第四章 二阶矩过程、平稳过程和随机分析 习题解答

1、设 $X_n=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\cos(\alpha_k n-U_k)$，其中 σ_k 和 α_k 为正常数，$U_k\sim U(0,2\pi)$，且相互独立，$k=1,2,\cdots,N$，试计算 $\{X_n,n=0,\pm1,\cdots\}$ 的均值函数和相关函数，并说明其是否是平稳过程。

解：计算均值函数和相关函数如下

$$\mu_X(n)=E\{X_n\}=E\left\{\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\cos(\alpha_k n-U_k)\right\}=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{N}\sigma_k E\{\cos(\alpha_k n-U_k)\}=0$$

$$\begin{aligned}R_X(n,m)&=E\left\{\left[\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\sqrt{2}\cos(\alpha_i n-U_i)\right]\cdot\left[\sum_{j=1}^{N}\sigma_j\sqrt{2}\cos(\alpha_j m-U_j)\right]\right\}\\&=2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_i\sigma_j E\{\cos(\alpha_i n-U_i)\cos(\alpha_j m-U_j)\}\\&=2\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2 E\{\cos(\alpha_i n-U_i)\cos(\alpha_i m-U_i)\}=\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2\cos[\alpha_i(n-m)]\end{aligned}$$

因此可知，$\{X_n,n=0,\pm1,\cdots\}$ 是平稳随机过程。

2、设有随机过程 $X(t)=A\cos(\omega t+\pi\eta(t))$，其中 $\omega>0$ 为常数，$\{\eta(t),t\ge 0\}$ 是泊松过程，A 是与 $\eta(t)$ 独立的随机变量，且 $P\{A=-1\}=P\{A=1\}=1/2$。

（1）试画出此过程的样本函数，并问样本函数是否连续？

（2）试求此过程的相关函数，并问该过程是否均方连续？

解：（1）样本函数不连续。

（2）令：$t_2>t_1\ge 0$，下面求相关函数：

$$\begin{aligned}R_X(t_1,t_2)&=E\{X(t_1)X(t_2)\}=E\{A^2\cos(\omega t_1+\pi\eta(t_1))\cos(\omega t_2+\pi\eta(t_2))\}\\&=E\{A^2\}\cdot E\{\cos(\omega t_1+\pi\eta(t_1))\cos(\omega t_2+\pi\eta(t_2))\}\\&=\frac{1}{2}E\{\cos[\omega(t_1+t_2)+\pi(\eta(t_1)+\eta(t_2))]+\cos[\omega(t_2-t_1)+\pi(\eta(t_2)-\eta(t_1))]\}\\&=\frac{1}{2}E\{\cos[\omega(t_1+t_2)+2\pi\eta(t_1)+\pi(\eta(t_2)-\eta(t_1))]+\cos[\omega(t_2-t_1)+\pi(\eta(t_2)-\eta(t_1))]\}\\&=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\{\cos[\omega(t_1+t_2)]+\cos[\omega(t_2-t_1)]\}\cdot\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}\cdot e^{-\lambda(t_2-t_1)}\\&=\frac{1}{2}\{\cos[\omega(t_1+t_2)]+\cos[\omega(t_2-t_1)]\}\cdot e^{-2\lambda(t_2-t_1)}\\&=\cos\omega t_1\cos\omega t_2\cdot e^{-2\lambda(t_2-t_1)}\end{aligned}$$

因为：

$$R_{\xi}(t,t)=\cos^2 \omega t$$

因此该过程是均方连续的随机过程。

3、设 $\{X(t), t\geq 0\}$ 是一实的零初值正交增量过程，且 $X(t)\sim N(\mu,\sigma^2 t)$。令 $Y(t)=2X(t)-1$，$t\geq 0$。试求过程 $\{Y(t), t\geq 0\}$ 的相关函数 $R_Y(s,t)$。

解：由相关函数的定义，有：

$$\begin{aligned}R_Y(s,t)&=E\{Y(s)Y(t)\}=E\{(2X(s)-1)(2X(t)-1)\}\\&=4E\{X(s)X(t)\}-2E\{X(s)\}-2E\{X(t)\}+1\\&=4E\{X(s)X(t)\}-4\mu+1\end{aligned}$$

由 $\{X(t), t\geq 0\}$ 是实的零初值正交增量过程，当 $0\leq s\leq t$ 时，我们有：

$$\begin{aligned}E\{X(s)X(t)\}&=E\{X(s)(X(t)-X(s)+X(s))\}\\&=E\{X(s)(X(t)-X(s))\}+E\{X^2(s)\}\\&=E\{X^2(s)\}=\sigma^2 s+\mu^2\end{aligned}$$

因此

$$R_Y(s,t)=4E\{X(s)X(t)\}-4\mu+1=4\sigma^2 s+4\mu^2-4\mu+1$$

同理，当 $0\leq t\leq s$ 时，有：

$$R_Y(s,t)=4\sigma^2 t+4\mu^2-4\mu+1$$

因此：

$$R_Y(s,t)=4\sigma^2\min\{s,t\}+4\mu^2-4\mu+1$$

4、设有随机过程 $X(t)=2Z\sin(t+\Theta)$，$-\infty<t<+\infty$，其中 Z、Θ 是相互独立的随机变量，$Z\sim N(0,1)$，$P(\Theta=\pi/4)=P(\Theta=-\pi/4)=1/2$。问过程 $X(t)$ 是否均方可积过程？说明理由。

解：由 Z、Θ 的相互独立性，计算随机过程 $X(t)$ 的均值函数和相关函数：

$$E\{X(t)\}=E\{2Z\sin(t+\Theta)\}=2E\{Z\}E\{\sin(t+\Theta)\}=0$$

$$\begin{aligned}R_X(s,t)&=E\{X(s)X(t)\}=E\{2Z\sin(s+\Theta)\cdot 2Z\sin(t+\Theta)\}\\&=4E\{Z^2\}E\{\sin(s+\Theta)\sin(t+\Theta)\}=4E\{\sin(s+\Theta)\sin(t+\Theta)\}\\&=4[\sin(s+\pi/4)\sin(t+\pi/4)\times 1/2+\sin(s-\pi/4)\sin(t-\pi/4)\times 1/2]\\&=2\cos(t-s)\end{aligned}$$

由此可知，随机过程 $X(t)$ 是平稳过程，且是均方可积的。

5、设随机过程$\xi(t)=X\cos 2t+Y\sin 2t$，$-\infty<t<+\infty$，其中随机变量X和Y独立同分布。

（1）如果$X\sim U(0,1)$，问过程$\xi(t)$是否平稳过程？说明理由；

（2）如果$X\sim N(0,1)$，问过程$\xi(t)$是否均方可微？说明理由。

解：计算随机过程$\xi(t)$的相关函数：

$$\begin{aligned}R_\xi(s,t)&=E\{\xi(s)\xi(t)\}=E\{(X\cos 2s+Y\sin 2s)(X\cos 2t+Y\sin 2t)\}\\&=\cos 2s\cos 2tE\{X^2\}+\sin 2s\sin 2tE\{Y^2\}+[\cos 2s\sin 2t+\sin 2s\cos 2t]E\{XY\}\end{aligned}$$

（1）当$X\sim U(0,1)$时，$E\{X^2\}=E\{Y^2\}=1/3, E\{XY\}=E\{X\}E\{Y\}=1/4$，因此

$$R_\xi(s,t)=E\{\xi(s)\xi(t)\}=\frac{1}{3}\cos 2(t-s)+\frac{1}{4}\sin 2(t+s)$$

所以，此时过程$\xi(t)$不是平稳过程。

（2）当$X\sim N(0,1)$时，$E\{X^2\}=E\{Y^2\}=1, E\{XY\}=E\{X\}E\{Y\}=0$，因此

$$R_\xi(s,t)=E\{\xi(s)\xi(t)\}=\cos 2(t-s)$$

所以，此时过程$\xi(t)$是平稳过程，且均方可微。

6、设随机过程$\{X(t);-\infty<t<+\infty\}$是一实正交增量过程，并且$E\{X(t)\}=0$，及满足：

$$E\left\{[X(t)-X(s)]^2\right\}=|t-s|,\quad -\infty<s,t<+\infty\text{；}$$

令：$Y(t)=X(t)-X(t-1), -\infty<t<+\infty$，试证明$Y(t)$是平稳过程。

解：因为

$$m_Y(t)=E\{X(t)\}-E\{X(t-1)\}=0$$

$$\begin{aligned}R_Y(t,t-\tau)&=E\{Y(t)Y(t-\tau)\}=\\&=E\{[X(t)-X(t-1)]\cdot[X(t-\tau)-X(t-\tau-1)]\}\\&=\frac{1}{2}\{E[X(t)-X(t-\tau-1)]^2-E[X(t)-X(t-\tau)]^2+\\&\quad+E[X(t-1)-X(t-\tau)]^2-E[X(t-1)-X(t-\tau-1)]^2\}\\&=\frac{1}{2}[|\tau+1|-2|\tau|+|\tau-1|]\\&=\begin{cases}1-|\tau|, & |\tau|\le 1\\ 0, & |\tau|>1\end{cases}\end{aligned}$$

所以随机过程$Y(t)$是平稳过程，其功率谱密度函数为：

$$S_Y(\omega)=\int_{-1}^{1}\left[1-|\tau|\right]e^{-j\omega\tau}\,d\tau=\left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right]^2$$

7、设 $\xi(t) = X\sin(Yt); t \ge 0$，而随机变量 X 、Y 是相互独立且都服从 $[0,1]$ 上的均匀分布，试求此过程的均值函数及相关函数。并问此过程是否是平稳过程，是否连续、可导？

解：由于：

$$\mu_\xi(t) = E\{\xi(t)\} = \frac{1-\cos t}{2t}$$

$$R_\xi(s,t) = E\{\xi(s)\xi(t)\} = \frac{1}{6}\left[\frac{\sin(t-s)}{t-s} - \frac{\sin(t+s)}{t+s}\right]$$

因此可知，此过程不是平稳过程，连续、可导。

8、设 $\{X(t), t \in R\}$ 是连续平稳过程，均值为 m，协方差函数为 $C_X(\tau) = ae^{-b|\tau|}$，其中：$\tau \in R$，$a,b > 0$。对固定的 $T > 0$，令 $Y = T^{-1}\int_0^T X(s)ds$，证明：$E\{Y\} = m$，$Var(Y) = 2a[(bT)^{-1} - (bT)^{-2}(1-e^{-bT})]$。

证明：由题意，有

$$E\{Y\} = E\left\{T^{-1}\int_0^T X(s)ds\right\} = T^{-1}\int_0^T E\{X(s)\}ds = m$$

$$\begin{aligned}
Var(Y) &= E\{Y^2\} - [E\{Y\}]^2 = E\{Y^2\} - m^2 \\
&= E\{[T^{-1}\int_0^T X(s)ds]\cdot[T^{-1}\int_0^T X(u)du]\} - m^2 \\
&= T^{-2}\int_0^T\int_0^T E\{X(s)X(u)\}dsdu - m^2 \\
&= T^{-2}\int_0^T\int_0^T R_X(s-u)dsdu - m^2 \\
&= T^{-2}\int_0^T\int_0^T [C_X(s-u)+m^2]dsdu - m^2 \\
&= T^{-2}\int_0^T\int_0^T ae^{-b|s-u|}dsdu \\
&= 2a[(bT)^{-1} - (bT)^{-2}(1-e^{-bT})]
\end{aligned}$$

9、设 $(X,Y) \sim N(0,0,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，令 $X(t) = X + tY$，以及 $Y(t) = \int_0^t X(u)du$，$Z(t) = \int_0^t X^2(u)du$，对于任意 $0 \le s \le t$，

（1）求 $E\{X(t)\}$，$E\{Y(t)\}$，$E\{Z(t)\}$，$Cov(X(s),X(t))$，$Cov(Y(s),Y(t))$；

（2）证明 $X(t)$ 在 $t>0$ 上均方连续、均方可导；

（3）求 $Y(t)$ 及 $Z(t)$ 的均方导数。

解：（1）由于 $(X,Y) \sim N(0,0,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，因此

$$E\{X(t)\} = E\{X+tY\} = E\{X\} + tE\{Y\} = 0$$

$$E\{Y(t)\} = E\{\int_0^t X(u)du\} = \int_0^t E\{X(u)\}du = 0$$

由于 $X(t)$ 的均值函数为零，因此

$$\begin{aligned} Cov(X(s), X(t)) &= R_X(s,t) = E\{X(s)X(t)\} = E\{[X+sY][X+tY]\} \\ &= E\{X^2\} + (s+t)E\{XY\} + stE\{Y^2\} = \sigma_1^2 + (s+t)\rho\sigma_1\sigma_2 + st\sigma_2^2 \end{aligned}$$

因此，有

$$\begin{aligned} E\{Z(t)\} &= E\{\int_0^t X^2(u)du\} = \int_0^t E\{X^2(u)\}du \\ &= \int_0^t [\sigma_1^2 + 2u\rho\sigma_1\sigma_2 + u^2\sigma_2^2]du = \sigma_1^2 t + \rho\sigma_1\sigma_2 t^2 + \frac{1}{3}\sigma_2^2 t^3 \end{aligned}$$

由于 $E\{Y(t)\} = 0$，因此

$$\begin{aligned} Cov(Y(s),Y(t)) &= R_Y(s,t) = E\{Y(s)Y(t)\} = E\{[\int_0^s X(u)du][\int_0^t X(v)dv]\} \\ &= \int_0^s du \int_0^t E\{X(u)X(v)\}dv = \int_0^s du \int_0^t [\sigma_1^2 + (u+v)\rho\sigma_1\sigma_2 + uv\sigma_2^2]dv \\ &= \sigma_1^2 st + \frac{1}{2}\rho\sigma_1\sigma_2 st(s+t) + \frac{1}{4}\sigma_2^2 s^2 t^2 \end{aligned}$$

（2）由

$$R_X(s,t) = \sigma_1^2 + (s+t)\rho\sigma_1\sigma_2 + st\sigma_2^2$$

可知， $X(t)$ 在 $t > 0$ 上均方连续、均方可导。

（3）由

$$R_Y(s,t) = \sigma_1^2 st + \frac{1}{2}\rho\sigma_1\sigma_2 st(s+t) + \frac{1}{4}\sigma_2^2 s^2 t^2,$$

可知，$Y(t)$ 在 $t > 0$ 上均方可导。其均方导数 $Y'(t)$ 的均值函数和相关函数分别为

$$\mu_{Y'} = E\{Y'(t)\} = 0$$

$$R_{Y'}(s,t) = \frac{\partial^2 R_Y(s,t)}{\partial s \partial t} = \sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2(s+t) + \sigma_2^2 st$$

下面求 $Z(t)$ 的相关函数：由于 $(X, Y) \sim N(0,0,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，因此有

$$\begin{aligned} E\{X^2(u)X^2(v)\} &= E\{X^2(u)\}E\{X^2(v)\} + 2[E\{X(u)X(v)\}]^2 \\ &= [\sigma_1^2 + 2u\rho\sigma_1\sigma_2 + u^2\sigma_2^2][\sigma_1^2 + 2v\rho\sigma_1\sigma_2 + v^2\sigma_2^2] + \\ &\quad + 2[\sigma_1^2 + (u+v)\rho\sigma_1\sigma_2 + uv\sigma_2^2]^2 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} R_Z(s,t) &= E\{Z(s)Z(t)\} = E\{[\int_0^s X^2(u)du][\int_0^t X^2(v)dv]\} \\ &= \int_0^s du \int_0^t E\{X^2(u)X^2(v)\}dv \end{aligned}$$

将上式代入计算即可得 $Z(t)$ 的相关函数。

10、　设随机过程 $\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$ 是均值为零、自相关函数为 $R_X(\tau)$ 的实平稳正态过程。设 $X(t)$ 通过线性全波检波器后，其输出为 $Y(t) = |X(t)|$，试求：

（1）随机过程 $Y(t)$ 的相关函数 $R_Y(\tau)$，并说明其是否为平稳过程；

（2）随机过程 $Y(t)$ 的均值和方差；

（3）随机过程 $Y(t)$ 的一维概率分布密度函数 $f_Y(y)$。

解：（1）设 X, Y 是服从均值为零的正态分布二维随机变量，其联合概率密度为：

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

则有：

$$E\{|XY|\} = \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi}[\varphi\sin\varphi + \cos\varphi]$$

其中：$\sin\varphi = r,\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$。

因为 $X(t+\tau)$ 与 $X(t)$ 是联合正态分布的，且各自的均值为零，方差为 $R_X(0)$，相关系数为

$$r = \frac{E\{X(t+\tau)E(t)\}}{\sqrt{E\{X^2(t+\tau)\}}\sqrt{E\{X^2(t)}} = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$$

由此，我们有：

$$R_Y(\tau) = E\{|X(t+\tau)||X(t)|\} = \frac{2R_X(0)[\varphi\sin\varphi + \cos\varphi]}{\pi}$$

其中：$\sin\varphi = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)},\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$。

$$m_Y = E\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x)dx = 2\int_0^{+\infty} x\frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)}}\exp\{-\frac{x^2}{2R_X(0)}\}dx = \sqrt{\frac{2R_X(0)}{\pi}}$$

由此可知，随机过程 $Y(t)$ 是平稳过程。

（2）均值计算如上（1），方差计算如下：

$$E\{Y^2(t)\} = E\{X^2(t)\} = R_X(0)$$

$$\sigma_Y^2 = E\{Y^2(t)\} - m_Y^2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)R_X(0)$$

（3）因为 $X(t)$ 的一维分布为正态分布，其分布密度函数为：

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \exp\{-\frac{x^2}{2R_X(0)}\}, \quad -\infty < x < +\infty$$

因此，我们有：

$$f_Y(y) = \left[f_X(y) + f_X(-y) \right] = \frac{2}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \exp\{-\frac{y^2}{2R_X(0)}\}, \quad y > 0$$