赵林杰（东三十二楼201）

邮箱：linjie_zhao@hust.edu.cn

教材：概率论与数理统计 刘次华主编

QQ群：708850310

答疑：周二下午3:00－5:00

每周五交作业.

导论

概率论起源于赌博.

分赌本问题（意大利数学家 Luca Pacioli, 1494）

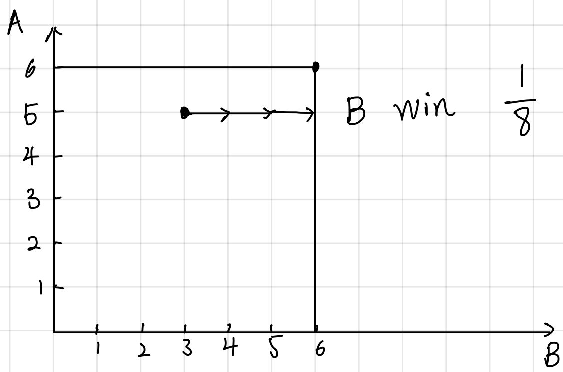
A、B两人各出赌本10元，谁先赢6局则得到全部赌本20元并结束赌博. 在进行过程中因警察抓赌停止下来，此时A赢5局，B赢3局. 问：应如何分赌本？

Pacioli. 5:3

Tartalia (1556). 2:1

Pererone (1558). 6:1

Pascal (1654). 7:1



1. 随机事件与概率

1.1 随机试验与随机事件

1) 在真空中，光的传播速度为定值.
   (必然事件)
2) 武汉今年冬天不下雪.
   (偶然事件，不可重复)
3) 掷硬币，头像朝上.
   (偶然事件，可重复).

定义 1.1 随机试验：
(1) 试验之前可知试验的一切可能结果；
(2) 每次试验之前不能确定此次试验的结果；
(3) 试验在相同条件下可以重复进行。

例如，抛硬币和掷骰子.

定义 1.2 (随机)事件：随机试验的每一个可能结果，一般用 A、B、C 表示。

相对的：
- 基本事件：不可能再分解的事件.
- 复合事件：由基本事件组成的事件.

样本空间：所有可能的基本事件的集合. 记为 Ω.

例 掷骰子. 基本事件. $\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$，$\{6\}$.
样本空间. $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.
复合事件. $\{1,2,3\}$，$\{1,3,5\}$，…

1.2 随机事件的关系、运算及其性质

定义 1.3

(1) A包含于B或B包含A（$A \subset B$ 或 $B \supset A$）：A发生必导致B发生.

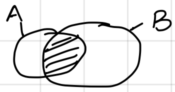
(2) A与B相等或等价（$A=B$）：$A \subset B$ 且 $B \subset A$.

(3) A与B之和或之并（$A \cup B$）：A，B至少一个发生.

· 可推广到可列无限多个事件. $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

(4) A与B之积或之交（$A \cap B$）：A，B同时发生.

- —— —— - $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

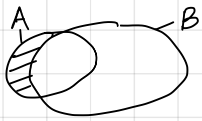


(5) A与B互不相容或互斥：$AB=\phi$.

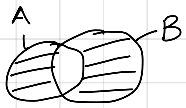
A与B互为逆事件（$B=\overline{A}$）：$AB=\phi$ 且 $A \cup B = \Omega$.

若 $AB=\phi$，$A \cup B$ 也记为 $A+B$.

(6) A与B之差（$A-B$）：A发生而B发生.



(7) A与B的对称差 $A \triangle B = (A-B) \cup (B-A)$.



(8) $\{A_n, n \geq 1\}$ 单调递增序列：$A_n \subset A_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$

极限 $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

- —— 递减 - - - $A_n \supset A_{n+1}$，$\cdots$

- - $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

运算性质

(1) 事件和. $A \cup B = B \cup A$.（交换律）

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.（结合律）.

$A \cup A = A$，$A \cup \phi = A$，$A \cup \Omega = \Omega$.

(2) 事件交. $A\cap B = B\cap A$. (交换律)

$(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$. (结合律).

$A\cap A = A$, $A\cap\phi = \phi$, $A\cap\Omega = A$.

(3) $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$ (第一分配律)

$A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ (第二分配律)

(4) 德·摩根对偶律

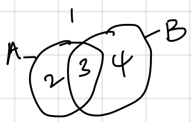
$$\overline{A\cup B} = \bar{A}\cap\bar{B}, \quad \overline{A\cap B} = \bar{A}\cup\bar{B}.$$

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bar{A}_n, \quad \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bar{A}_n.$$

例. 证明 $A\cup B = A\cup(B-A)$.

例. 设 $(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup\bar{B})\cup(\overline{A\cup B})\cup(\overline{\bar{A}\cup B}) = C$, 求 B.

解.



$A\cup\bar{B}$: $1+2+3$　　$\overline{A\cup B} = 1$

$\bar{A}\cup\bar{B}$: $1+2+4$　　$\bar{A}\cup B = 1+4+3$

$(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup\bar{B}) = 1+2$　　$\overline{\bar{A}\cup B} = 2$

左边 $= 1+2 = \bar{B} =$ 右边 $= C$　　$B = \bar{C}$. □.

例. 把 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ 表示成 n 个互斥事件之和.

解: 令 $B_1 = A_1$, $B_i = A_i - \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} A_j\right)$, $i = 2, \cdots, n$

则 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$. □.

1.3 事件的概率及其计算

古典概型： (1) 随机试验E只产生有限个基本事件（样本点）

(2) 各个基本事件出现的可能性相等.

则 $p(A)=\dfrac{|A|}{|\Omega|}$. $|A|=A$中基本事件的个数.

例. 掷两次骰子,求向上点数之和为7的概率

解: $|\Omega|=36$. $\{$向上点数为7$\}=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.

$\therefore$ $p($向上点数为7$)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$.

例: 一批产品共N件,其中M件次品. 从中抽取n件. 求n件中恰有l件次品概率

解: $\#\{$抽取n件$\}=C_N^n$.

$\#\{n$件中恰有l件次品$\}=C_M^l\,C_{N-M}^{n-l}$

$\therefore$ $P(n$件中恰有l件次品$)=\dfrac{C_M^l\,C_{N-M}^{n-l}}{C_N^n}$.

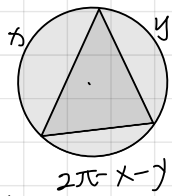
例: 一批产品共有N件,分为k个等级,第i个等级中有M_i件产品,$i=1,2,\cdots,k$. $M_1+M_2+\cdots+M_k=N$. 从中抽取n件. 求第i个等级恰有l_i件产品,$1\le i\le k$,的概率. $l_1+\cdots+l_k=n$.

解: $\#\{$第i个等级有l_i件产品, $1\le i\le k\}=C_{M_1}^{l_1}\,C_{M_2}^{l_2}\cdots C_{M_k}^{l_k}$

$\therefore$ $p($第i个等级有l_i件产品, $1\le i\le k)=\dfrac{C_{M_1}^{l_1}\,C_{M_2}^{l_2}\cdots C_{M_k}^{l_k}}{C_N^n}$. □

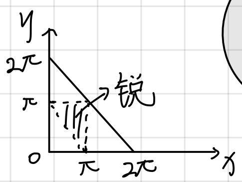
几何概型

例. 在单位圆的圆周上随机取三点，求此三点相互连接构成钝角三角形概率.



解: $\Omega = \{(x,y): x>0,\ y>0,\ 2\pi-x-y>0.\}$

$\{\text{锐角三角形}\} = \{0<x<\pi,\ 0<y<\pi,\ 0<2\pi-x-y<\pi\}.$



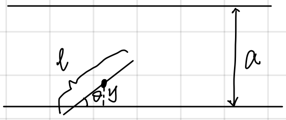
$P(\text{钝}) = \frac{3}{4}.$

□.

例 (Buffon's needle problem)（布丰投针实验）

在平面上画距离为 a 的平行线，并向此平面随意投一长度为 $l(<a)$ 的针，求此针与任一平行线相交概率.

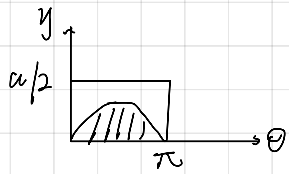
解:



y = 针中心离平行线之间最短距离

θ = 针与平行线之间夹角.

$\Omega = \left\{ (y,\theta): \begin{array}{l} 0\le y\le a/2, \\ 0\le\theta\le\pi \end{array} \right\}$



$\{\text{相交}\} = \{(y,\theta): y \le \frac{l}{2}\sin\theta\}$

$S_{\text{相交}} = \int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\theta\, d\theta = l.$

$P(\text{相交}) = \frac{l}{a\pi/2} = \frac{2l}{a\pi}.$

用来求圆周率 π.

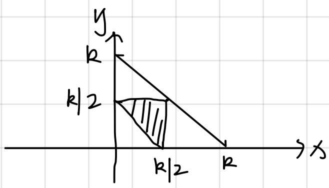
□

例. 在长为 k 的线段上任取两点，从而将此线段分为三截，求三截线段构成三角形概率？

解:

$\Omega = \{(x,y): x>0,\ y>0,\ k-x-y>0\}.$

$\{\text{构成三角形}\} = \{(x,y): 0<x<\frac{k}{2},\ 0<y<\frac{k}{2},\ 0<k-x-y<\frac{k}{2}\}.$



$P(\text{构成三角形}) = \frac{1}{4}.$

□

Kolmogorov 在1933年建立了概率公理化体系. 为了定义概率, 需要引入 σ-域的概念.

定义1.4 $\mathcal{F}$ 是由 Ω 中的一些子集构成的集合, 满足

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$.

(2) 若 $A \in \mathcal{F}$, 则 $\overline{A} \in \mathcal{F}$.

(3) 若 $A_n \in \mathcal{F}$, $n=1,2,\cdots$, 则 $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

则称 $\mathcal{F}$ 是 Ω 中的一个 σ 域 (或 σ 代数).

注: (1) $\phi \in \mathcal{F}$.

(2) 若 $A_n \in \mathcal{F}$, $n=1,2,\cdots$, 则 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

$\because \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \in \mathcal{F}$

$\therefore \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$, 则

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{F}, \qquad \bigcap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{F}.$$

定义1.5 设 $\mathcal{F}$ 是 Ω 上的一个 σ 域, $P: \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ 是 $\mathcal{F}$ 上的实函数. 若 P 满足:

(1) $P(\Omega)=1$;

(2) 非负性. $P(A) \geq 0$, $\forall A \in \mathcal{F}$;

(3) 可列可加性. 若 $A_n \in \mathcal{F}$, $n=1,2,\cdots$, 且两两互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

那么称 P 是 $\mathcal{F}$ 上的一个概率. $P(A)$ 称为事件A发生的概率

称 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 为一个概率空间.

定理 1.1 概率具有如下性质:

(1) $P(\phi)=0$.

(2) 有限可加性: 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

(3)
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

(4) 若 $B \subset A$, 则
$$P(A-B) = P(A) - P(B).$$

(5) 单调性: 若 $B \subset A$, 则
$$P(B) \leq P(A).$$

(6) 加法公式: (Jordan 公式) $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(AB)$,

$$P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC),$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n).$$

(7) 上、下连续性: 若 $\{A_n, n\geq 1\}$ 递增或递减, 则

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

证明. (1)–(6) 易证. 对于 (7), 不妨设 A_n 递增. 令

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n - A_{n-1}, \quad n\geq 2.$$

则
$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$
□.

练习: 验证古典概型与几何概型满足概率公理化定义.

例. 证明 (Boole's inequalities)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \qquad P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \geq 1-\sum_{i=1}^{n} P(A_i^c)$$

例 已知 $P(A_n)=1$, $\forall\ n\geq 1$. 证明

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

例. 证明 ($A>a$ 为正整数)

$$1+\frac{A-a}{A-1}+\frac{(A-a)(A-a-1)}{(A-1)(A-2)}+\cdots+\frac{(A-a)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1}{(A-1)\cdot\cdots\cdot(a+1)a}=\frac{A}{a}.$$

证: 设筐中有 a 个红球, $A-a$ 个蓝球, 一次摸一球, 不放回. 令 p_i 为第 i 次首次摸到红球。则

$$\sum_{i=1}^{A-a+1} p_i = 1.$$

其中, $p_1=\frac{a}{A}$ $\qquad p_2=\frac{A-a}{A}\cdot\frac{a}{A-1}$

...

$$p_i=\frac{A-a}{A}\cdot\frac{A-a-1}{A-1}\cdot\cdots\frac{A-a-(i-2)}{A-(i-2)}\cdot\frac{a}{A-(i-1)}$$

移项得 $$\sum_{i=1}^{A-a+1}\frac{(A-a)\cdot\cdots\cdot A-a-(i-2)}{(A-1)\cdot\cdots\cdot A-(i-1)}=\frac{A}{a}.$$

□