练习

1. 有 n 张卡片，标号从 1 到 n. n 张卡片随机排列，令

$$X = \#\{i: \text{卡片 } i \text{ 在位置 } i\}$$

求 EX 和 DX.

解: 令 $I_i = I\{\text{卡片 } i \text{ 在位置 } i\}$. 则

$$X = \sum_{i=1}^{n} I_i$$

$$\therefore\ EX = \sum_{i=1}^{n} EI_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{n!} = 1$$

$$EX^2 = \sum_{i=1}^{n} EI_i + \sum_{i \neq j} E(I_i I_j)$$

$$E(I_i I_j) = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

$$\therefore\ EX^2 = 1 + \sum_{i \neq j} \frac{1}{n(n-1)} = 2$$

$$\therefore\ DX = 1.$$

□

2. f, g 有相同单调性. 证 $\forall$ r.v. X,

$$\mathrm{Cov}(f(X), g(X)) \geqslant 0.$$

证. 令 Y 与 X 同分布且独立. 则

$$E\left[(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))\right] \geqslant 0$$

移项即证.

□

3. 若 X, Y 只取两个值且 $Cov(X,Y)=0$, 则 X 与 Y 独立.

证. 不妨设 $X, Y \in \{0,1\}$. (Why?)

令 $p_1 = P(X=1)$ $\quad q_1 = 1-p_1$

$p_2 = P(Y=1)$ $\quad q_2 = 1-p_2$.

则只需证 (Why?)

$$P(X=1, Y=1) = p_1 p_2.$$

$\because$ $Cov(X,Y) = EXY - EXEY$

$$= P(X=1, Y=1) - p_1 p_2 = 0$$

$\therefore$ 得证. $\square$

4. 某人有 n 把钥匙, 只有一把能打开门. 每次随机拿一把开门, 令 X 为打开门时试的钥匙次数.

a) 此人健忘, 试过的钥匙还会再试. 求 EX, DX.

b) 试过的钥匙不会再试. 求 EX, DX.

解. a) $X \sim Geo(\frac{1}{n})$.

$\therefore$ $EX = n$ $\quad DX = \frac{1-\frac{1}{n}}{(\frac{1}{n})^2} = n(n-1)$.

b)

$$P(X=i) = \frac{1}{n}, \quad 1 \le i \le n.$$

剩余易算. $\square$

5. 掷 n 次骰子，令 $X=1$ 朝上次数，$Y=6$ 朝上次数，求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$。

解： $EX=EY=\frac{n}{6}$.

令 $X_i=$ 第 i 次点数，则

$$X=\sum_{i=1}^{n} I_{X_i=1} \qquad Y=\sum_{j=1}^{n} I_{X_j=6}$$

$$EXY=\sum_{i,j=1}^{n} P(X_i=1,X_j=6)$$

$$=\sum_{i\neq j}\frac{1}{36}=\frac{n^2-n}{36}$$

$$\therefore \mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY$$

$$=\frac{n^2-n}{36}-\left(\frac{n}{6}\right)^2$$

$$=-\frac{n}{36}. \qquad \square$$

5. 大数定律和中心极限定理

5.1 大数定律

Q：多次测量求平均的合理性？

定义. 设 $X_1, X_2, \cdots$ 为一列 r.v.，记 $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$. 若 $\exists$ $a_1, a_2, \cdots$

s.t. $\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - a_n| < \varepsilon) = 1$$

则称 $X_1, X_2, \cdots$ 服从大数定律.

依概率收敛 $Y_n \xrightarrow{P} a$：$\forall \varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P(|Y_n - a| < \epsilon) = 1.$$

性质：$X_n \xrightarrow{P} a$，$Y_n \xrightarrow{P} b$，$g(x, y)$ 在 (a, b) 连续，则

$$g(X_n, Y_n) \xrightarrow{P} g(a, b).$$

几个著名的大数定律.

1) 契比雪夫大数定律 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 互不相关，$EX_i = \mu$，$DX_i = \sigma^2$，$\forall i \geq 1$. 则 $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$ （证明见板书）

2) 辛钦大数定律 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ i.i.d. $EX_1 = \mu$. 则

$$\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu \quad \text{（证明略）}$$

3) 伯努利大数定律 $Y_n \sim B(n, p)$，则

$$\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{P} \mu.$$

例. 设 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 独立. $P(X_n = \pm\sqrt{n}) = \frac{1}{n}$. $P(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{n}$.

证 $\bar{X}_n \xrightarrow{P} 0$.

证：$EX_n = 0$ $\quad DX_n = EX_n^2 = 2$ 由契比雪夫大数定律即证. □

5.2 中心极限定理

若某一r.v.受多种因素影响，且每种因素的影响很小，则该r.v.近似服从正态分布

独立同分布中心极限定理

设 $X_1, \cdots, X_n, \cdots$ i.i.d. $EX_i = \mu$, $DX_i = \sigma^2$ 则

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \xrightarrow{d} N(0,1) \quad (\text{依分布收敛})$$

即 $\forall x$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \leq x \right) = \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

(证明略)

De Moivre-Laplace 中心极限定理

设 $Y_n \sim B(n,p)$，则

$$\frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{d} N(0,1), \quad q = 1-p.$$

近似估计. $P(Y_n \leq y) = P\left(\frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{y-np}{\sqrt{npq}} \right)$

$$\approx \Phi\left(\frac{y-np}{\sqrt{npq}} \right).$$

例. 从次品率为0.05的一大批产品中随机抽取200件产品. 分别用二项分布、泊松分布、中心极限定理求至少有3件次品的概率.

解. 设X为次品数. 则 $X \sim B(200, 0.05)$

(1) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} C_{200}^{k} (0.05)^k\, 0.95^{200-k}$

$$\approx 0.9996$$

(2) $B(n,\frac{\lambda}{n}) \overset{近似}{\sim} P(\lambda)$

$\therefore \quad X \overset{近似}{\sim} P(10)$

$$P(X\geqslant 3) = 1-\sum_{k=0}^{2}\frac{10^k}{k!}e^{-k} \approx 0.9992.$$

(3)

$$P(X\geqslant 3) = 1-P(X\leqslant 2) = 1-P\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\leqslant\frac{2-EX}{\sqrt{DX}}\right)$$

$$\approx 1-\Phi\left(\frac{2-10}{\sqrt{200\times 0.05\times 0.95}}\right) = \Phi\left(\frac{8}{\sqrt{9.5}}\right)$$

$$\approx \Phi(2.6) \approx 0.9953.$$

$\square$

练习.

1. $X\sim P(\lambda)$，则

$$\frac{X}{\lambda}\xrightarrow{P}1,\qquad \frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\Rightarrow N(0,1).\qquad \lambda\to+\infty,$$

证. 令 $X_i\sim P(1)$, $i\geqslant 1$. $Y\sim P(\lambda-[\lambda])$，独立

则 $X \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{[\lambda]}X_i + Y$

$$\therefore \quad \frac{X}{\lambda} \overset{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{[\lambda]}X_i}{[\lambda]}\cdot\frac{[\lambda]}{\lambda}+\frac{Y}{\lambda}$$

$$\xrightarrow{P} 1\cdot 1+0 = 1$$

$$\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \overset{d}{=} \frac{\sum_{i=1}^{[\lambda]}X_i-\lambda}{\sqrt{\lambda}}+\frac{Y}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\Rightarrow N(0,1)+0 = N(0,1).$$

$\square$