

Índice

Índice	1
1 – Introdução	2
1.1 – Pêndulo Simples	2
1.2 – Pêndulo Composto	3
1.3 – Pêndulo Não Linear	3
2 – O pêndulo gravítico: resumo histórico	5
3 – Plataforma Elab	6
4 – Automação da experiência do pêndulo gravítico	8
4.1 – Funcionamento do sensor de baixo atrito	8
4.1.1 – Circuito de condicionamento do sinal	8
4.1.2 – Correlacionador	9
4.2 – Aquisição de dados e controlo da experiência	10
4.4 – Esquemático	11
5 – Programação	12
5.1 – Microcontrolador	12
5.2 – Interface com o utilizador	12
6 – Protocolos propostos	14
7 – Resultados Obtidos	15
7.1 – Caracterização da montagem	15
7.2 – Resultados obtidos nos protocolos	18
8 – Conclusões	21
9 – Especificações gerais	22
10 – Bibliografia	23

1 – Introdução

O objectivo deste trabalho é a automação integral da experiência do pêndulo gravítico, com vista à sua integração no sistema Elab. Pretende-se, com esta montagem, estudar movimentos harmónicos simples e desvios à solução linear, aproximada. Para se cumprir estes objectivos, foi necessário desenvolver um sensor electromagnético de baixo atrito e suficientemente sensível, capaz de medir variações de ângulo inferiores a 1°.

1.1 – Pêndulo Simples

Podemos definir o pêndulo como uma massa (m) fixa a um ponto por um fio, de massa desprezável. No caso do pêndulo gravítico ideal, a única força que actua sobre ele será a gravidade e o fio é inextensível, de comprimento l . Se a massa for largada de um ângulo θ , o pêndulo oscilará em torno da posição de equilíbrio ($\theta = 0$), segundo um plano, tendo como pontos de altura máxima $-\theta$ e θ .

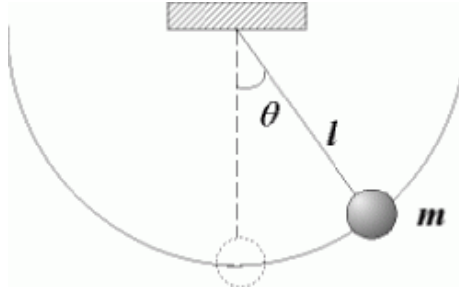


Figura 1: pêndulo gravítico simples

A energia cinética (T) e potencial (U) são, respectivamente:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 \\ U &= m g l (1 - \cos \theta) \end{aligned} \quad [1]$$

Daqui podemos obter a equação do movimento do pêndulo:

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{g}{l} \sin \theta(t) \quad [2]$$

Esta equação diferencial não-linear, não tem solução analítica. No entanto, para ângulos perto de 0, podemos aproximar pela equação linear:

$$\sin \theta \approx \theta \rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \theta \quad [3]$$

Que tem como solução, já tendo em conta as condições fronteiras,

$$\theta(t) = \theta_{\max} \sin \left(2\pi \sqrt{\frac{g}{l}} t \right) \quad [4]$$

Onde θ_{\max} é o ângulo de onde o pêndulo é lançado. Assim, o período T é dado por

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad [5]$$

1.2 – Pêndulo Composto

Estas equações são apenas válidas para a situação em que a massa é pontual e o fio sem massa. Na realidade, a massa do fio quanto muito pode ser desprezada e tanto este como a massa possuem um volume. Chama-se a este pêndulo o pêndulo composto ou físico.

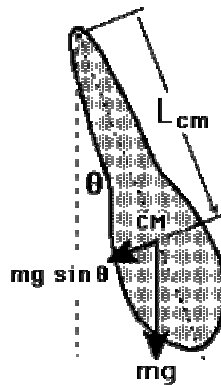


Figura 2: Exemplo de pêndulo físico. CM é o seu centro de massa.

A equação do movimento é

$$I\ddot{\theta}(t) = -mgl \sin \theta(t) \quad [6]$$

Onde I é o momento de inércia total do pêndulo, m a massa total e l corresponde agora à distância ao centro de massa do sistema. Seguindo um raciocínio semelhante ao do ponto anterior, obtemos o período

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} \quad [7]$$

Observa-se imediatamente que, no caso particular em que a massa é pontual, recupera-se a equação do pêndulo simples, com a distância ao centro de massa a corresponder ao comprimento e a massa sendo igual à massa total do sistema.

1.3 – Pêndulo Não Linear

Quando a condição do ângulo muito pequeno não é satisfeita, observam-se desvios a esta solução, principalmente ao nível do período de oscilação. É possível, no entanto, a partir das equações da energia, provar que o período T , é

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta_{\max}} \left[\sin^2(\theta_{\max}/2) - \sin^2(\theta/2) \right]^{\frac{1}{2}} d\theta \quad [8]$$

Se expandirmos este integral, podemos demonstrar que, se $\sin(\theta_{\max}/2) \ll 1$, então

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\theta_{\max}^2}{16} \right) \quad [9]$$

Em que o termo de correcção já contém a dependência com o ângulo máximo.

Por analogia, podemos chegar às fórmulas para o caso do pêndulo gravítico composto não linear:

$$T = 2\sqrt{\frac{I}{mgl}} \int_0^{\theta_{\max}} \left[\sin^2(\theta_{\max}/2) - \sin^2(\theta/2) \right]^{\frac{1}{2}} d\theta \quad [10]$$

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgl}} \left(1 + \frac{\theta_{\max}^2}{16} \right) \quad [11]$$

Na realidade, muitas mais correcções são necessárias para descrever um pêndulo real. As mais importantes são o atrito, o desvio do plano de oscilação e o facto da massa do fio não ser nula. Outras correcções, como a elasticidade do fio, a deslocação da massa do ar (princípio de Arquimedes) e o momento de inércia, contribuem, em geral muito pouco.

2 – O pêndulo gravítico: resumo histórico

Consta que o pêndulo gravítico começou a ser estudado por Galileu Galilei em 1581, ao observar as oscilações dum turíbulo na catedral de Pisa. Usando as suas pulsações como referência (método então usado para medir períodos de tempo inferiores ao minuto). Ele teria então observado que o período de oscilação era independente da amplitude. Mais tarde verificaria que este era proporcional à raiz quadrada do comprimento. Apesar da sua potencialidade como mecanismo de medida do tempo, só em 1641 Galileu começou a aplicar esta teoria aos relógios e em 1657, Huygens inventa o primeiro relógio mecânico de pêndulo. Estes revelar-se-iam cruciais para o desenvolvimento da ciência que se verificou nos séculos seguintes, pois tornava-se agora possível medir o tempo com uma precisão muito superior (os primeiros relógios mecânicos tinham uma precisão de cerca de 1 hora/dia, em oposição a 2 minutos/dia), usando um mecanismo relativamente simples. Seria preciso esperar mais de um século, para que em 1761, o relojoeiro inglês John Harrison, surgisse com uma alternativa. Esta surgiu como solução para o problema da determinação da longitude no alto mar, tendo o parlamento britânico oferecido uma recompensa de 20000 libras (uma grande fortuna para a época) pela sua resolução. Isto mostra a grande importância de tal aparelho. Após a Revolução Francesa, uma das propostas consideradas pela Academia Francesa das Ciências para ser a referência do sistema métrico, consistia no comprimento dum pêndulo, com período de 2 s, que curiosamente é muito próximo do valor actual do metro.

Mas não foi só na medição do tempo que o pêndulo foi importante para a ciência. A primeira validação da Teoria da Gravitação de Newton, foi feita medindo as perturbações ao movimento dum pêndulo, na proximidade duma montanha. Seria usando a propriedade do plano de oscilação do pêndulo ser independente dos movimentos da Terra, que Foucault demonstrou que a Terra girava sobre si própria. Foi igualmente devido ao estudo das oscilações do pêndulo gravítico que se verificou que a força da gravidade na superfície terrestre variava com a latitude. De facto, até 1971, as medições mais precisas da gravidade eram feitas recorrendo a pêndulos. Usando instrumentos muito precisos e aplicando uma série de correcções, é possível determinar g com uma precisão até seis casas decimais.

3 – Plataforma Elab

O Elab é um local na Internet onde estudantes e professores podem realizar on-line, em tempo quasi-real, experiências científicas de física e outras cujas montagens experimentais são monitorizadas remotamente pelo cliente e que estão fisicamente instaladas numa sala/laboratório do Instituto Superior Técnico. O acesso é efectuado através do canal de ciências básicas do portal de conhecimento da UTL (www.e-escola.utl.pt), onde estão acessíveis vários protocolos experimentais ligados a cada experiência.

A implementação é realizada em CORBA (“Common Object Request Broker Architecture”) e em Java.

Na Figura 3: Diagrama da implementação lógica do eLab é **apresentado um diagrama lógico da implementação do eLab**.

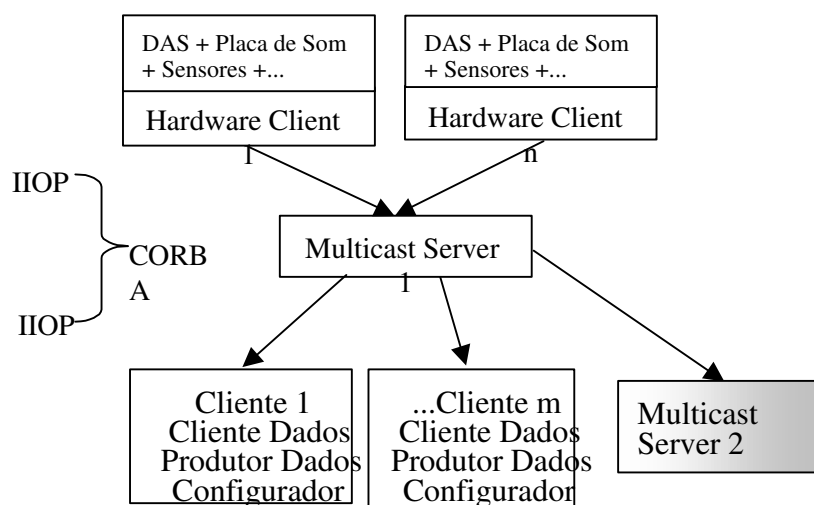


Figura 3: Diagrama da implementação lógica do eLab

O “Hardware Server” é responsável pela aquisição de dados e controlo da experiência (DAS – “Data Acquisition System”) e transmissão de dados para o Multicast Server através de IIOP (“Internet Inter-ORB Protocol”). O “Multicast Server” é responsável pela coordenação de transmissão para os clientes e pelo controle dos diversos “hardwares” registados. Os clientes podem estar a exercer diferentes funções:

1. Cliente de dados: recebe os dados de uma aquisição em curso.
2. Produtor de dados: produz dados que podem ser reenviados para os vários clientes ligados, através de um “Hardware Server” específico para o efeito, denominado “Echo Hardware Server”.
3. Configurador: O cliente está em controlo de um determinado hardware e está a configurá-lo para uma experiência. Note-se que vários clientes podem estar a exercer esta função ao mesmo tempo, mas apenas o utilizador mais antigo na fila é atendido e os outros mantêm-se na fila e a sua configuração em “wait-state”.

O “Multicast Server” pode ser ainda cliente de outro “Multicast Server”, e assim podem-se construir redes mais complexas de aquisição de dados numa filosofia “daisy-chain”.

Em termos práticos a informação flui de um modo bidireccional entre os utilizadores e a experiência através do(s) servidor(es), embora essa bidireccionalidade seja limitada no caso dos utilizadores que não estejam em controlo da experiência. De todos os inscritos

na fila de espera, ao mais antigo é conferido o direito de controlar a experiência por um tempo de 10 segundos. Contudo todos os inscritos podem receber dados de acordo com a parametrização efectuada por esse administrador.

Os dados são captados por meio de sensores conectados directa ou indirectamente a um computador central de onde são difundidos através da Internet bem como a imagem dos acontecimentos.

Cada sala de controlo que corresponde a uma determinada experiência, dispõe de um “chat” on-line onde todos poderão tecer comentários e trocar informação sobre a experiência e sobre a análise dos dados. Cada sala dispõe ainda dum espaço próprio, uma lição, onde se sugere um protocolo experimental, sugestões de variantes à experiência e, por vezes, as explicações da mesma.

4 – Automação da experiência do pêndulo gravítico

Para a completa automação desta experiência, é necessário medir o ângulo ao longo do tempo, para além de controlar o comprimento do pêndulo e o ângulo inicial. Usaram-se para o controlo do comprimento e do ângulo inicial dois servomotores, controlados através de pulsos de PWM, enviados por um microprocessador. Para a medição do ângulo, tornou-se necessário desenvolver um sensor de baixo atrito.

4.1 – Funcionamento do sensor de baixo atrito

4.1.1 – Circuito de condicionamento do sinal

O sensor de baixo atrito desenvolvido consiste em três bobinas, aproveitadas de discos rígidos velhos, duas fixas e uma solidária com o pêndulo, montada como se mostra nas figuras seguintes.



Figura 4: fotografia das bobinas montadas

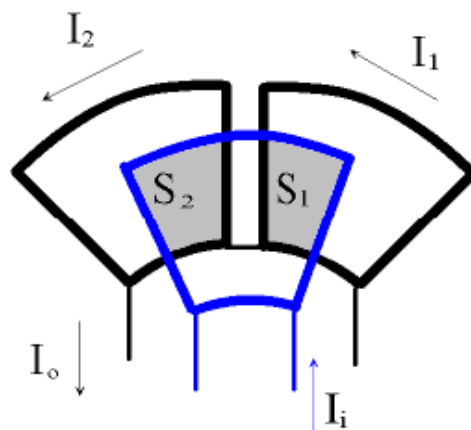


Figura 5: esquema do sensor. A azul a bobina móvel. A cinzento as áreas em que as bobinas se sobrepõem. A bobina móvel encontra-se deslocada para baixo, para facilitar a compreensão do esquema.

Pela lei da indução, sabemos que a corrente nas bobinas fixas vai ser directamente proporcional à corrente na bobina e à área abrangida, ou seja:

$$I_1 \propto S_1 I_i; I_2 \propto S_2 I_i$$

Como as ligações entre as bobinas fixas foram feitas de modo às correntes que as percorrem terem direcções opostas, verificamos que a corrente total, I_o , será:

$$I_o = I_2 - I_1 \rightarrow I_o \propto (S_2 - S_1) I_i$$

Assim, quando S_2 for maior que S_1 , I_o estará em fase com I_i e quando o contrário se verificar, estarão em oposição de fase. Devido à forma das bobinas, me fracção de coroa circular, espera-se que o ângulo do pêndulo tenha uma relação linear com a diferença das áreas.

Esta montagem apresenta uma grande vantagem. As bobinas estão tão próximas que qualquer campo electromagnético gerado por fontes externas causará praticamente o mesmo ruído em ambas as bobinas fixas. Isto significa que as correntes assim geradas acabam por se anular, tendo como consequência o nível do ruído ser efectivamente nulo na saída.

O resultado final é um sinal modulado em amplitude, em que as frequências sobrepostas são as do sinal à entrada e da oscilação do pêndulo.

Devido ao seu formato e à maneira como foi montado, este sensor apenas permite ângulos até 14° . Por isso, espera-se que os desvios à solução linear sejam da ordem dos 0,4%.

4.1.2 – Correlacionador

A solução mais simples para separar as frequências de sinais modulados seria aplicar um filtro passa baixo, mas se tal tivesse sido aplicado a este caso, isso significaria perder a informação relativa à fase e, consequentemente, a posição relativa do pêndulo. Para resolver este problema, usou-se *um circuito de sample & hold*. Este consiste num circuito integrador, cujo período de amostragem é controlado por um interruptor. Enquanto o interruptor está fechado, ele integra o sinal da entrada, mantendo esse valor quando o interruptor abre.

Para controlar o interruptor usou-se a parte positiva do sinal de entrada do sensor de posição. Quando os sinais de entrada e saída estão em fase, o sinal integrado estará sempre acima da tensão de referência e no caso oposto, estará sempre abaixo da tensão de referência, tal como se pode ver nesta figura:

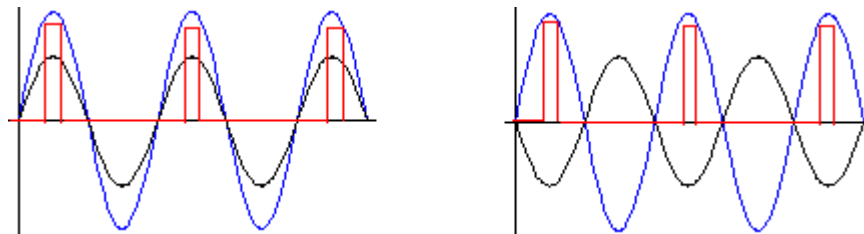


Figura 6: nesta figura temos a azul o sinal à entrada do sensor, a preto o sinal na saída e a vermelho o intervalo de aquisição do circuito correlacionador

Este sinal vai depois para um circuito subtrator / amplificador, que baixa a tensão de referência para metade da alimentação do ADC e amplifica o sinal (neste caso duplica-o).

4.2 – Aquisição de dados e controle da experiência

A aquisição de dados é feita por um ADC de 12 bits e é processada por um microprocessador. Este comunica com o ADC através do protocolo série SPI.

O ângulo e o comprimento do pêndulo são controlados por dois servomotores independentes, através de pulsos de PWM. No caso dos motores usados o importante não é o *duty cycle* mas o tempo em que o sinal na entrada lógica está a *high*, sendo o tempo a *low* constante. O ângulo dos servomotores é linearmente proporcional ao tempo do impulso a *high* e devido à maneira como foram montados, esperava-se que o ângulo inicial e o comprimento apresentassem a mesma relação.

4.4 – Esquemático

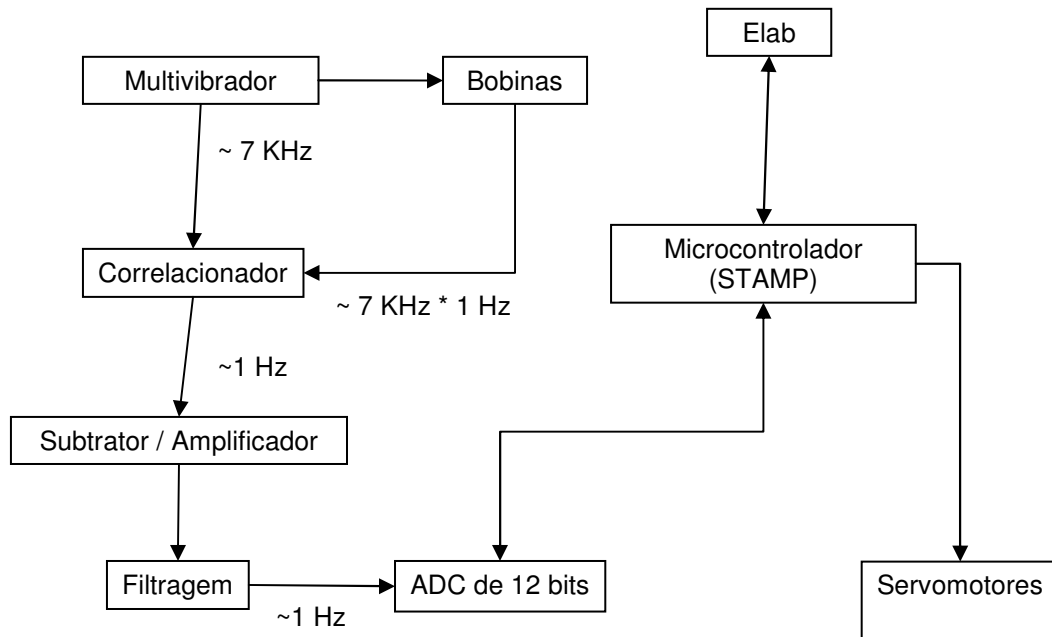


Figura 7: esquema do funcionamento da electrónica de controlo e aquisição de dados, com a frequência do sinal ao longo do circuito, até ao ADC.

5 – Programação

5.1 – Microcontrolador

O controlo da experiência e da aquisição de dados, para além das comunicações com o computador, é feito por um microcontrolador BASIC STAMP[®] da Parallax[®]. Escolheu-se este por ser fácil de programar, fiável e relativamente barato.

Em primeiro lugar, o programa configura os portos e guarda a configuração do ADC. Ao longo dos teste realizados ao circuito do sensor, verificou-se que a tensão à entrada do ADC variava consideravelmente ao fim de alguns minutos, ,as não suficientemente rápido para influenciar os resultados dum ensaio. Por isso, ele faz cinco aquisições, à frequência máxima, e guarda a média. Informa então o Elab que a configuração da experiência não foi feita e identifica a experiência. Durante 5 s espera que lhe seja enviada uma configuração válida, medindo novamente a tensão, para determinar o *offset* na saída.

Quando recebe uma configuração válida, calcula qual o período de pausa entre aquisições, para cumprir a frequência de aquisição pedida, informa o Elab que está pronto para começar e envia-lhe a média das quatro últimas medições do *offset*. Depois de verificar que os valores pedidos estão dentro dos limites e de colocar o pêndulo no ângulo inicial e comprimento pedidos, arranca a experiência, enviando os dados para o Elab. Terminada a aquisição, espera 10 s, para dar tempo ao pêndulo para parar e regressa à rotina de espera da configuração.

A frequência de aquisição máxima conseguida é de 106 Hz. Esta deve-se ao tempo de configuração e envio de dados, pelo ADC, mas principalmente ao tempo de envio dos resultados para o Elab. Esta frequência é suficiente, tendo em consideração que a frequência das oscilações do pêndulo é da ordem do Hertz.

O código completo do programa, está disponível nos anexos.

5.2 – Interface com o utilizador

A interface com o utilizador é feita através duma aplicação Java[®], padrão do Elab. Através do portal www.e-escola.pt pode-se aceder ao Laboratório Completo, onde se encontra a experiência.

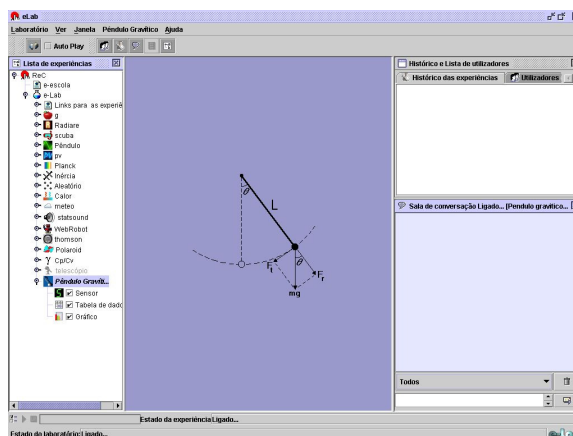


Figura 8: aspecto da janela inicial do Elab, já com a experiência do pêndulo gravítico seleccionada

Abrindo o configurador (Figura 9: janela de configuração da experiência), o utilizador pode escolher o comprimento do pêndulo, o ângulo inicial, o número de aquisições e a frequência de amostragem. Para que a experiência não se prolongue por demasiado tempo, foi imposto o limite de 1 minuto. É também possível escolher uma configuração por defeito.

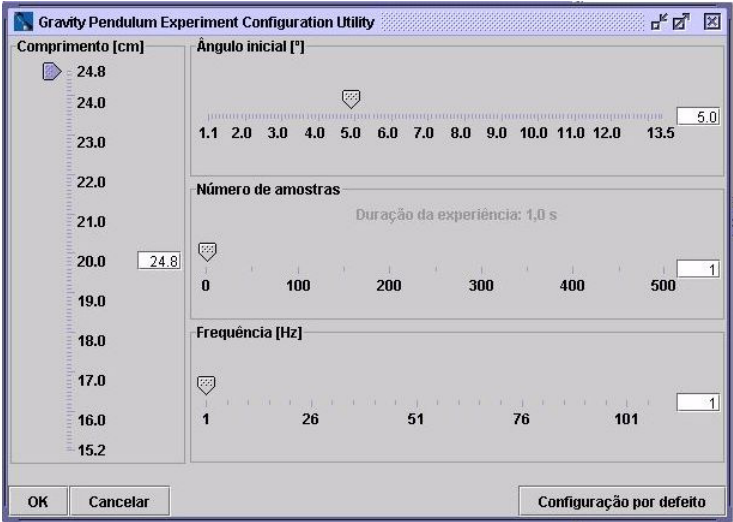


Figura 9: janela de configuração da experiência

Terminada a experiência, o utilizador tem acesso a uma tabela com os resultados, que pode guardar para fazer a análise mais aprofundada, e a um gráfico, para uma análise rápida.

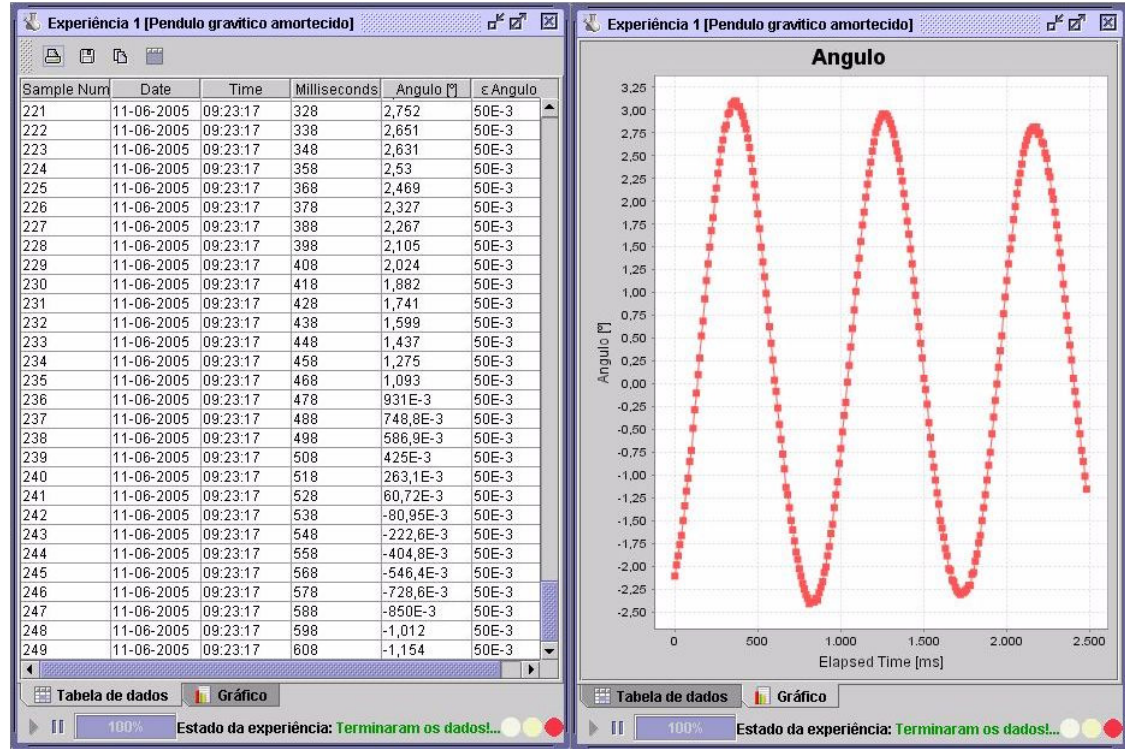


Figura 10: exemplo de tabela e gráfico, obtidos com esta experiência

6 – Protocolos propostos

Nesta experiência, são propostos ao utilizador três protocolos, em que se estudam várias aproximações ao pêndulo real.

Em todos os protocolos, o utilizador deverá aplicar uma Transformada Discreta de Fourier aos sinais obtidos, para determinar as frequências de oscilação correspondentes. Para se obter a melhor resolução na transformada e tendo em conta que as frequências dos sinais que estão a ser medidos são perto de 1 Hz, as aquisições devem ser feitas a uma frequência baixa e com o número máximo de aquisições, mas deve-se ter em conta que o tempo do ensaio não deve ser demasiado grande, para que a diminuição da amplitude de oscilação, devido ao atrito, não prejudique os resultados.

No primeiro protocolo, o utilizador deverá fixar um ângulo inicial pequeno ($\sim 3^\circ$) e fazer aquisições para vários comprimentos. Ajustando os resultados à fórmula [5] obtém-se o valor de g . O parâmetro l é a distância ao centro de massa, que pode ser obtido, neste caso, a partir da distância ao ponto de referência d pela fórmula:

$$l = \frac{(d_{CM} + d)m_C + \frac{h_V}{2}m_V}{m_C + m_V}$$

Onde d_{CM} é a distância do ponto de referência (um ponto da base do grave mais perto do eixo) ao centro de massa do grave, d é a distância do eixo ao mesmo ponto, h_V é o comprimento da vara e m_C e m_V são as massas do grave e da vara, respectivamente (ver Figura 11).

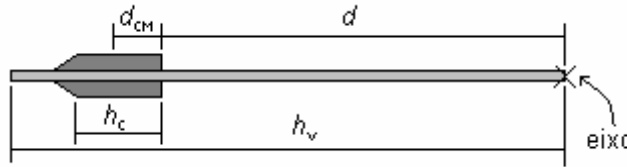


Figura 11: esquema do pêndulo, com a indicação do eixo de rotação. As dimensões estão indicadas nas Especificações.

O segundo protocolo é semelhante ao primeiro, excepto no facto de se considerar a correcção devida ao momento de inércia, usando-se a fórmula [7] para o ajuste. Se desprezarmos o raio da vara, em comparação com o seu comprimento, e desprezarmos igualmente a parte cónica do grave e o furo por onde passa a vara, o momento de inércia do conjunto reduz-se a

$$I = \frac{1}{3}m_V h_V^2 + \left(\frac{1}{3}h_C^2 + \frac{1}{4}r^2 + d^2 \right)m_C$$

Onde r é o raio da parte cilíndrica do grave.

No terceiro protocolo o objectivo é observar desvios à solução de 1ª ordem. Para tal dever-se-á fixar um comprimento e tirar medições para diferentes ângulos, comparado o desvio observado, em relação ao ângulo mínimo, com o desvio previsto teoricamente.

7 – Resultados Obtidos

7.1 – Caracterização da montagem

Para se determinar qual o nível de ruído à saída do ADC, fizeram-se aquisições para a posição de repouso e para as posições extremas. A seguir apresentam-se os gráficos mais representativos, onde a origem do eixo das ordenadas é apenas uma referência, sem qualquer significado físico.

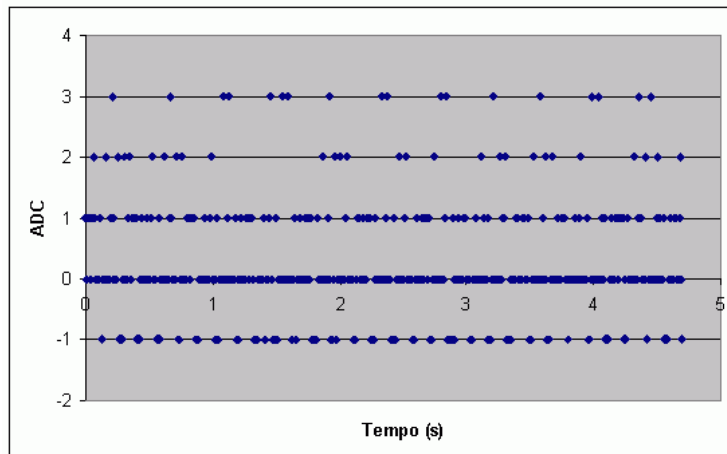


Gráfico 1: Sinal à saída do ADC, pêndulo em repouso, $\sigma = 0,926$

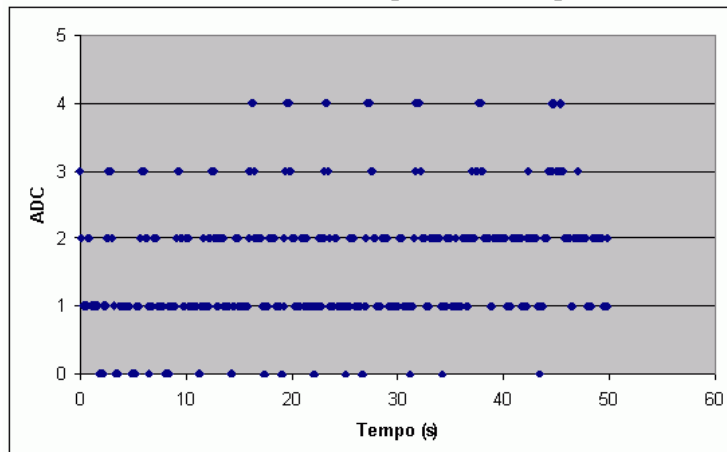


Gráfico 2: Sinal à saída do ADC, pêndulo em repouso, $\sigma = 0,917$

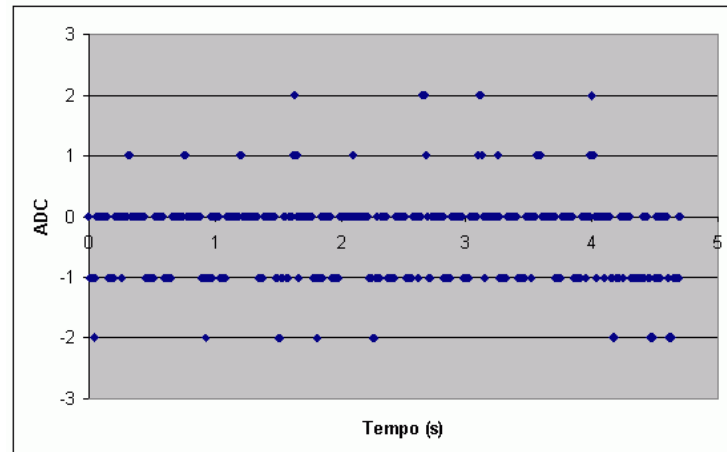


Gráfico 3: Sinal à saída do ADC, pêndulo fixo num ângulo de $14,5^\circ$, $\sigma = 0,674$

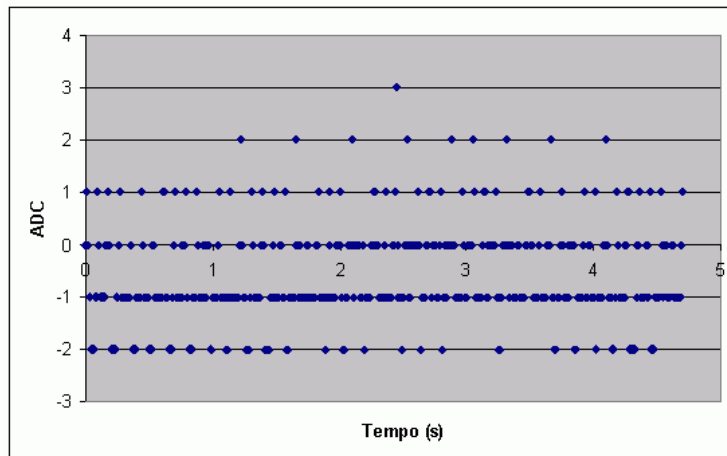


Gráfico 4: Sinal à saída do ADC, pêndulo fixo num ângulo de $-14,5^\circ$, $\sigma = 0,898$

Analisando estes gráficos, verifica-se que não existem diferenças significativas no nível de ruído para as várias posições. É também visível no Gráfico 2 a variação da tensão de base, já referida, se bem que muito ligeira.

Para se estabelecer a relação entre a tensão medida no ADC e o ângulo do pêndulo, fizeram-se várias medições, para diferentes posições. Os valores dos ângulos foram calculados medindo a distância à posição de equilíbrio, ao nível da base. Foi admitido um erro de $\pm 0,5\text{mm}$. Não foi considerado o erro devido ao ruído, por ser desprezável face ao erro na determinação do ângulo. Como a tensão de base variou para cada ensaio, foi necessário fazer a normalização dos dados, para ficarem centrados em torno do mesmo valor, que se arbitrou ser 2048, por ser metade do valor máximo do ADC.

Devido à geometria das bobinas, esperava-se que esta relação fosse linear. Estes foram os resultados obtidos, já com o ajuste linear, onde 0° corresponde à posição de equilíbrio:

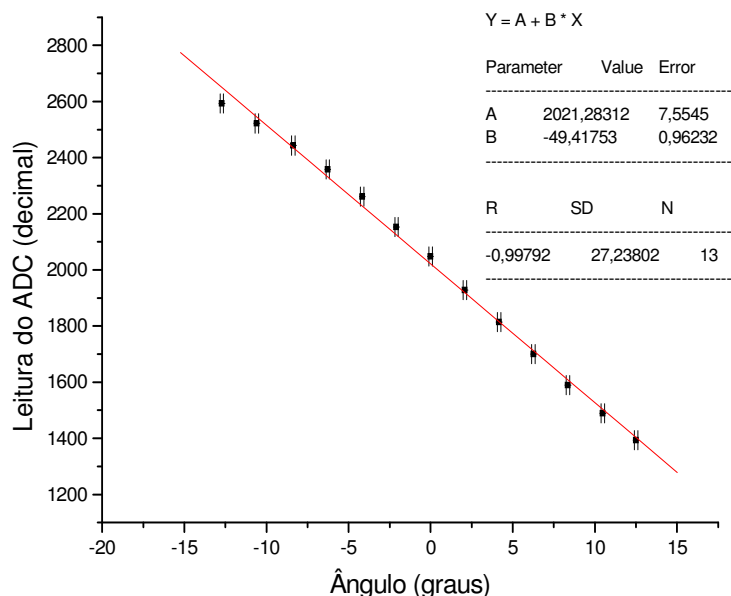


Gráfico 5: Calibração do sensor de posição: $y = -49,42x + 2021$

Pelo valor de R^2 ser muito próximo de 1, pode-se afirmar que este ajuste é uma boa aproximação, apesar da recta não intersectar quase nenhuma barra de erro. Como a tensão de base varia ao longo do tempo em que o circuito está ligado, o parâmetro mais

importante a retirar deste ajuste é o declive da recta. O outro parâmetro será dado pelo valor em repouso, obtido antes de cada medição, como já foi explicado na secção 5.2. Usando a mesma montagem, fez-se a calibração da relação entre o tempo do impulso enviado ao servo motor de controlo do ângulo inicial, e o ângulo.

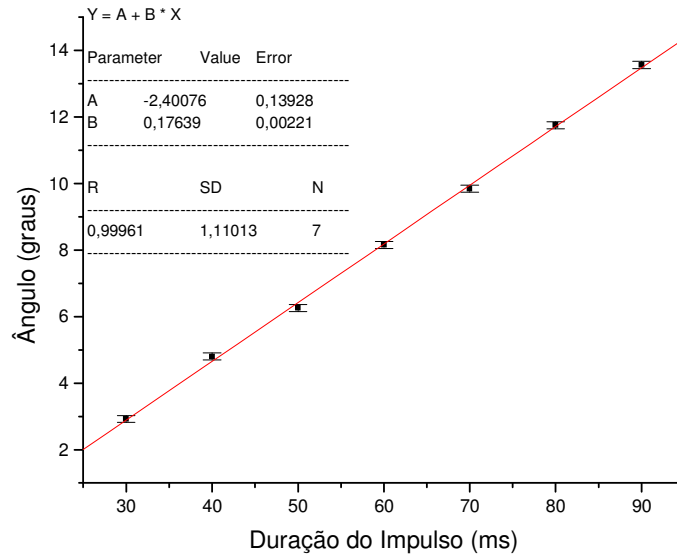


Gráfico 6: Calibração do controlo do ângulo inicial: $y = 0,177x - 2,40$

Para se determinar a relação entre o tempo do impulso enviado ao servo de controlo da altura e o comprimento do pêndulo, usou-se como referência a superfície da massa mais próxima do eixo de oscilação. Os resultados, juntamente com o ajuste feito, estão representados no Gráfico 7.

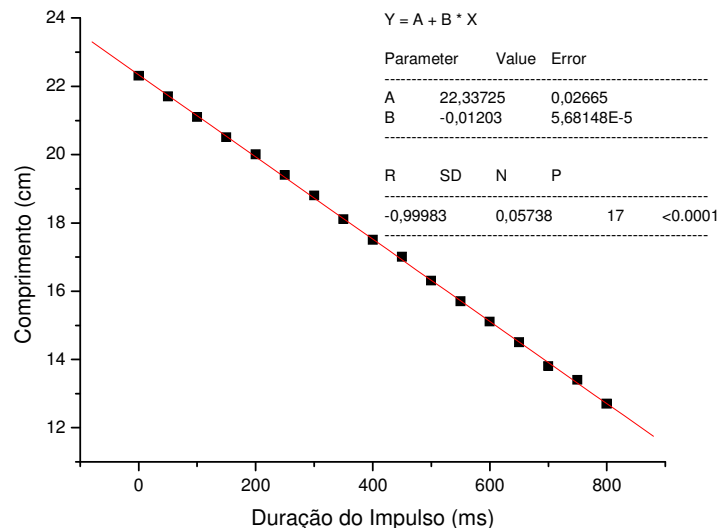


Gráfico 7: Calibração do controlo do comprimento (distância do eixo à base da massa): $y = -0,012x + 22,337$

Para se verificar se a montagem satisfazia o requisito do baixo atrito, fizeram-se duas aquisições, com o pêndulo nos comprimentos máximo e mínimo, durante 25 s. Fez-se um ajuste a um seno, com decaimento exponencial, do tipo

$$y = A \cdot e^{-x/\tau_0} \sin\left(\frac{\pi(x - x_c)}{w}\right)$$

para se determinar o tempo que demorava ao sinal diminuir para metade do valor inicial (t_0). Os resultados estão expressos nos gráficos seguintes.

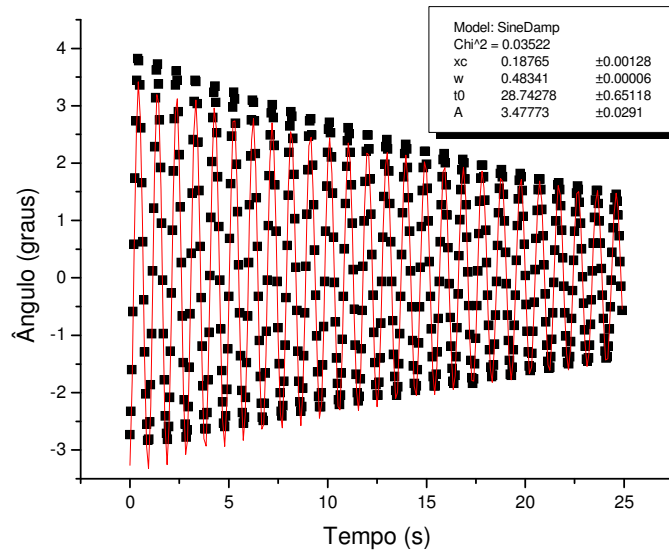


Gráfico 8: Distância ao centro de massa = 20,8 cm, $T = 0,967$ s, $t_0 = 28,743 \pm 0,652$ s, corresponde a cerca de 30 períodos

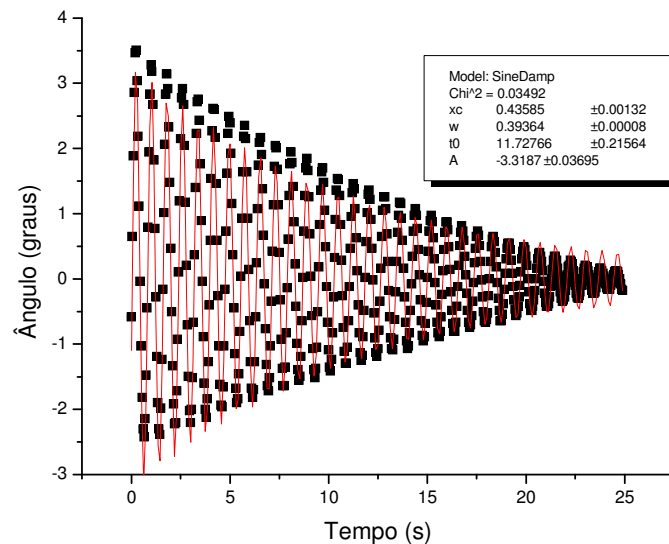


Gráfico 9: Distância ao centro de massa = 14,1 cm, $T = 0,787$ s, $t_0 = 11,728 \pm 0,216$ s, corresponde a cerca de 15 períodos

Aqui confirma-se que o atrito é suficientemente baixo para permitir tirar um número significativo de amostras, sem que o sinal perca demasiada amplitude. As diferenças observadas no t_0 para os diferentes comprimentos, devem-se ao facto de, sendo a frequência mais elevada, a perda de energia é também mais rápida.

7.2 – Resultados obtidos nos protocolos

Para se confirmar a qualidade da experiência e a validade dos protocolos propostos, fizeram-se duas experiências.

Na primeira experiência fizeram-se dois ensaios de 250 aquisições, a 96 Hz, com ângulo inicial a 2° , para os comprimentos extremos de 20,8 cm e 14,1 cm. Os resultados estão expressos nos seguintes gráficos:

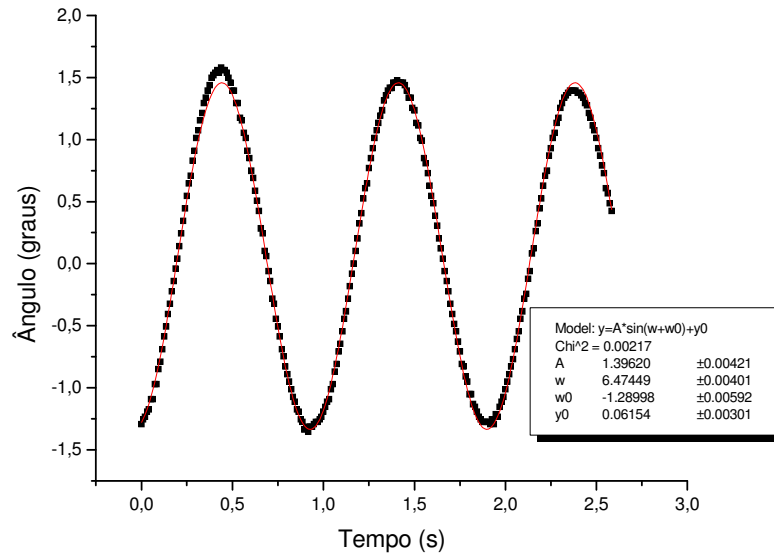


Gráfico 10: Distância ao centro de massa = 20,8 cm, $\omega = 6,47449 \pm 0,00401$ rad/s

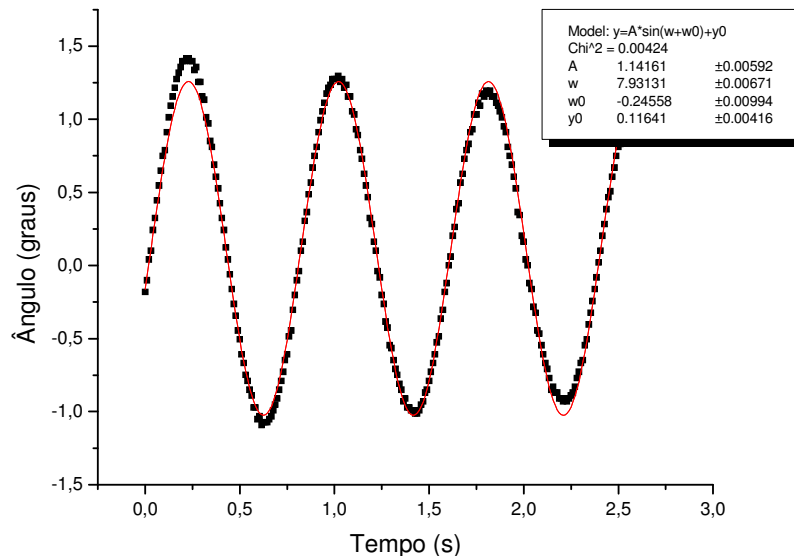


Gráfico 11: Distância ao centro de massa = 14,1 cm, $\omega = 7,93131 \pm 0,00671$ rad/s

Daqui obtemos, para o primeiro ensaio, usando a fórmula para o pêndulo simples, $g = 8,7192 \pm 0,0111$ m/s² e $g = 8,8697 \pm 0,0165$ m/s², para o segundo ensaio.

Na segunda experiência, foram feitas 500 aquisições a 50 Hz, por ensaio, com o comprimento de 20,8 cm, para vários ângulos entre 1,5 e 12°. Para a determinação da frequência, fez-se a transformada de Fourier dos sinais, por ser o método mais preciso. Para o erro considerou-se a resolução em frequência da transformada (0,05 Hz). Os resultados estão expresso no seguinte gráfico:

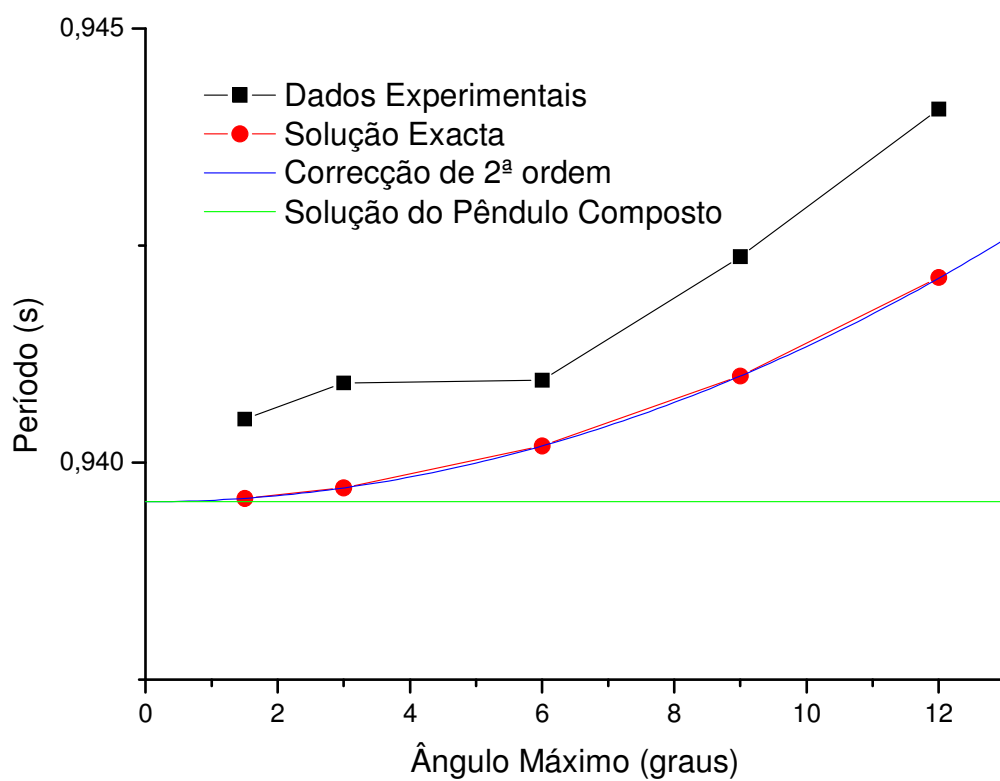


Gráfico 12: variação do período com o ângulo inicial. A solução exacta foi calculada integrando numericamente, a solução aproximada corresponde à independente do ângulo e a aproximação corresponde à de segundo grau.

8 – Conclusões

Analisando os resultados obtidos, conclui-se que o sensor de posição satisfaz todos os requisitos pretendidos. O ruído médio corresponde aos dois bits menos significativos, o que é excelente, tendo em conta que o ADC é de 12 bits. A relação entre a tensão à saída e o ângulo do pêndulo é aproximadamente linear. O atrito é suficientemente baixo para que se possam adquirir períodos suficientes, sem que haja uma perda significativa de amplitude. É ainda suficientemente sensível para se observarem desvios de 2ª ordem à solução aproximada.

Nos resultados da primeira experiência, podemos observar que os resultados ajustam-se muito bem a um seno, tal como se esperava. A causa da discordância dos g obtidos com o actualmente aceite ($9,80665 \text{ m/s}^2$) dever-se principalmente ao facto de se ter usado a fórmula do pêndulo simples. A possibilidade de erro na medição da frequência de amostragem, durante as calibrações também é uma hipótese a ter em consideração.

A partir dos resultados da segunda experiência, pode-se concluir que a aproximação de segunda ordem é suficiente para os ângulos estudados, pois é visível no gráfico a quase justaposição entre esta e a solução exacta. Também é possível concluir que o desvio observado corresponde ao esperado, à parte de um erro sistemático da ordem dos 0,1%, que se deverá a algum dos factores desprezados, nomeadamente a bobina acoplada ao pêndulo, o orifício do grave e a sua parte cónica.

9 – Especificações gerais

- Comprimento variável entre 14,1 e 20,8 cm.
- Ângulo inicial variável entre 1,5 e 13,5°.
- Frequências de oscilação entre cerca de 1,03 e 1,26 Hz.
- Nível de ruído inferior a 0,06°.
- 30 períodos de oscilação, no comprimento máximo e 15 no mínimo, até a amplitude se reduzir a metade.
- Frequência de aquisição máxima de 106 Hz, com comunicação RS-232 a 38400 bits/s.
- Alimentação a 12 V.
- Auto correcção da tensão de base.
- Massa do grave: $51,16 \pm 0,01$ g.
- Massa do eixo: $18,46 \pm 0,01$ g.
- Dimensões do eixo: 27,5 cm de comprimento, 3 mm de diâmetro.
- Distância da base do grave ao centro massa: 1,57 cm.
- Desenho e dimensões do grave:

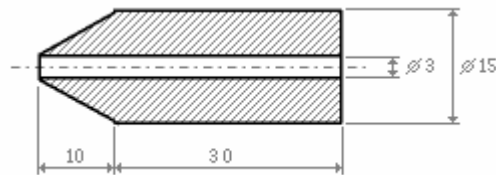


Figura 12: corte longitudinal do grave usado. As dimensões estão em milímetros.

10 – Bibliografia

- [1] NELSON, R. A., OLSSON, M. G. – The pendulum – Rich physics from a simple system: American Journal of Physics, Vol. 54, No 8, 1986.
- [2] SAGDEEV, R. Z., USIKOV, D. A., ZALAVSKY, G. M. – *Nonlinear Physics*. Harwood Academic Publishers, 1988.
- [3] DEUS, Jorge Dias de, et Al. – *Introdução à Física*. 1ª edição, McGraw-Hill, 1992.
- [4] - *História dos Grandes Inventos*. Selecções do Reader's Digest, 1983.