

第四章 二阶矩过程、平稳过程和随机分析

(一) 二阶矩过程

1. 基本概念

注：以下讨论的随机过程都是复随机过程。

定义：设有随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ ，若对 $\forall t \in T$ ， $X(t)$ 的均值和方差都存在，则称随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 为二阶矩过程。

若 $\{X(t), t \in T\}$ 是二阶矩过程，则 $\mu_X(t) = E\{X(t)\}$ 存在，我们令 $\tilde{X}(t) = X(t) - \mu_X(t)$ ，则有 $E\{\tilde{X}(t)\} = 0$ ，并且 $\tilde{X}(t)$ 的二阶矩也是存在的，因此我们以后讨论的二阶矩过程一般都假定均值函数为零。

注：二阶矩过程的自协方差函数和自相关函数都是存在的。因为：

$$\text{cov}\{X(t_1), X(t_2)\} = E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][\overline{X(t_2) - \mu_X(t_2)}]\}$$

因此有：

$$\begin{aligned} |\text{cov}\{X(t_1), X(t_2)\}|^2 &\leq \left\{ E\{[X(t_1) - \mu_X(t_1)][\overline{X(t_2) - \mu_X(t_2)}]\} \right\}^2 \\ &\leq E|X(t_1) - \mu_X(t_1)|^2 \cdot E|X(t_2) - \mu_X(t_2)|^2 \\ &= D\{X(t_1)\} \cdot D\{X(t_2)\} < \infty \end{aligned}$$

2. 二阶矩过程相关函数的性质

定理：（共扼对称性）设 $\{X(t), t \in T\}$ 是二阶矩过程，则有：

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \overline{R_{XX}(t_2, t_1)} \quad \forall t_1, t_2 \in T$$

当 $\{X(t), t \in T\}$ 是实的二阶矩过程时，有：

$$R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_2, t_1) \quad \forall t_1, t_2 \in T$$

定理：（非负定性）设 $\{X(t), t \in T\}$ 是二阶矩过程，对于 $\forall n \in N$ ，

$t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, 以及 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in C$, 我们有:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n R_{XX}(t_k, t_m) \lambda_k \overline{\lambda_m} \geq 0$$

(二) 平稳过程

1. 严平稳过程

定义: 若随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 满足: 对于 $\forall n \in N$, 任选 $t_1 < t_2 < \dots < t_n$, $t_i \in T, i=1, 2, \dots, n$, 以及任意的 τ , $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$ 有

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = F_X(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau)$$

则称此随机过程为严平稳随机过程。其中 $F_X(\cdot)$ 是 n 维分布函数。

注 1: 严平稳随机过程的一维分布函数与时间 t 无关。因此, 如果严平稳随机过程的均值函数存在的话, 则是一常数。

注 2: 严平稳随机过程的任意二维分布函数只与时间差有关。因此, 如果严平稳随机过程的二阶矩存在的话, 则自相关函数只与时间差有关。

注 3: 若上述的定义中的条件不是对于任意的 n 满足, 而只是对于某个 k 满足时, 即对于任意的 $t_1 < t_2 < \dots < t_k$, $t_i \in T, i=1, 2, \dots, k$, 任意的 τ , 有

$$F_X(x_1, x_2, \dots, x_k; t_1, t_2, \dots, t_k) = F_X(x_1, x_2, \dots, x_k; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_k + \tau)$$

而对于 $n > k$ 时, 上述等式不成立, 则称它为 k 级平稳的随机过程。如果过程为 k 级平稳的, 那么当 $n < k$ 时, 上面的等式成立。

2. 宽平稳随机过程

定义: 设随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 是二阶矩过程, 如果它的均值函数是常数, 自相关函数只是时间差 $\tau = t_2 - t_1$ 的函数, 则称此随机过程为宽平稳随机过程。

注 1: 宽平稳随机过程是二阶矩过程, 但不一定是严平稳随机过程。

注 2: 对于严平稳随机过程, 只有它二阶矩存在时, 它才是宽平稳过程。

注 3: 对于正态随机过程来说, 严平稳就是宽平稳。

注 4: 以下讨论平稳过程指的是宽平稳随机过程

3. 宽平稳随机过程的性质

(1) 我们有: $R_{XX}(t_2 - t_1) = \overline{R_{XX}(t_1 - t_2)} \quad \forall t_1, t_2 \in T$

或: $R_{XX}(\tau) = \overline{R_{XX}(-\tau)} \quad \tau = t_2 - t_1,$

对于实的随机过程, 有: $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau) \quad \tau = t_2 - t_1$ (偶函数)

(2) 我们有: $R_{XX}(0) \geq |\mu_X|^2$

(3) 我们有: $|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0), \quad |C_{XX}(\tau)| \leq C_{XX}(0)$

(4) 相关函数 $R_{XX}(\tau)$ 具有非负定性, 即对于 $\forall n \in N \quad t_1, t_2, \dots, t_n \in T,$

以及 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in C,$ 我们有:

$$\begin{aligned}
 & (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \begin{pmatrix} R_{XX}(t_1 - t_1) & R_{XX}(t_1 - t_2) & \cdots & R_{XX}(t_1 - t_n) \\ R_{XX}(t_2 - t_1) & R_{XX}(t_2 - t_2) & \cdots & R_{XX}(t_2 - t_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ R_{XX}(t_n - t_1) & R_{XX}(t_n - t_2) & \cdots & R_{XX}(t_n - t_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} \\ \overline{\lambda_2} \\ \vdots \\ \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n R_{XX}(t_i - t_k) \lambda_i \overline{\lambda_k} \geq 0
 \end{aligned}$$

4. 例子:

(1) 热 (白) 噪声:

设 $\{X(n); n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 是一实随机序列, 满足: (a) $\{X(n)\}$ 相互独立;

(b) $X(n) \sim N(0, \sigma^2)$ 。求其均值和相关函数。

解: 由:

$$\mu_X(n) = E\{X(n)\} = 0$$

$$D_X(n) = E\{X^2(n)\} = \sigma^2$$

$$\begin{cases} E\{X(n+m)X(n)\} = 0 & (m \neq 0) \\ E\{X(n+m)X(n)\} = \sigma^2 & (m = 0) \end{cases}$$

因此：

$$R_X(m) = \begin{cases} \sigma^2 & m = 0 \\ 0 & m \neq 0 \end{cases}$$

所以它是一平稳随机序列。

(2) 滑动平均：

设 $\{X(n); n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 是一标准不相关序列，即满足：

$$E\{X(n)\} = 0$$

$$E\{X(n)\overline{X(m)}\} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$$

令 $Y(n) = a_0 X(n) + a_1 X(n-1) + \dots + a_s X(n-s)$ ，证明 $\{Y(n)\}$ 是一平稳序列。其中 $a_0, a_1, \dots, a_s \in C$ 。

证明：显然： $\mu_Y(n) = E\{Y(n)\} = 0$

$$\begin{aligned} R_Y(m) &= E\{Y(n+m)\overline{Y(n)}\} \\ &= E\left\{\sum_{k=0}^s a_k X(n+m-k) \overline{\sum_{i=0}^s a_i X(n-i)}\right\} \\ &= \sum_{i=0}^s \sum_{k=0}^s a_k \overline{a_i} E\{X(n+m-k)\overline{X(n-i)}\} \\ &= \sum_{0 \leq k \leq s, 0 \leq k-m \leq s} a_k \overline{a_{k-m}} \end{aligned}$$

故 $\{Y(n)\}$ 是一平稳序列。

(3) 设有复随机过程 $X(t) = \sum_{k=1}^N \eta_k e^{j\omega_k t}$ ，其中 η_k ($1 \leq k \leq N$) 是相互独立的

随机变量，且 $\eta_k \sim N(0, \sigma_k^2)$ ， ω_k 为常数。求 $X(t)$ 的均值函数和相关函数，并说明是否是平稳过程？

解：由 η_k ($1 \leq k \leq N$) 的独立性及其均值为 0，显然有：

$$\begin{aligned}
\mu_X(t) &= E\{X(t)\} = E\left\{\sum_{k=1}^N \eta_k e^{j\omega_k t}\right\} \\
&= E\left\{\sum_{k=1}^N \eta_k \cos \omega_k t + j \cdot \sum_{k=1}^N \eta_k \sin \omega_k t\right\} = 0 \\
R_X(t_1, t_2) &= E\{X(t_1) \overline{X(t_2)}\} \\
&= E\left\{\left(\sum_{k=1}^N \eta_k e^{j\omega_k t_1}\right) \overline{\left(\sum_{i=1}^N \eta_i e^{j\omega_i t_2}\right)}\right\} \\
&= E\left\{\sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^N \eta_k \overline{\eta_i} e^{j\omega_k t_1 - j\omega_i t_2}\right\} \\
&= \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 e^{j\omega_k (t_1 - t_2)} \\
&= \sum_{k=1}^N \sigma_k^2 e^{j\omega_k \tau} \quad (\tau = t_1 - t_2)
\end{aligned}$$

由此可知 $X(t)$ 是一平稳的随机过程。

(4) 设随机过程

$$\xi(t) = \begin{cases} Xt + a & T > t \geq 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中 T 为一固定常数，随机变量 X 服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布， a 为一常数。

求 $E\{\xi(t)\xi(s)\}$ ，其中 $t > s$ 。

解：由于随机变量 X 服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布，即其分布密度为：

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{x}{\lambda}} \quad (x > 0)$$

我们有：

$$\begin{aligned}
E\{X\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \lambda \\
E\{X^2\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = 2\lambda^2
\end{aligned}$$

因此有：

$$\begin{aligned}
E\{\xi(t)\xi(s)\} &= E\{[Xt + a][Xs + a]\} = \\
&= E\{X^2 ts + X(ta + sa) + a^2\} \\
&= tsE\{X^2\} + (ta + sa)E\{X\} + a^2 \\
&= 2ts\lambda^2 + (t + s)a\lambda + a^2 \quad (t > s)
\end{aligned}$$

(三) 正交增量过程

定义：设随机过程 $\{X(t), t \in T\}$ 是二阶矩过程，若 $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ ，且 $t_1, \dots, t_4 \in T$ ，有：

$$E\{[X(t_2) - X(t_1)][\overline{X(t_4) - X(t_3)}]\} = 0$$

则称该过程为正交增量过程。

独立增量过程与正交增量过程的关系：对于独立增量过程 $\{X(t), t \in T\}$ ，若它还满足： $E\{X(t)\} = a$ ， $E\{|X(t)|^2\} < \infty$ ，则该过程为正交增量过程。因为此时若任意取 $t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$ ，且 $t_1, \dots, t_4 \in T$ ，由独立增量性，我们有：

$$\begin{aligned} & E\{[X(t_2) - X(t_1)][\overline{X(t_4) - X(t_3)}]\} \\ &= E\{X(t_2) - X(t_1)\}E\{\overline{X(t_4) - X(t_3)}\} = 0 \end{aligned}$$

因此，均值为常数、存在二阶矩的独立增量过程一定是正交增量过程。反之，我们有非平稳随机过程的例子：

设 $\{X(t), t \in [a, b]\}$ 为正交增量过程，规定 $X(a) = 0$ ，取 $t_1 = a$ ， $t_2 = t_3 = s$ ， $t_4 = t \leq b$ ， $t > s$ ，则由定义，有：

$$E\{X(s)[\overline{X(t) - X(s)}]\} = E\{X(s)\overline{X(t)}\} - E\{X(s)\overline{X(s)}\} = 0$$

因此有：

$$E\{X(s)\overline{X(t)}\} = E\{X(s)\overline{X(s)}\} = E\{|X(s)|^2\} \triangleq F(s)$$

由此，我们有：

$$R_{XX}(s, t) = E\{X(s)\overline{X(t)}\} = F(s) \quad (t > s)$$

$$R_{XX}(s, t) = E\{X(s)\overline{X(t)}\} = F(t) \quad (t < s)$$

因此有：

$$R_{XX}(s, t) = F(\min(s, t))$$

这就意味着 $\{X(t), t \in [a, b]\}$ 不是一平稳过程。

另外，当 $t > s$ 时，由：

$$\begin{aligned} E\{|X(t) - X(s)|^2\} &= E\{X(t)\overline{X(t)}\} - E\{X(t)\overline{X(s)}\} \\ &\quad - E\{X(s)\overline{X(t)}\} + E\{X(s)\overline{X(s)}\} \\ &= F(t) - F(s) - F(s) + F(s) = F(t) - F(s) \geq 0 \end{aligned}$$

可知， $F(t)$ 是一不减的函数。

注：设 $\{X(t); t \geq 0\}$ 是一独立增量过程，且 $X(0) = 0$ 及它的二阶矩存在，我们令：

$$Y(t) = X(t) - \mu_X(t)$$

则由 $\{X(t); t \geq 0\}$ 是独立增量性，可知 $\{Y(t); t \geq 0\}$ 也具有独立增量性，且有：

$$Y(0) = 0, \quad E\{Y(t)\} = 0, \quad D_Y(t) = E\{Y^2(t)\} = D_X(t)$$

下面我们求 $\{X(t); t \geq 0\}$ 的协方差函数：若 $0 \leq s < t$

$$\begin{aligned} C_X(s, t) &= E\{Y(s)\overline{Y(t)}\} \\ &= E\{[Y(s) - Y(0)][\overline{Y(t) - Y(s) + Y(s)}]\} \\ &= E\{Y(s) - Y(0)\}E\{\overline{Y(t) - Y(s)}\} + E\{Y^2(s)\} \\ &= D_X(s) \end{aligned}$$

由此可得：对于任意的 $s, t \geq 0$ ，有

$$C_X(s, t) = D_X(\min(s, t))$$

因此，对于强度为 λ 的齐次 **Poisson** 过程，我们可以得到：

$$C_N(s, t) = \lambda \min(s, t), \quad s, t \geq 0$$

$$R_N(s, t) = \lambda^2 st + \lambda \min(s, t), \quad s, t \geq 0$$

同样地，对于非其次 **Poisson** 过程，有：

$$R_N(s, t) = \int_0^{\min(s, t)} \lambda(\tau) d\tau \left[1 + \int_0^{\min(s, t)} \lambda(\tau) d\tau \right], \quad s, t \geq 0$$

例：设随机过程 $\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$ 是一正交增量过程，并且有 $X(0) = 0$ ， $E\{X(t)\} = 0$ ，及满足：

$$E\{|X(t) - X(s)|^2\} = |t - s|$$

试求：

$$(1) \text{ 证明： } E\{X(t)\overline{X(s)}\} = \frac{1}{2}(|t| + |s| - |t - s|);$$

$$(2) \text{ 令： } \xi_n(t) = n\left[X\left(t + \frac{1}{n}\right) - X(t)\right], \quad n = 1, 2, \dots, \text{ 则对每一个 } n, \text{ 证明}$$

$\{\xi_n(t), -\infty < t < +\infty\}$ 是一平稳过程。

解：(1) 任取 $s, t \in R$ ，由 $X(t)$ 是一正交增量过程，令： $F(t) = E\{|X(t)|^2\}$ ，

我们有：

(a) 当 $s > 0, t < 0$ 或 $s < 0, t > 0$ 时，

$$R_x(s, t) = E\{X(s)\overline{X(t)}\} = 0$$

(b) 当 $s > 0, t > 0$ 时，

$$R_x(s, t) = E\{X(s)\overline{X(t)}\} = F(\min\{s, t\})$$

(c) 当 $s < 0, t < 0$ 时，

$$R_x(s, t) = E\{X(s)\overline{X(t)}\} = F(\max\{s, t\})$$

因此，我们有： $R_x(s, t) = R_x(t, s)$ 。

由题目所给的条件，我们有：

$$\begin{aligned} |t - s| &= E\{|X(t) - X(s)|^2\} \\ &= E\{|X(t)|^2\} - E\{X(t)\overline{X(s)}\} - E\{X(s)\overline{X(t)}\} + E\{|X(s)|^2\} \\ &= F(t) - R_x(t, s) - R_x(s, t) + F(s) = F(t) - 2R_x(s, t) + F(s) \\ |t| &= E\{|X(t) - X(0)|^2\} = E\{|X(t)|^2\} = F(t) \\ |s| &= E\{|X(s) - X(0)|^2\} = E\{|X(s)|^2\} = F(s) \end{aligned}$$

由此可得：

$$E\{X(t)\overline{X(s)}\} = R_x(t, s) = R_x(s, t) = \frac{1}{2}(|t| + |s| - |t - s|)$$

(2) 由题意及 (1) 的结果, 我们有:

$$\begin{aligned}
 R_{\xi_n}(t, s) &= E\{\xi_{nt} \overline{\xi_{ns}}\} = n^2 E\left\{\left[X\left(t + \frac{1}{n}\right) - X(t)\right] \left[\overline{X\left(s + \frac{1}{n}\right) - X(s)}\right]\right\} \\
 &= \frac{n^2}{2} \left[\left|t + \frac{1}{n}\right| + \left|s + \frac{1}{n}\right| - |t - s| + |t| + |s| - |t - s| - |t| - \left|s + \frac{1}{n}\right| + \right. \\
 &\quad \left. + \left|t - s - \frac{1}{n}\right| - \left|t + \frac{1}{n}\right| - |s| + \left|t + \frac{1}{n} - s\right| \right] \\
 &= \frac{n^2}{2} \left[\left|t - s - \frac{1}{n}\right| + \left|t + \frac{1}{n} - s\right| - 2|t - s| \right] \\
 &= \begin{cases} n[1 - n|t - s|], & 0 \leq |t - s| \leq 1/n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$E\{\xi_n(t)\} = 0$$

由此可知, 随机过程 $\{\xi_n(t), -\infty < t < +\infty\}$ 是一平稳过程。

(四) 随机分析

1. 均方极限

定义: 设随机序列 $\{X_n; n=1, 2, \dots\}$ 及随机变量 X 均存在二阶矩, 即

$$E\{|X_n|^2\} < \infty, E\{|X|^2\} < \infty, \text{ 如果}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\{|X_n - X|^2\} = 0$$

则称随机序列 $\{X_n\}$ 均方收敛于 X , 或序列 $\{X_n\}$ 的均方极限为 X , 记作

$$l.i.m_{n \rightarrow \infty} X_n = X$$

关于均方极限, 具有以下性质

(1) 如果 $l.i.m_{n \rightarrow \infty} X_n = X$, 则有:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} E\{X_n\} = E\{X\} = E\left\{l.i.m_{n \rightarrow \infty} X_n\right\}$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow \infty} E\{|X_n|^2\} = E\{|X|^2\} = E\left\{\left|l.i.m_{n \rightarrow \infty} X_n\right|^2\right\}$$

(2) 如果 $l.i.m_{n \rightarrow \infty} X_n = X$, $l.i.m_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y$, 则有:

$$l.i.m_{n \rightarrow \infty} (aX_n + bY_n) = aX + bY$$

其中 a, b 为任意的复数。

(3) 如果 $l.i.m_{n \rightarrow \infty} X_n = X$, $l.i.m_{n \rightarrow \infty} Y_n = Y$ 则有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} E\{X_n \overline{Y_m}\} = E\{X \overline{Y}\}$$

证明: 由均方极限的定义, 考虑

$$\begin{aligned} & \left| E\{X_n \overline{Y_m}\} - E\{X \overline{Y}\} \right| = \left| E\{X_n \overline{Y_m} - X \overline{Y}\} \right| \\ &= \left| E\{X(\overline{Y_m} - \overline{Y}) + (X_n - X)\overline{Y} + (X_n - X)(\overline{Y_m} - \overline{Y})\} \right| \\ &\leq \left| E\{X(\overline{Y_m} - \overline{Y})\} \right| + \left| E\{(X_n - X)\overline{Y}\} \right| + \left| E\{(X_n - X)(\overline{Y_m} - \overline{Y})\} \right| \\ &\leq [E\{|X|^2\}E\{|Y_m - Y|^2\}]^{\frac{1}{2}} + [E\{|X_n - X|^2\}E\{|Y|^2\}]^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad + [E\{|X_n - X|^2\}E\{|Y_m - Y|^2\}]^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty, m \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

由此可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} E\{X_n \overline{Y_m}\} = E\{X \overline{Y}\}$$

(4) 均方极限是唯一的。即, 若 $l.i.m_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ 及 $l.i.m_{n \rightarrow \infty} X_n = Y$, 则有

$$X = Y$$

(5) (柯西准则) 随机序列 $\{X_n; n=1, 2, \dots\}$ 均方收敛 (于 X) 的充分必要条件为

$$\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} E\{|X_n - X_m|^2\} = 0$$

(6) (列维 Loeve 准则) 随机序列 $\{X_n; n=1, 2, \dots\}$ 均方收敛 (于 X) 的充分必要条件为

$$\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} E\{X_n \overline{X_m}\} = c$$

其中 c 为复常数

(7) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} l.i.m X_n = X$, $f(u)$ 是一确定性函数, 并且满足 **Lipschitz** 条件, 即

$$|f(u) - f(v)| \leq M |u - v|$$

其中 M 是正常数。又假设 $f(X_n)$, $f(X)$ 的二阶矩都存在, 则有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l.i.m f(X_n) = f(X)$$

(8) 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} l.i.m X_n = X$, 则对于任意有限的 t , 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l.i.m \exp\{jtX_n\} = \exp\{jtX\}$$

2. 二阶矩过程的均方连续

定义: 设二阶矩过程 $\{X(t); t \in T\}$, $t_0 \in T$, 若有:

$$\lim_{h \rightarrow 0} E\{|X(t_0 + h) - X(t_0)|^2\} = 0$$

即

$$X(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} l.i.m X(t_0 + h)$$

则称 $X(t)$ 在 $t = t_0$ 点均方意义下连续。若对于 $\forall t \in T$, $X(t)$ 均在均方意义下连续, 则称过程 $\{X(t); t \in T\}$ 在均方意义下连续, 或称过程具有均方连续性。

定理: 设有二阶矩过程 $\{X(t); t \in T\}$, $R(s, t)$ 为其自相关函数, 则 $\{X(t); t \in T\}$ 在 $t = t_0 \in T$ 上均方连续的充分必要条件是: 自相关函数 $R(s, t)$ 在点 $(t_0, t_0) \in T \times T$ 处连续。

证明: 充分性: 设 $R(s, t)$ 在 $(s = t_0, t = t_0), t_0 \in T$ 处连续, 则有

$$\begin{aligned} E\{|X(t_0 + h) - X(t_0)|^2\} &= R(t_0 + h, t_0 + h) - R(t_0 + h, t_0) - \\ &\quad - R(t_0, t_0 + h) + R(t_0, t_0) \end{aligned}$$

当 $h \rightarrow 0$ 时, 上式右边趋于 0, 所以

$$\lim_{h \rightarrow 0} l.i.m X(t_0 + h) = X(t_0)$$

必要性：若 $\{X(t); t \in T\}$ 在 $t = t_0 \in T$ 上均方连续，则由以下推导

$$\begin{aligned}
 |R(t_0 + h, t_0 + k) - R(t_0, t_0)| &= |E\{X(t_0 + h)\overline{X(t_0 + k)}\} - E\{X(t_0)\overline{X(t_0)}\}| \\
 &= |E\{[X(t_0 + h) - X(t_0)]\overline{X(t_0 + k)}\} + E\{X(t_0)[\overline{X(t_0 + k)} - \overline{X(t_0)}]\}| \\
 &\leq |E\{[X(t_0 + h) - X(t_0)]\overline{X(t_0 + k)}\}| + |E\{X(t_0)[\overline{X(t_0 + k)} - \overline{X(t_0)}]\}| \\
 &\leq [E\{|X(t_0 + h) - X(t_0)|^2\}E\{|X(t_0 + k)|^2\}]^{\frac{1}{2}} + \\
 &\quad + [E\{|X(t_0)|^2\}E\{|X(t_0 + k) - X(t_0)|^2\}]^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

可知，当 $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$ 时

$$|R(t_0 + h, t_0 + k) - R(t_0, t_0)| \rightarrow 0$$

即

$$\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} R(t_0 + h, t_0 + k) = R(t_0, t_0)$$

所以， $R(s, t)$ 在点 $(t_0, t_0) \in T \times T$ 处连续。

另外，若 $R(s, t)$ 在 $(t, t) \in T \times T$ 上二元连续，则 $X(t)$ 在 $t_0 \in T, s_0 \in T$ 上均方连续，即

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \text{l.i.m. } X(t) = X(t_0), \quad \lim_{s \rightarrow s_0} \text{l.i.m. } X(s) = X(s_0)$$

于是由均方极限的性质 (3)，我们有

$$\lim_{t \rightarrow t_0, s \rightarrow s_0} E\{X(s)\overline{X(t)}\} = E\{X(s_0)\overline{X(t_0)}\}$$

即有

$$\lim_{t \rightarrow t_0, s \rightarrow s_0} R(s, t) = R(s_0, t_0)$$

因此，如果 $R(s, t)$ 在对角线 $s = t \in T$ 上连续，则在整个 $T \times T$ 上连续。

定理：若二阶矩过程 $\{X(t); t \in T\}$ 在均方意义下连续，则对于 $\forall t \in T$ ，有：

$$\lim_{h \rightarrow 0} E\{X(t+h)\} = E\{X(t)\}$$

定理：设 $\{X(t); t \in (-\infty, +\infty)\}$ 是宽平稳过程，则以下各条件是等价的：

(a) $\{X(t)\}$ 均方连续；

(b) $\{X(t)\}$ 在点 $t=0$ 处均方连续;

(c) 自相关函数 $R_{XX}(\tau)$ 在 $-\infty < \tau < +\infty$ 上连续;

(d) 自相关函数 $R_{XX}(\tau)$ 在点 $\tau=0$ 处连续。

即：宽平稳过程 $\{X(t); t \in (-\infty, +\infty)\}$ 均方连续的充分必要条件为：自相关函数 $R_{XX}(\tau)$ 在点 $\tau=0$ 处连续。

3. 均方导数

(1) 定义

定义：设有随机过程 $\{X(t); t \in T\}$, $\{Y(t); t \in T\}$, 如果

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t_0 + h) - X(t_0)}{h} = Y(t_0)$$

其中 $t_0, t_0 + h \in T$, 则称随机过程 $\{X(t); t \in T\}$ 在 $t = t_0 \in T$ 处均方可导, 并称 $Y(t_0)$ 为过程 $\{X(t); t \in T\}$ 在 $t = t_0$ 处的均方导数, 记作 $X'(t_0) \triangleq Y(t_0)$ 。若对于 $\forall t \in T$, $X(t)$ 均在均方意义下可导, 即有:

$$\lim_{h \rightarrow 0} E \left\{ \left| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} - Y(t) \right|^2 \right\} = 0$$

则称 $Y(t) = X'(t) = \frac{dX(t)}{dt}$ 为随机过程 $X(t)$ 在均方意义下的导数。

利用柯西准则, 我们有:

定义：设有随机过程 $\{X(t); t \in T\}$, $\{Y(t); t \in T\}$, 如果对于 $\forall t \in T$, 有:

$$\lim_{h \rightarrow 0, k \rightarrow 0} E \left\{ \left| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} - \frac{X(t+k) - X(t)}{k} \right|^2 \right\} = 0$$

则称 $X(t)$ 在均方意义下导数存在 (可以求导)。记

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{h} = X'(t) = \frac{dX(t)}{dt} = \dot{X}(t)$$

称此为 $X(t)$ 在 t 处的均方导数或均方微商。

(2) 均方可导的判定准则

定理：设二阶矩过程 $X(t)$ ，它的自相关函数为 $R(s, t)$ ，则 $X(t)$ 在点 $t = t_0 \in T$ 处具有均方导数的充分必要条件为：

$$\frac{\partial^2 R(s, t)}{\partial t \partial s}$$

在点 (t_0, t_0) 附近存在且在点 (t_0, t_0) 处连续。若二阶矩过程 $X(t)$ 在 T 内均方可导，则其均方导数的相关函数为：

$$R_{X'}(s, t) = E\{X'(s)X'(t)\} = \frac{\partial^2 R(s, t)}{\partial t \partial s}$$

(3) 均方导数的性质

(a) 设 $X(t), Y(t)$ 为两个均方可导的随机过程， $a, b \in C$ 为复常数，则 $aX(t) + bY(t)$ 也均方可导，并且有：

$$\frac{d}{dt}[aX(t) + bY(t)] = a \frac{dX(t)}{dt} + b \frac{dY(t)}{dt}$$

(b) 设 $X(t)$ 为均方可导的随机过程， $f(t)$ 为一确定性函数，则 $f(t)X(t)$ 也是均方可导的随机过程，且有：

$$\frac{d}{dt}[f(t)X(t)] = \frac{df(t)}{dt}X(t) + f(t)\frac{dX(t)}{dt}$$

(c) 设 $X(t)$ 为均方可导的随机过程，则 $X'(t)$ 的均值函数为：

$$E\{X'(t)\} = \frac{dE\{X(t)\}}{dt}$$

(4) 平稳随机过程的均方导数

若 $\{X(t); t \in T\}$ 为平稳随机过程，则有

$$R_{XX}(t, s) = R_{XX}(t - s) = R_{XX}(\tau), \quad \tau = t - s$$

若 $R''_{XX}(\tau)$ 存在, $\tau \in T$, 而且在 $\tau = 0$ 处 $R''_{XX}(\tau)$ 连续, 则 $\{X(t); t \in T\}$ 均方可导, 且

$$E\{X'(t)\overline{X'(s)}\} = -R''_{XX}(\tau)$$

这是因为:

$$\frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial t \partial s} = -\frac{d^2}{d\tau^2} R_{XX}(\tau) = -R''_{XX}(\tau)$$

当 $t = s$ 时, $\tau = 0$, 此时

$$\left. \frac{\partial^2 R(t, s)}{\partial t \partial s} \right|_{t=s} = -\frac{d^2}{d\tau^2} R_{XX}(\tau) \Big|_{\tau=0} = -R''_{XX}(0)$$

因为平稳过程为实的随机过程时, 有 $R_{XX}(\tau) = R_{XX}(-\tau)$ 。若平稳随机过程 $X(t)$ 存在均方导数, 则要求 $R(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 处连续, $R'(\tau)$ 在 $\tau = 0$ 连续, 因此 $R'(0) = 0$ 。

对于平稳随机过程, 因为均值函数为常数, 因此:

$$E\{X'(t)\} = \frac{d}{dt} E\{X(t)\} = 0$$

(5) 高阶导数

若二阶矩过程 $X(t)$ 的自相关函数有 $2n$ 阶导数, 且在对角线 $t = s$ 上连续,

则 $X(t)$ 有均方意义下的 n 阶导数 $X^{(n)}(t) = \frac{d^n X(t)}{dt^n}$ 存在。且有:

$$R_{X^{(n)}}(t, s) = E\{X^{(n)}(t)\overline{X^{(n)}(s)}\}$$

$$= \frac{\partial^{2n}}{\partial t^n \partial s^n} R_X(t, s)$$

$$E\left\{\frac{d^n}{dt^n} X(t)\right\} = \frac{d^n}{dt^n} E\{X(t)\}$$

$$R_{X^{(n)}X^{(m)}}(t,s) = E\{X^{(n)}(t)\overline{X^{(m)}(s)}\}$$

$$= \frac{\partial^{(n+m)}}{\partial t^n \partial s^m} R_X(t,s)$$

如果 $X(t)$ 为平稳随机过程, 则有:

$$R_{X^{(n)}X^{(m)}}(\tau) = E\{X^{(n)}(t+\tau)\overline{X^{(m)}(t)}\} = (-1)^m \frac{d^{(n+m)}}{d\tau^{(n+m)}} R_X(\tau)$$

如果 $X(t), Y(t)$ 为两个二阶矩过程, 则它们的互相关函数定义为:

$$R_{XY}(t,s) = E\{X(t)\overline{Y(s)}\}$$

我们有:

$$R_{XY}(t,s) = E\{X'(t)\overline{Y(s)}\} = \frac{\partial}{\partial t} R_{XY}(t,s)$$

$$R_{X^{(n)}Y^{(m)}}(t,s) = E\{X^{(n)}(t)\overline{Y^{(m)}(s)}\} = \frac{\partial^{(n+m)}}{\partial t^n \partial s^m} R_{XY}(t,s)$$

(6) 泰勒级数展开

若 $\{X(t); t \in (-\infty, +\infty)\}$ 为平稳随机过程, 其自相关函数为 $R_X(\tau)$, 如果 $R_X(\tau)$ 是解析的, 即 $R_X(\tau)$ 存在各阶导数, 且

$$R_X(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} R_X^{(n)}(0) \frac{\tau^n}{n!}$$

则 $X(t)$ 可以进行泰勒展开, 即有:

$$X(t+\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} X^{(n)}(t) \frac{\tau^n}{n!}$$

其中 $X^{(n)}(t)$ 为随机过程 $X(t)$ 的 n 阶均方导数。

4. 随机积分

(1) 随机积分的定义

定义：设 $\{X(t); t \in [a, b]\}$ 为二阶矩过程， $h(t, \tau)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的以 τ 为参数的确定性函数，对 $[a, b]$ 进行任意 n 划分：

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$$

记：

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i = 1, 2, \cdots, n, \quad \hat{t}_i \in [t_{i-1}, t_i], \quad \lambda = \max_i \{\Delta t_i\}$$

作和式：

$$S_n(\tau) = \sum_{i=1}^n h(\hat{t}_i, \tau) X(\hat{t}_i) \Delta t_i$$

如果存在随机变量 $Y(\tau)$ ，对于任意的划分，任意的 $\hat{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ，都有：

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} E\left\{|Y(\tau) - S_n(\tau)|^2\right\} = 0$$

或

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} E\left\{\left|Y(\tau) - \sum_{i=1}^n h(\hat{t}_i, \tau) X(\hat{t}_i) \Delta t_i\right|^2\right\} = 0$$

则称 $S_n(\tau)$ 均方收敛于 $Y(\tau)$ ，并称 $h(t, \tau)X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可积，记 $S_n(\tau)$ 的均方极限为 $\int_a^b h(t, \tau)X(t)dt$ ，即有：

$$Y(\tau) = \int_a^b h(t, \tau)X(t)dt = \lim_{\lambda \rightarrow 0, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n h(\hat{t}_i, \tau)X(\hat{t}_i)\Delta t_i$$

并称

$$Y(\tau) = \int_a^b h(t, \tau)X(t)dt$$

为 $h(t, \tau)X(t)$ 在 $[a, b]$ 上的均方积分。

(2) 均方可积的准则

定理： $h(t, \tau)X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方可积的充分必要条件为：

$$\int_a^b \int_a^b h(t, \tau) \overline{h(u, \tau)} R_{XX}(t, u) dt du$$

存在。

由均方可积的定义可知， $Y(\tau)$ 是以 τ 为参数的随机过程，因此可以求其均值函数和相关函数，我们有：

$$\begin{aligned}\mu_Y(\tau) &= E\{Y(\tau)\} = E\left\{\int_a^b h(t, \tau) X(t) dt\right\} = \int_a^b h(t, \tau) E\{X(t)\} dt \\ &= \int_a^b h(t, \tau) \mu_X(t) dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R_{YY}(\tau_1, \tau_2) &= E\{Y(\tau_1) \overline{Y(\tau_2)}\} \\ &= E\left\{\int_a^b \int_a^b h(t, \tau_1) \overline{h(u, \tau_2)} X(t) \overline{X(u)} dt du\right\} \\ &= \int_a^b \int_a^b h(t, \tau_1) \overline{h(u, \tau_2)} R_{XX}(t, u) dt du\end{aligned}$$

(3) 均方积分的性质

(a) 若 $\{X(t); t \in T \subset [a, b]\}$ 为均方连续随机过程，则对于 $\forall t \in T$ ，有：

$$\begin{aligned}E\left\{\int_a^t X(u) du \overline{\int_a^t X(v) dv}\right\} &= E\left\{\left|\int_a^t X(u) du\right|^2\right\} \\ &\leq (t-a) \int_a^t E\{X(u) \overline{X(u)}\} du \\ &\leq (b-a) \int_a^t E\{X(u) \overline{X(u)}\} du\end{aligned}$$

证明：第二个不等式显然。下面证明第一个不等式。由于

$$E\left\{\left|\int_a^t X(u) du\right|^2\right\} = E\left\{\int_a^t \int_a^t X(u) \overline{X(v)} dudv\right\} = \int_a^t \int_a^t E\{X(u) \overline{X(v)}\} dudv$$

又

$$\begin{aligned}E\left\{\left|\int_a^t X(u) du\right|^2\right\} &\leq E\left\{\int_a^t \int_a^t |X(u) \overline{X(v)}| dudv\right\} = \int_a^t \int_a^t E\{|X(u) \overline{X(v)}|\} dudv \\ &\leq \int_a^t \int_a^t [E\{|X(u)|^2\} E\{|X(v)|^2\}]^{\frac{1}{2}} dudv \\ &= \left[\int_a^t [E\{|X(u)|^2\}]^{\frac{1}{2}} du\right]^2 \leq \int_a^t 1^2 dv \int_a^t E\{|X(u)|^2\} du \\ &= (t-a) \int_a^t E\{|X(u)|^2\} du\end{aligned}$$

(b) 设随机过程 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方连续, 则有:

$$\left[E \left\{ \left| \int_a^b X(u) du \right|^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \leq \int_a^b \{ E |X(u)|^2 \}^{\frac{1}{2}} du$$

证明: 由于 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方连续, 则 $R_X(u, v) = E\{X(u)\overline{X(v)}\}$ 为连续函数, 于是 $R_X(u, v)$ 在 $[a, b] \times [a, b]$ 可积, 故 $\int_a^b X(u) du$ 存在。

由于

$$\begin{aligned} \left[E \left\{ \left| \int_a^b X(u) du \right|^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}} &= \left[E \left\{ \left| \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n X(\hat{u}_i) \Delta u_i \right|^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[E \left\{ \left| \sum_{i=1}^n X(\hat{u}_i) \Delta u_i \right|^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

利用

$$\begin{aligned} E \left\{ \left| \sum_{i=1}^n X(\hat{u}_i) \Delta u_i \right|^2 \right\} &= E \left\{ \sum_{i=1}^n X(\hat{u}_i) \Delta u_i \overline{\sum_{i=1}^n X(\hat{u}_i) \Delta u_i} \right\} \\ &= E \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n X(\hat{u}_i) \overline{X(\hat{u}_j)} \Delta u_i \Delta u_j \right\} \\ &\leq E \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |X(\hat{u}_i) \overline{X(\hat{u}_j)}| \Delta u_i \Delta u_j \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E |X(\hat{u}_i) \overline{X(\hat{u}_j)}| \Delta u_i \Delta u_j \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [E |X(\hat{u}_i)|^2 E |X(\hat{u}_j)|^2]^{\frac{1}{2}} \Delta u_i \Delta u_j \\ &= \left[\sum_{i=1}^n [E |X(\hat{u}_i)|^2]^{\frac{1}{2}} \Delta u_i \right]^2 \end{aligned}$$

由上式, 可知

$$\begin{aligned} \left[E \left\{ \left| \int_a^b X(u) du \right|^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[E \left\{ \left| \sum_{i=1}^n X(\hat{u}_i) \Delta u_i \right|^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sum_{i=1}^n \left(E |X(\hat{u}_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Delta u_i \right] = \int_a^b \{ E |X(u)|^2 \}^{\frac{1}{2}} du \end{aligned}$$

不等式得证。

(c) 设 $X(t), Y(t)$ 在 $[a, c]$ 上均方可积, α, β 为复常数, 则有:

$$\int_a^c [\alpha X(t) + \beta Y(t)] dt = \alpha \int_a^c X(t) dt + \beta \int_a^c Y(t) dt$$

若 $a \leq b \leq c$, 则有:

$$\int_a^c X(t) dt = \int_a^b X(t) dt + \int_b^c X(t) dt$$

(d) 若随机过程 $X(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方连续, 记

$$Y(t) \triangleq \int_a^t X(u) du \quad (a \leq t \leq b)$$

则 $Y(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方连续, 均方可导, 且有:

$$Y'(t) = X(t)$$

证明: $Y(t)$ 在 $[a, b]$ 上均方连续是显然的, 下证均方可导性。由于

$$\begin{aligned} E \left\{ \left| \frac{Y(t+h) - Y(t)}{h} - X(t) \right|^2 \right\} &= E \left\{ \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} X(u) du - X(t) \right|^2 \right\} \\ &= E \left\{ \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} [X(u) - X(t)] du \right|^2 \right\} \\ &\leq \left[\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \left(E |X(u) - X(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} du \right]^2 \\ &\leq \left[\max_{|u-t| \leq h} \left(E |X(u) - X(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \end{aligned}$$

当 $h \rightarrow 0$ 时, 上式趋向于 0, 所以 $Y(t)$ 均方可导, 且有

$$Y'(t) = X(t)$$

(e) 若随机过程 $X(t)$ 均方可导, 且 $X'(t)$ 均方连续, 则有:

$$X(b) - X(a) = \int_a^b X'(t) dt$$

例 1: 设有平稳随机过程 $X(t)$, 它的相关函数为 $R_X(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha^2 \tau^2}$, 其中 α, σ

为常数, 求 $Y(t) = a \frac{dX(t)}{dt}$ (a 为常数) 的自协方差函数和方差函数。

解：略。

例 2：设 N_t , $t \geq 0$ 是零初值、强度 $\lambda > 0$ 的泊松过程。写出过程的转移函数，并问在均方意义下， $Y_t = \int_0^t N_s ds$, $t \geq 0$ 是否存在，为什么？

解：泊松过程的转移函数为：

$$p(s, t, i, j) = P\{N_t = j | N_s = i\} = \frac{[\lambda(t-s)]^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda(t-s)}, \quad t > s, j \geq i$$

其相关函数为：

$$R_N(s, t) = \lambda \min\{s, t\} + \lambda^2 st$$

由于在 $\forall t$, $R_N(t, t)$ 连续，故均方积分存在。

例 3：设 N_t , $t \geq 0$ 是零初值、强度 $\lambda = 1$ 的泊松过程。

(1) 求它的概率转移函数 $p(s, t, i, j) = P\{N_t = j | N_s = i\}$ ；

(2) 令 $X_t = N_t - t$, $t \geq 0$ ，说明 $Y = \int_0^1 X_t dt$ 存在，并求它的二阶矩。

解：(1) 由上例，有：

$$p(s, t, i, j) = P\{N_t = j | N_s = i\} = \frac{[\lambda(t-s)]^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\lambda(t-s)} = \frac{(t-s)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-(t-s)}$$

(2) 先求相关函数，由 $\lambda = 1$ ，得：

$$R_X(t, s) = E\{(N_t - t)(N_s - s)\} = \lambda \min\{t, s\} + \lambda^2 st + st(1 - 2\lambda) = \min\{t, s\}$$

对任意的 t ，在 (t, t) 处 $R_X(t, t)$ 连续，故 X_t 均方连续，因此均方可积，

$Y = \int_0^1 X_t dt$ 存在。

$$\begin{aligned} E\{Y^2\} &= E\left\{\left[\int_0^1 X_t dt\right]^2\right\} = E\left\{\int_0^1 X_t dt \int_0^1 X_s ds\right\} = E\left\{\int_0^1 \int_0^1 X_t X_s dt ds\right\} \\ &= \int_0^1 \int_0^1 R_X(t, s) dt ds = \int_0^1 \int_0^1 \min\{t, s\} dt ds = \int_0^1 dt \int_t^1 t ds + \int_0^1 dt \int_0^t s ds = \frac{1}{3} \end{aligned}$$