Phương pháp đếm

TS. Nguyễn Thị Phương Trâm
Email: ntptram@hcmuaf.edu.vn

Giới thiệu: Phép đếm

Giới thiệu

- Password (chỉ gồm letters và numbers):
  - Dài 6 ký tự → Có thể có bao nhiêu?
  - Dài 8 ký tự → Có thể có bao nhiêu?
  - Dài 10 ký tự → Có thể có bao nhiêu?

➔Đếm??

➔nhưng đếm như thế nào?

Giới thiệu

- Từ lâu, người ta đã nghiên cứu việc liệt kê, đếm các phần tử hay các đối tượng có những tính chất nào đó để giải quyết một số vấn đề cần thiết được đặt ra. Chẳng hạn,
  - Thuật toán: Tính số phép toán phải thực hiện → phân tích và đánh giá độ phức tạp của thuật toán.
  - Lập trình: Tính số lần lặp, số vòng lặp → xác định tài nguyên.

Hai nguyên lý đếm cơ bản

1. Quy tắc cộng (sum rule).
2. Quy tắc nhân (product rule)

→Chú ý: ngoài ra còn có các nguyên lý đếm nâng cao

Định nghĩa phép Đếm

- Cho A là một tập hợp khác rỗng. Nếu tồn tại một số nguyên dương n và một song ánh f từ A vào { 1, 2, . . ., n } thì ta nói A là một tập hợp hữu hạn và A có n phần tử.
- Khi đó **song ánh f : A → { 1, 2, . . ., n } sẽ được xem là một phép đếm tập hợp A**.
- Số phần tử (hay lực lượng) của tập hợp A được ký hiệu là | A |.
- Tập hợp rỗng có số phần tử là 0, và cũng được xem là tập hữu hạn.
- Nếu tập hợp A không hữu hạn, ta nói A là tập vô hạn và | A | = ∞

Định nghĩa phép Đếm

Quan hệ đồng lực lượng:

- Hai tập hợp A và B được nói là đồng lực lượng khi tồn tại một song ánh f từ A vào B.

Tính chất:

- Cho A và B là các tập hợp hữu hạn. Giả sử tồn tại đơn ánh từ A vào B. Khi ấy ta có: $|A| \leq |B|$.

CÁC NGUYÊN LÝ ĐẾM

Nguyên lý cộng

Nguyên lý cộng:

- Nếu một việc có thể thực hiện bằng cách chọn 1:
  - hoặc trong $\mathbf{n_1}$ cách
  - hoặc trong $\mathbf{n_2}$ cách,
  - mỗi 1 cách chọn trong tập $\mathbf{n_1}$ **không giống** bất cứ cách chọn nào trong tập $\mathbf{n_2}$

➔tổng cộng $\mathbf{n_1 + n_2}$ cách

Nguyên lý cộng – Ví dụ 1

- Chúng ta cần chọn một sinh viên toán năm thứ 3 hay năm thứ 4 đi dự một hội nghị. Hỏi có bao nhiêu cách chọn lựa một sinh viên như thế, biết rằng có 100 sinh viên toán năm thứ 3 và 85 sinh viên toán năm thứ tư ?

Giải:

- Để chọn một sinh viên đi dự hội nghị ta có 2 cách khác nhau: chọn một sinh viên toán năm 3, hoặc chọn một sinh viên toán năm 4. Để thực hiện công việc thứ nhất ta có 100 cách, và để thực hiện công việc thứ 2 ta có 85 cách. Vậy để chọn một sinh viên toán theo yêu cầu ta có 100 + 85 = 185 cách.

Nguyên lý cộng – Ví dụ 2

- Một sinh viên có thể chọn một đề tài từ một trong 3 danh sách các đề tài. Số đề tài trong các danh sách đề tài lần lượt là 23, 15, 19. Hỏi sinh viên có bao nhiêu cách chọn một đề tài.

Giải:

- Sinh viên có thể chọn một đề tài trong danh sách thứ thứ nhất theo 23 cách, trong danh sách thứ hai theo 15 cách, và trong danh sách thứ ba theo 19 cách. Do đó số cách chọn đề tài là $23+15+19 = 57$.

Quy tắc cộng mở rộng

- Có nhiều tập cách chọn:
  - $n_1, n_2, \ldots, n_m$
  - Cách chọn của 1 tập không giống bất cứ cách chọn nào của các tập khác

➔Có tổng cộng: $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ cách

Nguyên lý cộng – Ví dụ 3

- Xác định giá trị của k sau khi đoạn chương trình sau đây được thực hiện xong

```
k = 0;
for (i₁ = 0; i₁ < n₁; i₁++)
    k = k + 1;
for (i₂ = 0; i₂ < n₂; i₂++)
    k = k + 1;
...
for (iₘ = 0; iₘ < nₘ; iₘ++)
    k = k + 1;
```

- **Giải:**
  - Giá trị của k ban đầu là 0.
  - Sau đó là m vòng lặp rời nhau. Mỗi thao tác lặp trong một vòng lặp là cộng thêm 1 vào k.
  - Vòng lặp thứ i có n_i thao tác. Do đó số thao tác để thực hiện xong đoạn chương trình trên là $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$.
  - Đây cũng chính là giá trị cuối cùng của k.

Nguyên lý cộng – Ví dụ 4

- Để đi từ Tp.HCM ra Hà Nội có 3 cách: đi ôtô, đi tàu hỏa hoặc đi máy bay.
  - Đi bằng ôtô có 3 cách: đi taxi, đi xe đò, thuê xe riêng.
  - Đi bằng tàu hỏa có 2 cách: đi bằng tàu nhanh và đi bằng tàu bình thường.
  - Đi bằng máy bay cũng có hai cách: đi bằng Vietnam airline hoặc đi bằng Pacific airline.

→ **Hỏi có bao nhiêu cách đi từ Tp.HCM ra Hà Nội**

Dưới góc độ lý thuyết tập hợp

Nguyên lý cộng:

- Cho A và B là 2 tập hợp hữu hạn rời nhau, nghĩa là $A \cap B = \emptyset$. Số cách chọn 1 phần tử từ một trong hai tập là:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

- Một cách tổng quát: Nếu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ là các tập hợp hữu hạn rời nhau. Số cách chọn 1 phần tử từ một trong các tập là:

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \ldots + |A_n|$$

Nguyên lý cộng – Bài Tập

- BT1: Trường ĐH Công nghiệp Tp.HCM tham gia chiến dịch mùa hè xanh trên 3 tỉnh: Bình Phước, Cà Mau, Bến Tre. Có 150 sinh viên tham gia tại Bình Phước, 300 sinh viên tham gia tại Cà Mau và 80 sinh viên tham gia tại Bến Tre. Mỗi sinh viên chỉ tham gia tại một tỉnh duy nhất. Đếm số sinh viên của trường ĐH Công Nghiệp TP. HCM tham gia mùa hè xanh.
- BT2: Có 50 sinh viên đăng ký học phần Toán cao cấp và 40 sinh viên đăng ký học phần kế toán đại cương. Trong đó, 10 sinh viên đăng ký cả 2 học phần. Đếm số sinh viên đăng ký 1 học phần.

Nguyên lý nhân

- Giả sử 1 thủ tục có thể chia thành 2 việc:
  – Công việc 1: n_1 cách
  – Với mỗi 1 cách thực hiện công việc 1, có n_2 cách thực hiện công việc 2.

➲ Có $n_1 x n_2$ cách để thực hiện thủ tục

Nguyên lý nhân – Ví dụ 1

- Các ghế ngồi trong một hội trường được ghi nhãn gồm một chữ cái (26 chữ cái) theo sau là một số nguyên dương không lớn hơn 100. Hỏi số ghế tối đa được ghi nhãn khác nhau là bao nhiêu?

Giải:

- Thủ tục ghi nhãn cho một ghế gồm 2 việc :
  - ghi một trong 26 chữ cái và
  - kế tiếp là ghi một trong 100 số nguyên dương.
- Theo qui tắc nhân ta có 26 x 100 = 2600 cách khác nhau để ghi nhãn cho một ghế ngồi. Do đó số ghế lớn nhất có thể được ghi nhãn khác nhau là 2600.

Nguyên lý nhân – Ví dụ 2

Giả sử ta phải đi từ một địa điểm A đến một địa điểm C, ngang qua một địa điểm B. Để đi từ A đến B ta có 8 cách đi khác nhau, và có 6 cách đi từ B đến C. Hỏi có bao nhiêu cách để đi từ A đến C ?

Giải:

- Một cách đi từ A đến C gồm 2 việc:
  - Việc thứ nhất (đi từ A đến B) có 8 cách thực hiện
  - rồi việc thứ hai đi từ B đến C có 6 cách thực hiện.
- Vậy, theo nguyên lý nhân, số cách đi từ A đến C là 8 x 6 = 48.

Nguyên lý nhân - Ví dụ 3

Hỏi có bao nhiêu chuỗi nhị phân khác nhau có độ dài 5 (tức là gồm 5 bits) ?

- Mỗi bit trong chuỗi có thể được chọn là 0 hoặc 1. Do đó, qui tắc nhân có $2^5 = 32$ chuỗi bit có độ dài 5.
- Tổng quát: có 2^n chuỗi nhị phân có độ dài n

Nguyên lý nhân - Ví dụ 4

Một mã bao gồm 6 ký tự, trong đó gồm 3 chữ cái rồi đến **3 chữ số thập phân**. Hỏi có bao nhiêu mã khác nhau?

Giải: Công việc trên có được hoàn thành bởi 2 công việc :

- Công việc 1: Có 26 cách chọn cho mỗi chữ cái : 26.26.26 và
- Công việc 2: có 10 cách chọn cho mỗi chữ số thập phân: **10.10.10**

- Do đó, theo qui tắc nhân, có tất cả 26.26.26.10.10.10 = 17 576 000 mã khác nhau.

Dưới góc độ lý thuyết tập hợp

- Cho A và B là 2 tập hợp hữu hạn. Khi ấy ta có

$$|A \times B| = |A| . |B|$$

- Một cách tổng quát: Nếu A_1, A_2, ..., A_n là các tập hợp hữu hạn thì số phần tử của tích Descartes của các tập hợp trên bằng tích của các số lượng phần tử của các tập hợp trên:

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| . |A_2| \ldots\ldots |A_n|$$

Nguyên lý nhân – Ví dụ 5

Có bao nhiêu ánh xạ đi từ một tập hợp A có m phần tử vào một tập hợp B có n phần tử ?

- Một ánh xạ đi từ tập A gồm m phần tử vào một tập hợp B gồm n phần tử được xây dựng bằng cách chọn ảnh cho từng phần tử của A.
- Với mỗi phần tử thuộc tập A ta có n cách chọn lựa ảnh là một trong n phần tử của B.
- Theo qui tắc nhân, có n.n. ... .n = n^m ánh xạ từ A vào B.

Nguyên lý nhân - Ví dụ 6: Phương án đánh số điện thoại.

Giả sử một số điện thoại gồm 10 ký số được chia thành 3 nhóm: 2 nhóm gồm 3 ký số và một nhóm 4 ký số.

- Ta dùng ký hiệu **X** để chỉ một ký số có thể lấy giá trị từ 0 đến 9, **N** để chỉ một ký số từ 2 đến 9, và **Y** chỉ một ký số là 0 hoặc 1.
- Chúng ta có 2 phương án để đánh số điện thoại: phương án cũ có dạng **NYX NNX XXXX**; và phương án mới có dạng **NXX NXX XXXX**.

➔Hỏi số lượng số điện thoại khác nhau của mỗi phương án là bao nhiêu?

Nguyên lý nhân - Ví dụ 6 (tt)

- Đối với phương án đánh số điện thoại cũ (**NYX NNX XXXX**), số trường hợp khác nhau của mỗi nhóm ký số trong 3 nhóm lần lượt là:
  - Công việc 1 (ứng với dạng **NYX**), có 8.2.10 = 160
  - Công việc 2 (ứng với dạng **NNX**), có 8.8.10 = 640, và
  - và Công việc 3 (ứng với dạng **XXXX**), có10.10.10.10 = 10000

➔Do đó, theo nguyên lý nhân, phương án đánh số điện thoại cũ, số lượng số điện thoại là 160. 640.10000 = 1 024 000 000.

- Tương tự Số lượng số điện thoại trong phương án đánh số mới (**NXX NXX XXXX**) là:

  (8.10.10).(8.10.10).(10.10.10.10) = 800.800.10000 = 6 400 000 000.

Nguyên lý nhân – Tổng quát

- **Tổng quát ta có**: Giả sử một nhiệm vụ bao gồm m công việc kế tiếp nhau $T_1, T_2, . . ., T_{m,}$ nếu công việc T_1 có thể được thực hiện theo n_1 cách, *và sau khi chọn cách thực hiện cho T_1* ta có n_2 cách thực hiện T_2, v.v… cho đến cuối cùng, *sau khi chọn cách thực hiện các công việc $T_1, T_2, . . ., T_{m-1}$* ta có n_m cách thực hiện T_m. Vậy ta có $n_1 \times n_2 \times ... \times n_m$ cách để thực hiện nhiệm vụ.

Nguyên lý nhân - Ví dụ 7

- Tính giá trị k trong đoạn chương trình sau:

```
k = 0;
for (i1 = 0; i1 < n1; i1++)
   for (i2 = 0; i2 < n2; i2++)
           ……
         for (im = 0; i < nm; im++)
            k := k + 1;
```

- Áp dung nguyên tắt nhân tổng quát: ta thấy rằng sau khi thực hiện đoạn chương trình dưới đây thì giá trị của biến

  $k = n_1.n_2. \ldots .n_m.$

Nguyên lý bù trừ

Cho hai tập hợp hữu hạn A và B tùy ý, ta có:

- $| A \cup B | = | A | + | B | - | A \cap B |$

Tổng quát: với n tập hợp tùy ý $A_1, A_2, ..., A_m$ ta có:

- $| A_1 \cup A_2 \cup . . . \cup A_m | = N_1 – N_2 + N_3 – … + (-1)^{m-1}N_m$
- Với $N_1 = \sum_{1 \le i \le m} |A_i|$

$N_2 = \sum_{1 \le i < j \le m} |A_i \cap A_j|$

$N_3 = \sum_{1 \le i < j < k \le m} |A_i \cap A_j \cap A_k|$

$N_m = |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_m|$

Nguyên lý bù trừ

Bây giờ ta đồng nhất tập A_m ($1 \leq m \leq k$) với tính chất A_m cho trên tập vũ trụ hữu hạn U nào đó và đếm xem có bao nhiêu phần tử của U sao cho không thỏa mãn bất kỳ một tính chất A_m nào. Gọi $\overline{N}$ là số cần đếm, N là số phần tử của U. Ta có:

$\overline{N} = N - | A_1 \cup A_2 \cup . . . \cup Ak | = N - (N_1 - N_2 + N_3 - \ldots + (-1)^{k-1}N_k)$

trong đó N_m là tổng các phần tử của U thỏa mãn m tính chất lấy từ k tính chất đã cho

Nguyên lý bù trừ - Ví dụ 8

Trong một version của ngôn ngữ BASIC, tên của một biến là một chuỗi gồm 1 hoặc 2 ký tự,

– mỗi ký tự là mẫu tự hoặc ký số thập phân và không phân biệt giữa chữ in hoa và chữ thường.

– Hơn nữa, một tên biến phải bắt đầu bởi một mẫu tự và phải khác với 5 chuỗi gồm 2 ký tự đã được dành riêng cho ngôn ngữ.

➔Hỏi có bao nhiêu tên biến khác nhau trong version này của BASIC

Nguyên lý bù trừ - Ví dụ 8 (tt)

Lời giải.

- Đặt V là số tên biến khác nhau, V1 là số biến gồm một ký tự, và V2 là số biến gồm hai ký tự. Theo qui tắc cộng ta có V = V1 + V2.
- Vì biến gồm một ký tự phải là một mẫu tự nên V1 = 26.
- Theo nguyên lý nhân và nguyên tắc loại trừ, số biến V2 = 26.36. Tuy nhiên, có 5 chuỗi bị loại ra nên V2 = 26.36 - 5 = 931.
- Vậy có V = V1 + V2 = 26 + 931 = 957 tên biến khác nhau.

Nguyên lý bù trừ - Ví dụ 9

Mỗi người sử dụng máy tính có một "password" dài từ 6 đến 8 ký tự, mỗi ký tự là một chữ in hoa hoặc là một ký số thập phân. Mỗi "password" phải có ít nhất một ký số. Hỏi có bao nhiêu password khác nhau?

➔**Giải.**

- Đặt P là số lượng tất cả các "password", và P_6, P_7, P_8 lần lượt là số các "password" có độ dài 6, 7, 8.

  Do qui tắc cộng ta có $P = P_6 + P_7 + P_8$. Chúng ta sẽ tính P_6, P_7, và P_8.

Nguyên lý bù trừ - Ví dụ 9 (tt)

- Theo qui tắc nhân, số chuỗi gồm 6 ký tự là 36^6 và số chuỗi không có ký số là 26^6. Suy ra
  $P_6 = 36^6 - 26^6 = 2\ 176\ 782\ 336 – 308\ 915\ 776 = 1\ 867\ 866\ 560$.
- Tương tự, ta có thể tính ra được :
  $P_7 = 36^7 - 26^7 = 78\ 364\ 164\ 096 – 8\ 031\ 810\ 176$
  $= 70\ 332\ 353\ 920$.
- Và
  $P_8 = 36^8 - 26^8 = 2\ 821\ 109\ 907\ 456 - 208\ 827\ 064\ 576$
  $= 2\ 612\ 282\ 842\ 880$.
- Từ đó ta tính được :
  $P = P_6 + P_7 + P_8 = 2\ 684\ 483\ 063\ 360$.

Nguyên lý bù trừ - Ví dụ 10

Có bao nhiêu chuỗi nhị phân có độ dài 8

- hoặc bắt đầu bằng bit 1
- hoặc kết thúc bằng hai bit 00.

- Gọi A là tập hợp các chuỗi nhị phân có độ dài 8 bắt đầu bằng bit 1
- Và gọi B là tập hợp các chuỗi nhị phân có độ dài 8 kết thúc bằng hai bit 00.

Nguyên lý bù trừ - Ví dụ 10 (tt)

- Khi đó $A \cap B$ là tập hợp các chuỗi nhị phân có độ dài 8 bắt đầu bằng bit 1 và kết thúc bằng hai bit 00
- $A \cup B$ là tập hợp các chuỗi nhị phân có độ dài 8 hoặc bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng hai bit 00
- Ta có:

$|A| = 2^7$, $|B| = 2^6$, $|A \cap B| = 2^5$

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 2^7 + 2^6 – 2^5 = 160.$

Nguyên lý bù trừ - Ví dụ 11

Trong tập các số nguyên X = { 1, 2, …, 10000}, có bao nhiêu số không chia hết cho bất cứ số nào trong các số 3, 4, 7.

- Gọi $A_i = \{ x \in X / x$ chia hết cho i } với i = 3, 4, 7.

  Khi đó $A_3 \cup A_4 \cup A_7$ là tập hợp các số nguyên thuộc X chia hết cho ít nhất một trong các số 3, 4, 7.

  ➔Như vậy số lượng các số cần đếm là $|X| - |A_3 \cup A_4 \cup A_7|$

Nguyên lý bù trừ - Ví dụ 11

- Ta có: $| A_3 \cup A_4 \cup A_7 | = N_1 – N_2 + N_3$.
- Với

$N_1 = |A_3| + |A_4| + |A_7| = [10000/3] + [10000/4] + [10000/7] = 7261$

$N_2 = |A_3 \cap A_4| + |A_3 \cap A_7| + |A_4 \cap A_7|$

$= [10000/3x4] + [10000/3x7] + [10000/4x7] = 1666$

$N_3 = |A_3 \cap A_4 \cap A_7| = [10000/3x4x7] = 119$

Từ đó số cần đếm là : 10000 – (7216 – 1666 + 119) = 4286.

BÀI TẬP

1. Cho tập X ={1,2,3,4,5,0}. Hỏi có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau mà chia hết cho 2
2. Một chuyến bay có 67 hành khách. Trong đó có 47 người sử dụng tốt Anh, 35 người sử dụng tốt tiếng Đức, 20 người sử dụng tốt tiếng Pháp. Hơn nữa có 23 người sử dụng tốt hai thứ tiếng Anh và Đức, 12 người sử dụng tốt hai tiếng Anh và Pháp, 11 người sử dụng tốt hai tiếng Đức và Pháp. Và có 5 người sử dụng tốt cả ba thứ tiếng. Tìm số hành khách không sử dụng được bất kì ngoại ngữ nào?

BÀI TẬP

3. Có 12 đề tài, có 2 sv, cần giao mỗi sv 1 đề tài → Hỏi có bao nhiêu cách để giao đề tài cho 2 SV???
4. Có bao nhiêu chuỗi bit có độ dài là 7?
5. Trong một lớp ngoại ngữ Anh Pháp. Có 24 SV học Tiếng Pháp, 26 SV học tiếng Anh, 15 SV học Tiếng Anh và Tiếng Pháp. Hỏi lớp có bao nhiêu người?

GIẢI TÍCH TỔ HỢP

HOÁN VỊ

- Định nghĩa: Cho tập hợp A gồm n phần tử. Mỗi cách sắp đặt có thứ tự **n** phần tử của A được gọi là một hoán vị của **n** phần tử.
- Số các hoán vị của n phần tử ký hiệu là P_n
- Công thức: $P_n = n!$
- Ví dụ 1. Nếu A là tập hợp n phần tử thì số song ánh từ A vào A là n!.
- Ví dụ 2. Số các số tự nhiên có 5 chữ số khác nhau được tạo từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 → Hỏi có bao nhiêu cách???

CHỈNH HỢP

- **Định nghĩa:** Cho X là một tập hợp gồm n phần tử, và số nguyên dương **k** (1 ≤ k≤ n). Mỗi phép chọn **k phần tử phân biệt** của X ***theo một thứ tự*** nào đó được gọi là một **chỉnh hợp chập k** của n phần tử của tập hợp X.
- Nói cách khác, chỉnh hợp chập k là một dãy hay một bộ gồm k phần tử phân biệt được chọn từ n phần tử cho trước.
- Số các chỉnh hợp chập k của n ký hiệu là A_n^k

CHỈNH HỢP

- Ví dụ: Cho tập hợp S = {1, 2, 3} .
  - Khi đó S có các chỉnh hợp chập 2 của 3 là: 12, 21, 13, 31, 23, 32
  - Khi đó S có các chỉnh hợp chập 3 của 3 là: 123, …
- Một chỉnh hợp chập n của tập hợp X có n phần tử được gọi là một **hoán vị của X**. Nói cách khác, một hoán vị n phần tử của tập X là một cách sắp xếp n phần tử đó theo một thứ tự nào đó.

Công thức chỉnh hợp

- **Định lý**: Số các chỉnh hợp chập k của n phần tử là
  A(n, k) = n(n – 1)(n – 2)...(n – k + 1).
- Công thức: $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
- **Ghi chú:**
  - Trường hợp k = 0, ta quy ước A(n, 0) = 1.
  - Đặt biệt ta có A(n, n) = n!, tức là số hoán vị của n phần tử bằng n!

Chỉnh hợp (tt)

- **Ví dụ: 1:** Có bao nhiêu cách chọn 4 vận động viên khác nhau trong 10 vận động viên quần vợt để thi đấu 4 trận đấu đơn, các trận đấu là có thứ tự.

➔Số cách chọn là A(10, 4) = 10.9.8.7 = 5 040.

- **Ví dụ 2:** Trong một lớp học có 20 thành viên. Số cách chọn ra một ban cán sự lớp gồm 3 người, trong đó có một lớp trưởng, một lớp phó và một thủ quỹ → Hỏi có bao nhiêu cách chọn???

TỔ HỢP

- **Định nghĩa:** Cho X là một tập hợp gồm n phần tử, và số nguyên dương k ≤ n. Mỗi phép chọn k phần tử phân biệt của X không xét thứ tự được gọi là một tổ hợp chập k của X.
- Số tổ hợp chập k của n phần tử được ký hiệu là C_n^k hay $\binom{n}{k}$
- **Ví dụ:**
  – Cho tập S = { 1, 2, 3, 4 } . Tổ hợp chập 3 của 4 phần tử của S là {1,3,4}, {1,2,4}, {1,2,3}, {2,3,4}

Công thức tổ hợp

- **Định lý**: Số các tổ hợp chập k của tập X có n phần tử, với n và k thỏa 0 ≤ k ≤ n, là:

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **Ghi chú**: Số tổ hợp C(n, k) còn được ký hiệu là C_n^k hay $\binom{n}{k}$
- **Ví dụ 1.** Số danh sách không kể thứ tự trước sau gồm 5 người của một lớp học gồm 10 người là C(10, 5) = 10! / (5!5!) = 252.
- **Ví dụ 2.** Trong một lớp học có 20 học sinh. Có bao nhiêu cách chọn ra một đội văn nghệ gồm 5 người?→ Giải???

Một số tính chất của tổ hợp

- Với mọi số thự nhiên n ta có:

  C(n, 0) = 1   C(n, n) = 1

- Cho n và k là 2 số nguyên không âm và k ≤ n. Ta có:

  C(n, k) = C(n, n – k)

- Cho n và k là 2 số nguyên sao cho 0 < k < n. Khi đó ta có:

  C(n, k) = C(n – 1, k) + C(n – 1, k – 1).

- Công thức **Vandermonde**: Cho m, n, và k là các số nguyên không âm với k nhỏ hơn hoặc bằng m và n. Ta có:

  C(m + n, r) = $\sum_{k=0}^{r} C(m, r-k)C(n, k)$

  = C(m, r)C(n, 0) + C(m, r-1)C(n, 1) + … + C(m, 0)C(n, r)

Công thức nhị thức Newton

- **Định lý nhị thức**. Cho x và y là 2 biến thực, n là một số nguyên không âm. Ta có:

  $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k) x^{n-k} y^k$

  $= C(n, 0)x^n + C(n, 1)x^{n-1}y + \ldots + C(n, n-1)xy^{n-1} + C(n, n)y^n$

- **<u>Hệ quả 1</u>**. Cho n là một số nguyên không âm tùy ý. Ta có:

  $\sum_{k=0}^{n} C(n, k) = C(n, 0) + C(n, 1) + \ldots + C(n, n) = 2^n$

- **<u>Hệ quả 2</u>**. Cho n là một số nguyên không âm. Ta có:

  $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C(n, k) = C(n, 0) - C(n, 1) + \ldots + (-1)^n C(n, n) = 0$

Luyện tập

1. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau?
2. Có bao nhiêu số máy điện thoại có 6 chữ số? Và trường hợp 6 chữ số đôi một khác nhau?
3. Cho A = {1,2,3,4,5,6,7}. Có bao nhiêu số tự nhiên có 5 chữ số lấy từ A sao cho:
   a) Có chữ số đầu là 3
   b) Không tận cùng bằng chữ số 4
   c) Cứ 2 chữ số kề nhau là khác nhau
   d) Không bắt đầu bằng

Luyện tập

4. Một lớp học có 40 học sinh với 25 nam và 15 nữ. Có mấy cách chọn 4 học sinh sao cho:

   a) Chọn nam, nữ tùy ý C(40,4) =
   b) Chọn 2 nam và 2 nữ = C(25, 2) * C(15, 2)
   c) Tính xác suất để chọn ít nhất một nữ = 1 – C(25, 4)/C(40, 4)

5. Tìm số đường chéo của đa giác lồi có n cạnh. (Đa giác lồi là đa giác có tính chất kéo dài bất kỳ cạnh nào đều không cắt đa giác. Khi đó 2 đỉnh bất kỳ nối lại, được hoặc cạnh hoặc đường chéo.)

Luyện tập

6. Xét tam giác có đỉnh lấy từ một đa giác lồi có 20 cạnh.
   a. Có bao nhiêu tam giác nói trên?
   b. Tính xác suất để chọn được tam giác có đúng 1 cạnh chung với đa giác?
   c. Có bao nhiêu tam giác có đúng 2 cạnh chung với đa giác?
   d. Tính xác suất để chọn được tam giác không có cạnh chung với đa giác?

HOÁN VỊ LẶP VÀ TỔ HỢP LẶP

Chỉnh hợp lặp

- **Định nghĩa:** Một ***chỉnh hợp lặp chập k*** của n phần tử là một phép chọn k phần tử từ n phần tử đã cho theo một thứ tự nào đó và các phần tử có thể lặp lại.
- **Công thức :** Số chỉnh hợp lặp chập k của tập hợp A có n phần tử là n^k.
- Hay bằng với số phần tử của tập tích Đê-cac A^k

Chỉnh hợp lặp

- **Ví dụ 1.** Từ bảng chữ cái có thể tạo ra bao nhiêu chuỗi có độ dài n?

  →Theo nguyên lý nhân, vì có 26 chữ cái và mỗi chữ cái có thể dùng lại, nên ta có 26^n chuỗi có độ dài n.
- **Ví dụ 2.** Có bao nhiêu số tự nhiên có chín chữ số mà không chứa chữ số nào trong tập hợp {0,3,7,9}?

→Mỗi chữ số của số tự nhiên có chín chữ có thể chọn lặp lại từ tập hợp {1,2,4,5,6,8}. Theo nguyên lý nhân ta có 6^9 số tự nhiên như vậy.

Tổ hợp lặp

- **Định nghĩa**. Mỗi cách chọn ra k vật từ n loại vật khác nhau (không xét thứ tự và trong đó mỗi loại vật có thể được chọn lại nhiều lần) được gọi là tổ hợp lặp chập k của n
- Số các tổ hợp lặp chập k của n được ký hiệu là K_n^k
- Công thức:

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Tổ hợp lặp

- Số cách chia k vật đồng chất nhau vào n hộp phân biệt cũng chính bằng số tổ hợp lặp chập k của n

$$K_n^k = C_{n+k-1}^k$$

Tổ hợp lặp - Ví dụ 1

- Ví dụ 1: Có 3 loại nón A, B, C. An mua 2 cái nón. Hỏi An có bao nhiêu cách chọn.

→Giải: Ta có mỗi cách chọn là mỗi tổ hợp lặp chập 2 của 3. Cụ thể AA, AB, AC, BB, BC, CC

$$K_3^2 = C_{3+2-1}^2 = C_4^2 = 6$$

Tổ hợp lặp - Ví dụ 2

Ví dụ 2: Một người vào một cửa hàng ăn uống muốn chọn mua 7 phần ăn, mỗi phần ăn sẽ được chọn một trong 4 loại khác nhau: A, B, C, D. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 7 phần ăn.

- Trong ví dụ trên, 7 phần ăn có thể được chọn là A, B, A, C, C, D, C trong đó gồm 2 phần loại A, một loại B, 3 loại C và một loại D.

Bài toán trong ví dụ trên có thể phát biểu dưới dạng như sau:

- Cho tập hợp X = { A, B, C, D } có 4 phần tử. Giả sử ta cần chọn 7 phần tử thuộc tập X, được phép chọn lặp lại và không phân biệt trình tự trước sau của việc chọn. Mỗi cách chọn 7 phần tử như thế được gọi là một ***tổ hợp lặp chập 7 của 4 phần tử***. = C(10, 7)

Tổ hợp lặp - Ví dụ 3

Ví dụ 3. Có bao nhiêu cách chọn 5 tờ giấy bạc từ két sắt đựng tiền gồm những tờ 1$, 2$, 5$, 10$, 20$, 50$ và 100$? Giả sử thứ tự các tờ tiền được chọn ra không quan trọng, các tờ tiền cùng loại là không phân biệt và mỗi loại có ít nhất 5 tờ.

- Số cách chọn chính là tổ hợp lặp chập 5 của 7 phần tử (K(7,5)=C(7+5-1,5))
- Giả sử két tiền có 7 ngăn. Các ngăn này phân cách bởi các vách ngăn. Việc chọn 5 tờ giấy bạc tương ứng với việc đặt 5 vật vào 7 ngăn chứa. Như hình sau minh họa một cách chọn 5 tờ tiền:

| * | | * * | | | * *

→số cách chọn 5 tờ giấy bạc tương ứng với số cách sắp xếp 6 thanh đứng và 5 ngôi sao hay **<u>bằng số cách chọn 5 ngôi sao từ 11 vị trí có thể</u>**. Tức là bằng:

C(11, 5) = $\frac{11!}{5!6!}$ = 462

Tổ hợp lặp - Ví dụ 4

Ví dụ 4: Một cửa hàng bánh bích quy có 4 loại khác nhau. Có bao nhiêu cách chọn 6 hộp bánh.

Giải: Số cách chọn 6 hộp bánh chính là số tổ hợp lặp chập 6 của tập hợp có 4 phần tử.

Ta có:

$C(4 + 6 - 1, 6) = C(9, 6)$.

Vì $C(9, 6) = C(9, 3) = 9.8.7 / 1.2.3 = 84$

Như vậy ta có 84 cách khác nhau để chọn 6 hộp bánh.

Tổ hợp lặp - Ví dụ 5

- Ví dụ 5. Phương trình x + y + z = 11 có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm
- Để đếm số nghiệm (x1, x2, x3) của phương trình, một giải pháp là đếm số cách chọn 11 phần tử từ một tập hợp ba loại phần tử sao cho có *x*1 phần tử loại một, *x*2 phần tử loại hai và *x*3 phần tử loại ba được chọn.

  →Do đó, số nghiệm bằng với số tổ hợp lặp chập 11 của tập hợp với ba loại phần tử. Như vậy ta có

  $C(3 + 11 - 1, 11) = C(13, 11) = C(13, 2) = 13.12 / 1.2 = 78$ nghiệm

Tổ hợp lặp - Ví dụ 5 (tt)

- Mở rộng VD 5. Chúng ta có thể tìm số lượng nghiệm nguyên của phương trình với $x \geq 1$, $y \geq 2$ và $z \geq 3$. Một nghiệm cho phương trình thoả các ràng buộc này tương ứng với một lựa chọn của 11 mục với *x* mục loại một, *y* mục loại hai và *z* mục loại ba, trong đó, có ít nhất một mục loại một, hai mục loại hai và ba mục loại ba. Vì vậy, một giải pháp tương ứng với sự lựa chọn của một mục loại một, hai loại hai và ba loại ba, cùng với sự lựa chọn của năm mục bổ sung của bất kỳ loại nào. Điều này có thể được thực hiện trong $C(3 + 5 - 1, 5) = C(7, 5) = C(7, 2) = 7.6 / 1.2 = 21$ cách.
- Do đó, có 21 nghiệm của phương trình thoả các ràng buộc.

Hoán vị lặp

- Định nghĩa. Cho n đối tượng trong đó có n_i đối tượng loại i giống hệt nhau (i =1,2,…,k ; n_1+ n_2,…+ n_k= n). Mỗi cách sắp xếp có thứ tự n đối tượng đã cho gọi là một hoán vị lặp của n.
- Số hoán vị của n đối tượng, trong đó có
  - n_1 đối tượng giống nhau thuộc loại 1,
  - n_2 đối tượng giống nhau thuộc loại 2,…,
  - n_k đối tượng giống nhau thuộc loại k, là $\frac{n!}{n_1!n_2!.....n_k!}$

Hoán vị lặp – Ví dụ 1

- **Ví dụ 1.** Có bao nhiêu chuỗi kí tự khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ SUCCESS?

→Giải : Trong từ SUCCESS có 3 chữ S, 1 chữ U, 2 chữ C và 1 chữ E. Do đó số chuỗi có được là

$$\frac{7!}{3!1!2!1!} = 420$$

Hoán vị lặp – Ví dụ 2

- **Ví dụ 2:** Có thể nhận được bao nhiêu chuỗi khác nhau bằng cách sắp xếp các chữ cái của từ PEPPER.

→ Giải: Trong từ PEPPER có chứa 3 chữ P, 2 chữ E và 1 chữ R. Do đó số chuỗi khác nhau có thể tạo được là:

$$\frac{6!}{3!2!1!} = 60.$$

Hoán vị lặp – Ví dụ 3&4

Ví dụ 3: Tính các số tự nhiên có 7 chữ số, trong đó có 3 chữ số 1, 2 chữ số 2 và 2 chữ số 3.

→Số các số tự nhiên cần đếm là:

$$\frac{7!}{3!\,2!\,2!} = 210$$

Ví dụ 4: Từ tập A = {0,1,2,3,4,5} lập được bao nhiêu số tự nhiên có 8 chữ số sao cho: có 3 chữ số 2; mỗi chữ số còn lại có mặt 1 lần.

→Số các số tự nhiên cần đếm là:

$$\frac{8!}{3!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!} - \frac{7!}{3!\,1!\,1!\,1!\,1!} =$$

Hoán vị lặp – Ví dụ 5

- **Ví dụ 5:** Có bao nhiêu cách chia 5 quân bài cho 4 người chơi từ cỗ bài 52 quân.
- **Giải**: Người chơi đầu tiên có thể được chia 5 quân theo C(52, 5) cách. Người chơi thứ hai có thể được chia 5 quân theo C(47, 5) cách, bởi vì chỉ còn lại 47 quân. Người chơi thứ ba có thể được chia 5 quân theo C(42, 5) cách. Cuối cùng, người chơi thứ tư có thể được chia 5 quân theo cách C(37, 5). Do đó, theo nguyên lý nhân tổng số cách chia 5 quân bài cho bốn người chơi là
  C(52, 5)C(47, 5)C(42, 5)C(37, 5)
  = 52! / 47! 5! . 47! / 42! 5! . 42! / 37! 5! . 37! / 32! 5!
  = 52! / 5! 5! 5! 5! 32!

NGUYÊN LÝ DIRICHLET

- Giả sử có n vật cần đặt vào k hộp. Khi đó tồn tại ít nhất một hộp chứa từ [n/k] vật trở lên. Trong đó [n/k] là số nguyên dương nhỏ nhất không bé hơn n/k.
- **Ví dụ 1.** Trong số 100 người luôn luôn có ít nhất là [100/12] =9 người có sinh nhật trong cùng một tháng.

NGUYÊN LÝ DIRICHLET

- Ví dụ 2. Cần tạo ít nhất bao nhiêu mã vùng để đảm bảo cho 84 triệu máy điện thoại mỗi máy một số thuê bao biết rằng mỗi số thuê bao gồm 7 chữ số, trong đó chữ số đầu khác 0?

→Giải. Theo Nguyên lý nhân, có 9 triệu số thuê bao khác nhau có đúng 7 chữ số, trong đó chữ số đầu khác 0. Theo nguyên lý Dirichlet, trong số 84 triệu máy điện thoại có ít nhất là [84/9]=10 máy có cùng một số thuê bao. Do đó để đảm bảo mỗi máy một số thuê bao cần tạo ra ít nhất là 10 mã vùng

Công thức nhị thức Newton

- **<u>Định lý</u>**: Ta có:
  $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum C(n, r_1, \ldots, r_m) x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_m^{r_m}$,
  $0 \le r_i \le n$, $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$
  trong đó các hệ số $\mathbf{C(n, r_1, \ldots, r_m) = n! / (r_1!\, r_2! \ldots r_m!)}$

Ví dụ: Tìm hệ số của $x^3y^2z^2$ trong khai triển của $(x + 2y - 3z)^7$.

- Áp dụng định lý trên ta có: trong khai triển của $(x + 2y - 3z)^7$, số hạng chứa $x^3y^2z^2$ có dạng $C(7, 3, 2, 2)x^3(2y)^2(-3z)^2$
- Suy ra hệ số của $x^3y^2z^2$ là
  $C(7, 3, 2, 2)\ 2^2(-3)^2 = 36 \times 7! / (3!\ 2!\ 2!) = 7560$

Công thức nhị thức Newton – Bài tập

1. Tìm hệ số của $x^5 y^8$ trong khai triển của $(x + y)^{13}$
2. Tìm hệ số của $x^{101}y^{99}$ trong khai triển của $(2x – 3y)^{200}$
3. Tìm hệ số của x^{15} trong khai triển của $(1 – x^2 + x^3)^{20}$