7. 参数估计

7.1 参数估计的概念

$$\begin{cases} \text{点估计} \\ \text{区间估计} \end{cases}$$

设θ是$F(x, \theta)$中的未知参数. 参数空间Θ: θ的所有可能取值.

样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n) \longrightarrow$ 估计量 $\hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n)$

$\longrightarrow$ 估计值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

7.2. 矩估计法和极大似然估计法

7.2.1 矩估计法

设 X 分布函数中含未知参数 $\theta_1, \cdots, \theta_k$. 令

$$\alpha_j(\theta_1, \cdots, \theta_k) = EX^j.$$

样本 $X_1, \cdots, X_n$. 令

$$A_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^j$$

解方程组

$$\alpha_j(\theta_1, \cdots, \theta_k) = A_j, \quad j=1, \cdots, k$$

设解为 $\hat{\theta}_j = \hat{\theta}_j(X_1, \cdots, X_n)$, $j=1, \cdots, k$.

称 $\hat{\theta}_j$, $j=1, \cdots, k$. 为 θ_j, $j=1, \cdots, k$ 的矩估计量.

理论依据: (大数律) $\quad A_j \xrightarrow{P} \alpha_j$, $n \to +\infty$.

例. 设 $\mu = EX$ 和 $\sigma^2 = DX$ 未知. 求 μ 和 σ^2 的矩估计.

解. $EX = \mu$, $EX^2 = \mu^2 + \sigma^2$.

解方程组

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i =: \bar{X} \qquad \hat{\mu}^2 + \widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

得 $\hat{\mu}=\overline{X}$

$$\widehat{\sigma^2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-(\overline{X})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=:\widetilde{S}^2$$

注：1) 矩估计量不唯一. 如对总体 $P(\lambda)$,

$$\hat{\lambda}=\overline{X}, \qquad \hat{\lambda}=\widetilde{S}^2.$$

(尽量采用低阶矩估计)

2) 可用样本k阶中心矩 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 估计总体k阶中心矩 $E(X-EX)^k$.

例. 设总体 $X\sim U(a,b)$, a,b 未知, 样本 $X_1,\cdots,X_n$. 求 a,b 矩估计

解: $EX=\frac{a+b}{2}$, $DX=\frac{(b-a)^2}{12}$.

令 $\begin{cases}\frac{\hat{a}+\hat{b}}{2}=\overline{X}\\ \frac{(\hat{b}-\hat{a})^2}{12}=\widetilde{S}^2\end{cases}$

$\hat{b}+\hat{a}=2\overline{X}$

$\hat{b}-\hat{a}=2\sqrt{3\widetilde{S}^2}$

得 $\begin{cases}\hat{b}=\overline{X}+\sqrt{3\widetilde{S}^2}\\ \hat{a}=\overline{X}-\sqrt{3\widetilde{S}^2}\end{cases}$. □

缺点: 设样本观测值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{11}$. 则

$$\hat{a}=-0.01 \qquad \hat{b}=0.414$$

但 $\frac{1}{2}>\hat{b}$.

7.2.2 极大似然估计.

例. 设袋中共有4个黑球和白球. 有放回摸3次, 结果为(白,白,黑). 估计袋中白球个数.

解. 令m表示袋中的白球数, 则总体 $X\sim B(1,\frac{m}{4})$

矩估计: $\frac{\hat{m}}{4}=\frac{2}{3}\Rightarrow\hat{m}=\frac{8}{3}$.

极大似然估计：

$$P(白,白,黑) = \left(\frac{m}{4}\right)^2 \cdot \left(1-\frac{m}{4}\right)$$

m	0	1	2	3	4
P	0	$\frac{3}{64}$	$\frac{8}{64}$	$\frac{9}{64}$	0

$m=3$ 时，$P(白,白,黑)$ 最大，所以 $\hat{m}=3$. □

极大似然原则：已发生的事件，其概率应该最大.

似然函数

$$L(x_1,\cdots,x_n;\theta) = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta), & 连续型. \\ \prod_{i=1}^{n} P_\theta(X=x_i), & 离散型. \end{cases}$$

θ 的极大似然估计值 $\hat{\theta}(x_1,\cdots,x_n)$

$$L(x_1,\cdots,x_n;\hat{\theta}) = \max_{\theta} L(x_1,\cdots,x_n;\theta)$$

θ 的极大似然估计量 $\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$

可通过下列方程组求解 $\hat{\theta}$：

$$\frac{\partial \ln L(x_1,\cdots,x_n;\hat{\theta})}{\partial \theta_i} = 0, \quad i=1,\cdots,k.$$

例. 设总体 $X\sim E(\frac{1}{\theta})$，样本观测值 $x_1,\cdots,x_n$. 求 θ 的极大似然估计值.

解 $$L(x_1,\cdots,x_n;\theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

$$\ln L(x_1,\cdots,x_n;\theta) = -\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i - n\ln\theta.$$

令 $$\frac{d\ln L(x_1,\cdots,x_n;\theta)}{d\theta} = \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n}{\theta}$$ 得 $\hat{\theta} = \bar{x}$ □

例. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 求 μ 和 σ^2 的极大似然估计.

解. $$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} = (2\pi\sigma^2)^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

令 $$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu) = 0$$

$$\frac{\partial \ln L(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

得 $\hat{\mu} = \bar{x}$, $\hat{\sigma^2} = \tilde{S}^2$.

例. 设总体 $X \sim U(a,b)$. 求 a, b 的极大似然估计.

解. $$L(a,b) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^n}, & x_1, \cdots, x_n \in [a,b] \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$x_1, \cdots, x_n \in [a,b]$ 时, $L(a,b)$ 关于 a 递增, b 递减

$\therefore$ $a = x_1^* = \min_{i=1}^{n} x_i$ $\quad$ $b = x_n^* = \max_{i=1}^{n} x_i$ 时, L 最大

即 $\hat{a} = x_1^*$, $\hat{b} = x_n^*$. $\square$

性质: 若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的极大似然估计, $u = u(\theta)$ 有反函数 $\theta = \theta(u)$,

则 $\hat{u} = u(\hat{\theta})$ 为 $u = u(\theta)$ 的极大似然估计.

($\because$ u 和 θ 一一对应)

例. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 和 σ^2 未知, 则 σ 的极大似然估计为 $\tilde{S} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$.

7.3 估计量的评选原则

7.3.1 无偏性

无偏估计量 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n)$: $E\hat{\theta} = \theta$.

渐近无偏估计 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, 其中 $b_n = E\hat{\theta} - \theta$.

例. $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^k$ 为 EX^k 的无偏估计.

例. 证明样本方差 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 是总体方差 $DX = \sigma^2$ 的无偏估计.

证. $$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{n}{n-1}\bar{X}^2$$

设 $EX = \mu$, 则

$$EX_i^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

$$E\bar{X}^2 = D\bar{X} + \mu^2 = \frac{1}{n}\sigma^2 + \mu^2$$

$$\therefore ES^2 = \frac{n}{n-1}(\sigma^2 + \mu^2) - \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sigma^2 + \mu^2\right)$$

$$= \sigma^2$$

$\square$

注: $\tilde{S}^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ 不是 σ^2 的无偏估计. 但

$$E\tilde{S}^2 = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \longrightarrow \sigma^2, \quad n \to +\infty$$

$\therefore \tilde{S}^2$ 是 σ^2 的渐近无偏估计.

注: $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计, 但 $h(\hat{\theta})$ 不一定是 $h(\theta)$ 的无偏估计.

例如, $\bar{X}$ 为 μ 的无偏估计, 但

$$E\bar{X}^2 = \mu^2 + \frac{1}{n}\sigma^2 \neq \mu^2.$$

注: 无偏估计不唯一. 如 $\sum\limits_{i=1}^{n} C_i X_i$, $\forall \sum\limits_{i=1}^{n} C_i = 1$, 均为 μ 的无偏估计.

7.3.2. 有效性

若 $E(\hat\theta_1)=E(\hat\theta_2)=\theta$, 且 $D(\hat\theta_1)\le D(\hat\theta_2)$, 则称 $\hat\theta_1$ 比 $\hat\theta_2$ 有效.

例: X_1 与 $\bar X$ 都是 μ 的无偏估计. 但

$$D\bar X=\frac{1}{n}\sigma^2\le\sigma^2=DX_1$$

$\therefore$ $\bar X$ 比 X_1 有效.

最小方差(或最优)无偏估计量 $\hat\theta_0$

$E\hat\theta_0=\theta$ 且对 $\forall$ $E\hat\theta=\theta$,

$$D(\hat\theta_0)\le D(\hat\theta).$$

例. 在总体期望 $\mu=EX$ 的线性无偏估计类

$$\overline{U}=\left\{\hat\mu=\sum_{i=1}^n c_iX_i\ :\ \sum_{i=1}^n c_i=1\right\}$$

中求 μ 的最小方差无偏估计.

解: $E\hat\mu=\mu$.

由 Cauchy-Schwarz 不等式 $\left(\sum a_ib_i\right)^2\le\sum a_i^2\sum b_i^2$

(等号成立当且仅当 $a_i=b_i$, $\forall i$)

$$D\hat\mu=D\left(\sum_{i=1}^n c_iX_i\right)=\sum_{i=1}^n c_i^2\sigma^2=n\sum_{i=1}^n c_i^2\sum_{i=1}^n\frac{1}{n^2}\sigma^2$$

$$\ge n\left(\sum_{i=1}^n\frac{c_i}{n}\right)^2\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

且等号成立 等价于 $c_i=\frac{1}{n}$, $\forall i$.

$\therefore$ $\hat\mu_0=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i=\bar X$. $\square$

例. 设 $X\sim U[0,\theta]$, θ未知. $\hat{\theta}_1=2\overline{X}$, $\hat{\theta}_2=\frac{n+1}{n}\max\limits_{1\le i\le n}X_i$.

(1) 证 $E\hat{\theta}_1=E\hat{\theta}_2=\theta$.

(2) 证 $\hat{\theta}_2$ 比 $\hat{\theta}_1$ 有效.

证. (1) $E\hat{\theta}_1=2E\overline{X}=2\times\frac{\theta}{2}=\theta$.

令 $X_n^*=\max\limits_{1\le i\le n}X_i$. $\forall\ 0<x<\theta$,

$$P(X_n^*\le x)=\left(\frac{x}{\theta}\right)^n$$

$$\therefore\ f_{X_n^*}(x)=\frac{nx^{n-1}}{\theta^n},\quad 0<x<\theta$$

$$\therefore\ EX_n^*=\int_0^\theta x\cdot\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx=\frac{n}{n+1}\theta$$

$$\therefore\ E\hat{\theta}_2=\theta$$

(2) $D\hat{\theta}_1=4D\overline{X}=\frac{4}{n}DX=\frac{4}{n}\cdot\frac{\theta^2}{12}=\frac{\theta^2}{3n}$.

$$E\left[(X_n^*)^2\right]=\int_0^\theta x^2\cdot\frac{nx^{n-1}}{\theta^n}dx=\frac{n}{n+2}\theta^2$$

$$\therefore\ DX_n^*=\frac{n}{n+2}\theta^2-\left(\frac{n}{n+1}\theta\right)^2$$

$$D\hat{\theta}_2=\left(\frac{n+1}{n}\right)^2DX_n^*=\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}-1\right)\theta^2=\frac{1}{n(n+2)}\theta^2$$

$\because\ n(n+2)-3n=n(n-1)>0$, $n>1$时,

$\therefore\ D\hat{\theta}_2\le D\hat{\theta}_1$. □

7.3.3 一致性.

$\hat{\theta}_n=\hat{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$ 为 θ 的一致估计: $\forall\ \varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}P(|\hat{\theta}_n-\theta|\le\varepsilon)=1$$

即 $\hat{\theta}_n\xrightarrow{P}\theta$.

例如, $A_k:=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^nX_i^k$ 为 $\alpha_k:=EX^k$ 的一致估计.

例. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. 证明样本方差 S^2 是 σ^2 的一致估计.

证: $$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim t(n-1)$$

$$\therefore \quad E\,\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = n-1 \quad \Rightarrow \quad ES^2 = \sigma^2$$

$$D\,\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = 2(n-1) \quad \Rightarrow \quad DS^2 = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

由切比雪夫不等式,

$$P(|S^2 - \sigma^2| > \varepsilon) \le \frac{DS^2}{\varepsilon^2} = \frac{2\sigma^4}{(n-1)\varepsilon^2} \to 0$$

$\therefore$ S^2 是 σ^2 的一致估计. $\square$

7.4 区间估计

7.4.1 概念

给定 $0<\alpha<1$． 令 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$， $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1,\cdots,X_n)$．

若

$$P(\underline{\theta}<\theta<\overline{\theta})=1-\alpha$$

则称 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 为参数 θ 的置信水平(或置信度)为 $1-\alpha$ 的置信区间

称 $\underline{\theta}$ (或 $\overline{\theta}$) 为置信下(或上)限．

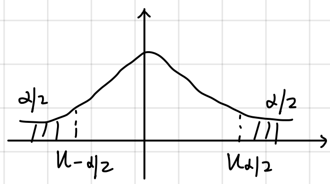
含义：若 $1-\alpha=0.95$，则抽样100次，约有95个 $(\underline{\theta},\overline{\theta})$ 包含 θ．

7.4.2. $N(\mu,\sigma^2)$ 中 μ 的置信区间．

1. σ^2 已知．

$$\overline{X}\sim N(\mu,\tfrac{1}{n}\sigma^2)$$

$$\therefore\quad \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n}\sim N(0,1).$$



$$\therefore\quad P\left(\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\cdot\sqrt{n}\right|<u_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$$

即

$$P\left(\overline{X}-\frac{\sigma u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}<\mu<\overline{X}+\frac{\sigma u_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha$$

$\therefore$ μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right).$$

置信区间的长度 $l=\frac{2\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}$

1) l 与 σ 成正比　2) σ 与 $\sqrt{n}$ 成反比　3) α 越大，l 越小

2、σ^2未知

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), \quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1), \text{ 且独立.}$$

$$\therefore \quad \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{S} \sim t(n-1).$$

$$\therefore P\left(\left|\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}-\mu}{S}\right| < t_{\alpha/2}(n-1) \right) = 1-\alpha$$

$$\therefore \quad P\left(\overline{X} - \frac{t_{\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}}S < \mu < \overline{X} + \frac{t_{\alpha/2}(n-1)}{\sqrt{n}}S\right) = 1-\alpha.$$

即 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

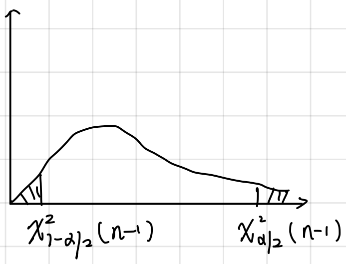
$$\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1), \quad \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right).$$

置信区间长度 $l = \frac{2S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1).$

7.4.3. $N(\mu,\sigma^2)$ 中 σ^2 的置信区间

μ未知

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$



$$\therefore \quad P\left(\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right) = 1-\alpha$$

即 $$P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right) = 1-\alpha.$$

即 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \quad \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

7.4.4 两个正态总体均值差的区间估计

设 $X_1, \cdots, X_{n_1} \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $\bar{X}$, S_1^2

                    独立

$Y_1, \cdots, Y_{n_2} \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$ $\bar{Y}$, S_2^2

估计 $\mu_1 - \mu_2$.

1. σ_1^2 和 σ_2^2 均已知

$$\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2) \sim N\left(0, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

$$\therefore \quad P\left(\left| \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \right| < u_{\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$

$$= P\left(\bar{X} - \bar{Y} - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, u_{\alpha/2} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{X} - \bar{Y} + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, u_{\alpha/2} \right)$$

即 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, u_{\alpha/2},\ \ \bar{X} - \bar{Y} + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, u_{\alpha/2} \right)$$

2. $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 但 σ^2 未知

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 2)$$

$$\therefore \quad \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 1)$$

其中，$S_w^2 = \dfrac{(n_1 - 1) S_1^2 + (n_2 - 1) S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)}$

$\therefore$ $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} - S_w t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}},\ \bar{X} - \bar{Y} + S_w t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \right).$$

7.4.5 两个正态总体方差比的区间估计

同 7.4.4. μ_1, μ_2 未知. 估计 σ_1^2/σ_2^2.

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2(n_1-1), \quad \frac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2(n_2-1) \text{ 独立}$$

$$\therefore \quad \frac{S_2^2}{S_1^2} \cdot \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \sim F(n_2-1, n_1-1)$$

$\therefore$ $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2-1, n_1-1),\ \frac{S_1^2}{S_2^2} F_{\alpha/2}(n_2-1, n_1-1) \right).$$

7.4.6 单侧置信区间

置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间 $(\underline{\theta}, +\infty)$ 或 $(-\infty, \bar{\theta})$:

$$P(\theta > \underline{\theta}) = 1-\alpha \quad \text{或} \quad P(\theta < \bar{\theta}) = 1-\alpha.$$

习题

1. (7.8, P118) 设 $X_1, \cdots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$，$\mu, \sigma^2$ 未知. 求 $P(\overline{X} < t)$ 的极大似然估计.

解: $P(\overline{X} < t) = P\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma}\sqrt{n} < \frac{t-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\right) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\sqrt{n}\right)$

极大似然估计

$$\hat{\mu} = \overline{X}, \quad \hat{\sigma}^2 = \tilde{S}^2$$

$\therefore$ $P(\overline{X} < t)$ 的极大似然估计为

$$\Phi\left(\frac{t-\overline{X}}{\tilde{S}}\sqrt{n}\right).$$

2. (7.11, P118) 设 $X_1, \cdots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} U(0, \theta)$. 求均值 μ 和方差 σ^2 的极大似然估计.

解: θ 的极大似然估计为 $\hat{\theta} = X^*_{(n)}$.

$\because$ $\mu = \frac{\theta}{2}$, $\sigma^2 = \frac{\theta^2}{12}$,

$\therefore$ $\hat{\mu} = \frac{1}{2} X^*_{(n)}$, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{12}(X^*_{(n)})^2$.

3. (7.14, P119) 设 $X_1, \cdots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} P(\lambda)$. 求 λ^2 的无偏估计.

解. $\forall\ i = 1, \cdots, n$,

$EX_i = \lambda$, $DX_i = \lambda$

$\therefore$ $EX_i^2 = DX_i + (EX_i)^2 = \lambda^2 + \lambda$

$\therefore$ $E(X_i^2 - X_i) = \lambda^2$

$\therefore$ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - X_i)$ 为 λ^2 的无偏估计.

注: 可验证 $\overline{X}^2 - \frac{1}{n}\overline{X}$ 也为 λ^2 的无偏估计

4. (7.15, P119) 设 $X_1, \cdots, X_n \overset{i.i.d.}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$. 求 c. s.t. $c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$ 为 σ^2 的无偏估计.

解: $$E(X_{i+1}-X_i)^2 = EX_{i+1}^2 + EX_i^2 - 2EX_{i+1}X_i$$
$$= 2EX_i^2 - 2EX_{i+1}EX_i$$
$$= 2\left[EX_i^2 - (EX_i)^2\right]$$
$$= 2DX_i = 2\sigma^2$$

令 $E\, c\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2 = \sigma^2$

得 $2(n-1)c\sigma^2 = \sigma^2$ $\therefore$ $c = \frac{1}{2(n-1)}$.

5. (7.17, P119) 设从均值为 μ, 方差为 $\sigma^2>0$ 的总体中, 分别抽取容量为 n_1, n_2 的两独立样本, 记样本均值为 $\overline{X}_1$ 和 $\overline{X}_2$ 在下列无偏估计类中求最小方差无偏估计: $\{a\overline{X}_1 + b\overline{X}_2;\ a+b=1\}$.

解: 即求 a, b, s.t. $a+b=1$ 且 $D(a\overline{X}_1 + b\overline{X}_2)$ 最小.

$\because$
$$D(a\overline{X}_1 + b\overline{X}_2) = \sigma^2\left(\frac{a^2}{n_1} + \frac{b^2}{n_2}\right)$$
$$= \sigma^2\left(\frac{a^2}{n_1} + \frac{(1-a)^2}{n_2}\right) = \sigma^2\left[\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)a^2 - \frac{2a}{n_2} + \frac{1}{n_2}\right]$$

$\therefore$ $a = \dfrac{\frac{1}{n_2}}{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} = \dfrac{n_1}{n_1+n_2}$, $b = \dfrac{n_2}{n_1+n_2}$ 时, $D(a\overline{X}_1 + b\overline{X}_2)$ 最小.

$\square$