第二章　Markov 过程

7．参数连续状态离散的马氏过程

（一）参数连续状态离散的马氏过程的转移概率

定义：设$\{X(t), t \ge 0\}$是取值于状态空间S的随机过程，S是有限或无限可列的，如果对于任意的正整数n，任意的$0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1}$，及任意的状态$i_1, i_2, \cdots, i_n, i_{n+1} \in S$，均有：

$$\begin{aligned} &P\{X(t_{n+1}) = i_{n+1} \mid X(t_1) = i_1, X(t_2) = i_2, \cdots, X(t_n) = i_n\} \\ &= P\{X(t_{n+1}) = i_{n+1} \mid X(t_n) = i_n\} \end{aligned}$$

则称此随机过程为参数连续状态离散的马氏过程（纯不连续马氏过程）。

对于纯不连续马氏过程，有：

$$P\{X(t_2) = j \mid X(t'), 0 \le t' \le t_1\} = P\{X(t_2) = j \mid X(t_1) = i\} \quad t_1 \le t_2, i, j \in S$$

记：

$$p_{ij}(t_1, t_2) \hat{=} P\{X(t_2) = j \mid X(t_1) = i\}$$

称此条件概率为纯不连续马氏过程的转移概率。

显然有：

$$\begin{cases} p_{ij}(t_1, t_2) \ge 0 \\ \sum\limits_{j \in S} p_{ij}(t_1, t_2) = 1 \quad i \in S \end{cases}$$

如果$p_{ij}(t_1, t_2)$仅为时间差$t = t_2 - t_1$的函数，而与t_1和t_2的值无关，则称此纯不连续马氏过程为齐次的。此时

$$p_{ij}(t) = p_{ij}(t_1, t_2) \hat{=} P\{X(t_2) = j \mid X(t_1) = i\} \quad t = t_2 - t_1$$

$$\begin{cases} p_{ij}(t) \geq 0 & i, j \in S, t \geq 0 \\ \sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1 & i \in S, t \geq 0 \end{cases}$$

以下我们主要讨论齐次纯不连续马氏过程。

纯不连续马氏过程的 **C－K** 方程：

一般情形：

$$P\{X(t_3) = j \mid X(t_1) = i\} =$$

$$= \sum_{k \in S} P\{X(t_3) = j \mid X(t_2) = k\} P\{X(t_2) = k \mid X(t_1) = i\}$$

$$(t_1 < t_2 < t_3\,, \quad i\,,\, j \in S)$$

齐次情形：

$$p_{ij}(t+\tau) = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) p_{kj}(\tau)\,, \quad (i, j \in S, t > 0, \tau > 0)$$

连续性条件：

$$\lim_{t \to 0} p_{ij}(t) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

满足连续性条件的马氏过程称为随机连续的马氏过程。

注：i, j 固定时，可以证明齐次纯不连续，并且随机连续的马氏过程的转移概率 $p_{ij}(t)$ 是关于 t 的一致连续函数，并且是可微的。

（二）无穷小转移率 q_{ij} 及转移率矩阵（Q 矩阵）

取任意充分小的 $\Delta t > 0$，由连续性条件及上面的注，我们有：

$$p_{ij}(\Delta t) = p_{ij}(0) + q_{ij}\Delta t + o(\Delta t) = \delta_{ij} + q_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$$

即：

$$q_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ij}(\Delta t) - \delta_{ij}}{\Delta t}$$

我们称 q_{ij} 为从状态 i 到状态 j 的无穷小转移率或跳跃强度，显然有：

$$q_{ij}=\begin{cases}\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}, & i\neq j\\ \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{p_{ii}(\Delta t)-1}{\Delta t}, & i=j\end{cases}$$

即有：

$$q_{ij}\geq 0,(i\neq j),\quad q_{ij}\leq 0,(i=j)$$

由$\sum\limits_{j\in S}p_{ij}(\Delta t)=1$及上面的式子，有：

$$1=1+\left(\sum_{j\in S}q_{ij}\right)\Delta t+\sum_{j\in S}o(\Delta t)\Rightarrow\left(\sum_{j\in S}q_{ij}\right)=\sum_{j\in S}\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

两边求极限，即有：

$$\sum_{j\in S}q_{ij}=0$$

当状态有限的时候，我们可以定义一个矩阵如下：

$$Q=\begin{pmatrix}q_{00} & q_{01} & q_{02} & \cdots & q_{0n}\\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ q_{n0} & q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn}\end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

称Q为转移率矩阵或Q矩阵。

注：当状态为无限可列时，也可以定义形式上的Q矩阵。

（三）Kolmogrov—Feller 前进方程

由 **C－K** 方程，取任意充分小的$\Delta t>0$，有：

$$p_{ij}(t+\Delta t)=\sum_{k\in S}p_{ik}(t)p_{kj}(\Delta t)=$$

$$=p_{ij}(t)p_{jj}(\Delta t)+\sum_{k\in S,k\neq j}p_{ik}(t)p_{kj}(\Delta t)\quad(i\in S)$$

由：

$$\begin{cases} p_{kj}(\Delta t) = q_{kj}\Delta t + o(\Delta t) & k \neq j \\ p_{jj}(\Delta t) = 1 + q_{jj}\Delta t + o(\Delta t) \end{cases}$$

有：

$$p_{ij}(t+\Delta t) =$$

$$= p_{ij}(t)[1 + q_{jj}\Delta t + o(\Delta t)] + \sum_{k \in S, k \neq j} p_{ik}(t)[q_{kj}\Delta t + o(\Delta t)]$$

即有：

$$\frac{p_{ij}(t+\Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) q_{kj} + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

令 $\Delta t \to 0$，我们有：

$$\frac{d\,p_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k \in S} p_{ik}(t) q_{kj} \quad i, j \in S, t \geq 0$$

由初始条件：

$$\begin{cases} p_{ij}(0) = 0 & i \neq j \\ p_{ii}(0) = 1 \end{cases}$$

即可求解上面的方程组。

当状态有限时，我们令：

$$\Gamma_i(t) = \left(p_{i0}(t), p_{i1}(t), \cdots, p_{in}(t)\right)$$

则有：

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\Gamma_i(t)}{dt} = \Gamma_i(t) Q & i = 0,1,2,\cdots,n \\ \Gamma_i(0) = \left(0,0,\cdots,1,\cdots 0\right) \end{cases}$$

进一步，若记：

$$P(t) = \begin{pmatrix} \Gamma_0(t) \\ \Gamma_1(t) \\ \vdots \\ \Gamma_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{00}(t) & p_{01}(t) & \cdots & p_{0n}(t) \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & \cdots & p_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n0}(t) & p_{n1}(t) & \cdots & p_{nn}(t) \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

则有：

$$\begin{cases} \dfrac{d\,P(t)}{d\,t} = P(t)Q \\ P(0) = I_{(n+1)\times(n+1)} \end{cases}$$

此即为 **Kolmogrov—Feller** 前进方程。

（四）Kolmogrov—Feller 后退方程

根据 C－K 方程，取任意充分小的 $\Delta t > 0$，有：

$$\begin{aligned} p_{ij}(t+\Delta t) &= p_{ij}(\Delta t + t) = \sum_{k\in S} p_{ik}(\Delta t) p_{kj}(t) = \\ &= p_{ii}(\Delta t) p_{ij}(t) + \sum_{k\in S, k\neq i} p_{ik}(\Delta t) p_{kj}(t) \quad (i \in S) \end{aligned}$$

由：

$$\begin{cases} p_{ik}(\Delta t) = q_{ik}\Delta t + o(\Delta t) & k \neq i \\ p_{ii}(\Delta t) = 1 + q_{ii}\Delta t + o(\Delta t) \end{cases}$$

得：

$$\frac{p_{ij}(t+\Delta t) - p_{ij}(t)}{\Delta t} = q_{ii} p_{ij}(t) + \sum_{k\in S, k\neq i} q_{ik} p_{kj}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}$$

令 $\Delta t \to 0$，我们有：

$$\frac{d\,p_{ij}(t)}{d\,t} = \sum_{k\in S} q_{ik} p_{kj}(t) \quad i, j \in S, t \geq 0$$

当状态有限时，记：

$$S_j(t) = \begin{pmatrix} p_{0j}(t) \\ p_{1j}(t) \\ \vdots \\ p_{nj}(t) \end{pmatrix}$$

则有：

$$\frac{d\,S_j(t)}{d\,t} = Q S_j(t) \qquad j = 0,1,2,\cdots,n$$

初始条件为：

$$S_j(0)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}(j+1)$$

上面的方程组即为 **Kolmogrov—Feller** 后退方程

（五）Fokker-Planck 方程

讨论有限状态的情形，令： $p_j(t)=P\{X(t)=j\}$

过程的初始分布为：

$$\vec{p}(0)=\left(p_0(0),p_1(0),\cdots,p_n(0)\right)$$

设在 t 时刻时，过程所处各状态的概率分布为：

$$\vec{p}(t)=\left(p_0(t),p_1(t),\cdots,p_n(t)\right)$$

则有：

$$p_0(t)=p\{X(t)=0\}=\sum_{j=0}^{n}P\{X(t)=0\,|\,X(0)=j\}P\{X(0)=j\}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}p_{j0}(t)p_j(0)=\sum_{j=0}^{n}p_j(0)p_{j0}(t)$$

即有：

$$\vec{p}(t)=\vec{p}(0)P(t)$$

即有：

$$\frac{d\,\vec{p}(t)}{d\,t}=\vec{p}(0)\frac{d\,P(t)}{d\,t}=\vec{p}(0)P(t)Q=\vec{p}(t)Q$$

因此，得：

$$\frac{d\,\vec{p}(t)}{d\,t}=\vec{p}(t)Q$$

此即为 **Fokker-Planck** 方程，其初始条件为

$$\vec{p}(0)=\left(\, p_0(0), p_1(0),\cdots, p_n(0)\,\right)$$

解此方程可得任意时刻该过程的一维概率分布。

（六）例子

例 **1** 假设某服务台有一部电话，如果在 t 时刻电话正被使用，置 $X(t)=1$，否则置 $X(t)=0$，因此 $\{X(t)\,;t\ge 0\}$ 为一纯不连续马氏过程。假设此过程的转移概率矩阵为：

$$P(t)=\begin{pmatrix} \dfrac{1+7e^{-8t}}{8} & \dfrac{7-7e^{-8t}}{8} \\ \dfrac{1-e^{-8t}}{8} & \dfrac{7+e^{-8t}}{8} \end{pmatrix}$$

初始分布为：

$$q_0=P\{X(0)=0\}=1/10\,;\quad q_1=P\{X(0)=1\}=9/10$$

（**1**）　计算矩阵 $P(0)$；

（**2**）　计算概率：$P\{X(0.2)=0\}$；$P\{X(0.2)=0 \mid X(0)=0\}$；

$P\{X(0.1)=0, X(0.6)=1, X(1.1)=1 \mid X(0)=0\}$；

$P\{X(1.1)=0, X(0.6)=1, X(0.1)=0\}$；

（**3**）　计算 t 时刻的一维分布；

（**4**）　计算 t 时刻的转移率矩阵；

例 **2** 设有参数连续、状态离散的马氏过程 $\{X(t), t\ge 0\}$，状态空间为：$S=\{1,2,\cdots,m\}$，当 $i\ne j, i, j=1,2,\cdots,m$ 时，$q_{ij}=1$，$q_{ii}=-(m-1)$，$i=1,2,\cdots,m$，求 $p_{ij}(t)$。

解：由 **K－F** 前进方程，可知：

$$\frac{d\,p_{ij}(t)}{d\,t}=-(m-1)\,p_{ij}(t)+\sum_{k\ne j\,k\in S}p_{ik}(t)$$

由

$$\sum_{k\in S} p_{ik}(t)=1$$

可知

$$\sum_{k\neq j\, k\in S} p_{ik}(t)=1-p_{ij}(t)$$

因此，我们有：

$$\frac{d\,p_{ij}(t)}{d\,t}=-(m-1)\,p_{ij}(t)+[1-p_{ij}(t)]=1-m\,p_{ij}(t)\quad i,j=1,2,\cdots,m$$

解此微分方程，得：

$$p_{ij}(t)=ce^{-mt}+\frac{1}{m}\quad i,j=1,2,\cdots,m$$

利用初始条件：

$$p_{ii}(0)=1,\quad p_{ij}(0)=0\quad (i\neq j)$$

可得：

$$p_{ii}(t)=\left(1-\frac{1}{m}\right)e^{-mt}+\frac{1}{m}\quad (i=1,2,\cdots,m)$$

$$p_{ij}(t)=\frac{1}{m}(1-e^{-mt})\quad (i\neq j,i,j=1,2,\cdots,m)$$

注意：关于指数分布（Exponential distribution）的性质

定义：若连续型随机变量 X 的概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$，则称 X 服从参数为 λ 的指数分布，记作 $X\sim Ex(\lambda)$。

性质：若 $X\sim Ex(\lambda)$，则 $E(X)=1/\lambda$

性质（无记忆性）：对于 $\forall s,t>0$，我们有：

$$P\{X>s+t\mid X>s\}=P\{X>t\}$$

例 **3**（排队问题）设有一服务台，$[0,t)$ 内到达服务台的顾客数是服从 **Poission** 分布的随机变量。单位时间到达服务台的平均人数是 λ。服务台只有一个服务员，对顾客服务时间是按负指数分布的随机变量，平均服务时间为 $1/\mu$。如果服务台空闲时，到达的顾客立刻得到服务；如果顾客到达时服务员正在为另一顾客服务，则他必须排队等候；如果顾客到达时发现已经有二人在等候，则他就离开不再回来。设 $X(t)$ 代表在 t 时刻系统内顾客人数（包括正在被服务的顾客和排队等候的顾客）。假设系统在 $t=0$ 时处于零状态，即服务人员空闲。求 t 时刻系统处于状态 j 的无条件概率 $p_j(t)$ 所满足的微分方程。

解：（**1**）写出状态空间：$S=\{0,1,2,3\}$

（**2**）求 Q 矩阵：

（**a**）当 $X(t)=0$ 时，在 $[t,t+\Delta t)$ 内到达一个顾客的概率为：

$$p_{01}(\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

在 $[t,t+\Delta t)$ 内到达二个或二个以上的顾客的概率为：

$$p_{0j}(\Delta t)=o(\Delta t)\quad j=2,3$$

因此

$$q_{01}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{01}(\Delta t)}{\Delta t}=\lambda$$

$$q_{0j}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{0j}(\Delta t)}{\Delta t}=0$$

由：

$$\sum_{j\in S}q_{ij}=0$$

可得：

$$q_{00}=-\lambda$$

（**b**）当 $X(t)=1$ 时，表示在 t 时刻有一个顾客正在被服务。由指数分布的无记忆性，可知，在 $[t,t+\Delta t)$ 内完成服务的概率为：

$$(1-e^{-\mu\Delta t})=\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

由此可知，在Δt时间内系统由 1 状态转入到 0 状态的概率为：

$$p_{10}(\Delta t)=[\mu\Delta t+o(\Delta t)][1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)]=\mu\Delta t+o(\Delta t)$$

故

$$q_{10}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{10}(\Delta t)}{\Delta t}=\mu$$

在Δt时间内系统由 1 状态转入到 2 状态的概率为：

$$p_{12}(\Delta t)=[1-\mu\Delta t+o(\Delta t)][\lambda\Delta t+o(\Delta t)]=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

故

$$q_{12}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{12}(\Delta t)}{\Delta t}=\lambda$$

同理：

$$q_{13}=0$$

$$q_{11}=-(\lambda+\mu)$$

$$q_{20}=0$$

$$q_{21}=\mu$$

$$q_{23}=\lambda$$

$$q_{22}=-(\lambda+\mu)$$

（c）当$X(t)=3$时，系统不再接受新顾客，此时，状态只可转到 2 或仍在 3。

当$X(t)=3$时，在Δt时间内完成服务的概率为：$(1-e^{-\mu\Delta t})=\mu\Delta t+o(\Delta t)$

因此

$$q_{32}=\mu$$

$$q_{30}=0$$

$$q_{31}=0$$

$$q_{33}=-\mu$$

于是可得Q矩阵如下：

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

（3）写出方程

$$\begin{cases} \dfrac{d\,p_0(t)}{d\,t}=-\lambda\,p_0(t)+\mu\,p_1(t) \\ \dfrac{d\,p_1(t)}{d\,t}=\lambda\,p_0(t)-(\lambda+\mu)p_1(t)+\mu\,p_2(t) \\ \dfrac{d\,p_2(t)}{d\,t}=\lambda\,p_1(t)-(\lambda+\mu)p_2(t)+\mu\,p_3(t) \\ \dfrac{d\,p_3(t)}{d\,t}=\lambda\,p_2(t)-\mu\,p_3(t) \end{cases}$$

初始条件为：

$$\begin{cases} p_0(0)=1 \\ p_j(0)=0 \quad j=1,2,3 \end{cases}$$

8．纯不连续马氏链的极限性质

（一）纯不连续马氏过程的 $h-$离散骨架

记 $p_j(t)=P\{X(t)=j\}$，$\forall\ j\in S$，称 $\vec{p}(t)=(p_i(t),\forall i\in S)$，为纯不连续马氏过程$\{X(t),t\geq 0\}$在$t$时刻的分布，称 $\vec{p}(0)=(p_i(0),\forall i\in S)$为初始分布。

注意：任意n个时刻的联合分布率可由 $\vec{p}(0)$和$P(t)$唯一确定，且有关系：

$$\vec{p}(t)=\vec{p}(0)P(t)$$

定义：对于纯不连续马氏过程$\{X(t),t\geq 0\}$，任取$h>0$，记：

$$X_n(h)=X(nh),\quad n\ge 0$$

则$\{X(nh),n\ge 0\}$是一离散时间的马氏链，称为以h为步长的$h-$离散骨架，简称h骨架。它的n步转移概率矩阵为$P(nh)$。

对于满足连续性条件的齐次纯不连续马氏过程，有以下结论：

命题：$\forall\, t\ge 0, i\in S$，有$p_{ii}(t)>0$。

证明：由$p_{ii}(0)=1>0$，及连续性条件$\lim\limits_{t\to 0}p_{ii}(t)=\delta_{ii}=1$，可知：

对任意固定的$t>0$，当n充分大时，有$p_{ii}(t/n)>0$，由 **C－K** 方程有：

$$p_{ii}(s+t)=\sum_{k\in S}p_{ik}(s)p_{ki}(t)\ge p_{ii}(s)p_{ii}(t)$$

因此可得：

$$p_{ii}(t)\ge [p_{ii}(t/n)]^n>0$$

由此命题可知：对所有的$h>0$及正整数n，及$\forall i\in S$，有$p_{ii}(nh)>0$，这意味着对每一个离散骨架$\{X(nh),n\ge 0\}$，每一个状态都是非周期的。因此对于纯不连续的马氏过程，无需引入周期的概念。

定义：若存在$t>0$，使得$p_{ij}(t)>0$，则称由状态i可达状态j，记为$i\to j$；若对一切$t>0$，有$p_{ij}(t)=0$，则称由状态i不可达状态j；若$i\to j$且$j\to i$，则称状态i与j相通，记作$i\leftrightarrow j$。

由上面的命题可知，$i\leftrightarrow i$，因此相通是一等价关系，从而可以相通关系对状态空间分类。相通的状态组成一个状态类。若整个状态空间是一个状态类，则称该纯不连续马氏过程是不可约的。

定义：（**1**）若$\int_0^{+\infty}p_{ii}(t)dt=+\infty$，则称状态$i$为常返状态；否则称状态$i$为非

常返状态。

（2） 设 i 为常返状态，若 $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ii}(t)>0$，则称状态 i 为正常返状态；若 $\lim\limits_{t\to\infty} p_{ii}(t)=0$，则称状态 i 为零常返状态。

（3） 若概率分布 $\boldsymbol{\pi}=(\pi_i, i\in S)$，满足：

$$\boldsymbol{\pi}=\boldsymbol{\pi} P(t), \quad \forall t\geq 0$$

则称 $\boldsymbol{\pi}$ 为 $\{X(t), t\geq 0\}$ 的平稳分布。

（4） 若对 $\forall i\in S$，$\lim\limits_{t\to\infty} p_i(t)=\pi_i^*$ 存在，则称 $\boldsymbol{\pi}^* \triangleq \{\pi_i^*, i\in S\}$ 为 $\{X(t), t\geq 0\}$ 的极限分布。

与马氏链的讨论类似，我们有：

定理：不可约纯不连续马氏过程是正常返的充分必要条件是它存在平稳分布，且此时的平稳分布就是极限分布。

下面讨论 $p_j(t)$ 和 $p_{ij}(t)$ 的极限性质，讨论状态空间有限且各状态都相通的情形。状态无限可列的情形有类似的结果。

（二）极限性质

命题：当 $t\to\infty$ 时，$p_j(t)$ 趋于一个与初始分布 $\vec{p}(0)$ 无关的极限的充分必要条件是 $p_{ij}(t)$ 对任何状态 i 趋于同一极限。

证明：设初始分布为 $\vec{p}(0)=(P\{X(0)=i\}=p_i(0), \forall i\in S)$，由全概率公式有：

$$p_j(t)=P\{X(t)=j\}=\sum_{i\in S} p_i(0)p_{ij}(t), \quad (j\in S)$$

“$\Rightarrow$”：若 $t\to\infty$ 时，$p_j(t)$ 趋于一个与初始分布 $\vec{p}(0)$ 无关的极限，即当 $t\to\infty$ 时，

$$p_j(t)\to p_j, \quad j\in S$$

特别地取一种初始分布 $p_i(0)=1$, $p_k(0)=0$, $k\in S, k\neq i$，我们有：

$$p_j(t)=p_{ij}(t),\quad (i,j\in S)$$

因此有：

$$\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=\lim_{t\to\infty} p_j(t)=p_j,\quad i,j\in S \qquad (\text{极限与 } i \text{ 无关})$$

“$\Leftarrow$”：若 $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=p_j$， $i,j\in S$，则对于任意的 $\vec{p}(0)=(p_i(0),\forall i\in S)$，有：

$$\lim_{t\to\infty} p_j(t)=\lim_{t\to\infty}\sum_{i\in S} p_i(0)p_{ij}(t)=\sum_{i\in S} p_i(0)p_j=p_j$$

定理：（Markov 定理） 对于状态有限的纯不连续马氏过程，若 $\exists t_0$ 使得对于 $\forall i,r\in S$ 有 $p_{ir}(t_0)>0$，那么极限 $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)=p_j$ 存在且与 i 无关 $(i,j\in S)$。

证明：令：$M_j(t)\hat{=}\max_{i\in S} p_{ij}(t)$，$m_j(t)\hat{=}\min_{i\in S} p_{ij}(t)$

则有：
$$0\le M_j(t), m_j(t)\le 1,\quad \forall\, t\ge 0$$

（1） 证明 $M_j(t), m_j(t)$ 的单调性：

由 **C－K** 方程，对于 $\forall i\in S$，我们有：

$$p_{ij}(t+\tau)=\sum_{k\in S} p_{ik}(\tau)p_{kj}(t)\le M_j(t)\sum_{k\in S} p_{ik}(\tau)=M_j(t)$$

因此有：

$$M_j(t+\tau)\le M_j(t)$$

同理，对于 $\forall i\in S$，我们有：

$$p_{ij}(t+\tau)=\sum_{k\in S} p_{ik}(\tau)p_{kj}(t)\ge m_j(t)\sum_{k\in S} p_{ik}(\tau)=m_j(t)$$

因此有：

$$m_j(t+\tau)\ge m_j(t)$$

由此可知当 $t\to+\infty$ 时，$M_j(t), m_j(t)$ 的极限存在。

（2） 证明 $\lim_{t\to+\infty} M_j(t)=\lim_{t\to+\infty} m_j(t)\hat{=}p_j$

证明的思路与离散的情形类似，见 **P168－P170**。

由上面的定理和命题可知，对于纯不连续马氏过程，如果存在一个t_0，使得对于$\forall i,r\in S$有$p_{ir}(t_0)>0$，则$\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\lim\limits_{t\to\infty}p_j(t)=p_j$，　$i,j\in S$。

此时，我们有：

$$\lim_{t\to\infty}\frac{d\,p_{ij}(t)}{d\,t}=0\,,\,i,j\in S,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{d\,p_j(t)}{d\,t}=0\,,\,j\in S$$

根据 **K－F** 前进方程

$$\frac{d\,p_{ij}(t)}{d\,t}=\sum_{k\in S}p_{ik}(t)q_{kj}$$

两边求极限，有：

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k\in S}p_{ik}(t)q_{kj}=\sum_{k\in S}p_k q_{kj}=0$$

因此，解以下的联立方程组：

$$\begin{cases}\sum\limits_{k\in S}p_k q_{kj}=0\\ \sum\limits_{k\in S}p_k=1\end{cases}$$

即可求得当$t\to\infty$时过程取各个状态的极限概率p_j。

（三）例子

例 **1**：（机器维修问题）设某机器的正常工作时间是一负指数分布的随机变量，它的平均正常工作时间为$1/\lambda$；它损坏后修复时间也是一负指数分布的随机变量，它的平均修复时间为$1/\mu$。如果该机器在$t=0$时是正常工作的，问在$t=10$时该机器处于正常工作状态的概率是多少？长时间工作下去，机器处于正常状态的概率如何？

解：（**1**）写出状态空间：记机器处于正常工作状态为 **0**，处于维修状态为 **1**，则状态空间为$\{0,1\}$。（**2**）求出Q矩阵：由指数分布的“无记忆性”，可求得Q矩阵为：

$$Q=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$$

（**3**）写出前进或后退方程及初始条件：

$$\begin{pmatrix} p'_{00}(t) \\ p'_{10}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{00}(t) \\ p_{10}(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_{00}(0) \\ p_{10}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P\{X(0)=0\} = p_0(0) = 1$$

$$P\{X(0)=1\} = p_1(0) = 0$$

（4）求解上面的微分方程：

$$p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$p_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

由：

$$P\{X(t)=j\} = p_j(t) = \sum_{i\in S} p_i(0) p_{ij}(t) = p_0(0) p_{0j}(t)$$

可求得：

$$p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$p_0(10) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-10(\lambda+\mu)}$$

（5）极限性态：根据以上所求，求极限即有：

$$\lim_{t\to\infty} p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \hat{=} p_0$$

$$\lim_{t\to\infty} p_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \hat{=} p_0$$

$$\lim_{t\to\infty} p_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \hat{=} p_0$$

另外：根据上面极限性态的讨论，由：

$$\begin{cases} \sum_{k\in S} p_k q_{kj} = 0 \\ \sum_{k\in S} p_k = 1 \end{cases}$$

同样可以求得：

$$\lim_{t\to\infty} p_0(t) = p_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$\lim_{t\to\infty} p_1(t) = p_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

例 2 求解第 7 节中各个例子的极限问题。

9．应用问题

（一） 几种重要的纯不连续马氏过程

（1） **Poission** 过程（专门讲解）

（2） 纯增殖过程（人口问题）

纯增殖过程的转移概率为：

$$P\{X(t+\Delta t)=k \mid X(t)=n\} = \begin{cases} \lambda_n(t)\Delta t + o(\Delta t), & k=n+1 \\ o(\Delta t), & k\neq n, n+1, k>n \\ 1-\lambda_n(t)\Delta t + o(\Delta t), & k=n \end{cases}$$

即在纯不连续增殖过程中，如果在$[0,t)$内出现n个个体$X(t)=n$的条件下，在$[t,t+\Delta t)$内出现一个新个体的概率为$\lambda_n(t)\Delta t + o(\Delta t)$，出现二个或二个以上新个体的概率为$o(\Delta t)$，没有出现新个体的概率为$1-\lambda_n(t)\Delta t + o(\Delta t)$。

纯增殖过程的状态空间为$S=\{0,1,2,\cdots\}$，表示群体某时所拥有的个体数目。

关心的问题是：在t时刻，系统具有n个个体的概率是多少，即要求：

$$P\{X(t)=n\} = p_n(t) = ? \quad n\in S$$

假定初始（$t=0$）时系统有m个个体，$m\in S$，即$P\{X(0)=m\}=p_m(0)=1$，并假定$\lambda_n(t)=\lambda_n$（与t无关），我们来求$p_n(t)=P\{X(t)=n\}$。

我们注意到：在$[0,t+\Delta t)$内出现n $(n>m)$个个体可以等价于下列不相容的情况之和：（**a**）在$[0,t)$内出现n个个体，在$[t,t+\Delta t)$内出现 **0** 个个体；（**b**）在

$[0,t)$ 内出现 $n-1$ 个个体，在 $[t,t+\Delta t)$ 内出现 **1** 个个体；（**c**）在 $[0,t)$ 内出现 $n-2$ 个个体或 $n-2$ 个体以下，在 $[t,t+\Delta t)$ 内出现 **2** 个个体或 **2** 个个体以上，因此有：

$$\begin{aligned} p_n(t+\Delta t) &= p_n(t)p_0(\Delta t)+p_{n-1}(t)p_1(\Delta t)+o(\Delta t) \\ &= p_n(t)[1-\lambda_n\Delta t]+p_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\Delta t+o(\Delta t) \qquad (n>m) \end{aligned}$$

因此有：

$$\frac{d\,p_n(t)}{dt}=-\lambda_n p_n(t)+\lambda_{n-1}p_{n-1}(t) \qquad n>m$$

同理，有：

$$\begin{aligned} p_0(t+\Delta t) &= p_0(t)[1-\lambda_0\Delta t]+o(\Delta t) \qquad (m=0) \\ p_m(t+\Delta t) &= p_m(t)[1-\lambda_m\Delta t]+o(\Delta t) \qquad (m\neq 0) \end{aligned}$$

即有：

$$\begin{cases} \dfrac{d\,p_0(t)}{dt}=-\lambda_0 p_0(t), \quad m=0 \\ \dfrac{d\,p_m(t)}{dt}=-\lambda_m p_m(t), \quad m\neq 0 \end{cases}$$

用 **Laplace** 变换解此微分方程可得：

$$p_n(t)=(-1)^{n-m}\lambda_m\cdots\lambda_{n-1}\sum_{i=m}^{n}\frac{e^{-\lambda_i t}}{\prod\limits_{j=m,\,j\neq i}^{n}(\lambda_i-\lambda_j)}$$

（**3**）　生灭过程

定义：纯不连续马氏过程 $\{X(t),t\geq 0\}$ 如果满足：

（**a**）　过程中状态转移仅限于从一个状态向其邻近状态转移；

（**b**）　若 $X(t)=n$，则在 $[t,t+\Delta t)$ 内产生由 n 状态转移到 $(n+1)$ 状态的概率为：$\lambda_n\Delta t+o(\Delta t)$；产生由 n 状态转移到 $(n-1)$ 状态的概率为：$\mu_n\Delta t+o(\Delta t)$；

（**c**）　若 $X(t)=n$，则在 $[t,t+\Delta t)$ 内转移二个或二个以上状态的概率为 $o(\Delta t)$。

则称此纯不连续马氏过程$\{X(t), t\ge 0\}$为生灭过程。

状态空间为$S=\{0,1,2,\cdots\}$

由定义，可得生灭过程的Q（生灭矩阵）矩阵为：

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \mu_n & -(\lambda_n+\mu_n) & \lambda_n & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

在条件$\lambda_i>0, i\ge 0$，$\mu_i>0, i\ge 1$，（$\mu_0=0$）下，有：

$$i-1\leftrightarrow i\leftrightarrow i+1\,(i\ge 1)$$

因此，可知对$\forall\, i,j\in S$，有$i\leftrightarrow j$，从而这样的生灭过程是不可约的。

由生灭矩阵可以写出 **K－F** 前进方程：

$$\begin{cases} \dfrac{d\,p_{00}(t)}{dt}=-\lambda_0 p_{00}(t)+\mu_1 p_{01}(t) \\ \dfrac{d\,p_{0n}(t)}{dt}=\lambda_{n-1}p_{0n-1}(t)-(\lambda_n+\mu_n)p_{0n}(t)+\mu_{n+1}p_{0n+1}(t) \quad n\ge 1 \\ \dfrac{d\,p_{i0}(t)}{dt}=-\lambda_0 p_{i0}(t)+\mu_1 p_{i1}(t) \\ \dfrac{d\,p_{in}(t)}{dt}=\lambda_{n-1}p_{in-1}(t)-(\lambda_n+\mu_n)p_{in}(t)+\mu_{n+1}p_{in+1}(t) \quad n\ge 1 \end{cases} \qquad \textbf{(A)}$$

Fokker-Planck 方程：

$$\begin{cases} p_0'(t)=-\lambda_0 p_0(t)+\mu_1 p_1(t) \\ p_j'(t)=\lambda_{j-1}p_{j-1}(t)-(\lambda_j+\mu_j)p_j(t)+\mu_{j+1}p_{j+1} \end{cases}$$

其中$i=0,1,2,\cdots$, $j=1,2,\cdots$。以上的λ_n, μ_n（$n=0,1,2,\cdots$）均可以是t的函数。

如果$\{X(t), t\ge 0\}$的极限分布存在，即$p_j=\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}(t)$，且与$i$无关，则有

$p'_j(t)=0\,(t\to\infty)$，因此在 **Fokker-Planck** 方程中令$t\to\infty$，有：

$$\begin{cases}-\lambda_0 p_0+\mu_1 p_1=0\\ \lambda_{j-1}p_{j-1}-(\lambda_j+\mu_j)p_j+\mu_{j+1}p_{j+1}=0 \quad j\ge 1\end{cases}$$

解以上代数方程组得：

$$p_1=\frac{\lambda_0}{\mu_1}p_0,\quad p_2=\frac{\lambda_0\lambda_1}{\mu_1\mu_2}p_0,\cdots,\quad p_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}p_0$$

利用：$\sum_{k\in S}p_k=1$，我们有：

$$p_0=\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\right)^{-1}$$

由此可知，当

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}<\infty$$

时，$0<p_0<1,0<p_k<1\quad(k\ge 1)$，因此可得以下定理：

定理：设$\{X(t),t\ge 0\}$是生灭过程，$\lambda_i>0,i\ge 0$，$\mu_i>0,i\ge 1$，$\mu_0=0$，则$\{X(t),t\ge 0\}$存在唯一的平稳分布（它就等于极限分布）的充要条件为：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}<\infty$$

且

$$p_0=\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}\right)^{-1}\qquad p_k=\frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{k-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}p_0$$

注：离散参数的生灭过程：

设有马氏链，它的状态空间为$S=\{0,1,2,\cdots\}$，且设当$|i-j|>1$时，$p_{ij}=0$，在其它的i,j时p_{ij}是任意的正数，对于每个$j>0$，满足：

$$p_{j\,j-1}+p_{jj}+p_{j\,j+1}=1$$

当$j=0$时，满足：

$$p_{00}+p_{01}=1$$

试求该链为正常返的条件。

解：由式子 $p_{j,j-1}+p_{j,j}+p_{j,j+1}=1$ 可知各状态都相通，画出状态转移图，利用平衡原理，我们有：

$$\begin{cases} \pi_0 p_{01}=\pi_1 p_{10} \\ \pi_1(p_{10}+p_{12})=\pi_0 p_{01}+\pi_2 p_{21} \\ \cdots \\ \pi_j(p_{jj-1}+p_{jj+1})=\pi_{j-1}p_{j-1j}+\pi_{j+1}p_{j+1j} \\ \vdots \end{cases}$$

由此解得：

$$\pi_1=\frac{p_{01}}{p_{10}}\pi_0,\ \pi_2=\frac{p_{01}p_{12}}{p_{10}p_{21}}\pi_0,\cdots,\pi_j=\frac{p_{01}p_{12}\cdots p_{j-1j}}{p_{10}p_{21}\cdots p_{jj-1}}\pi_0,\cdots$$

由 $\sum_{j=0}^{\infty}\pi_j=1$，利用正常返和极限分布的关系，我们有：当

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{p_{01}p_{12}\cdots p_{j-1j}}{p_{10}p_{21}\cdots p_{jj-1}}<\infty$$

时，此马氏链的极限分布存在，因此是正常返的。

给定起始状态 $X(0)=i\in S$，就可以求得过程在 t 时刻的转移概率 $p_{in}(t)$ 及处于状态 n 的概率 $p_n(t)=P\{X(t)=n\}$，初始条件分别为：

$$p_{in}(0)=\delta_{in}=\begin{cases}1, & n=i \\ 0, & n\neq i\end{cases},\quad p_j(0)=P\{X(0)=j\}=1,\quad j=i$$

如果 λ_n,μ_n 均是 t 的函数，则上述过程称为非齐次生灭过程；

如果 λ_n,μ_n 均是 t 的线性函数，则称为非齐次线性生灭过程；

如果 λ_n,μ_n 均与 t 的无关，则上述过程称为齐次生灭过程。

特别地，假设 $\lambda_n=n\lambda(t),\mu_n=n\mu(t)$，此时过程是非齐次生灭过程，关于此情况时的微分方程（**A**）的解法（用母函数求解法）可以参看 **P179**（课后阅读）。

当$\lambda_n = n\lambda, \mu_n = n\mu$（与$t$无关），此时过程是齐次线性生灭过程，对于此时，我们可以求$E\{X(t)\}$，具体求法如下：

此时的生灭矩阵为

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & 2\mu & -2(\lambda+\mu) & 2\lambda & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & n\mu & -n(\lambda+\mu) & n\lambda & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

写出福克－普朗克方程：

$$\begin{cases} \dfrac{d\,p_0(t)}{dt} = \mu p_1(t) \\ \dfrac{d\,p_1(t)}{dt} = -(\mu+\lambda)p_1(t) + 2\mu p_2(t) \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{d\,p_n(t)}{dt} = (n-1)\lambda p_{n-1}(t) - n(\mu+\lambda)p_n(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t) \end{cases}$$

令：$M_X(t) = E\{X(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t)$

则有：

$$\frac{dM_X(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{d\,p_n(t)}{dt} =$$

$$= \lambda\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)p_{n-1}(t) - (\mu+\lambda)\sum_{n=1}^{\infty} n^2 p_n(t) + \mu\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)p_{n+1}(t)$$

由于：

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n-1)p_{n-1}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} m(m+1)p_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} m(m+1)p_m(t)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)p_{n+1}(t) = \sum_{m=2}^{\infty} (m-1)mp_m(t) = \sum_{m=1}^{\infty} (m-1)mp_m(t)$$

因此：

$$\frac{dM_X(t)}{dt}=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)p_n(t)-(\mu+\lambda)\sum_{n=1}^{\infty}n^2p_n(t)+\mu\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)np_n(t)$$

$$=(\lambda-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}np_n(t)=(\lambda-\mu)M_X(t)$$

即有：

$$\frac{dM_X(t)}{dt}=(\lambda-\mu)M_X(t)$$

利用初始条件：$M_X(0)=i\times 1=i$，即可求得：

$$M_X(t)=E\{X(t)\}=ie^{(\lambda-\mu)t}\quad t\geq 0$$

由上面求解过程可以看到，一般来说，解前进方程、后退方程和福克－普朗克方程是比较困难的，有时根本无法求得其解析解。但是，如果只研究$t\to\infty$时的极限情况，我们就可以利用上面 **8**（二）中提到的方法，将微分方程求极限后，转化为解线性代数方程组，下面通过例子说明具体的求法。

例：（电话交换问题）某电话总机有n条线路。在某一呼唤来到时如有空闲线路，则该呼唤占用其中某一条空闲线路，并开始通话。如果通话结束，则该线路使用完毕而成为空闲线路，等待下一次呼唤。如果呼唤来到时遇到n条线路均被占用，则该呼唤遭到拒绝而消失。设有按 **poission** 分布的呼唤流，即在$[t,t+\Delta t)$内来到一次呼唤的概率为$\lambda\Delta t+o(\Delta t)$，来到二次或二次以上的呼唤的概率为$o(\Delta t)$；并设如果某一线路在某时刻$t$被占用，而在$[t,t+\Delta t)$内这条线路空闲出来的概率为$\mu\Delta t+o(\Delta t)$，即通话时间按负指数分布。求总机在$t$时刻有$k$条线路被占用的概率所满足的微分方程；以及当$t\to\infty$时，有$k$条线路被占用的概率。

解：此时的状态空间为$S=\{0,1,2,\cdots,n\}$，$k=0,1,2,\cdots,n$，并且是一生灭过程，生灭矩阵为：

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & (n-1)\mu & -[\lambda+(n-1)\mu] & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n\mu & -n\mu \end{pmatrix}$$

写出福克－普朗克方程：

$$\begin{cases} \dfrac{d\,p_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t)+\mu p_1(t) \\ \dfrac{d\,p_1(t)}{dt}=\lambda p_0(t)-(\lambda+\mu)p_1(t)+2\mu p_2(t) \\ \quad\cdots\cdots \\ \dfrac{d\,p_k(t)}{dt}=\lambda p_{k-1}(t)-(\lambda+k\mu)p_k(t)+(k+1)\mu p_{k+1}(t) \quad (0<k<n) \\ \quad\cdots\cdots \\ \dfrac{d\,p_n(t)}{dt}=\lambda p_{n-1}(t)-n\mu p_n(t) \end{cases}$$

令：$t\to\infty$，我们有：

$$\begin{cases} -\lambda p_0+\mu p_1=0 \\ \lambda p_{k-1}-(\lambda+k\mu)p_k+(k+1)\mu p_{k+1}=0 \quad (0<k<n) \\ \lambda p_{n-1}-n\mu p_n=0 \end{cases}$$

设：$g_k=\lambda p_{k-1}-k\mu p_k$，则有：

$$\begin{aligned} &g_k=\lambda p_{k-1}-k\mu p_k=\lambda p_k-(k+1)\mu p_{k+1}=g_{k+1} \\ &g_0=0 \\ &g_n=0 \end{aligned}$$

因此 $g_i=0 \quad i=0,1,2,\cdots,n$

故有：

$$\begin{cases} p_1 = \dfrac{\lambda}{\mu} p_0 \\ \quad \cdots\cdots \\ p_k = \dfrac{\lambda}{k\mu} p_{k-1} = \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 \\ \quad \cdots\cdots \\ p_n = \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0 \end{cases}$$

利用：$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1 \Rightarrow p_0\left[1 + \dfrac{\lambda}{\mu} + \dfrac{1}{2!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \cdots + \dfrac{1}{n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n\right] = 1$

可得：

$$p_k = \frac{\dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\sum_{i=0}^{n}\dfrac{1}{i!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^i} \qquad 0 \le k \le n$$

画出转移率转移图，注意用极限平衡原理求解。

几种特殊的生灭过程：

- 有迁入的线性增长模型：此时 $\lambda_n = n\lambda + a$, $\mu_n = n\mu$ ，（见习题 **17**）；
- 纯生过程（**Yule** 过程）：此时 $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = 0$ ；
- 纯灭过程：此时 $\lambda_n = 0$, $\mu_n = \mu$ ，（见习题 **18**）；

（二） 排队和服务问题

任何排队过程都由 **3** 个历程组成：顾客到达过程、排队和服务过程。根据这三个历程不同可以建立不同的概率模型，如 **M / M / 1** 和 **M / M / s** 及一般的 **G_1 /G_2 / s** 模型，对于排队和服务问题，我们所关心的是：

（**1**） 服务系统中顾客的平均数；

（**2**） 排队等候的顾客平均数；

（**3**） 顾客在系统中所花费时间的平均值；

（**4**） 顾客花在排队等候的时间平均值。

下面通过例子讨论以上几个问题。

例 无容量限制的 **M / M / 1** 排队系统，该系统的顾客到达服从 **Poission** 分布，只有一个服务员，服务时间服从负指数分布，且都是独立的。

解：考虑系统进入平稳分布情况。此时是 $\lambda_n = \lambda$, $\mu_n = \mu$ 情况的生灭过程。此时状态空间为：$S = \{0,1,2,\cdots\}$；生灭矩阵为：

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

根据上面的解法，令：$t \to \infty$，我们有：

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \qquad \cdots \\ (\lambda+\mu) p_n = \lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1} \end{cases}$$

解上面的方程，有：

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0\,,\quad n = 1,2,\cdots$$

利用 $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$，我们有：

当 $\lambda < \mu$ 时，有平稳分布，且平稳分布为：

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$$

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$$

（1） 系统中顾客的平均数为：

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

（2） 排队等候的顾客平均数为：

当系统中有n个人，其中一人被服务，$n-1$人排队等候，排队等候的顾客平均数为：

$$L_Q=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)p_n=\sum_{n=1}^{\infty}np_n-\sum_{n=1}^{\infty}p_n=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

（3） 顾客在系统中所花费时间的平均值：

若顾客 A 到达服务点时系统中已有n人，其中一人在被服务，$n-1$人在排队等候；由服务时间是负指数分布（无记忆性）和每个顾客的服务时间之间的独立性，故顾客 A 到达服务点后需要等候平均时间n/μ后才能得到服务，本人的平均服务时间为$1/\mu$，因此有：

$$W=\sum_{n=0}^{\infty}E\{\text{顾客}A\text{在系统中花费的时间}\mid\text{已经有}n\text{个顾客在系统中}\}p_n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{1}{\mu}p_n=\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}np_n+\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}p_n=\frac{1}{\mu-\lambda}$$

（4） 顾客花在排队等候的时间平均值

$$W=\sum_{n=0}^{\infty}E\{\text{顾客}A\text{排队等候的时间}\mid\text{已经有}n\text{个顾客在系统中}\}p_n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{\mu}p_n=\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty}np_n=\frac{1}{\mu}\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

例 有容量限制 **M / M / 1** 排队系统：即如果顾客到达时发现系统容量已满（**N** 人），则该顾客就不再排队而离开。此时有 **N+1** 个状态，其它假设和上例一样。

解：此时的状态空间为：$S=\{0,1,2,\cdots,N\}$；生灭矩阵为：

$$Q=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & -\mu\end{pmatrix}$$

画出转移率图，建立系统到达平稳分布后相应的平衡方程组：

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ (\lambda+\mu) p_1 = \lambda p_0 + \mu p_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ (\lambda+\mu) p_k = \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1} \quad (1 \le k \le N-1) \\ \quad \cdots\cdots \\ \mu p_N = \lambda p_{N-1} \end{cases}$$

解此方程组得：

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 \quad k = 1,2,\cdots,N$$

由：

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$$

可以求得：

$$p_k = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1-\dfrac{\lambda}{\mu}}{1-\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}} \qquad k = 0,1,2,\cdots,N$$

因此，在容量有限的 **M / M / 1** 排队系统中，不用假设 $\lambda < \mu$。

（**1**）　计算系统中顾客的平均数：

$$L = \sum_{k=0}^{N} k p_k = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{1 + N\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1} - (N-1)\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{N}}{1-\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}$$

（**2**）　计算等候的顾客平均数：

$$L_Q = \sum_{k=1}^{N} (k-1) p_k = \sum_{k=1}^{N} k p_k - \sum_{k=1}^{N} p_k = \sum_{k=1}^{N} k p_k - (1-p_0) = L - (1-p_0)$$

（**3**）　顾客在系统中所花费时间的平均数：

注意：此时有两种不同的计算方式。

一种是将所有到过系统的人都计算在内，此时有：

$$W^{(1)}=\sum_{n=0}^{N}E\{\text{顾客}A\text{在系统中花费的时间}\,|\,\text{已经有}n\text{个顾客在系统中}\}p_n$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}(n+1)\frac{1}{\mu}p_n=\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{N-1}np_n+\frac{1}{\mu}\sum_{n=0}^{N-1}p_n=\frac{L-(N+1)p_N+1}{\mu}$$

另一种只计算进入系统的顾客在系统中所花费时间的平均数，此时有：

$$W^{(2)}=\sum_{n=0}^{N-1}E\left\{\text{顾客}A\text{在系统中花费的时间}\,\middle|\,\text{系统中非N状态下}A\text{到达时系统有}n\text{个顾客}\right\}\frac{p_n}{1-p_N}$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(n+1)}{\mu}\cdot\frac{p_n}{1-p_N}=\frac{W^{(1)}}{1-p_N}=\frac{L-(N+1)p_N+1}{\mu(1-p_N)}$$

其中 $\frac{p_n}{1-p_N}$ 表示一条件概率，即已知系统的状态为非 N 时系统处于状态 n 的条件概率，$n=0,1,2,\cdots,N-1$。即：

$$P\left\{A\text{到达时系统中有}n\text{个顾客}\right\}=$$

$$=P\left\{A\text{到达时系统中有 }n\text{个顾客}\,\middle|\,A\text{到达时系统的状态为非N}\right\}\times$$

$$\times P\left\{A\text{到达时系统的状态为非N}\right\}$$

（三）机器维修问题

设有一具有 M 台机器的系统，机器在运行过程中的任何时候都可能发生故障而需要维修。每台机器从开始工作到需要维修的时间间隔是服从负指数分布的随机变量，且机器在时刻 t 处于工作状态，而在 $[t,t+\Delta t)$ 内需要维修的概率为 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$；反之，每台机器维修的时间也服从负指数分布，且机器在时刻 t 处于维修状态，而在 $[t,t+\Delta t)$ 内机器维修完成恢复工作状态的概率为 $\mu\Delta t+o(\Delta t)$。

如果为了管理此系统仅配备一名维修工，那么当有一台机器发生故障时，该机器立刻得到维修；当维修工正在维修某一台机器时而另外有一机器发生故障，新发生故障的机器排队等候维修。若发生故障的机器有 n 台，则其中一台正在被维修，$n-1$ 台参与排队等候维修。此时称该系统处于状态 n；若所有机器处于工作状态，则称该系统处于 **0** 状态。

因此系统的状态空间为：$S=\{0,1,2,\cdots,M\}$。它是一生灭过程，其中：

$$\lambda_n=\begin{cases}(M-n)\lambda & (n\le M)\\ 0 & (n>M)\end{cases}$$

$$\mu_n=\mu$$

画出状态转移率图，类似的可以讨论系统不工作机器的平均数、等待维修的机器的平均数等问题。

另外，如果维修人员不是一个，而是多人的情况时，也可以类似地讨论，还可以考虑同一系统用几个维修人员比较合理的问题，等等。（见书 **P211－217**，课后阅读）