3.1.3 二维连续型 r.v.

定义 3.3 若存在 $f(x,y)\geq 0$ s.t. (X,Y)的分布函数 $F(x,y)$ 满足

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

则称 (X,Y)为连续型 r.v.，称 $f(x,y)$为(X,Y)的（联合）概率密度.

性质： 设 (X,Y)为连续型 r.v. 概率密度为 $f(x,y)$. 则

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1.$

2) $\forall\ B\subset \mathbb{R}^2$,

$$P\big((X,Y)\in B\big)=\iint_B f(x,y)\,dx\,dy.$$

3) 在 $f(x,y)$的连续点上,

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}$$

4) X,Y为一维连续型 r.v.，且

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy,\qquad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx.$$

（若 X,Y为连续型，则 (X,Y)不一定为连续型. 如 (X,X)）.

例 设 (X,Y)概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+axy, & 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 2 \\ 0, & 其它\end{cases}$$

求： 1) a 2) $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 3) $F(x,y)$ 4) $P(X+Y\geq 1)$

解. 1) 由 $\displaystyle 1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^2 dy\,(x^2+axy)$

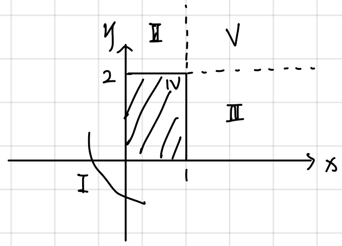
$$=\frac{2}{3}+\frac{a}{2}\cdot 2 \quad 得\quad a=\frac{1}{3}.$$

2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int_0^2 x^2+\frac{1}{3}xy\,dy=2x^2+\frac{2}{3}x,\quad 0\le x\le 1$

$\therefore\ f_X(x)=\begin{cases}2x^2+\frac{2}{3}x, & 0\le x\le 1\\ 0, & 其它\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_0^1 x^2+\frac{1}{3}xy\,dx=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y,\quad 0\le y\le 2$

$\therefore\ f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}+\frac{1}{6}y, & 0\le y\le 2\\ 0, & 其它\end{cases}$



3) I. $x<0$ 或 $y<0$, $F(x,y)=0$

II. $0\le x<1$ 且 $y\ge 2$.

$$F(x,y)=\int_0^x du\int_0^2 dv\,\left(u^2+\frac{1}{3}uv\right)$$

$$=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}x^2$$

III. $x\ge 1$ 且 $0\le y<2$

$$F(x,y)=\int_0^1 du\int_0^y dv\,\left(u^2+\frac{1}{3}uv\right)$$

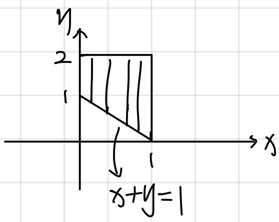
$$=\frac{y}{3}+\frac{1}{12}y^2$$

IV. $1\le x<2$ 且 $0\le y<2$

$$F(x,y)=\int_0^x du\int_0^y dv\,\left(u^2+\frac{1}{3}uv\right)$$

$$=\frac{x^3y}{3}+\frac{x^2y^2}{12}$$

V. $x\ge 1$ 且 $y\ge 2$, $F(x,y)=1$.



4) $P(X+Y\ge 1)=\iint_{x+y\ge 1} f(x,y)\,dx\,dy$

$$=\int_0^1 dx\int_{1-x}^2 dy\,\left(x^2+\frac{1}{3}xy\right)$$

$$=\int_0^1 dx\,\left(x^2(1+x)+\frac{x}{6}\left[4-(1-x)^2\right]\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{72}=\frac{48+18-1}{72}=\frac{65}{72}.\quad \square$$

常见的二维 r.v.

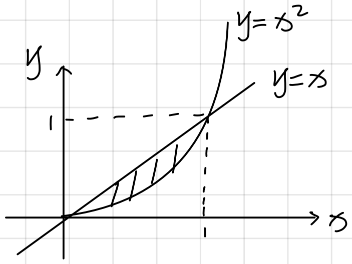
1) 二维均匀分布

$D \subset \mathbb{R}^2$. 面积 $0<m(D)<+\infty$. 若

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{m(D)}, & (x,y)\in D\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则称 (X,Y) 服从区域 D上的均匀分布. 记为 $(X,Y)\sim U(D)$.

例. 设 D为 $y=x$ 与 $y=x^2$ 所围区域. $(X,Y)\sim U(D)$. 求 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.



解. $m(D)=\int_0^1 (x-x^2)\,dx = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$0\le x<1$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$$

$$=\int_{x^2}^{x} 6\,dy = 6(x-x^2)$$

$0\le y<1$ $\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \int_y^{\sqrt{y}} 6\,dx = 6(\sqrt{y}-y)$

$$\therefore\quad f_X(x)=\begin{cases}6(x-x^2), & 0\le x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0\le y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ ▥

多维均匀分布的边缘分布不一定是均匀分布.

2) 二维正态分布 $\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho$

$\vec{\mu}=(\mu_1,\mu_2)$ $\quad B=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{x}=(x,y)$

$$f(x,y)=(2\pi)^{-1}\,|B|^{-1/2}\,e^{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})B^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})^T}$$

记为 $(X,Y)\sim N(\vec{\mu},B)$.

$\because |B| = (1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2 \qquad B^{-1} = \frac{1}{(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$

$$\therefore f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} \right] \right\}$$

下面计算 $f_X(x)$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}}$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2} \cdot e^{+\frac{\rho^2(x-\mu_1)^2}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}}\,dy$$

$$\left[令\ z = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2} - \rho\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1} \qquad dz = dy/\sigma_2 \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2(1-\rho^2)}}\,dz}_{} = \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}$$

即 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$，多维正态分布的边缘分布为正态分布

3.3 随机变量的独立性

回忆 事件的独立性.

定义3.5 设 $(X_1,\cdots,X_n)$ 为 n 维 r.v.. 若对 $\forall\ B_1,\cdots,B_n\subset\mathbb{R}$, $\{X_i\in B_i\}\in\mathcal{F}$, $\forall\ 1\le i\le n$, 都有

$$P(X_1\in B_1,\ X_2\in B_2,\cdots,X_n\in B_n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\in B_i),$$

或等价地, $\forall\ x_i\in\mathbb{R}$, $1\le i\le n$,

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(x_i),$$

则称 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立.

对一族 r.v. $\{x_i\}_{i\in I}$, 若其中任意有限个相互独立, 则称 $\{x_i\}_{i\in I}$ 相互独立.

性质及判别方法

1) 若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立, 则其中 $\forall\ 2\le k\le n$ 个相互独立.

2) 对于离散型 r.v. $X_1,\cdots,X_n$, 相互独立

$\Leftrightarrow$ $P(X_1=x_1,\cdots,X_n=x_n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_i=x_i)$, $\forall\ x_1,\cdots,x_n$ 可能取值

即联合分布列等于边缘分布列的乘积.

3) 对于连续型 r.v. $X_1,\cdots,X_n$, 相互独立

$\Leftrightarrow$ $f(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f_{X_i}(x_i)$, $\forall\ x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$

即联合概率密度等于边缘概率密度的乘积.

4) 若 $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立, 则对 $\forall\ n$ 个函数 $g_1,\cdots,g_n$, $g_1(X_1),\cdots,g_n(X_n)$ 相互独立.

例. $(X,Y)\sim N\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right)$. 则 X 与 Y 独立 $\Leftrightarrow\rho=0$.

例. 设

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{1}{8\pi^3}(1-\sin x\sin y\sin z), & 0\le x,y,z\le 2\pi\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

则

$$f(x,y)=\int_0^{2\pi} f(x,y,z)\,dz$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi^2}, & 0\le x,y\le 2\pi\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0\le x\le 2\pi\\ 0, & 其它.\end{cases}$$

∴ X与Y，Y与Z，X与Z独立，但X,Y,Z不相互独立.