Phương pháp đếm nâng cao

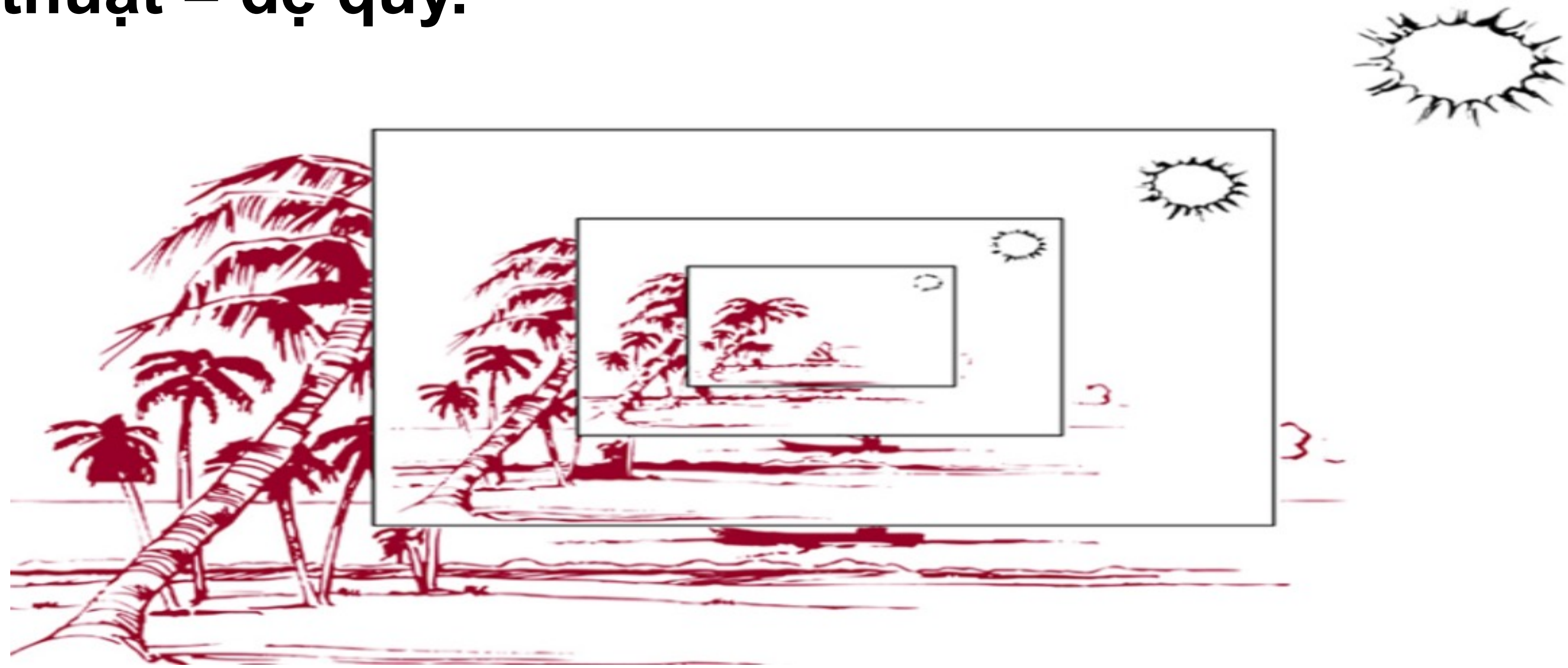
TS. Nguyễn Thị Phương Trâm
Email: ntptram@hcmuaf.edu.vn

NỘI DUNG

1. Giới thiệu
2. Một số khái niệm
3. Mô hình hóa
4. Định nghĩa
5. Phương pháp
    1. Phương pháp thế
    2. Phương trình đặc trưng
6. Bài tập

Định nghĩa đệ quy

- Khó định nghĩa đối tượng một cách tường minh
- Có thể định nghĩa đối tượng qua chính nó
- **Kỹ thuật = đệ quy.**

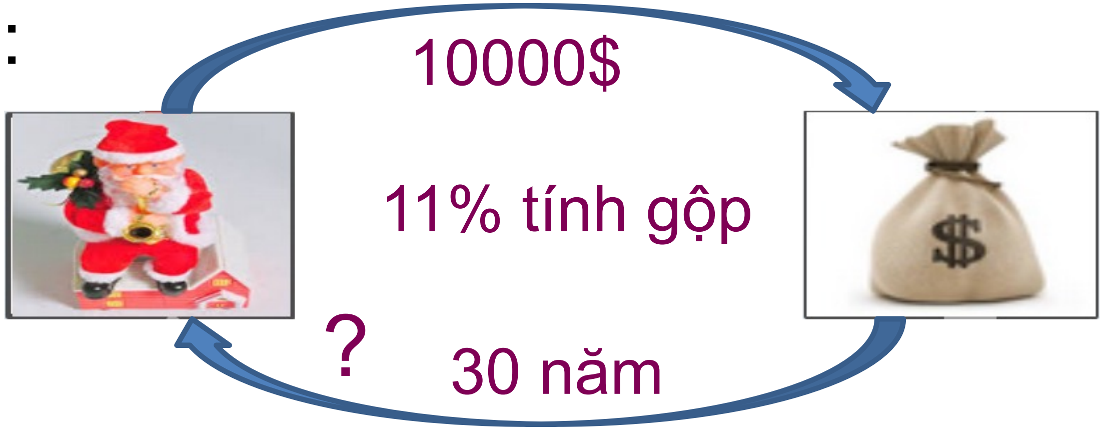


Kỹ thuật truy hồi/ đệ quy

- Là một trong những kĩ thuật quan trọng nhất của khoa học máy tính
- Ý tưởng: “thu gọn” một bài toán thành bài toán tương tự nhưng nhỏ hơn.
- Điều kiện: bài toán nhỏ nhất phải có đáp án rõ ràng

Ví dụ định nghĩa đệ quy

- **Ví dụ 1**:



$P_0 = 10000$

$P_n = P_{n-1} + 0{,}11P_{n-1}$

$\quad = (1{,}11)P_{n-1}$

- **Ví dụ 2**: Định nghĩa bằng đệ quy của dãy số Fibonacci.
  Cho dãy số $f_0, f_1, f_2, \ldots$ xác định như sau:
  $f_0 = 0;$
  $f_1 = 1;$
  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}\ , \forall n \geq 2$

Khái niệm hệ thức truy hồi

- Định nghĩa đệ quy có thể dùng để giải các bài toán đếm.
- Khi đó quy tắc tìm các số hạng từ các số hạng đi trước được gọi là **các hệ thức truy hồi**

Xác định một hay nhiều số hạng đầu tiên

+

Xác định số hạng tiếp theo từ các số hạng đi trước

$a_0 = 5$

$a_n = 2a_{n-1}$

→ **Đệ quy** dãy số $\{a_n\}$

Hệ thức truy hồi

Hệ thức truy hồi

- Hệ thức truy hồi (hay công thức truy hồi) đối với dãy số $\{a_n\}$ là công thức biểu diễn a_n qua một hay nhiều số hạng đi trước của dãy. Cụ thể là biểu diễn qua các số hạng $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ với mọi n nguyên, $n \geq n_0$ trong đó n_0 là nguyên không âm
- ***Lời giải*** hay ***nghiệm*** của hệ thức truy hồi là dãy số $\{b_n\}$ nếu các số hạng thỏa mãn hệ thức truy hồi
- **Giải** hệ thức truy hồi là đi tìm công thức biểu diễn các số hạng của dãy mà không thông qua các số hạng phía trước

Ví dụ nghiệm của hệ thức truy hồi

- VD1: Dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 3n$ với mọi n nguyên không âm, **có là lời giải của hệ thức truy hồi** $a_n = 2a_{n-1} – a_{n-2}$ với n = 2, 3, 4, …hay không?

➔Giả sử $a_n = 3n$ với mọi n. Khi đó với mọi $n \geq 2$, ta có
$a_n = 2a_{n-1} – a_{n-2} = 2.3(n–1) – 3(n–2) = 3n$.

➔Nên dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 3n$ **là lời giải của hệ thức truy hồi** đã cho

Ví dụ nghiệm của hệ thức truy hồi

- VD2: Dãy $\{a_n\}$ với với $a_n = 2^n$ và $a_n = 5$ với mọi n nguyên không âm, **có là lời giải của hệ thức truy hồi** $a_n = 2a_{n-1} – a_{n-2}$ với n = 2, 3, 4, …hay không?
  - TH1: Giả sử $a_n = 2^n$, Ta có $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 4 \neq 2a_1 – a_0 = 2.2 – 1 = 3$

  → Nên dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 2^n$ **không là lời giải của hệ thức truy hồi** đã cho.

  - TH2: Giả sử $a_n = 5$, Ta có $a_n = 2a_{n-1} – a_{n-2} = 2.5 – 5 = 5$

  →Nên dãy $\{a_n\}$ với $a_n = 5$ **là lời giải của hệ thức truy hồi** đã cho

Mô hình hóa bài toán bằng hệ thức truy hồi

- Bài toán lãi kép
- Bài toán xâu nhị phân độ dài n và không có hai số 0 liên tiếp
- Tổ hợp C(n,k), k ≤ n
- Bài toán tháp Hà nội
- Bài toán họ nhà thỏ

Bài toán Lãi kép

Bài toán: Giả sử một người gửi 10.000 đô la vào tài khoản của mình tại một ngân hàng với lãi suất kép 11% mỗi năm. Sau 30 năm anh ta có bao nhiêu tiền trong tài khoản của mình?

- Gọi P_n là tổng số tiền có trong tài khoản sau **n** năm. Vì số tiền có trong tài khoản sau n năm bằng số có sau n-1 năm cộng lãi suất của năm thứ n, nên ta thấy dãy $\{P_n\}$ thoả mãn hệ thức truy hồi sau: $P_n = P_{n-1} + 0{,}11P_{n-1} = (1{,}11)P_{n-1}$
- Với điều kiện đầu $P_0 = 10.000$ đô la. $P_1 = 1{,}11P_0$; $P_2 = 1{,}11P_1 = (1{,}11)^2P_0$; … Từ đó suy ra $P_n = (1{,}11)^n.P_0 = (1{,}11)^n.10000$ Thay n = 30 cho ta $P_{30} = 228.922{,}97$ đô la.

Xâu nhị phân độ dài n, không có 2 số 0 liên tiếp

- Bài toán: Tìm hệ thức truy hồi và cho điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân độ dài n và không có hai số 0 liên tiếp. Có bao nhiêu xâu nhị phân như thế có độ dài bằng 5?

→Giải:

- Gọi a_n là số các xâu nhị phân độ dài n và không có hai số 0 liên tiếp. Để nhận được hệ thức truy hồi cho $\{a_n\}$, ta thấy rằng theo quy tắc cộng, số các xâu nhị phân độ dài n và không có hai số 0 liên tiếp bằng số các xâu nhị phân như thế kết thúc bằng số 1 cộng với số các xâu như thế kết thúc bằng số 0. Giả sử $n \geq 3$

Xâu nhị phân độ dài n, không có 2 số 0 liên tiếp

- Các xâu nhị phân độ dài n, không có hai số 0 liên tiếp kết thúc bằng số 1 chính là xâu nhị phân như thế, độ dài n-1 và thêm số 1 vào cuối của chúng. Vậy chúng có tất cả là a_{n-1}.
- Các xâu nhị phân độ dài n, không có hai số 0 liên tiếp và kết thúc bằng số 0, cần phải có bit thứ n-1 bằng 1, nếu không thì chúng có hai số 0 ở hai bit cuối cùng. Trong trường hợp này chúng có tất cả là a_{n-2}.
- Cuối cùng ta có được: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ với $n \geq 3$.
- Với điều kiện đầu là $a_1 = 2$ và $a_2 = 3$.
  Khi đó với n = 5, ta có $a_5 = a_4 + a_3 = a_3 + a_2 + a_3 = 2(a_2 + a_1) + a_2 = 13$.

Tổ hợp C(n, k) – Tính C(n, k)

- Chọn một phần tử a cố định trong n phần tử
- Chia số cách chọn tập con k phần tử của tập n phần tử thành 2 lớp:

  – Lớp chứa a: C(n-1, k-1)

  – Lớp không chứa a: C(n-1, k)
- Áp dụng nguyên lý cộng

  C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1, k)

  C(n, 0) = C(n, n) = 1

Bài toán tháp Hà nội

Mô tả bài toán: Cho 3 cái cọc A, B, C và tập n đĩa có kích cỡ khác nhau; Đĩa được bố trí theo thứ tự đường kính giảm dần từ dưới lên trên. Số đĩa ban đầu được đặt trên cọc A;

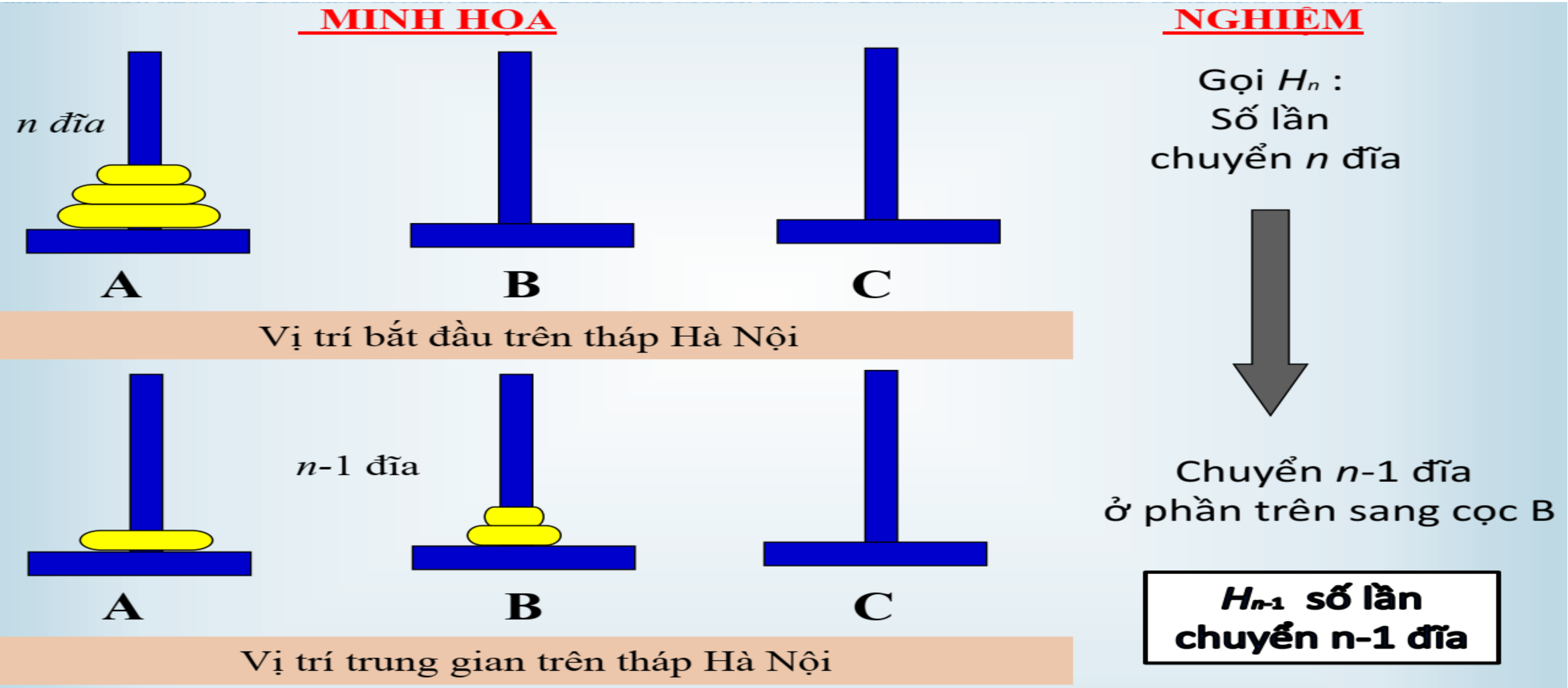
Mục đích: xếp được tất cả đĩa lên cọc C

Quy tắc chơi

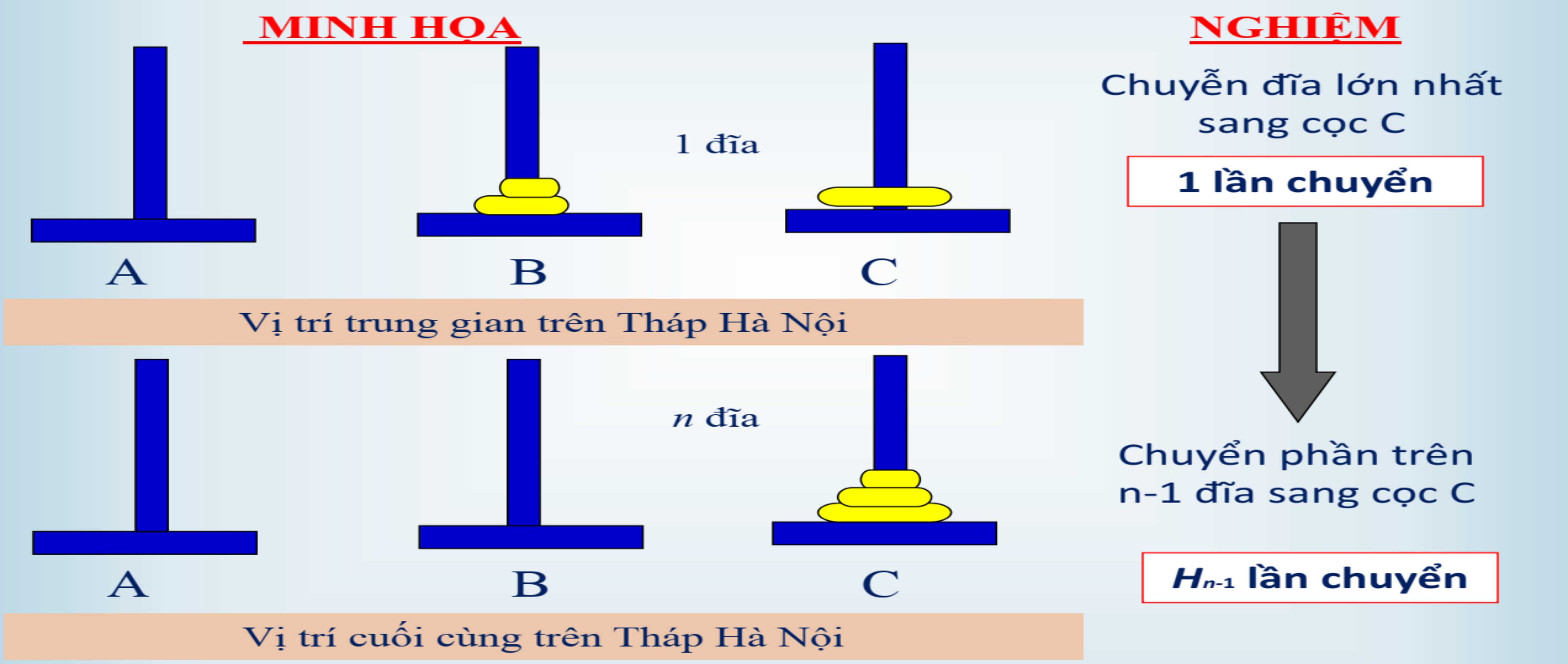
- Mỗi lần chuyển chỉ được chuyển 1 đĩa và chỉ được xếp đĩa có đường kính nhỏ lên trên đĩa có đường kính lớn hơn.
- Mỗi đĩa có thể chuyển từ cọc này sang cọc khác;
- Trong quá trình chuyển được phép sử dụng cọc B làm trung gian.

Bài toán: Tìm số lần dịch chuyển đĩa ít nhất cần thực hiện để thực hiện xong nhiệm vụ đặt ra trong trò chơi tháp Hà Nội

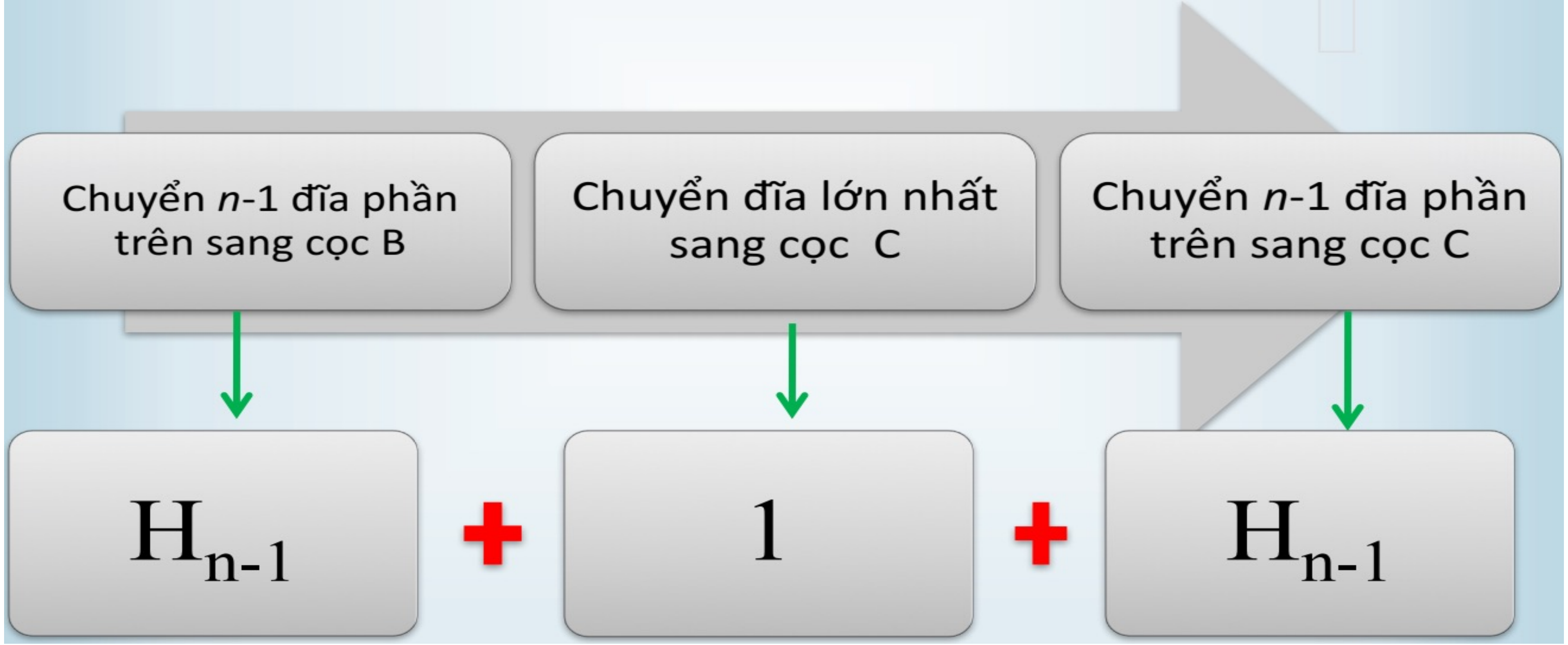
Minh hoạ Bài toán tháp Hà nội



Minh hoạ Bài toán tháp Hà nội



Hệ thức truy hồi Bài toán tháp Hà nội



$$H_n = 2H_{n-1} + 1, n \geq 2;$$

$$H_1 = 1$$

Bài toán họ nhà thỏ và số Fibonacci

- Bài toán ban đầu được đặt ra bởi Leonardo Pisano, còn được gọi là Fibonacci, vào thế kỷ 13 trong cuốn sách Liber abaci của ông.
- Một cặp thỏ non (một con đực và một con cái) được đặt trên một hòn đảo. Một cặp thỏ không sinh sản cho đến khi chúng được 2 tháng tuổi. Từ khi chúng được 2 tháng tuổi, mỗi tháng cặp thỏ sinh ra một cặp thỏ con khác như thể hiện trong Hình 1.

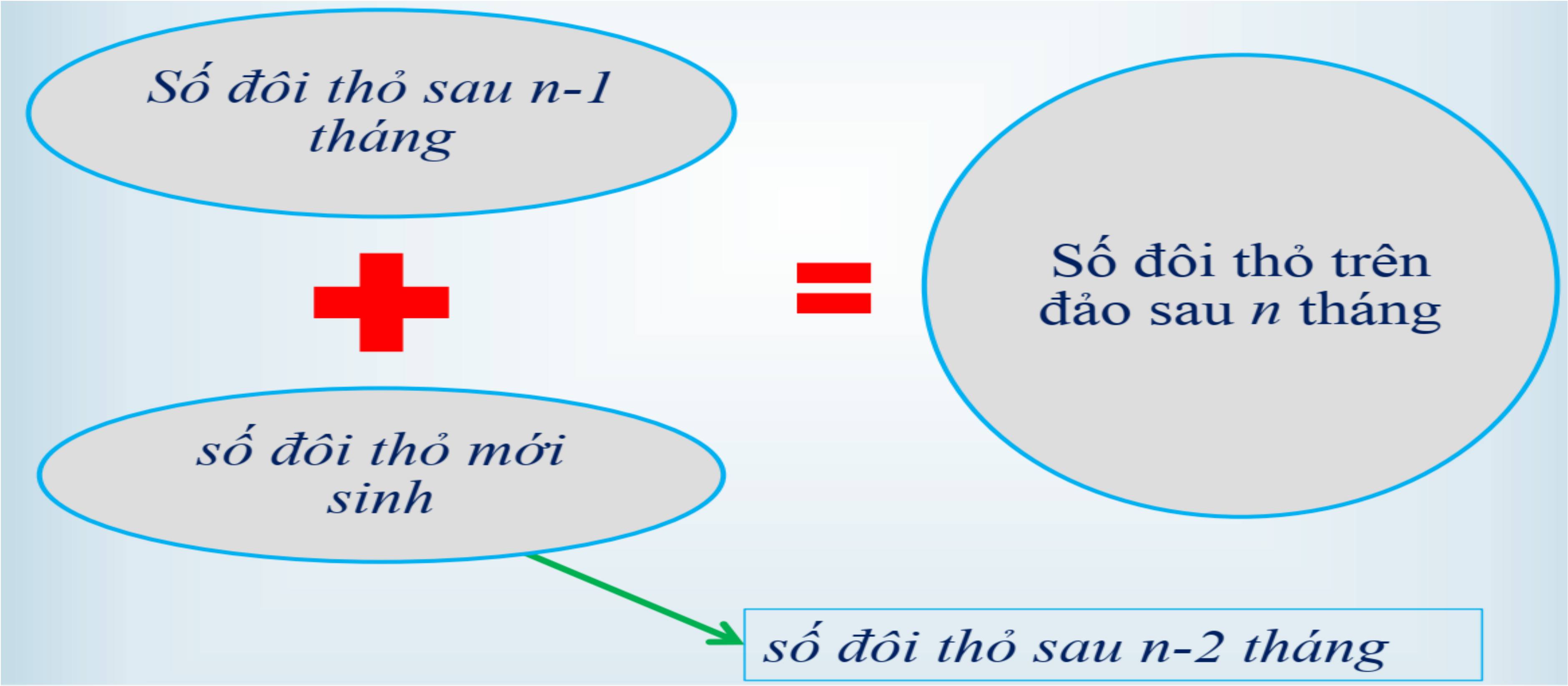
  Tìm công thức truy hồi tính cho số lượng cặp thỏ trên đảo sau n tháng, giả sử rằng không có con thỏ nào chết.

Bài toán họ nhà thỏ

Số cặp thỏ sinh sản (từ 2 tháng tuổi)	Số cặp thỏ con (dưới 2 tháng tuổi)	Tháng	Số cặp thỏ sinh sản	Số cặp thỏ con	Tổng số cặp thỏ
		1	0	1	1
		2	0	1	1
		3	1	1	2
		4	1	2	3
		5	2	3	5
	 	6	3	5	8

Bài toán họ nhà thỏ

$$\mathbf{f_n = f_{n-1} + f_{n-2}}\text{ , } n \geq 2, \text{ với } f_0 = 1, f_1 = 1$$



Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k

- Hệ thức truy hồi **tuyến tính thuần nhất bậc k có hệ số hằng** có dạng:

$$\mathbf{a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}}$$

Với $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các hằng số, $c_k \neq 0$

- Dãy số $\{a_n\}$ thỏa mãn hệ thức truy hồi bậc tuyến tính thuần nhất k và k giá đầu:

$$a_0 = I_0,\ a_1 = I_1,\ \ldots,\ a_{k-1} = I_{k-1}$$

sẽ xác định duy nhất một dãy $\{a_n\}$.

Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k

- Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k có hệ số hằng

$P_n = (1.11)P_{n-1}$ $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ $a_n = a_{n-5}$	bậc một bậc hai bậc năm

1. Thường xuyên tồn tại trong các mô hình hóa các bài toán
2. Có thể giải một cách có hệ thống

- Hệ thức truy hồi không tuyến tính, không thuần nhất, không hệ số hằng

$H_n = 2H_{n-1} + \mathbf{1}$	Không thuần nhất
$B_n = \mathbf{n}B_{n-1}$	Không có hệ số hằng
$a_n = a_{n-1} + a^{\mathbf{2}}_{n-2}$	Không tuyến tính

Phương pháp giải hệ thức truy hồi

- Giải hệ thức truy hồi
  - Tìm công thức tổng quát cho số hạng a_n
  - Số hạng a_n không phải tính qua k phần tử trước nó.

- Phương pháp giải:
  - Phương pháp thế
  - Phương pháp phương trình đặc trưng

Phương pháp giải hệ thức truy hồi
Phương pháp thế

- Dùng để giải hệ thức truy hồi bậc 1
- Các bước giải:
  - Thay a_n bởi a_{n-1}
  - Thay a_{n-1} bởi a_{n-2}
  - ...
  - Thay a_0 bởi I_0
- Thu được công thức trực tiếp cho a_n
- Chứng minh tính đúng đắn

Phương pháp giải hệ thức truy hồi Phương pháp thế - Ví dụ

- Gọi H_n là số lần chuyển đĩa ít nhất của bài toán tháp Hà nội.

$$H_n = 2H_{n-1} + 1,\ n \geq 1, \text{với } H_1 = 1$$

Ta có

$$\begin{aligned}
H_n &= 2H_{n-1} + 1 = H_n = 2(2H_{n-2} + 1) + 1 = 2^2H_{n-2} + 2 + 1 \\
&= 2^2(2H_{n-3} + 1) + 2 + 1 = 2^3H_{n-3} + 2^2 + 2 + 1 \\
&= \ldots \\
&= 2^{n-1}H_1 + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1 \\
&= 2^{n-1} + 2^{n-2} + 2^{n-3} + \ldots + 2 + 1 = 2^n - 1
\end{aligned}$$

Phương pháp giải hệ thức truy hồi
Phương pháp phương trình đặc trưng

- Hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k:
  $\boldsymbol{a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}}$ (*)
  trong đó, $c_1, c_2, \ldots, c_k$ hằng số, $c_k \neq 0$.
- Phương pháp cơ bản để giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất là tìm nghiệm dưới dạng $a_n = r^n$, trong đó r là hằng số.
- Chú ý rằng $a_n = r^n$ là nghiệm của hệ thức truy hồi $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$ nếu và chỉ nếu $r^n = c_1 r^{n-1} + c_2 r^{n-2} + \ldots + c_k r^{n-k}$
  hay $\mathbf{r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \ldots - c_{k-1} r - c_k = 0}$ (**)
- Đây là phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi.

Ta có kết quả sau

- Nếu phương trình đặc trưng (**) có nghiệm thực phân biệt $r_1, r_2, \ldots, r_k$, thì hệ thức truy hồi (*) có nghiệm tổng quát sau:

$$\mathbf{a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots + \alpha_k r_k^n}, \text{ với } n = 1, 2, \ldots$$

trong đó $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ là các hằng số

- Nếu (**) có t nghiệm thực phân biệt $r_1, r_2, \ldots, r_t$ tương ứng với các tính bội $m_1, m_2, \ldots, m_t$, thì (**) có nghiệm tổng quát

$$\boldsymbol{a_n = \left(\alpha_{10} + \alpha_{11} n + \cdots + \alpha_{1m_1-1}\, n^{m_1-1}\right) r_1^n + \cdots}$$
$$\boldsymbol{+\left(\alpha_{t0} + \alpha_{t1} n + \cdots + \alpha_{tm_t-1}\, n^{m_t-1}\right) r_t^n}$$

Phương pháp giải hệ thức truy hồi bậc 2

- Hệ thức truy hồi bậc 2 tuyến tính thuần nhất hệ số hằng.
  $\mathbf{a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2}}$, $n \geq 2$ (1) với c_1, c_2 là hằng số, $c_2 \neq 0$
  Có phương trình đặc trưng: $\mathbf{r^2 = c_1 r + c_2}$ (2)
- Nếu (2) có hai nghiệm thực phân biệt r_1, r_2 và có $a_0 = I_0$, $a_1 = I_1$, thì tồn tại duy nhất hằng số α_1, α_2:
  $\mathbf{a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n}$ là nghiệm của (1)
- Nếu (2) có nghiệm thực kép r_1, và có $a_1 = I_0$,$a_1 = I_1$
  thì tồn tại duy nhất hằng số α_1, α_2:
  $\mathbf{a_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n) r_1^n}$ là nghiệm của (1)

Ví dụ 1

- Tìm công thức tường minh của các số Fibonacci.
  Dãy các số Fibonacci thỏa mãn hệ thức truy hồi $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ và các điều kiện đầu $f_0 = 0$, và $f_1 = 1$

Giải:

- **Bước 1:** Tìm nghiệm tổng quát
- **Bước 2**: Tìm hệ số hằng
- **Bước 3:** Nghiệm của hệ thức truy hồi

Ví dụ 1: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Bước 1: Tìm nghiệm tổng quát

- Phương trình đặc trưng: $\mathbf{r^2 = r + 1}$
- Nghiệm của pt đặc trưng:

$$r_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$r_2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

- Nghiệm tổng quát:

$$f_n = \alpha_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \alpha_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Ví dụ 1 (tt)

Bước 2: Tìm hằng số α_1 và α_2

Sử dụng điều kiện đầu: $\begin{cases} f_0 = 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ f_1 = 1 = \alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$

Từ hai phương trình này cho ta có nghiệm của pt đặc trưng:

$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Bước 3: Số Fibonacci được cho bởi công thức tường minh sau:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Ví dụ 2

Giải hệ thức truy hồi sau:

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}\text{ , với } a_0 = 1,\ a_1 = 6$$

Giải

- **Bước 1:** Tìm nghiệm tổng quát

  Phương trình đặc trưng: $\mathbf{r^2 = 6r - 9}$

  pt đặc trưng có nghiệm kép: $\mathbf{r_1 = r_2 = 3}$

  Nghiệm tổng quát: $\mathbf{a_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n)3^n}$

Ví dụ 2 (tt)

$a_n = 6a_{n-1} – 9a_{n-2}$
$a_0 = 1, a_1 = 6$

- **Bước 2**: Tìm hằng số α_1 và α_2

  Sử dụng điều kiện đầu:

  $$\begin{cases} 1 = \alpha_1 \\ 6 = (\alpha_1 + \alpha_2)3 \end{cases} \quad \text{hay} \quad \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

- **Bước 3:** Nghiệm của hệ thức truy hồi

  $$\mathbf{a_n = (1 + n)3^n,\ n \geq 0}$$

Ví dụ 3

Giải hệ thức truy hồi

$$a_n = 6a_{n-1} - 11a_{n-2} + 6a_{n-3}$$

với điều kiện ban đầu $a_0 = 2$, $a_1 = 5$ và $a_2 = 15$.

Giải

- **Bước 1:** Tìm nghiệm tổng quát

  Phương trình đặc trưng: $\mathbf{r^3 = 6r^2 - 11r + 6}$

  Pt đặc trưng có nghiệm kép: $\mathbf{r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3}$

  Nghiệm tổng quát: $\mathbf{a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2 2^n + \alpha_3 3^n}$

Ví dụ 3 (tt)

- **Bước 2**: Tìm hằng số $\boldsymbol{\alpha_1}$ **,** $\boldsymbol{\alpha_2}$ và $\boldsymbol{\alpha_3}$

  Các điều kiện ban đầu

  $a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

  $a_1 = 5 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3$

  $a_2 = 15 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 9\alpha_3$.

  Giải hệ các phương trình này ta nhận được $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 2$

- **Bước 3:** Nghiệm duy nhất của hệ thức truy hồi này là

$$a_n = 1 - 2^n + 2.3^n.$$

Ví dụ 4

Giải hệ thức truy hồi sau:

$$a_n = -3a_{n-1} - 3a_{n-2} - a_{n-3}, \text{ với } a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = -1.$$

Giải

- **Bước 1:** Tìm nghiệm tổng quát

  Phương trình đặc trưng: $r^3 = -3r^2 - 3r - 1$

  Nghiệm của pt đặc trưng: $r_1 = r_2 = r_3 = -1$

  Nghiệm tổng quát: $a_n = (\alpha_{10} + \alpha_{11}n + \alpha_{12}n^2)(-1)^n$

Ví dụ 4 (tt)

- **Bước 2**: Tìm hằng số α_{10}, α_{11} và α_{12}.

  Sử dụng điều kiện đầu:

  $1 = \alpha_{10}$

  $-2 = (\alpha_{10} + \alpha_{11} + \alpha_{12})(-1)$

  $-1 = \alpha_{10} + \alpha_{11}2 + \alpha_{12}\,4$

  Suy ra $\alpha_{10} = 1$, $\alpha_{11} = 3$, $\alpha_{12} = -2$

- **Bước** 3: Nghiệm của hệ thức truy hồi

$$\mathbf{a_n = (1 + 3n - 2n^2)(-1)^n, \; n \geq 0}$$

Luyện tập

Giải hệ thức truy hồi sau:

$$a_n = -3a_{n-1} – 3a_{n-2} – a_{n-3},$$

$$a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = -1$$