随机过程课程作业

202328015926048-丁力

2023 年 9 月 14 日

目录

1 随机过程及其分类

题 1.1: 1

设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 随机变量 $Y \sim N(0,1)$, 且 X 与 Y 独立, 试求随机变量 $Z = \sqrt{2X}|Y|$ 的分布密度函数。

解:

从上我们可以知道，X 服从参数为 $\lambda = 1$ 的指数分布，Y 服从标准正态分布。

那么，我们可以得到两者对应的概率密度函数:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, x > 0 \\ 0, 其他 \end{cases} \tag{1}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{y^2}}, y \in R \tag{2}$$

由于 X 和 Y 相互独立，所以有:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \times f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x} e^{-\frac{1}{y^2}} \tag{3}$$

由于 $Z = \sqrt{2X}|Y|$, 结合上面内容，我们可以知道:

$$f_Z(z) = 0, z < 0 \tag{4}$$

题 1.2: 2

设随机变量 X_1, X_2 独立同分布, 服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布, 试证明随机变量

$$\frac{X_1}{X_1 + X_2} \sim U[0,1] \tag{5}$$

证明. 从上我们可以知道:

$$f_{X_1}(x_1) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x_1}, x_1 > 0 \\ 0, 其他 \end{cases} \tag{6}$$

$$f_{X_2}(x_2) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x_2}, x_2 > 0 \\ 0, 其他 \end{cases} \tag{7}$$

□

题 1.3: 3

设随机向量 (X, Y) 的两个分量相互独立, 且均服从标准正态分布 $N(0,1)$。

(a) 分别写出随机变量 $X+Y$ 和 $X-Y$ 的分布密度。

证明. □

(b) 试问: $X+Y$ 与 $X-Y$ 是否独立？说明理由。

证明. □

题 1.4: 4

设二维随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为:

$$f(x,y) = \begin{cases} 24(1-x)y, & 0<y<x<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \tag{8}$$

(a) 试求边缘密度函数 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$, 以及条件密度函数 $f_{X|Y}(x \mid y)$ 和 $f_{Y|X}(y \mid x)$.

证明. □

(b) 当 $0<y<1$ 时, 确定 $E\{X \mid Y=y\}$, 以及 $E\{X \mid Y\}$ 的分布密度函数。

证明. □