第二章　Markov 过程

4.　马尔可夫链状态的分类

（六）闭集和状态空间的分解

定义：设C是状态空间S的一个子集，如果从C内任何一个状态i不能到达C外的任何状态，则称C是一个闭集。如果单个状态i构成的集$\{i\}$是闭集，则称状态i是吸收态。如果闭集C中不再含有任何非空闭的真子集，则称C是不可约的。闭集是存在的，因为整个状态空间S就是一个闭集，当S不可约时，则称此马氏链不可约，否则称此马氏链可约。

有关的性质：

（1）C是闭集$\Leftrightarrow p_{ij}=0, \forall i\in C, j\notin C \Leftrightarrow p_{ij}^{(n)}=0\,(n\ge 1), \forall i\in C, j\notin C$；

（2）C是闭集$\Leftrightarrow \sum_{j\in C} p_{ij}=1, \forall i\in C$；

（3）i为吸收态$\Leftrightarrow p_{ii}=1$；

（4）齐次马氏链不可约$\Leftrightarrow$任何两个状态均互通；

（5）所有常返态构成一个闭集；

（6）在不可约马氏链中，所有状态具有相同的状态类型；

定义：对$i\in S$，若正整数集$\left\{n; n\ge 1, p_{ii}^{(n)}>0\right\}$非空，则定义其最大公约数为状态$i$的周期，记为$d_i$，当$d_i=1$时，称该状态无周期。

定义：称非周期正常返状态为遍历态。

注意：一个不可约的、非周期的、有限状态的马氏链一定是遍历的。

定理：设$\{X_n; n\ge 0\}$为马氏链，状态空间为S，对于$\forall i,j\in S$，若$i\leftrightarrow j$，则i与j具有相同的周期。

证明：分别记i和j的周期为d_i和d_j，由$i\leftrightarrow j$可知，存在$k,l\ge 1$，有

$$p_{ij}^{(k)} > 0, p_{ji}^{(l)} > 0 \quad \Rightarrow \quad p_{ii}^{(k+l)} > 0$$

由周期的定义可知d_i整除$(k+l)$。另外，记

$$R_j = \{m \ge 1; p_{jj}^{(m)} > 0\} \ne \varnothing$$

则对于任意的$n \in R_j$，由于$p_{jj}^{(n)} > 0$，有$p_{ii}^{(k+n+l)} \ge p_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(l)} > 0$，因此可知$d_i$整除$(k+n+l)$，既有$d_i$整除任意的$n \in R_j$，从而有$d_i$整除$d_j$。同理可证$d_j$整除$d_i$。因此有$d_i = d_j$。

（七）常返、非常返、周期状态的分类特性

设$i \leftrightarrow j$，则i和j或者都是非常返态，或者都是零常返态，或者都是正常返非周期的（遍历），或者都是正常返有周期的且有相同的周期。

$$\text{状态}\begin{cases}\text{非常返态} \\ \text{常返态}\begin{cases}\text{零常返态} \\ \text{正常返态}\begin{cases}\text{有周期} \\ \text{非周期（遍历态）}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

（八）周期状态的判别

（1） 按互通性将状态分类后，在同一类集合中选一个状态判别其周期性即可。

（2） 如有正整数n，使得$p_{ii}^{(n)} > 0$，$p_{ii}^{(n+1)} > 0$，则状态i无周期。

（3） 如有正整数m，使得m步转移概率矩阵P^m中相应某状态j的那一列元素全不为零，则状态j无周期

（九）分解定理

（1） 齐次马氏链的状态空间S可唯一地分解为有限多个或可列多个互不相交的状态子集$D, C_1, C_2, \cdots$之并，即有$S = D \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots$。

其中：D 是非常返态集，每个 C_n , $n=1,2,\cdots$ 均是由常返状态组成的不可约集，其中的状态互通，因此 C_n , $n=1,2,\cdots$ 中的状态具有相同的状态类型：或者均为零常返；或者均为正常返非周期（遍历）；或者均为正常返有且有相同的周期；而且对于 i , $j\in C_n$, $f_{ij}=1$。

（2）（周期链分解定理）一个周期为 d 的不可约马氏链，其状态空间 S 可以分解为 d 个互不相交的集 $J_1, J_2, \cdots, J_d$ 之并，即有：

$$S=\bigcup_{r=1}^{d} J_r ,\quad J_k \cap J_l=\varnothing , k\neq l ,$$

且

$$\sum_{j\in J_{r+1}} p_{ij}=1 , i\in J_r , r=1,2,\cdots$$

其中约定 $J_{r+1}=J_1$。

（3）基于上面的（1），我们将状态空间 S 中的状态依 $D, C_1, C_2, \cdots$ 的次序从新排列，则转移矩阵具有以下的形式

$$P=\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{pmatrix} P_D & P_{D_1} & P_{D_2} & \cdots \\ & P_1 & & \\ & & P_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}\begin{array}{l} D \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \end{array}$$

其中 $P_1, P_2, \cdots$ 均为随机矩阵，他们对应的链是不可约的。称以上形式的转移矩阵为标准形式。

（十）有限状态马氏链的性质

（1）所有非常返状态组成的集合不可能是闭集；（无限状态马氏链不一定）

（2）没有零常返状态；

（3）必有正常返状态；

（4）不可约有限马氏链只有正常返态；

（5）状态空间可以分解为：

$$S=D\cup C_1\cup C_2\cup\cdots\cup C_k$$

其中：每个 C_n , $n=1,2,\cdots,k$ 均是由正常返状态组成的有限不可约闭集，D 是非常返态集。

（十一）例子

例 1 设有三个状态 $\{0,1,2\}$ 的齐次马氏链，它的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

试研究其状态关系。

例 2 设有四个状态 $\{0,1,2,3\}$ 的齐次马氏链，它的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

试研究其状态关系。

解：$\{0,1\}$ 正常返，$\{2\}$ 非常返，$\{3\}$ 吸收态。

例 3 设马氏链的状态空间为 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，一步转移概率为：

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

试分析此链并指出各状态的常返性、周期性及求此链的闭集。

解：画出状态转移图，$S=D\cup C_1\cup C_2=\{4\}\cup\{1,3,5\}\cup\{2,6\}$。

例 4 设马氏链的状态空间为 $S=\{1,2,3,\cdots\}$，转移概率为：$p_{11}=1/2$，$p_{i\,i+1}=1/2$，$p_{i1}=1/2, i\in S$，研究各状态的分类。

解：画出状态转移图，可知：

$f_{11}^{(n)}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，故 $f_{11}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=1$，故状态 **1** 是常返的。

又 $\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^n<\infty$，故状态 **1** 是正常返的。

易知状态 **1** 是非周期的，从而状态 **1** 是遍历的。

对于其它状态，由于 $1\leftrightarrow i, i\in S$，因此也是遍历的。

例 5 设有八个状态 $\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ 的齐次马氏链，它的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

讨论其周期性。

解：主对角线为 **0**，它是具有周期性的转移矩阵的标准形式。八个状态可以分为四个子集，$c_1=\{0\}$，$c_2=\{1,2,3\}$，$c_3=\{4,5\}$，$c_4=\{6,7\}$，它们互不相交，它们的并是整个状态空间，该过程具有确定的周期转移，即：$c_1\to c_2\to c_3\to c_4\to c_1$，周期为 **4**。

例 6 设齐次马氏链的状态空间为 $\{1,2,3\}$，一步转移矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求：（**1**）T_{13} 的分布率及 ET_{13}，（**2**）$f_{ii}\ (i=1,2,3)$

解：（**1**）画出状态转移图，可得 T_{13} 的分布率为：

$T_{13}=n$	**1**	**2**	**3**	**4**	**…**	**n**	**…**
$f_{13}^{(n)}=P\{T_{13}=n\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4^2}$	$\frac{3^2}{4^3}$	$\frac{3^3}{4^4}$	…	$\frac{3^{n-1}}{4^n}$	…

因此，$ET_{13}=\sum_{n=1}^{\infty}nP\{T_{13}=n\}=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{3^{n-1}}{4^n}=4$。

（**2**）由于：

$f_{11}^{(1)}=1/2,\ f_{11}^{(n)}=0\,,n>1$，故 $f_{11}=1/2<1$

$f_{22}^{(1)}=3/4,\ f_{11}^{(n)}=0\,,n>1$，故 $f_{11}=3/4<1$

$f_{33}^{(1)}=1,\ f_{11}^{(n)}=0\,,n>1$，故 $f_{33}=1$

因此，状态 **1** 和 **2** 为非常返态，**3** 为常返态。

例 **7** 设齐次马氏链的状态空间为$\{1,2,3,4\}$，一步转移矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$$

试研究其状态关系。

解：画出状态转移图，可知：

$$f_{44}^{(n)}=0\,(n\ge 1)\Rightarrow f_{44}=0<1$$

$$f_{33}^{(1)}=\frac{2}{3},\ f_{33}^{(n)}=0\,(n>1)\Rightarrow f_{33}=\frac{2}{3}<1$$

故状态 **3** 和 **4** 为非常返态。

$$f_{11}=f_{11}^{(1)}+f_{11}^{(2)}+0+\cdots+0+\cdots=1$$

$$f_{22}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{22}^{(n)}=0+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=1$$

$$\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{11}^{(n)}=1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}<\infty$$

$$\mu_2=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{22}^{(n)}=1\times 0+2\times\frac{1}{2}+\cdots+n\cdot\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=3<\infty$$

故状态 **1** 和 **2** 都是正常返的，易知它们是非周期的，从而是遍历状态。

例 **8** 设一齐次马氏链的状态空间为$S=\{0,1,2,\cdots\}$，其状态转移矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

试讨论此链状态的分类及常返的充分必要条件。

解：画出状态转移图，图中可以看出任意二状态都相通，链是不可约的，因此只要确定任一状态是常返的条件即可。

由状态转移图，可得：

$$f_{00}^{(1)}=1-p_0\text{；}f_{00}^{(2)}=p_0(1-p_1)=p_0-p_0p_1\text{；}$$

$$f_{00}^{(3)}=p_0p_1(1-p_2)=p_0p_1-p_0p_1p_2\text{；}\cdots$$

$$f_{00}^{(n)}=p_0p_1\cdots p_{n-2}-p_0p_1\cdots p_{n-1}\text{；}\cdots$$

因此有：

$$\sum_{n=1}^{N} f_{00}^{(n)}=1-p_0p_1\cdots p_{N-1}$$

即

$$f_{00}=\sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)}=1-\lim_{N\to\infty} p_0p_1\cdots p_{N-1}$$

因此此链常返的充分必要条件为：$\lim\limits_{N\to\infty} p_0p_1\cdots p_{N-1}=0$

例 **9** 设一口袋中装有三种颜色（红、黄、白）的小球，其数量分别为 3、4、3。现在不断地随机逐一摸球，有放回，且视摸出球的颜色计分：红、黄、白分别计 1、0、-1 分。第一次摸球之前没有积分。以Y_n表示第n次取出球后的累计积分，$n=0,1,\cdots$

（1）Y_n，$n=0,1,\cdots$是否齐次马氏链？说明理由。

（2）如果不是马氏链，写出它的有穷维分布函数族；如果是，写出它的一步转移概率p_{ij}和两步转移概率$p_{ij}^{(2)}$。

（3）令$\tau_0=\min\{n;Y_n=0,n>0\}$，求$P\{\tau_0=5\}$。

解：（1）是齐次马氏链。

由于目前的积分只与最近一次取球后的积分有关，因此此链具有马氏性且是齐次的。

状态空间为：$S=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$。

（2）$p_{ij}=P\{Y_{n+1}=j|Y_n=i\}=\begin{cases}0.3, & j=i+1\\ 0.4, & j=i\\ 0.3, & j=i-1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

$$p_{ij}^{(2)}=P\{Y_{n+2}\,|\,Y_n=i\}=\begin{cases}0.3^2, & j=i+2\\ 2\times0.3\times0.4, & j=i+1\\ 0.4^2+2\times0.3^2, & j=i\\ 2\times0.3\times0.4, & j=i-1\\ 0.3^2, & j=i+2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（3）即求首达概率，画状态转移图，我们有：

$$P\{\tau_0=5\}=2\times[3\times0.3^4\times0.4+0.3^2\times0.4^3]=0.03096$$

注意：此题实际上就是直线上的随机游动。

例 10 设有无穷多个袋子，各装红球 r 只，黑球 b 只及白球 w 只。今从第 1 个袋子中随机取一球，放入第 2 个袋子，再从第 2 个袋子中随机取一球，放入第 3 个袋子，如此继续。令：

$$R_k=\begin{cases}1, & \text{当第 } k \text{ 次取出红球}\\ 0, & \text{反之}\end{cases},\quad k=1,2,\cdots$$

（1） 试求 R_k 的分布；

（2） 试证 $\{R_k;k=1,2,\cdots\}$ 为马氏链，并求一步转移概率矩阵。

解：（1）计算得 R_k 的分布列为：

$$\begin{pmatrix} R_k & 1 & 0\\ P & \dfrac{r}{r+b+w} & \dfrac{b+w}{r+b+w}\end{pmatrix}$$

（2）R_k 的状态空间为 $S=\{0,1\}$，一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix}\dfrac{r+1}{r+b+w+1} & \dfrac{b+w}{r+b+w+1}\\ \dfrac{r}{r+b+w+1} & \dfrac{b+w+1}{r+b+w+1}\end{bmatrix}$$

例 11 设一具有 3 个状态的马氏链的一步转移矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix}0 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 0\end{bmatrix}$$

试确定此马氏链的状态分类。

附录：转移矩阵估计问题

例：某计算机经常出故障，研究人员每隔一刻钟记录一次计算机的运行状态，收集了 **24** 小时的数据（**97** 次记录），用 **1** 表示正常状态，**0** 表示故障状态，所得数据如下：

1110010011111111001111011111100111111111110001101101

1110110110101111011101111011111100110111111100111

设 X_n 为第 n 个时段的计算机状态，可以认为此是一齐次马氏链，状态空间为 $S=\{0,1\}$，试确定此马氏链的状态一步转移矩阵。

若已知计算机在某一时段的状态为 **0**，问在此条件下从此时段起此计算机能连续正常工作 **3** 刻钟的条件概率为多少？

设 $\{X_n;n\geq 0\}$ 为一齐次马氏链，状态空间为 S，我们有此马氏链的一次实现（样本）$x_0,x_1,\cdots,x_N$，而转移矩阵未知，如何用现有数据来估计转移矩阵 P？

记在状态 i 之后首次出现状态 j 的时间为 $n(i,j)$，定义似然函数：

$$L=\prod_{i,j\in S}p_{ij}^{n(i,j)}$$

相应的对数似然函数为：

$$L=\sum_{i,j\in S}n(i,j)\ln p_{ij}=\sum_{i\in S}\sum_{j\in S}n(i,j)\ln p_{ij}$$

利用约束条件 $\sum_{j\in S}p_{ij}=1\ \forall i\in S$，由极大似然估计法（**MLEs**）我们有如下估计

式：

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n(i,j)}{\sum_{k\in S} n(i,k)}$$

注：此估计为局部最大估计。也可以由以下引理得到以上的估计。

引理：设 $z_i \geq 0\,(i \leq N)$，则在约束条件 $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1, x_i \geq 0\,(i \leq N)$ 下，函数 $\sum_{i=1}^{N} z_i \ln x_i$ 在 $x_i = \dfrac{z_i}{\sum_{i=1}^{N} z_i}\,(i \leq N)$ 处取得最大。

5．马氏链的极限性态与平稳分布

当一个马氏链系统无限期的运行下去时，我们所关心和需要解决的问题：

（1） 当 $n \to \infty$ 时，$P\{X_n = i\} = \pi_i(n)$ 的极限是否存在？即当马氏链系统无限期的运行下去时，此链处于各个状态的概率（可能性）分布。

（2） 在什么情况下，一个马氏链是一个平稳序列？

关于第一个问题，由于：$\pi_j(n) = \sum_{i\in S} \pi_i(0) p_{ij}^{(n)}$，其中 $\pi_i(0) = P\{X_0 = i\}$，$\{\pi_i(0), i \in S\}$ 是马氏链的初始分布，因此，问题可以转化为研究 $p_{ij}^{(n)}$ 的极限性质，即研究 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$ 是否存在？存在的话，其极限是否与 i 有关？

关于第二个问题，实际上是一个平稳分布是否存在的问题。

（一）P^n 的极限性态

（I） $j \in S$ 是非常返状态或零常返状态的情形

前面我们已经得到结论：若 $j \in S$ 为非常返状态，则对于任意的 $i \in S$，有 $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$。针对零常返状态的情形，我们要进行详细的讨论。

引理：（**Hardy－Littlewood**）设幂级数 $G(s)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n s^n$ 在 $0\le s<1$ 上收敛，且系数 a_n 非负，则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a_k=\lim_{s\to 1-}(1-s)G(s)$$

引理：设非负数列 a_n 的极限 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在，则有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}a_k$$

定理：设 $j\in S$ 为常返状态，则对于任意的 $i\in S$，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}p_{ij}^{(k)}=\frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

证明：记：$P_{ij}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{ij}^{(n)}s^n=\delta_{ij}+\sum_{n=1}^{\infty}p_{ij}^{(n)}s^n$，$F_{ij}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}s^n$，有

$$P_{jj}(s)=\frac{1}{1-F_{jj}(s)},\quad P_{ij}(s)=\delta_{ij}+F_{ij}(s)P_{jj}(s)$$

因此，当 $i\neq j$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}p_{ij}^{(k)}=\lim_{s\to 1-}(1-s)P_{ij}(s)=\lim_{s\to 1-}\frac{1-s}{1-F_{jj}(s)}F_{ij}(s)$$

由 $\lim_{s\to 1-}F_{ij}(s)=f_{ij}$，$\lim_{s\to 1-}F'_{jj}(s)=\mu_j$，以及洛必达法则，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}p_{ij}^{(k)}=\lim_{s\to 1-}\frac{1-s}{1-F_{jj}(s)}F_{ij}(s)=\frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

当 $i=j$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}p_{ii}^{(k)}=\lim_{s\to 1-}(1-s)P_{ii}(s)=\lim_{s\to 1-}\frac{1-s}{1-F_{ii}(s)}=\frac{1}{\mu_i}$$

定理：设 $i\in S$ 是周期为 d 的常返状态，则有

$$\lim_{n\to\infty}p_{ii}^{(nd)}=\frac{d}{\mu_i}$$

其中μ_i为i的平均返回时间。

定理：设$i \in S$为常返状态，则有

（1）i为零常返状态，当且仅当，$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$；

（2）i为遍历状态，当且仅当，$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} > 0$；

（3）若$j \in S$为零常返状态，则对于任意的$i \in S$，有$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$。

证明：（1）若i为零常返状态，则由上一定理可知$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = 0$，由周期性的定义可知，当$n$不能被$d$整除时，有$p_{ii}^{(n)} = 0$，因此有$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$。反之，若$p_{ii}^{(n)} = 0$，假设$i$为正常返状态，则有$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i} > 0$，矛盾，故$i$为零常返状态。

（2）设$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} > 0$，由（1）可知$i$为正常返状态，且$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i}$，因此$d = 1$，故$i$为遍历状态。反之由上面的定理即得。

（3）若$j \in S$为零常返状态，则对于任意的$i \in S$，我们取$m < n$，有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} \le \sum_{l=1}^{m} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} + \sum_{l=m+1}^{n} f_{ij}^{(l)}$$

对上式固定m，令$n \to \infty$，由（1）可知上式右边第一项为零，再令$m \to \infty$，由于$\sum_{l=1}^{+\infty} f_{ij}^{(l)} \le 1$，因此上式右边的第二项也为零，故有$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$。

（II）$j \in S$是非周期正常返的情形

定理（**Markov**）：设有一有限状态的马氏链，若存在一个正整数m，使得对于$\forall i, j \in S$，有$p_{ij}^{(m)} > 0$，则$\lim_{n\to\infty} P^n = \boldsymbol{\pi}$，其中$\boldsymbol{\pi}$是一随机矩阵，且它的各行都相同。

证明：（A）$m = 1$时的情形；

此时，由题意可知，存在 $0 < \varepsilon < 1$，使得$p_{ij} \ge \varepsilon > 0,\ \forall i, j \in S$，

令：$m_j(n) \hat{=} \min_{i\in S} p_{ij}^{(n)}$，表示在$n$步转移后在$j$列中最小的一个元素；

令：$M_j(n) \hat{=} \max_{i\in S} p_{ij}^{(n)}$，表示在$n$步转移后在$j$列中最大的一个元素；

（1）　由 C－K 方程，证明 $m_j(n), M_j(n)$（注意：都是有界量）的单调性：

由于对于$\forall\, i \in S$，有：

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k\in S} p_{ik} p_{kj}^{(n-1)} \ge \sum_{k\in S} p_{ik} m_j(n-1) = m_j(n-1)$$

因此，可得：

$$m_j(n) \ge m_j(n-1)$$

由于对于$\forall\, i \in S$，有：

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k\in S} p_{ik} p_{kj}^{(n-1)} \le \sum_{k\in S} p_{ik} M_j(n-1) = M_j(n-1)$$

因此，可得：

$$M_j(n) \le M_j(n-1)$$

（2）　证明 $m_j(n), M_j(n)$收敛于同一极限：

令：$p_{i_0 j}^{(n)} = m_j(n) \hat{=} \min_{i\in S} p_{ij}^{(n)}$；　$p_{i_1 j}^{(n-1)} = M_j(n-1) \hat{=} \max_{i\in S} p_{ij}^{(n-1)}$

则有：

$$m_j(n) = p_{i_0 j}^{(n)} = \sum_{k\in S} p_{i_0 k} p_{kj}^{(n-1)} = \varepsilon p_{i_1 j}^{(n-1)} + (p_{i_0 i_1} - \varepsilon) p_{i_1 j}^{(n-1)} + \sum_{k\in S, k\ne i_1} p_{i_0 k} p_{kj}^{(n-1)}$$

$$\ge \varepsilon M_j(n-1) + \left[p_{i_0 i_1} - \varepsilon + \sum_{k\in S, k\ne i_1} p_{i_0 k} \right] m_j(n-1)$$

因此有：

$$m_j(n) \ge \varepsilon M_j(n-1) + (1-\varepsilon) m_j(n-1) \tag{a}$$

令：$p_{i'_0 j}^{(n)} = M_j(n) \hat{=} \max_{i\in S} p_{ij}^{(n)}$；　$p_{i_2 j}^{(n-1)} = m_j(n-1) \hat{=} \min_{i\in S} p_{ij}^{(n-1)}$

则有：

$$M_j(n) = p_{i'_0 j}^{(n)} = \sum_{k\in S} p_{i'_0 k} p_{kj}^{(n-1)} = \varepsilon p_{i_2 j}^{(n-1)} + (p_{i'_0 i_2} - \varepsilon) p_{i_2 j}^{(n-1)} + \sum_{k\in S, k\ne i_2} p_{i'_0 k} p_{kj}^{(n-1)}$$

$$\le \varepsilon m_j(n-1) + \left[p_{i'_0 i_2} - \varepsilon + \sum_{k\in S, k\ne i_2} p_{i'_0 k} \right] M_j(n-1)$$

因此有：

$$M_j(n) \le \varepsilon m_j(n-1) + (1-\varepsilon) M_j(n-1) \qquad \text{(b)}$$

由（**a**）和（**b**）式，我们有：

$$M_j(n) - m_j(n) \le (1-2\varepsilon)[M_j(n-1) - m_j(n-1)]$$

由上式递归可得：

$$0 \le M_j(n) - m_j(n) \le (1-2\varepsilon)^{n-1}[M_j(1) - m_j(1)] \le (1-2\varepsilon)^{n-1}$$

由于，$0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow -1 < 1-2\varepsilon < 1$，对上式两边令 $n \to +\infty$ 求极限，得：

$$\lim_{n\to+\infty} M_j(n) = \lim_{n\to+\infty} m_j(n) \triangleq \pi_j$$

由此证明了当 $m=1$ 时，$\lim_{n\to\infty} P^n = \boldsymbol{\pi}$。

（**B**）$m>1$ 时的情形；

由于：$\lim_{n\to\infty}[P^{(m)}]^n = \lim_{n\to\infty} P^{(mn)} = \boldsymbol{\pi}$

对于 $k=1,2,\cdots,m-1$，有：

$$\lim_{n\to\infty} P^{(mn+k)} = \lim_{n\to\infty} P^{(k)} P^{(mn)} = P^{(k)}\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}$$

至此定理得证。

注意：如果状态空间是无限可列的马氏链，则定理要修改为：

（**1**）　或者是 $\boldsymbol{\pi}$ 中的所有元素都大于零（此时仍为随机矩阵）

（**2**）　或者是 $\boldsymbol{\pi}$ 中的所有元素都等于零

推论 1　P^n 的极限矩阵 $\boldsymbol{\pi}$ 是唯一的，且满足：

（**1**）$\sum_{i\in S} \pi_i p_{ij} = \pi_j$，　$\pi_i > 0$，即：$\boldsymbol{\pi} P = \boldsymbol{\pi}$。

（**2**）$\sum_{i\in S} \pi_i = 1$,

推论 2　$\lim_{n\to\infty} P\{X_n = j\} = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$，即 $\lim_{n\to\infty} P\{X_n = j\}$ 所取的值与初始状态的分布无关。

证：由于：

$$P\{X_n=j\}=\sum_{i\in S}P\{X_n=j\mid X_0=i\}P\{X_0=i\}$$
$$=\sum_{i\in S}p_{ij}^{(n)}P\{X_0=i\}$$

故

$$\lim_{n\to\infty}P\{X_n=j\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in S}p_{ij}^{(n)}P\{X_0=i\}$$
$$=\sum_{i\in S}\pi_j P\{X_0=i\}=\pi_j\sum_{i\in S}P\{X_0=i\}=\pi_j=\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$$

即，经过无穷次转移后处于 j 状态的概率与初始状态无关，与初始状态的分布也无关。

下面不加证明地给出几个常用的定理。注意：当 j 是正常返时，情况比较复杂，$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$ 不一定存在，即使存在，也可能与 i 有关。

定理：若 j 是遍历状态，则对于任意的 $i\in S$，有：

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

定理：对于不可约的遍历链，则对于任意的 $i,j\in S$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\dfrac{1}{\mu_j}$。

定理：若马氏链是不可约的遍历链，则 $\left\{\pi_i=\dfrac{1}{\mu_i},i\in S\right\}$ 是方程组

$$x_j=\sum_{i\in S}x_i p_{ij}\,,\quad j\in S$$

满足条件 $x_j\geq 0,\ j\in S,\ \sum\limits_{j\in S}x_j=1$ 的唯一解。

例：设有一状态空间为 $S=\{1,2,3,4,5\}$ 的齐次马氏链，其一步转移矩阵为

$$P=\begin{pmatrix}0.6 & 0.1 & 0 & 0.3 & 0\\ 0.2 & 0.5 & 0.1 & 0.2 & 0\\ 0 & 0.2 & 0.6 & 0.1 & 0.1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

试画出该链的状态转移图，研究各状态的性质及状态的分类，并讨论该链的极限特性。

（二）平稳分布

定义：一个定义在状态空间上的概率分布$\boldsymbol{\pi}=\{\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_i,\cdots\}$称为马氏链的平稳分布，如有：

$$\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}P$$

即，$\forall j\in S$，有：

$$\pi_j=\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}$$

平稳分布也称为马氏链的不变概率测度。对于一个平稳分布$\boldsymbol{\pi}$，显然有：

$$\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}P=\boldsymbol{\pi}P^2=\cdots=\boldsymbol{\pi}P^n$$

定理：设$\{X_n,n\geq 0\}$是一马氏链，则$\{X_n,n\geq 0\}$为平稳过程的充分必要条件是$\boldsymbol{\pi}(0)=(\pi_i(0),i\in S)$是平稳分布，即有：

$$\boldsymbol{\pi}(0)=\boldsymbol{\pi}(0)P$$

证明：充分性：记$\boldsymbol{\pi}(0)\triangleq\boldsymbol{\pi}$，则有：

$$\boldsymbol{\pi}(1)=\boldsymbol{\pi}(0)P=\boldsymbol{\pi}$$

$$\boldsymbol{\pi}(2)=\boldsymbol{\pi}(1)P=\boldsymbol{\pi}(0)P=\boldsymbol{\pi},\quad\cdots$$

$$\boldsymbol{\pi}(n)=\boldsymbol{\pi}(n-1)P=\cdots=\boldsymbol{\pi}$$

因此，对于$\forall i_k\in S$，$t_k\in N$，$n\geq 1$，$1\leq k\leq n$，$t\in N$，有：

$$\begin{aligned}P\{X_{t_1}=i_1,X_{t_2}=i_2,\cdots,X_{t_n}=i_n\}&=\pi_{i_1}(t_1)p_{i_1i_2}^{(t_2-t_1)}\cdots p_{i_{n-1}i_n}^{(t_n-t_{n-1})}\\&=\pi(t_1+t)p_{i_1i_2}^{(t_2-t_1)}\cdots p_{i_{n-1}i_n}^{(t_n-t_{n-1})}\\&=P\{X_{t_1+t}=i_1,X_{t_2+t}=i_2,\cdots,X_{t_n+t}=i_n\}\end{aligned}$$

所以$\{X_n,n\geq 0\}$是严平稳过程。

必要性：由于$\{X_n, n \geq 0\}$是平稳过程，因此有：

$$\boldsymbol{\pi}(n) = \boldsymbol{\pi}(n-1) = \cdots = \boldsymbol{\pi}(0)$$

又由$\boldsymbol{\pi}(1) = \boldsymbol{\pi}(0)P$得：

$$\boldsymbol{\pi}(0) = \boldsymbol{\pi}(0)P$$

即$\boldsymbol{\pi}(0)$是平稳分布。

定理：不可约的遍历链恒有唯一的平稳分布$\left\{\pi_i = \dfrac{1}{\mu_i}, i \in S\right\}$，且$\pi_j = \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$。

（三）$\lim\limits_{n\to\infty}\pi_j(n)$的存在性

定义：若$\lim\limits_{n\to\infty}\pi_j(n) = \lim\limits_{n\to\infty}P\{X_n = j\} = \pi_j^*$, $j \in S$存在，则称$\boldsymbol{\pi}^* = \{\pi_1^*, \cdots, \pi_j^*, \cdots\}$为马氏链的极限分布。

定理：非周期的不可约链是正常返的充分必要条件是它存在平稳分布，且此时平稳分布就是极限分布。

证明：充分性：设存在平稳分布：$\boldsymbol{\pi} = \{\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_j, \cdots\}$，由此有：

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}P = \boldsymbol{\pi}P^2 = \cdots = \boldsymbol{\pi}P^n$$

即：

$$\pi_j = \sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)}$$

由于：$\pi_j \geq 0$, $j \in S$, $\sum\limits_{j\in S}\pi_j = 1$，

由控制收敛定理，有：

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty}\sum_{i\in S}\pi_i p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in S}\pi_i \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \left(\sum_{i\in S}\pi_i\right)\frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j}$$

因为

$$\sum_{j\in S}\pi_j=\sum_{j\in S}\frac{1}{\mu_j}=1$$

于是至少存在一个$\pi_l=\dfrac{1}{\mu_l}>0$，从而

$$\lim_{n\to\infty}p_{il}^{(n)}=\frac{1}{\mu_l}>0$$

即有：

$$\mu_l<\infty$$

故l为正常返状态，由不可约性，可知整个链是正常返的，且有

$$\pi_j=\frac{1}{\mu_j}>0,\ j\in S$$

必要性：由于马氏链是正常返非周期链，即为遍历链，由以上的定理立即可得结果。且有：

$$\pi_j=\pi_j^*=\frac{1}{\mu_j},\ j\in S$$

由此定理可知，对于不可约遍历链，则极限分布$\boldsymbol{\pi}^*=\boldsymbol{\pi}$存在，且就是等于平稳分布。

（四）例子

例 1 设$S=\{1,2\}$，且一步转移矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}3/4 & 1/4\\ 5/8 & 3/8\end{pmatrix}$$

求平稳分布及$\lim\limits_{n\to\infty}P^n$。

解：由$\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}P$，解得：

$$\pi_1=5/7，\ \pi_1=2/7$$

故$\boldsymbol{\pi}=(5/7,2/7)$，由$\pi_j=\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}=\dfrac{1}{\mu_j}$，故$\mu_1=7/5,\mu_2=7/2$。

且：$\lim\limits_{n\to\infty}P^n=\begin{pmatrix}5/7 & 2/7\\ 5/7 & 2/7\end{pmatrix}$。

例 **2** 在一计算机系统中，每一循环具有误差的概率取决于先前一个循环是否有误差，以 **0** 表示误差状态，以 **1** 表示无误差状态。设状态的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}0.75 & 0.25\\ 0.5 & 0.5\end{pmatrix}$$

试说明相应齐次马氏链是遍历的，并求其极限分布（平稳分布）。

解：可以看出一步转移概率矩阵中的元素都大于零，因此可知是遍历的。

（**1**）　由矩阵的对角化可得：

$$P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5}\end{pmatrix}^{-1}$$

因此有：

$$P^n=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.25\end{pmatrix}^n\begin{pmatrix}1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5}\\ 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5}\end{pmatrix}^{-1}$$

由此，可得：

$$\lim_{n\to\infty}P^n=\begin{pmatrix}2/3 & 1/3\\ 2/3 & 1/3\end{pmatrix}$$

极限分布为：$\pi=(2/3,1/3)$。

（**2**）　由$\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}P$，解得：$\pi=(2/3,1/3)$。

例 **3** 在直线上带有反射壁的随机游动，只考虑质点取 **1**、**2**、**3** 三个点，一步转移矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}q & p & 0\\ q & 0 & p\\ 0 & q & p\end{pmatrix}$$

讨论它是否为遍历链。

解：计算得：

$$P^2=\begin{pmatrix} q^2+pq & pq & p^2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \\ q^2 & pq & p^2+pq \end{pmatrix}$$

可以看出其中得元素都大于零，因此可知是遍历的。即 $\pi_j=\lim_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)}$，与 i 无关。

求极限分布时，只要解方程 $\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi}P$ 即可，可以求得：

$$\pi_1=\left[1+\frac{p}{q}+\left(\frac{p}{q}\right)^2\right]^{-1}$$

$$\pi_2=\frac{p}{q}\left[1+\frac{p}{q}+\left(\frac{p}{q}\right)^2\right]^{-1}$$

$$\pi_3=\left(\frac{p}{q}\right)^2\left[1+\frac{p}{q}+\left(\frac{p}{q}\right)^2\right]^{-1}$$

例 4 限制性酶切片断平均长度的计算。

序列：**TACTAATCGGATAACCAAACA…**，切点为 **AA** 和 **AC** 的情况。

状态空间：$S_1=\{A,B=C\cup G\cup T,AA\}$ ；$S_2=\{A,C,G\cup T,AC\}$

X_n 定义为记录原始序列在 n 位置的状态情况。则 $\{X_n;n\ge 1\}$ 为一齐次马氏链，转移矩阵分别为：

$$P_1=\begin{pmatrix} 0 & q & p \\ p & q & 0 \\ p & q & 0 \end{pmatrix} \quad p=p_A,q=p_C+p_G+p_T$$

$$P_2=\begin{pmatrix} p_A & 0 & p_G+p_T & p_C \\ p_A & p_C & p_G+p_T & 0 \\ p_A & p_C & p_G+p_T & 0 \\ p_A & p_C & p_G+p_T & 0 \end{pmatrix}$$

由此可得，**AA** 酶切片断平均长度为：$\dfrac{1}{p_A^2}+\dfrac{1}{p_A}$；**AC** 酶切片断平均长度为：$\dfrac{1}{p_A p_C}$。

6．非常返态分析

由状态空间的分解可知，状态空间 S 可唯一地分解为：

$$S = D \bigcup C_1 \bigcup C_2 \bigcup \cdots = D \bigcup C$$

其中：D 是非常返态集，每个 C_n，$n = 1,2,\cdots$ 均是由常返状态组成的不可约集，其中的状态互通。

（一）　计算从状态 i 出发进入状态子集 C_k 的概率 $P\{C_k \mid i\}$。

若 $i \in C_k$，则有 $P\{C_k \mid i\} = 1$；若 $i \in C_m\ m \neq k$，则有 $P\{C_k \mid i\} = 0$；若 $i \in D$，则有：

$$P\{C_k \mid i\} = \sum_{j \in S} p_{ij} P\{C_k \mid j\}$$

由此，我们有：

$$P\{C_k \mid i\} - \sum_{j \in D} p_{ij} P\{C_k \mid j\} = \sum_{j \in C_k} p_{ij}, \quad i \in D$$

解上式的线性方程组，即可得概率 $P\{C_k \mid i\}$，称此概率为 C_k 的吸收概率。

（二）　非常返态进入常返态所需的平均时间

设 T 为从状态 $i \in S$ 出发进入常返态类所需的时间，称此时间为吸收时间。T 为取值于 $N_0 = \{0,1,2,\cdots\}$ 的随机变量。

设 $P\{T = n \mid i\}, n = 0,1,2,\cdots$ 为过程经过 n 步转移后由状态 i 进入常返态类的概率，则

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{n=0}^{N} P\{T = n \mid i\} = P\{T < \infty \mid i\}$$

表示从状态 i 出发迟早进入常返态类的概率。

称：$1-\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{N}P\{T=n|i\}=1-P\{T<\infty|i\}$ 为过程的亏值（**defect**），它表示过程永远停留在非常返态的概率。

若 $i\in C$，则有：$P\{T=0|i\}=1,\ P\{T>0|i\}=0$；

若 $i\in S$，我们有：

$$P\{T=n+1|i\}=\sum_{j\in S}p_{ij}P\{T=n|\ j\},\quad n=0,1,2,\cdots$$

因此，若 $i\in D$，则由：

$$\begin{cases} P\{T=1|i\}=\sum\limits_{j\in C}p_{ij} \quad (\text{起始条件}) \\ P\{T=n+1|i\}=\sum\limits_{j\in D}p_{ij}P\{T=n|\ j\},\quad n=1,2,\cdots \end{cases}$$

可以计算出吸收时间的概率分布。

另外，也可以利用首达概率计算吸收时间的概率分布如下：

$$P\{T=n|i\}=\sum_{j\in C}f_{ij}^{(n)}\quad i\in D, n=1,2,\cdots$$

当亏值为 **0** 时，计算非常返态进入常返态所需的平均时间为：

$$E\{T|i\}=\sum_{n=1}^{\infty}nP\{T=n|i\}$$

当亏值不为 **0** 时，上式无意义。

我们还可以计算非常返态进入常返态所需的平均时间如下：

由：$P\{T=n+1|i\}=\sum\limits_{j\in S}p_{ij}P\{T=n|\ j\},\quad n=0,1,2,\cdots$

两边各乘以 n，有：

$$(n+1)P\{T=n+1|i\}-P\{T=n+1|i\}=\sum_{j\in S}n\cdot p_{ij}P\{T=n|\ j\}$$

上式对 $n=0,1,2,\cdots$ 求和，我们有

$$E\{T|i\}-\sum_{n=1}^{\infty}P\{T=n|i\}=\sum_{j\in S}E\{T|\ j\}p_{ij} \qquad \text{(A)}$$

如果 $j\in C$，则 $E\{T|\ j\}=0$；

若过程的亏值为 **0**，则有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P\{T=n|i\}=1$，由（**A**）可得：

$$E\{T|i\}-\sum_{j\in D}E\{T|j\}p_{ij}=1,\quad i\in D$$

由上面的方程组即可计算非常返态进入常返态所需的平均时间。

例（网球比赛）：网球一局比赛在两个选手（发球者和接发球者）之间进行，网球的记分制是：15、30、40、和 60 分。平分是指第五球后双方分数相同。平分后，从第六球开始，如果发球者得分/失分，则此时发球者占先/接发球者占先。如果发球者在发球占先后再得分，则发球者赢得该局。如果接发球者在接发球后占先后再得分，则接发球者赢得该局。若发球者发一球获胜的概率为 p，输的概率为 q， $p+q=1$，试回答以下问题：

（1） 试用马氏链建模网球一局比赛过程，确定其状态，画出状态转移图；

（2） 分析各状态的性质；

（3） 试确定一局网球比赛发球者获胜的概率；

（4） 试确定一局比赛平均需要发几个球才能结束。

解：课堂中详细板书讲解。