§1 母函数（生成函数）简介

对于取值非负整数的随机变量，其母函数有极其良好的性质且又便于计算和分析，因此引入母函数是非常必要的。母函数又称生成函数(Generating function)。

母函数的定义

- **定义**：对于数列$\{a_n, n \ge 0\}$，称幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n \ (|s| \le 1)$为$\{a_n, n \ge 0\}$的母函数。
- **定义**：设X为取值于非负整数随机变量，分布率为$P\{X = x_k\} = p_k, k = 0,1,2,\cdots$，则称

$$g(s) \hat{=} E(s^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k s^k \quad |s| \le 1$$

为随机变量X的概率母函数，简称母函数。

一些常用分布的母函数

（1）若$X \sim B(n.p)$，则$g(s) = (q + sp)^n$

（2）若$X \sim Po(\lambda)$，则$g(s) = e^{\lambda(s-1)}$

（3）若$X \sim G(p)$，则$g(s) = \dfrac{ps}{1 - qs}$

母函数的基本性质

（1）X的母函数与其分布率是一一对应的，且有$p_k = \dfrac{g^{(k)}(0)}{k!}$

（2）设非负整值随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，而$g_1, g_2, \cdots, g_n$分别是它们的母函数，则$Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$的母函数为：

$$g_Y(s) = g_1(s) g_2(s) \cdots g_n(s)$$

（3）设随机变量X的母函数为$g(s)$，则有：

（a）$E(X) = g'(1)$

（b）$D(X)=Var(X)=g''(1)+g'(1)-[g'(1)]^2$

母函数的应用

（4）设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布，且 $X_i \sim B(1.p)$，求 $Y=\sum_{k=1}^{n}X_k$ 的分布。

（5）设 X_1,X_2 独立，且 $X_i \sim B(n_i.p),i=1,2$，证明 $X_1+X_2 \sim B(n_1+n_2,p)$。

（6）设 X_1,X_2 独立，且 $X_i \sim Po(\lambda_i),i=1,2$，证明 $X_1+X_2 \sim Po(\lambda_1+\lambda_2)$。

§2 特征函数

1．特征函数的定义

- **定义**：如果 X,Y 均为概率空间 (Ω,Σ,P) 上的实值随机变量，则称 $\xi=X+iY$ 为一复随机变量，且定义复随机变量的数学期望为 $E\xi=EX+iEY$。

  由以上定义，有 $E\{e^{itX}\}=E\{\cos tX+i\sin tX\}=E\{\cos tX\}+iE\{\sin tX\}$。

- **定义**：若随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)$，则称：

$$\varphi(t)\hat{=}Ee^{itX}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF_X(x)\hat{=}\int_{-\infty}^{\infty}(\cos tx+i\sin tx)dF_X(x)$$

  为随机变量 X 的特征函数（c.f.）

- **定义**：设 $\vec{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^\tau$ 为 n 元随机向量，其联合分布函数为 $F_{\vec{X}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，则其特征函数为 n 元函数，定义为

$$\varphi_{\vec{X}}(\vec{t})\hat{=}E\{e^{i\vec{t}^\tau\vec{X}}\}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dF_X(x)\hat{=}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{j(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)\}dF_{\vec{X}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

  其中：$\vec{t}=(t_1,t_2,\cdots,t_n)^\tau$。

- 特征函数其实就是随机变量函数的数学期望。
- 特征函数的简单性质

  （1）由于 $\left|e^{itX}\right|\le 1$，所以对任意随机变量，特征函数都有意义；

  （2）特征函数是一实变量的复值函数；

  （3）特征函数只与分布函数有关，因此又称为某一分布的特征函数；

  （4）若 X 的特征函数为 $\varphi(t)$，则 $a+bX$ 的特征函数为 $\exp\{ita\}\varphi(bt)$；

  （5）$\varphi(0)=1$；

（6）对离散型的随机变量 X，其分布率为 $P\{X=x_j\}=p_j\ \ j=1,2\cdots$，则其特征函数为 $\varphi(t)=\sum_{j=1}^{\infty}p_j\exp\{itx_j\}$，若是连续型随机变量，概率密度为 $f(x)$，则其特征函数为 $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{itx\}f(x)dx$。

2．几种常见分布的特征函数

（1）若 $X\sim B(1,p)$，则 $\varphi(t)=\exp\{it\}p+q$

（2）若 $X\sim Po(\lambda)$，则 $\varphi(t)=\exp\{\lambda(e^{it}-1)\}$

（3）若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $\varphi(t)=\exp\left\{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2\right\}$

2．特征函数的性质

性质 1 $|\varphi(t)|\le\varphi(0)=1$，且 $\varphi(-t)=\overline{\varphi(t)}$。

性质 2 $\varphi(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续

性质 3 若 $E\{X^k\}$ 存在，则对于 $t\in(-\infty,+\infty)$，$\varphi(t)$ k 阶可导，且

$$\varphi^{(k)}(t)=i^kE\{X^ke^{itX}\}\qquad \text{特别有}\quad \varphi^{(k)}(0)=i^kE\{X^k\}$$

性质 4 $\varphi(t)$ 具有非负定性，即对于任意的正整数 n 及任意的实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 与复数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，总有：

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(t_k-t_j)\lambda_k\overline{\lambda_j}\ge 0$$

性质 5 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 分别为它们的特征函数，则 $Y=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 的特征函数为 $\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_n$

定理：设 $\vec{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^{\tau}$ 的特征函数为 $\varphi_{\vec{X}}(\vec{t})=\varphi_{\vec{X}}(t_1,t_2,\cdots,t_n)$，其各阶联合矩均存在，则有

$$E\{X_1^{k_1}X_2^{k_2}\cdots X_n^{k_n}\}=j^{-\sum_{i=1}^{n}k_i}\frac{\partial^{k_1+k_2+\cdots+k_n}}{\partial t_1^{k_1}\partial t_2^{k_2}\cdots\partial t_n^{k_n}}\varphi_{\vec{X}}(t_1,t_2,\cdots,t_n)\Big|_{t_1=t_2=\cdots=t_n=0}$$

定理：（逆转公式）设随机变量 X 的分布函数为 $F_X(x)$，特征函数为 $\varphi_X(t)$，如果 $x<y$，

那么

$$(F_X(y-0)-F_X(x+0))+\frac{F_X(x+0)-F_X(x-0)}{2}+\frac{F_X(y+0)-F_X(y-0)}{2}$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\exp\{-jtx\}-\exp\{-jty\}}{jt}\varphi_X(t)dt$$

如果 x 和 y 是分布函数的连续点，则有

$$F_X(y)-F_X(x)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\frac{\exp\{-jtx\}-\exp\{-jty\}}{jt}\varphi_X(t)dt$$

更进一步，如果 X 为连续型随机变量，密度函数为 $f_X(x)$，则有

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_X(t)\exp\{-jtx\}dt$$

定理：（唯一性定理）如果两个随机变量有相同的特征函数，那么它们的概率分布也相同，即分布函数 $F(x)$ 到特征函数 $\varphi(t)$ 的变换是一一对应的。

定理：设 $\{F_n(x), n\geq 1\}$ 和 $\{\varphi_n(t), n\geq 1\}$ 分别为随机变量序列 $\{X_n, n\geq 1\}$ 的分布函数和特征函数序列，随机变量 X 的分布函数和特征函数分别为 $F(x)$ 和 $\varphi(t)$，如果 $X_n\xrightarrow{d}X$，那么在任意一个有限区间上，$\{\varphi_n(t), n\geq 1\}$ 均一致收敛到 $\varphi(t)$。即

$$X_n\xrightarrow{d}X\ \Rightarrow\ \varphi_n(t)\longrightarrow\varphi(t)$$

定理：设 $\{F_n(x), n\geq 1\}$ 和 $\{\varphi_n(t), n\geq 1\}$ 分别为随机变量序列 $\{X_n, n\geq 1\}$ 的分布函数和特征函数序列，如果 $\{\varphi_n(t)\}$ 逐点收敛到 $\varphi(t)$，且 $\varphi(t)$ 在 $t=0$ 点连续，那么 $\{X_n\}$ 弱收敛到随机变量 X，且 X 的特征函数恰为 $\varphi(t)$。

3．特征函数与分布函数的关系

- **定理**：分布函数 $F(x)$ 到特征函数 $\varphi(t)$ 的变换是一一对应的。
- **定理**：分布函数序列 $\{F_n, n\geq 1\}$ 与分布函数 $F(x)$ 具有关系：

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=F(x)\qquad\text{（对任意 }F(x)\text{ 的连续点）}$$

当且仅当：

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t)$$

其中 $\varphi(t)$ 是 $F(x)$ 的特征函数，$\varphi_n(t)$ 是 $F_n(x)$ 的特征函数。