

Machine Learning 1 - Week 1

Linh Nguyen

August 2022

1

(a)

		X					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$p(y)$
Y	y_1	0.01	0.02	0.03	0.1	0.1	0.26
	y_2	0.05	0.1	0.05	0.07	0.2	0.47
	y_3	0.1	0.05	0.03	0.05	0.04	0.27
	$p(x)$	0.16	0.17	0.11	0.22	0.34	1

(b)

$$p(X = x \mid Y = y_1)$$

$$p(X = x_1 \mid Y = y_1) = \frac{p(X = x_1, Y = y_1)}{p(y_1)} = \frac{0.01}{0.26} = \frac{1}{26}$$

$$p(X = x_2 \mid Y = y_1) = \frac{p(X = x_2, Y = y_1)}{p(y_1)} = \frac{0.02}{0.26} = \frac{1}{13}$$

$$p(X = x_3 \mid Y = y_1) = \frac{p(X = x_3, Y = y_1)}{p(y_1)} = \frac{0.03}{0.26} = \frac{3}{26}$$

$$p(X = x_4 \mid Y = y_1) = \frac{p(X = x_4, Y = y_1)}{p(y_1)} = \frac{0.1}{0.26} = \frac{5}{13}$$

$$p(X = x_5 \mid Y = y_1) = \frac{p(X = x_5, Y = y_1)}{p(y_1)} = \frac{0.1}{0.26} = \frac{5}{13}$$

$$\begin{aligned}
& p(X = x \mid Y = y_3) \\
p(X = x_1 \mid Y = y_3) &= \frac{p(X = x_1, Y = y_3)}{p(y_3)} = \frac{0.1}{0.27} = \frac{10}{27} \\
p(X = x_2 \mid Y = y_3) &= \frac{p(X = x_2, Y = y_3)}{p(y_3)} = \frac{0.05}{0.27} = \frac{5}{27} \\
p(X = x_3 \mid Y = y_3) &= \frac{p(X = x_3, Y = y_3)}{p(y_3)} = \frac{0.03}{0.27} = \frac{1}{9} \\
p(X = x_4 \mid Y = y_3) &= \frac{p(X = x_4, Y = y_3)}{p(y_3)} = \frac{0.05}{0.27} = \frac{5}{27} \\
p(X = x_5 \mid Y = y_3) &= \frac{p(X = x_5, Y = y_3)}{p(y_3)} = \frac{0.04}{0.27} = \frac{4}{27}
\end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_y[\mathbb{E}_x[x \mid y]] &= \mathbb{E}_y \left[\sum_x x P(X = x \mid Y) \right] \\
&= \sum_y \sum_x x P(X = x \mid Y = y) P(Y = y) \\
&= \sum_y \sum_x P(Y = y \mid X = x) P(X = x) \\
&= \sum_x x P(X = x) \sum_y P(Y = y \mid X = x) \\
&= \sum_x x P(X = x) \\
&= \mathbb{E}_X[X]
\end{aligned}$$

3

X: "Người được phỏng vấn dùng sản phẩm X"
Y: "Người được phỏng vấn dùng sản phẩm Y"

Theo đề bài, ta có: $P(X) = 0.207$, $P(Y) = 0.5$, $P(X | Y) = 0.365$

(a)

$$P(X, Y) = P(X | Y)P(Y) = 0.365 \cdot 0.5 = 0.1825$$

(b)

$$P(Y | \bar{X}) = \frac{P(\bar{X} | Y)P(Y)}{P(\bar{X})} = \frac{[1 - P(X | Y)]P(Y)}{1 - P(X)} = \frac{(1 - 0.365) \cdot 0.5}{1 - 0.207} = 0.4004$$

4

$$\begin{aligned} V_X &= E_X[(x - E_X[x])^2] \\ &= E_X[x^2 - 2xE_X[x] + (E_X[x])^2] \\ &= E_X[x^2] - 2E_X[X]E_X[x] + (E_X[x])^2 \\ &= E_X[x^2] - (E_X[x])^2 \end{aligned}$$

5

1. A: "Ô tô ở cửa số 1"

• B: "Monty mở ô cửa số 2"

• C: "Ô tô ở cửa số 3"

Giả sử khi bạn mở ô cửa số 1, Monty mở ô cửa số 2. Ta cần tính 2 xác suất:

• $P(A | B)$: Xác suất ô tô ở cửa số 1 khi Monty mở cửa số 2

• $P(C | B)$: Xác suất ô tô ở cửa số 3 khi Monty mở cửa số 2

Ta có: $P(A) = P(C) = \frac{1}{3}$

Xác suất để Monty mở cửa số 2 là $P(B) = \frac{1}{2}$. (Theo luật ông ta phải mở một trong hai cửa còn lại, khác cửa ta đã chọn).

Nếu ô tô nằm ở ô cửa số 1, Monty có thể mở 1 trong 2 ô còn lại nên $P(B | A) = \frac{1}{2}$

Nếu ô tô nằm ở ô cửa số 3, Monty chỉ có thể mở ô cửa số 2 nên $P(B | C) = 1$

$$P(A | B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(C | B) = \frac{P(B|C)P(C)}{P(B)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Như vậy, xác suất mở trúng ô tô sẽ cao hơn khi bạn đổi sang ô cửa còn lại chưa được mở