\\ \partial^3=g^{33}\partial_3=-\partial_3=-\frac{\partial}{\partial z} & (\text{空间z分量，符号反转，因}g^{33}=-1)\end{cases}$$

且$\partial^\mu=g^{\mu\nu}\partial_\nu$

有$\Box=\partial^\mu\partial_\mu=\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2$

动量$p^\mu=(\frac{E}{c},\mathbf{p})=(\frac{E}{c},p_x,p_y,p_z)$

1.5.5 自然单位制

令

$$\boxed{\hbar=c=1}$$

这么一来，我们就可以化简Klein-Gordon equation：

$$\boxed{(\Box+m^2)\psi=0}$$

同样地，Dirac equation:

$$\boxed{(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu-mc)\psi=0}$$
$$\boxed{(i\gamma^\mu\partial_\mu-m)\psi=0}$$

非常简洁

1.6 从电磁学出发

我们知道，三维麦克斯韦(Maxwell)方程

方程名称	积分形式（宏观区域）	微分形式（空间某点）
高斯电场定律	$\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho dV$	$\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$
高斯磁场定律	$\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$	$\nabla\cdot\vec{B}=0$
法拉第电磁感应定律	$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$	$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$
麦克斯韦 - 安培定律	$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\left(\iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}+\varepsilon_0\frac{d}{dt}\iint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}\right)$	$\nabla\times\vec{B}=\mu_0\left(\vec{J}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$

下面我们根据Maxwell equation推导四维情况下的方程

根据矢量(vector)分析里的公式:

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})$$

根据$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$,有:

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$$

再代入第三个方程,得$\nabla\times\mathbf{E}=-\nabla\times\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$,即$\nabla\times(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t})=0$,由$\nabla\times\nabla\varphi=0$,$\mathbf{E}=-\nabla\varphi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$,故我们把$\mathbf{B},\mathbf{E}$代入剩下的方程，得到

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-\nabla^2\varphi-\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{A})=4\pi\rho$$
$$\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\nabla^2\mathbf{A}+\nabla(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{A})=4\pi\mathbf{J}$$

我们可以将这个方程升维了，定义$A^\mu=(\varphi,\mathbf{A})$,$J^\mu=(\rho,\mathbf{J})$,得到$\Box A^\mu-\partial^\mu(\partial_\nu A^\nu)=4\pi J^\mu$

进一步化简$\partial_\nu\partial^\nu A^\mu-\partial^\mu\partial_\nu A^\nu=4\pi J^\mu$,$\partial_\nu(\partial^\nu A^\mu-\partial^\mu A^\nu)=4\pi J^\mu$,定义$F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$,所以$\partial_\nu F^{\nu\mu}=4\pi J^\mu$,最终得电磁场方程

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu}=4\pi J^\nu}$$

1.7 拉格朗日密度

我们知道，在分析力学中，有欧拉-拉格朗日(Euler-Lagrange)方程,我们可以把位置q改成ϕ,得到

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)=0$$

其中拉格朗日密度$\mathcal{L}=\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)$,作用量$S=\int d^4x\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)$

大家肯定听说过标准模型(Standard Model)的拉格朗日量,即

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_{SM} = -\frac{1}{2}\partial_\nu g^a_\mu \partial_\nu g^a_\mu - g_s f^{abc}\partial_\mu g^a_\nu g^b_\mu g^c_\nu - \frac{1}{4}g_s^2 f^{abc}f^{ade} g^b_\mu g^c_\nu g^d_\mu g^e_\nu - \partial_\nu W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - \\
&M^2 W^+_\mu W^-_\mu - \frac12 \partial_\nu Z^0_\mu \partial_\nu Z^0_\mu - \frac{1}{2c_w^2} M^2 Z^0_\mu Z^0_\mu - \frac12 \partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu - igc_w(\partial_\nu Z^0_\mu(W^+_\mu W^-_\nu - \\
&W^+_\nu W^-_\mu) - Z^0_\nu(W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu \partial_\nu W^+_\mu) + Z^0_\mu(W^+_\nu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\nu \partial_\nu W^+_\mu)) - \\
&igs_w(\partial_\nu A_\mu(W^+_\mu W^-_\nu - W^+_\nu W^-_\mu) - A_\nu(W^+_\mu \partial_\nu W^-_\mu - W^-_\mu \partial_\nu W^+_\mu) + A_\mu(W^+_\nu \partial_\nu W^-_\mu - \\
&W^-_\nu \partial_\nu W^+_\mu)) - \frac12 g^2 W^+_\mu W^-_\mu W^+_\nu W^-_\nu + \frac12 g^2 W^+_\mu W^-_\nu W^+_\mu W^-_\nu + g^2 c_w^2 (Z^0_\mu W^+_\mu Z^0_\nu W^-_\nu - \\
&Z^0_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + g^2 s_w^2 (A_\mu W^+_\mu A_\nu W^-_\nu - A_\mu A_\mu W^+_\nu W^-_\nu) + g^2 s_w c_w (A_\mu Z^0_\nu (W^+_\mu W^-_\nu - \\
&W^+_\nu W^-_\mu) - 2A_\mu Z^0_\mu W^+_\nu W^-_\nu) - \frac12 \partial_\mu H \partial_\mu H - 2M^2 \alpha_h H^2 - \partial_\mu \phi^+ \partial_\mu \phi^- - \frac12 \partial_\mu \phi^0 \partial_\mu \phi^0 - \\
&\beta_h \left(\frac{2M^2}{g^2} + \frac{2M}{g}H + \frac12(H^2 + \phi^0\phi^0 + 2\phi^+\phi^-)\right) + \frac{2M^4}{g^2}\alpha_h - \\
&g\alpha_h M (H^3 + H\phi^0\phi^0 + 2H\phi^+\phi^-) - \\
&\frac18 g^2 \alpha_h (H^4 + (\phi^0)^4 + 4(\phi^+\phi^-)^2 + 4(\phi^0)^2\phi^+\phi^- + 4H^2\phi^+\phi^- + 2(\phi^0)^2H^2) - \\
&gMW^+_\mu W^-_\mu H - \frac12 g\frac{M}{c_w^2} Z^0_\mu Z^0_\mu H - \\
&\frac12 ig \left(W^+_\mu(\phi^0\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^0) - W^-_\mu(\phi^0\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu\phi^0)\right) + \\
&\frac12 g \left(W^+_\mu(H\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu H) + W^-_\mu(H\partial_\mu\phi^+ - \phi^+\partial_\mu H)\right) + \frac12 g\frac{1}{c_w}(Z^0_\mu(H\partial_\mu\phi^0 - \phi^0\partial_\mu H) + \\
&M\left(\frac{1}{c_w}Z^0_\mu\partial_\mu\phi^0 + W^+_\mu\partial_\mu\phi^- + W^-_\mu\partial_\mu\phi^+\right) - ig\frac{s_w^2}{c_w}MZ^0_\mu(W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + igs_wMA_\mu(W^+_\mu\phi^- - \\
&W^-_\mu\phi^+) - ig\frac{1-2c_w^2}{2c_w}Z^0_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) + igs_wA_\mu(\phi^+\partial_\mu\phi^- - \phi^-\partial_\mu\phi^+) - \\
&\frac14 g^2 W^+_\mu W^-_\mu (H^2 + (\phi^0)^2 + 2\phi^+\phi^-) - \frac18 g^2 \frac{1}{c_w^2} Z^0_\mu Z^0_\mu (H^2 + (\phi^0)^2 + 2(2s_w^2-1)^2\phi^+\phi^-) - \\
&\frac12 g^2 \frac{s_w^2}{c_w} Z^0_\mu \phi^0 (W^+_\mu\phi^- + W^-_\mu\phi^+) - \frac12 ig^2 \frac{s_w^2}{c_w} Z^0_\mu H (W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) + \frac12 g^2 s_w A_\mu \phi^0 (W^+_\mu\phi^- + \\
&W^-_\mu\phi^+) + \frac12 ig^2 s_w A_\mu H (W^+_\mu\phi^- - W^-_\mu\phi^+) - g^2\frac{s_w}{c_w}(2c_w^2-1)Z^0_\mu A_\mu \phi^+\phi^- - \\
&g^2 s_w^2 A_\mu A_\mu \phi^+\phi^- + \frac12 ig_s \lambda^a_{ij}(\bar q^\sigma_i \gamma^\mu q^\sigma_j) g^a_\mu - \bar e^\lambda(\gamma\partial + m^\lambda_e)e^\lambda - \bar\nu^\lambda(\gamma\partial + m^\lambda_\nu)\nu^\lambda - \bar u^\lambda_j(\gamma\partial + \\
&m^\lambda_u)u^\lambda_j - \bar d^\lambda_j(\gamma\partial + m^\lambda_d)d^\lambda_j + igs_wA_\mu\left(-(\bar e^\lambda\gamma^\mu e^\lambda) + \frac23(\bar u^\lambda_j\gamma^\mu u^\lambda_j) - \frac13(\bar d^\lambda_j\gamma^\mu d^\lambda_j)\right) + \\
&\frac{ig}{4c_w}Z^0_\mu\{(\bar\nu^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar e^\lambda\gamma^\mu(4s_w^2-1-\gamma^5)e^\lambda) + (\bar d^\lambda_j\gamma^\mu(\frac43 s_w^2 - 1 - \gamma^5)d^\lambda_j) + \\
&(\bar u^\lambda_j\gamma^\mu(1-\frac83 s_w^2+\gamma^5)u^\lambda_j)\} + \frac{ig}{2\sqrt2}W^+_\mu\left((\bar\nu^\lambda\gamma^\mu(1+\gamma^5)U^{lep}{}_{\lambda\kappa}e^\kappa) + (\bar u^\lambda_j\gamma^\mu(1+\gamma^5)C_{\lambda\kappa}d^\kappa_j)\right) + \\
&\frac{ig}{2\sqrt2}W^-_\mu\left((\bar e^\kappa U^{lep\dagger}{}_{\kappa\lambda}\gamma^\mu(1+\gamma^5)\nu^\lambda) + (\bar d^\kappa_j C^\dagger_{\kappa\lambda}\gamma^\mu(1+\gamma^5)u^\lambda_j)\right) + \\
&\frac{ig}{2M\sqrt2}\phi^+\left(-m^\kappa_e(\bar\nu^\lambda U^{lep}{}_{\lambda\kappa}(1-\gamma^5)e^\kappa) + m^\lambda_\nu(\bar\nu^\lambda U^{lep}{}_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)e^\kappa)\right) + \\
&\frac{ig}{2M\sqrt2}\phi^-\left(m^\lambda_e(\bar e^\lambda U^{lep\dagger}{}_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)\nu^\kappa) - m^\kappa_\nu(\bar e^\lambda U^{lep\dagger}{}_{\lambda\kappa}(1-\gamma^5)\nu^\kappa)\right) - \frac g2\frac{m^\lambda_\nu}{M}H(\bar\nu^\lambda\nu^\lambda) - \\
&\frac g2\frac{m^\lambda_e}{M}H(\bar e^\lambda e^\lambda) + \frac{ig}{2}\frac{m^\lambda_\nu}{M}\phi^0(\bar\nu^\lambda\gamma^5\nu^\lambda) - \frac{ig}{2}\frac{m^\lambda_e}{M}\phi^0(\bar e^\lambda\gamma^5 e^\lambda) - \frac14\bar\nu_\lambda M^R_{\lambda\kappa}(1-\gamma_5)\hat\nu_\kappa - \\
&\overline{\frac14\bar\nu_\lambda M^R_{\lambda\kappa}(1-\gamma_5)\hat\nu_\kappa} + \frac{ig}{2M\sqrt2}\phi^+\left(-m^\kappa_d(\bar u^\lambda_j C_{\lambda\kappa}(1-\gamma^5)d^\kappa_j) + m^\lambda_u(\bar u^\lambda_j C_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)d^\kappa_j)\right) + \\
&\frac{ig}{2M\sqrt2}\phi^-\left(m^\lambda_d(\bar d^\lambda_j C^\dagger_{\lambda\kappa}(1+\gamma^5)u^\kappa_j) - m^\kappa_u(\bar d^\lambda_j C^\dagger_{\lambda\kappa}(1-\gamma^5)u^\kappa_j)\right) - \frac g2\frac{m^\lambda_u}{M}H(\bar u^\lambda_j u^\lambda_j) - \\
&\frac g2\frac{m^\lambda_d}{M}H(\bar d^\lambda_j d^\lambda_j) + \frac{ig}{2}\frac{m^\lambda_u}{M}\phi^0(\bar u^\lambda_j\gamma^5u^\lambda_j) - \frac{ig}{2}\frac{m^\lambda_d}{M}\phi^0(\bar d^\lambda_j\gamma^5 d^\lambda_j) + \bar G^a\partial^2G^a + g_s f^{abc}\partial_\mu\bar G^a G^b g^c_\mu + \\
&\bar X^+(\partial^2-M^2)X^+ + \bar X^-(\partial^2-M^2)X^- + \bar X^0(\partial^2-\frac{M^2}{c_w^2})X^0 + \bar Y\partial^2 Y + igc_wW^+_\mu(\partial_\mu\bar X^0X^- - \\
&\partial_\mu\bar X^+X^0) + igs_wW^+_\mu(\partial_\mu\bar YX^- - \partial_\mu\bar X^+Y) + igc_wW^-_\mu(\partial_\mu\bar X^-X^0 - \\
&\partial_\mu\bar X^0X^+) + igs_wW^-_\mu(\partial_\mu\bar X^-Y - \partial_\mu\bar YX^+) + igc_wZ^0_\mu(\partial_\mu\bar X^+X^+ - \\
&\partial_\mu\bar X^-X^-) + igs_wA_\mu(\partial_\mu\bar X^+X^+ - \\
&\partial_\mu\bar X^-X^-) - \frac12 gM\left(\bar X^+X^+H + \bar X^-X^-H + \frac{1}{c_w^2}\bar X^0X^0H\right) + \frac{1-2c_w^2}{2c_w}igM\left(\bar X^+X^0\phi^+ - \bar X^-X^0\phi^-\right) + \\
&\frac{1}{2c_w}igM\left(\bar X^0X^-\phi^+ - \bar X^0X^+\phi^-\right) + igMs_w\left(\bar X^0X^-\phi^+ - \bar X^0X^+\phi^-\right) + \\
&\frac12 igM\left(\bar X^+X^+\phi^0 - \bar X^-X^-\phi^0\right).
\end{aligned}
$$

这个式子虽然没错，但会让人觉得物理学非常复杂，其实可以用张量大量化简.我们将在后面全面地讲解标准模型.

根据我们前面推导的场方程，我们完全可以通过Euler-Lagrange equation反推拉格朗日密度，对于Klein-Gordon equation，我们有标量场$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) + \frac{1}{2}m^2\phi$,对于Dirac equation，显然地，有$\mathcal{L} = \bar\psi(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$，对于电磁场，不难注意到$-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu$.

第二章 Path Integral 与 Feynman Diagram