1.4 条件概率与事件独立性

定义1.6 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. $A, B \in \mathcal{F}$. 若 $P(B) > 0$, 则称

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为 A 在 B 发生的条件下的条件概率.

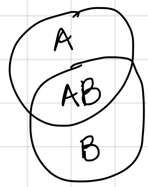
练习: 验证条件概率满足公理化定义的三个条件.

例 连续掷两次骰子, 在第一次点数为偶数的情况下, 两次点数之和为7的概率.

法1) $A = \{$两次点数之和为7$\}$ $\quad B = \{$第一次点数为偶数$\}$.

$$P(AB) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \qquad P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1}{6}.$$



法2) $\# \Omega_B = 18$

$\{\Omega_B$ 中两次点数之和为 7$\} = \{(2,5), (4,3), (6,1)\}$

$$P(A|B) = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}.$$

性质

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A).$$

推广到 n 个事件.

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

例 (The Monty Hall problem: goals and cars)

有三扇门, 一扇门后面藏了一辆车, 另外两扇门后面各藏了一只羊. 游戏规则如下: i) 你选择一扇门, 但门不马上打开;

ii) 主持人打开剩下两扇门中的一扇, 结果门后是羊;

iii) 主持人问你是否改变主意选择第三扇门?

$A=\{$第三扇门后是车$\}$，　$B=\{$主持人打开的门后是羊$\}$

即求　$P(A|B)$.

(1) 在 ii) 中，主持人决定向你展示羊；如果剩下两扇门后都是羊，则随机打开一扇。

$$P(B)=1 \Rightarrow P(A|B)=P(AB)=P(A)=\frac{2}{3}.$$

(2) 在 ii) 中，主持人决定向你展示羊；假设两只羊名字为 Bill 和 Nan，如果剩下两扇门后都是羊，主持人选 Bill 的概率为 b. 求你看到 Bill 后，第三扇门后是车的概率

$C=\{$主持人打开的门后是 Bill$\}$

$P(AC)=P($你选择了 Nan$)=\frac{1}{3}$

$p(C)=P(C,$ 你选择了 Nan$)+P(C,$ 你选择了车$)$

$$=\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times b$$

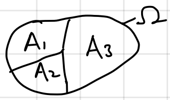
$$\Rightarrow P(A|C)=\frac{1}{b+1}$$

(3) 在 ii) 中，主持人随机打开剩下两扇门之一.

$P(AB)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$　　$P(B)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$

$$\Rightarrow P(A|B)=\frac{1}{2}$$

$\square$



Ω的一个划分 $\{A_i, 1\le i\le n\}$：$A_i \in \Omega$，$A_i \cap A_j \neq \Omega$，$\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega$.

定理 1.2（全概率公式）若 $\{A_i, 1\le i\le n\}$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(A_i)>0$，$\forall\ 1\le i\le n$，则 $\forall B\in\mathcal{F}$，

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)\,P(A_i)$$

证明略.

注 若 $B\subset A$，且 $\{A_i, 1\le i\le n\}$ 为 A 的一个划分，则全概率公式依然成立.

例 保险公司将人群分为两类：(1) 易出事故人群，出事故概率 0.4，占比约 30%. (2) 不易出事故人群，出事故概率 0.2. 今有一人来投保，求其出事故概率.

解. $B=\{$此人出事故$\}$. $A=\{$此人属于易出事故人群$\}$.

由全概率公式，

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A}) \\
&= 0.4\times 0.3 + 0.2\times 0.7 \\
&= 0.26.
\end{aligned}
$$

□

例* (赌徒输光问题) 设甲有 M 元，乙有 N 元，$M, N\in\mathbb{N}$. 每次赌资 1 元. 每局甲胜概率为 $p\in(0,1)$. 求甲破产概率.

解. 问题一般化：设甲有 i 元，乙有 $L-i$ 元. 求甲破产概率（记为 p_i）.

显然，$p_0=1$，$p_L=0$.

$$
\begin{aligned}
p_i &= P(\text{甲破产}) \\
&= P(\text{甲破产}\mid\text{第1局甲胜})\,P(\text{第1局甲胜}) \\
&\quad + P(\text{甲破产}\mid\text{第1局乙胜})\,P(\text{第1局乙胜}) \\
&= p_{i+1}\,p + p_{i-1}(1-p)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow\quad p_i = p\,p_{i+1} + (1-p)\,p_{i-1}
$$

$$\Rightarrow \quad p(p_{i+1}-p_i) = (1-p)(p_i - p_{i-1})$$

$$\Rightarrow \quad p_{i+1} - p_i = \left(\frac{1-p}{p}\right)^i (p_1 - p_0)$$

$$\Rightarrow \quad p_i = p_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{1-p}{p}\right)^j (p_1 - p_0)$$

1) $p=\frac{1}{2}$. $\quad p_i = p_0 + i(p_1 - p_0)$

$$\begin{cases} p_L = 0 \\ p_0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad 0 = 1 + L(p_1 - 1) \Rightarrow p_1 = \frac{L-1}{L}$$

$$\Rightarrow \quad p_i = 1 - \frac{i}{L} = \frac{L-i}{L}$$

2) $p \neq \frac{1}{2}$. $\quad p_i = p_0 + \dfrac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^i - 1}{1 - \frac{1-p}{p}} (p_1 - p_0)$

$$\Rightarrow \quad 0 = 1 + \frac{p}{2p-1}\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^L - 1\right](p_1 - 1)$$

$$\Rightarrow \quad p_1 - 1 = \frac{2p-1}{p} \frac{1}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^L}$$

$$\Rightarrow \quad p_i = 1 - \frac{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^L}$$

$$= \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^i - \left(\frac{1-p}{p}\right)^L}{1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^L}$$

取 $L = M+N$, $i = M$. 得

$$P(\text{甲破产}) = \begin{cases} \dfrac{N}{M+N}, & p=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^M - \left(\frac{1-p}{p}\right)^{M+N}}{1-\left(\frac{1-p}{p}\right)^{M+N}}, & p\neq\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

□

定理 1.3（贝叶斯公式）设 $\{A_i, 1\le i\le n\}$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(A_i)>0$，$\forall\ 1\le i\le n$. 则对 $\forall\ B\in\mathcal{F}$ 且 $P(B)>0$，有

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B|A_k)P(A_k)}.$$

称 $P(A_i)$ 为先验概率，根据先前知识和经验得到；$P(A_i|B)$ 为后验概率，观察到 B 后 A_i 发生的概率.

例.（艾滋病检测）血液试验检测法，假阳性概率 0.05，假阳性概率 0.01. 据粗略估计，患病比例为 0.001. 某人血液试验呈阳性. 求其患病概率.

解：$A=\{\text{阳性}\}$　　$B=\{\text{患病}\}$.

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\bar{B})P(\bar{B})} = \frac{0.95\times 0.001}{0.95\times0.001+0.01\times0.999}$$

$$\approx 0.087 \quad (\text{血液检测不可靠}).$$

□.

下面引入独立性的概念.

定义 1.7　设 $A, B\in\mathcal{F}$. 若

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称 A 与 B 独立.

练习：1) 若 A 与 B 独立，则 A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也独立.

2) 若 $P(B)>0$，则 A 与 B 独立 $\Leftrightarrow$ $P(A|B)=P(A)$.

事件独立性可推广到 n 个事件情形.

定义 1.8　设 $A_i \in \mathcal{F}$, $i=1,2,\cdots,n$. 若

共 2^n-n-1 个条件.

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),\quad 2\le k\le n.$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 独立.

例　掷骰子. $A=\{$出现偶数点$\}$, $B=\{$出现点数不超过 4$\}$.

A 与 B 是否独立?

解:　$P(A)=\frac{1}{2}$　$P(B)=\frac{2}{3}$　$P(A)P(B)=\frac{1}{3}$

$AB=\{2,4\}$　$P(AB)=\frac{1}{3}=P(A)P(B)$

$\therefore$ A 与 B 独立.　□

概率方法处理非概率问题*

例(图的着色问题)　设有 n 个顶点完全图. 每边涂上红色或蓝色。问: 任给 $3\le k\le n$, 是否存在一种着色方法, 使得任何 k 个顶点其所有边的颜色不全相等?

分析:　n 个顶点取 k 个顶点, 共有 C_n^k 中取法. 令

V_i 表示第 i 种取法顶点集, E_i 表示相应边集, $i=1,\cdots,C_n^k$.

令　$A_i=\{E_i$ 中边的颜色完全相等$\}$

$\Omega=\{$所有着色方法$\}$

若　$\bigcup_{i=1}^{C_n^k} A_i \neq \Omega$,　则存在一种成功着色方法.

现考虑随机着色, 即每条边染红色概率为 $\frac{1}{2}$, 且各条边染色独立. 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{C_n^k} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{C_n^k} P(A_i) \le C_n^k \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

∴ 当 $C_n^k \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}} < 1$ 即 $C_n^k < 2^{\frac{k(k-1)}{2}-1}$ 时，

$\bigcup_{i=1}^{C_n^k} A_i \neq \Omega$，从而存在一种成功着色方法。

总结

① 随机试验、样本空间、事件

② 古典概率、几何概率

③ 概率公理化定义，概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

④ 条件概率；全概率公式，贝叶斯公式，独立性