随机过程课程作业-Week8

作者：48-丁力-202328015926048
日期：今天

目录

马尔科夫过程

题目5

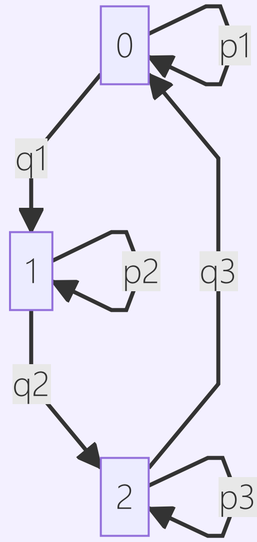
设有一个三个状态 $S=\{0,1,2\}$ 的齐次马氏链, 它一步转移梳率矩阵为:

$$P=\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 \\ q_3 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

试求:

- (1) $f_{00}^{(1)}, f_{00}^{(2)}, f_{00}^{(3)}, f_{01}^{(1)}, f_{01}^{(2)}, f_{01}^{(3)}$

> ~~为了计算这些 `n` 步返回概率，对于齐次马尔科夫链，我们直接计算P^n即可。~~
>
> 首先，我之前犯了个错，没有区分出来$f_{ij}^{(n)}$ 和$q_{ij}^{(n)}$ 的区别， 这里区分一下， 前者表示n步从i状态到j状态的概率，后者也是，但是 `后者不要求路径是否经过j`， 前者要求 `不能经过j` 。
>
> 那么为了计算这几个值，首先我们需要画出其状态转移图：



那么，我们可以计算得到上述内容为：

$$
\begin{aligned}
f_{00}^{(1)} &= p_1 \\
f_{00}^{(2)} &= 0 \\
f_{00}^{(3)} &= q_1 q_2 q_3 \\
f_{01}^{(1)} &= q_1 \\
f_{01}^{(2)} &= q_1 p_2 \\
f_{01}^{(3)} &= q_1 p_1^2
\end{aligned}
$$

- (2) 确定状态分类，哪些属于常返的，哪些属于非常返的。

- **相通状态（Communicating States）**：
  - 从图中可以看出：
    - 从状态1可以通过一个边到达状态2，但无法到达状态3。
    - 从状态2可以通过一个边到达状态3，但无法直接到达状态1。
    - 从状态3可以通过一个边到达状态1，但无法直接到达状态2。
  - 因此，所有的状态都是相通的。

1. **非周期状态（Aperiodic States）**：
   - 由于每个状态都有一个指向自己的边（表示每个状态都有一个非零的概率在下一步返回到自身），所有的状态都是非周期的。
2. **正常返状态（Positive Recurrent States）**：
   - 如前所述，每个状态都有一个非零的概率在有限的步数内返回到该状态，因此每个状态都是正常返的。
3. **遍历状态（Ergodic States）**：
   - 由于每个状态都是非周期的和正常返的，所以每个状态都是遍历的。

题目6

试确定下列齐次马氏链的状态分类, 哪些属于常返的, 那些些属于非常返的. 已知该链的一步转移矩阵为:

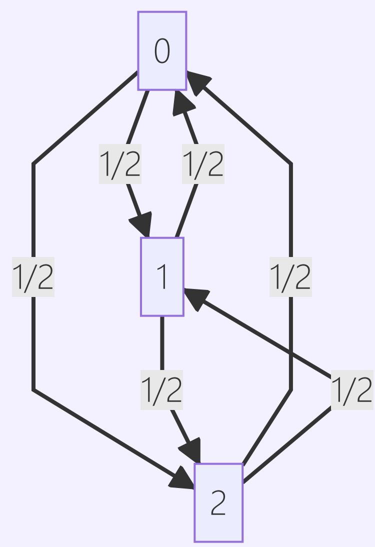
(1) $P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$;

(3) $P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1):

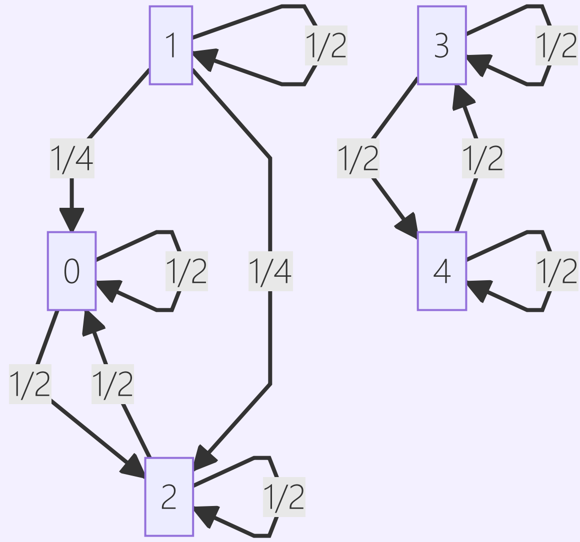
画出其状态转移图如下:



由于三个状态都是相同的，所以这个是正常返的。

(2):

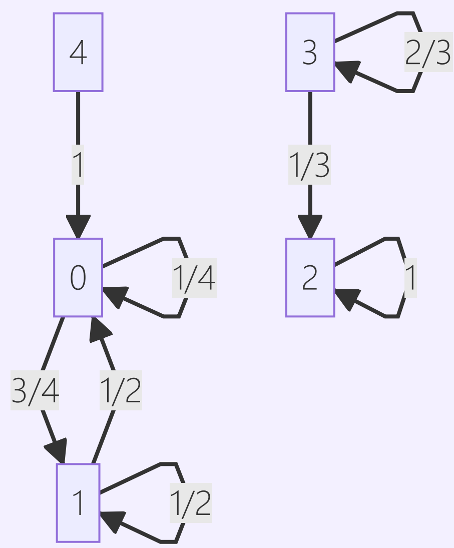
画出其状态转移图如下:



容易看出，这个图是不联通的，所以部分，所以分为左右两个来区分，对于右边的子图，3和4是连通的，所以3和4是正常返回的， 在左图中，0和2是正常返的， 从1出发到达0和2的无法返回1，所以1是非常返的。

(3):

画出状态转移图如下:



同上分析，我们可以得到:

> 0 正常返
>
> 1: 正常返
>
> 2: 正常返
>
> 3: 非正常返
>
> 4: 非正常返

题目7

设具有三个状态的齐次马氏链的一步转移枚率矩阵为:

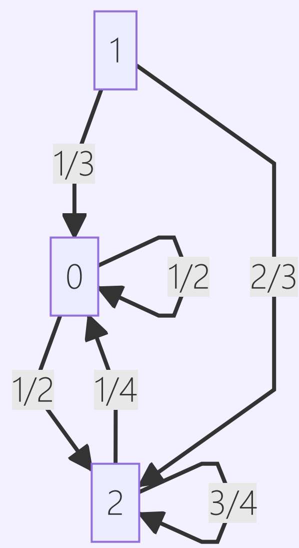
$$P=\begin{pmatrix}p_{00} & p_{01} & p_{02}\\ p_{10} & p_{11} & p_{12}\\ p_{20} & p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 0 & 1/2\\ 1/3 & 0 & 2/3\\ 1/4 & 0 & 3/4\end{pmatrix}$$

(a) 求 3 步首达概率 $f_{02}^{(3)}$;

（b）写出三个状态的常返性、周期性; 此链是否遍历? 说明理由.

(1) 🚶

首先，我们给出其状态转移图:



从上图容易看出，三步首达概率为:

$$f_{02}^{(3)}=p_{00}p_{00}p_{02}=\frac{1}{2}^{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

(2)

从上状态转移图容易看出:

> 0： 常返态
>
> 1： 非常返态
>
> 2： 常返

对于状态1， 从1出发无法返回1，所以1是非周期的， 由于0和2状态都有自环，所以也是非周期性的。

对于任意正整数 `n`， P^n第二列均为0， 所以该马尔科夫链是非遍历的。

题目8

设 $\{X_n; n=0,1,2,\cdots\}$ 是一齐次马氏链, 其初始分布为

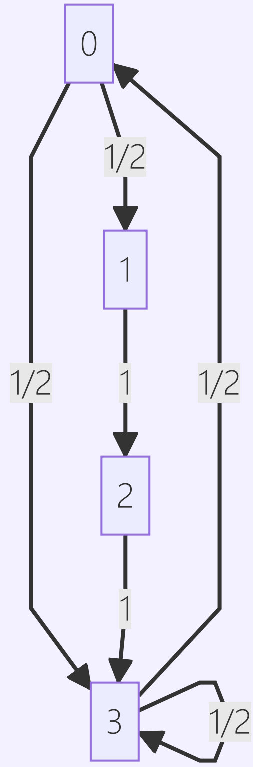
$$P\{X_0=0\}=p_0, P\{X_0=1\}=p_1, P\{X_0=2\}=p_2, P\{X_0=3\}=p_3$$

一步转移概率矩阵为:

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- (1) 试求概率 $P\{X_0=0, X_1=1, X_2=1\}$;
- (2) 计算 $p_{01}^{(2)}$;
- (3) 试求首达概率 $f_{00}^{(n)}, n=1,2,3,\cdots$;
- (4) 写出四个状态的常返性、周期性; 此链是否遍历? 说明理由。

> - (1):
>
> 这个概率可以用条件全概率计算得到:
>
> $$\begin{aligned} P\{X_0=0, X_1=1, X_2=1\} &= P\{X_0=0\}P_{01}P_{11} \\ &= p_0 \times 1/2 \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$
>
> - (2):
>
> 这个可以通过P^2计算得到, 首先我们计算P^2:
>
> $$p^2=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
>
> 那么, 我们有:
>
> $$p_{01}^{(2)}=0$$
>
> - (3)
>
> 画出其状态转移图:



所以有：

$$f_{00}^{(n)}=\begin{cases}0,n=1\\(1/2)^2,n=2\\(1/2)^3,n=3\\(1/2)^n+(1/2)^{n-2},n\geq 4\end{cases}$$

- （4）

由于该图是连通的，所以这个是正常返的， 由于都是非周期的，并且是遍历的。