r.v. 函数的数学期望

1) 离散型 r.v.： $P(X=x_i)=p_i$， 且 $\sum_i |g(x_i)|\, p_i < +\infty$,

则 $Eg(X) = \sum_i g(x_i)\, p_i$.

2) 连续型 r.v.： X 概率密度为 $f(x)$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f(x)\, dx < +\infty$,

则 $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\, dx$.

多维 r.v. 1) 离散型：设 $P(X=x_i, Y=y_j) = p_{ij}$ 且

$$\sum_{i,j} |g(x_i, y_j)|\, p_{ij} < +\infty$$

则 $E[g(X,Y)] = \sum_{i,j} g(x_i, y_j)\, p_{ij}$.

2) 连续型：设 (X,Y) 概率密度为 $f(x,y)$，且

$$\iint |g(x,y)| f(x,y)\, dx\, dy < +\infty,$$

则 $E\, g(X,Y) = \iint g(x,y)\, f(x,y)\, dx\, dy$.

例. 设 $X \sim P(\lambda)$. 求 $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$.

解.
$$E\left(\frac{1}{1+X}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

$$= (e^{\lambda} - 1) \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} = \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda})$$ ▥

例. $X \sim U(0, 2\pi)$. 求 $E(\sin X)$.

解. $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 < x < 2\pi \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

$$E(\sin X) = \int_0^{2\pi} \sin x \cdot \frac{1}{2\pi} \, dx = 0$$ ☐

例. (混合型) 设 $X \sim E(\lambda)$, $v_0 > 0$,

$$Y = \begin{cases} X, & X < v_0 \\ v_0, & X > v_0 \end{cases}$$

求 EY.

解. $Y = \min\{X, v_0\}$.

$$\therefore EY = \int_0^{+\infty} \min\{x, v_0\} \lambda e^{-\lambda x} \, dx$$
$$= \int_0^{v_0} \lambda x e^{-\lambda x} \, dx + \int_{v_0}^{+\infty} v_0 \lambda e^{-\lambda x} \, dx$$
$$= -x e^{-\lambda x} \Big|_0^{v_0} + \int_0^{v_0} e^{-\lambda x} \, dx + v_0 e^{-\lambda v_0}$$
$$= \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda v_0})$$ ☐

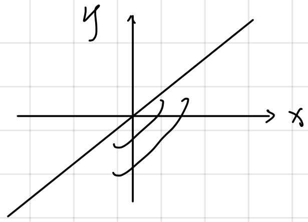
例. 设 $X = 0, 1, 2, \cdots$ EX 存在. 证
$$EX = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$$

证. $$X = \sum_{k=1}^{X} 1 = \sum_{k=1}^{+\infty} I\{k \leq X\}$$
$$\therefore EX = E\left[\sum_{k=1}^{+\infty} I\{k \leq X\}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k).$$ ☐

例　$X, Y \sim N(0,1)$ 且独立. 求 $E\max\{X,Y\}$.

解　$$E\max\{X,Y\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\max\{x,y\}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi}\iint_{x>y} x\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy + \frac{1}{2\pi}\iint_{x<y} y\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy$$



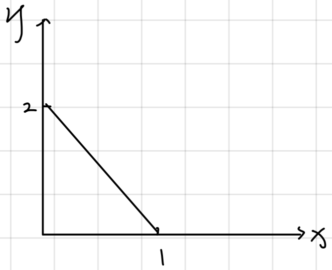
$$= \frac{1}{\pi}\iint_{x>y} x\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \int_{y}^{+\infty} x\, e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$ ▥

例　设 $(X,Y) \sim U(A)$, A 由 $x=0$, $y=0$ 和 $x+\frac{y}{2}=1$ 围成.

求 EX, EY, $E(XY)$.



解　$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0<x<1,\ 0<y<2(1-x) \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$\therefore$ $$EX = \int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} dy \cdot x$$

$$= \int_0^1 2x(1-x)\,dx = \frac{1}{3}.$$

$$EY = \int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} dy \cdot y = \int_0^1 2(1-x)^2\,dx = \frac{2}{3}$$

$$E[XY] = \int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} dy \cdot xy = \int_0^1 x\cdot 2(1-x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{6}$$ ▥

例.（Markov不等式）若 $X\geqslant 0$，则 $\forall A>0$，

$$P(X\geqslant A)\leqslant \frac{EX}{A}.$$

证. $EX\geqslant E[X I\{X\geqslant A\}]\geqslant A\,E[I\{X\geqslant A\}]=A\,P(X\geqslant A)$. $\square$

例. 设 $E[e^{aX}]<\infty$，$a>0$，证

$$P(X\geqslant \epsilon)\leqslant e^{-a\epsilon}E[e^{aX}].$$

证: $P(X\geqslant\epsilon)=P(e^{aX}\geqslant e^{a\epsilon})\leqslant e^{-a\epsilon}E[e^{aX}]$. $\square$

一般地，设 g 不减，且 $g\geqslant 0$，则

$$P(X\geqslant\epsilon)\leqslant P(g(X)\geqslant g(\epsilon))\leqslant \frac{E[g(X)]}{g(\epsilon)}.$$

例. $X=1,2,3,\cdots$　$P(X=k)$关于 k 不增. 证

$$P(X=k)\leqslant \frac{2EX}{k^2}.$$

证:

$$EX=\sum_{l=1}^{+\infty} l\,P(X=l)\geqslant \sum_{l=1}^{k} l\,P(X=l)$$

$$\geqslant P(X=k)\sum_{l=1}^{k} l\geqslant \frac{k^2}{2}P(X=k). \quad \square$$

例. 设 $X\sim N(0,1)$. 证 $\forall k=0,1,2,\cdots$

$$E(X^{2k+1})=0,\qquad E(X^{2k})=(2k-1)!!$$

证: 令 $m_k=E(X^k)$. $m_{2k+1}=0$ 显然.

$$m_{2k} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{2k-1} d e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} d x^{2k-1}$$

$$= (2k-1) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} x^{2k-2} dx = (2k-1) m_{2k-2}$$

又 $m_1 = 1$

$\therefore$ $m_{2k} = (2k-1)!!$ $\square$

例. 甲、乙赌博. 甲胜概率为 $p \in (0,1)$, 乙胜概率为 $q = 1-p$. 一旦一方比另一方多胜两局就停止赌博. 问: 平均多少局后停止博弈?

解: 令 $X_i = \begin{cases} 1, & 第 i 局甲胜 \\ -1, & 第 i 局乙胜 \end{cases}$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\tau = \inf\{n: S_n = 2 \text{ 或 } -2\}.$$

则求 $E\tau$.

设 $S_0 = i$ 时平均 α_i 局后停止博弈.

则 $E\tau = \alpha_0$.

$$\alpha_0 = p(1+\alpha_1) + q(1+\alpha_{-1}) = 1 + p\alpha_1 + q\alpha_{-1}$$

$$\alpha_1 = p(1+\alpha_2) + q(1+\alpha_0) = 1 + p\alpha_2 + q\alpha_0$$

$$\alpha_{-1} = 1 + p\alpha_0 + q\alpha_{-2}$$

$$\alpha_2 = \alpha_{-2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_{-1} = 1 + p\alpha_0$$

$$\alpha_1 = 1 + q\alpha_0$$

$$\alpha_0 = 1+p\alpha_1+q\alpha_{-1} = 1+p+pq\alpha_0+q+pq\alpha_0$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_0 = \frac{1+p+q}{1-2pq} = \frac{2}{1-2pq} \qquad \square$$

思考：一旦一方比另一方多胜 r 局就停止赌博. 问：平均多少局后停止博弈？

<u>例*</u> $G=(V,E)$ 有限图，无环或重边。d_v = 点 v 的度数.

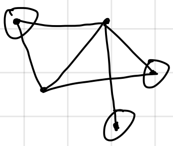
$W \subset V$ 为 independent set： $\forall\, v, v' \in W$, v 和 v' 不相邻.

令 $\alpha(G)$ 为最大 independent set. 证

$$|\alpha(G)| \geq \sum_v \frac{1}{d_v+1} \qquad (\text{Turán's theorem})$$

证：顶点标为 $1, 2, \cdots, n$.

π 为 $1, 2, \cdots, n$ 的随机排列.



令 $v \in W$，若

$$\pi(v') > \pi(v), \quad \forall\, v' \sim v.$$

则 W 为 independent set.

$$\therefore\ |\alpha(G)| \geq E(W) = \sum_v P(v \in W) = \sum_v \frac{1}{d_v+1}. \qquad \square$$