第一章　随机过程及其分类

在概率论中，我们研究了随机变量，n 维随机向量。在极限定理中我们研究了无穷多个随机变量，但只局限在它们之间相互独立的情形。将上述情形加以推广，即研究一族无穷多个、相互有关的随机变量，这就是随机过程。

1．随机过程的概念

定义：设 (Ω, Σ, P) 是一概率空间，对每一个参数 $t \in T$，$X(t,\omega)$ 是一定义在概率空间 (Ω, Σ, P) 上的随机变量，则称随机变量族 $X_T = \{X(t,\omega); t \in T\}$ 为该概率空间上的一随机过程。其中 $T \subset R$ 是一实数集，称为指标集或参数集。

随机过程的两种描述方法：

用映射表示 X_T，

$$X(t,\omega):\ T \times \Omega \to R$$

即 $X(\cdot,\cdot)$ 是一定义在 $T \times \Omega$ 上的二元单值函数，固定 $t \in T$，$X(t,\cdot)$ 是一定义在样本空间 Ω 上的函数，即为一随机变量；对于固定的 $\omega \in \Omega$，$X(\cdot,\omega)$ 是一个关于参数 $t \in T$ 的函数，通常称为样本函数，或称随机过程的一次实现，所有样本函数的集合确定一随机过程。记号 $X(t,\omega)$ 有时记为 $X_t(\omega)$ 或简记为 $X(t)$。

参数 T 一般表示时间或空间。常用的参数一般有：（1）$T = N_0 = \{0,1,2,\cdots\}$；（2）$T = \{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$；（3）$T = [a,b]$，其中 a 可以取 0 或 $-\infty$，b 可以取 $+\infty$。当参数取可列集时，一般称随机过程为随机序列。

随机过程 $\{X(t); t \in T\}$ 可能取值的全体所构成的集合称为此随机过程的状态空间，记作 S。S 中的元素称为状态。状态空间可以由复数、实数或更一般的抽象空间构成。实际应用中，随机过程的状态一般都具有特定的物理意义。

例 1：抛掷一枚硬币，样本空间为 $\Omega = \{H, T\}$，借此定义：

$$X(t)=\begin{cases}\cos\pi t, & \text{当出现H时}\\ 2t, & \text{当出现T时}\end{cases}\qquad t\in(-\infty,+\infty)$$

其中$P\{H\}=P\{T\}=1/2$，则$\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$是一随机过程。试考察其样本函数和状态空间。

例 2：设

$$X(t)=A\cos(\omega t+\theta),\quad t\in(-\infty,+\infty)$$

其中A和ω是正常数，$\theta\sim U(0,2\pi)$。试考察其样本函数和状态空间。

例 3：设正弦随机过程$\{X(t);-\infty<t<+\infty\}$，其中：$X(t)=A\cos\omega t$，$\omega$是常数，$A\sim U[0,1]$。试求：（1）画出$X(t)$的样本函数；（2）确定过程的状态空间；（3）求$t=0,\pi/4\omega,3\pi/4\omega,\pi/\omega,\pi/2\omega$ 时$X(t_k)$的密度函数。

例 4：质点在直线上的随机游动，令X_n为质点在n时刻时所处的位置，试考察其样本函数和状态空间。

例 5：考察某“服务站”在$[0,t]$时间内到达的“顾客”数，记为$N(t)$，则$\{N(t),t\geq 0\}$是一随机过程，试考察其样本函数和状态空间。若记S_n为第n个“顾客”到达的时刻，则$\{S_n,n=1,2,\cdots\}$为一随机序列，我们自然要关心$\{S_n,n=1,2,\cdots\}$的情况以及它与随机过程$\{N(t),t\geq 0\}$的关系，这时要将两个随机过程作为一个整体来研究其概率特性（统计特性）。

例 6：布朗运动。

2．随机过程的分类

随机过程的分类一般有两种方法：（1）以参数集和状态空间的特征来分类；（2）以统计特征或概率特征来分类。我们分述如下：

（一）　以参数集和状态空间的特性分类：

以参数集 T 的性质，随机过程可分为两大类：（1）T 可列；（2）T 不可列。

以状态空间 S 的性质，即 $X(t)$ 所取的值的特征，随机过程也可以分为两大类：（1）离散状态，即 $X(t)$ 所取的值是离散的；（2）连续状态，即 $X(t)$ 所取的值是连续的。

由此可将随机过程分为以下四类：

（a）　离散参数离散型随机过程；

（b）　连续参数离散型随机过程；

（c）　连续参数连续型随机过程；

（d）　离散参数连续型随机过程。

（二）　以随机过程的统计特征或概率特征分类：

以随机过程的统计特征或概率特征来进行分类，一般有以下一些：

（a）　独立增量过程；

（b）　Markov 过程；

（c）　二阶矩过程；

（d）　平稳过程；

（e）　鞅；

（f）　更新过程；

（g）　Poisson 过程；

（h）　维纳过程。

注意：以上两种对随机过程的分类方法并不是独立的，比如，我们以后要讨论的 Markov 过程，就有参数离散状态空间离散的 Markov 过程，即 Markov 链，也要讨论参数连续状态离散的 Markov 过程，即纯不连续 Markov 过程。在下面几章中，我们将研究几种重要的、应用非常广泛的随机过程。

3．随机过程的数字特征

（一）单个随机过程的情形

设$\{X(t);t\in T\}$是一随机过程，为了刻画它的统计特征，通常要用到随机过程的数字特征，即随机过程的均值函数、方差函数、协方差函数和相关函数。下面我们给出它们的定义。

（a） 均值函数：随机过程$\{X(t);t\in T\}$的均值函数定义为：（假设存在）

$$\mu_X(t)\triangleq m(t)=E\{X(t)\}$$

（b） 方差函数：随机过程$\{X(t);t\in T\}$的方差函数定义为：（假设存在）

$$\sigma_X^2(t)\triangleq D_X(t)=E\{[X(t)-\mu_X(t)]^2\}$$

（c） （自）协方差函数：随机过程$\{X(t);t\in T\}$的（自）协方差函数定义为：

$$C_X(s,t)\triangleq E\{[X(s)-\mu_X(s)][X(t)-\mu_X(t)]\}$$

（d） （自）相关函数：随机过程$\{X(t);t\in T\}$的（自）相关函数定义为：

$$R_X(s,t)\triangleq E\{X(s)X(t)\}$$

（e） 特征函数：记：

$$\phi_X(u_1,u_2,\cdots,u_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)\triangleq E\{\exp\{j[u_1X(t_1)+\cdots+u_nX(t_n)]\}\}$$

称

$$\left\{\phi_X(u_1,u_2,\cdots,u_n;t_1,t_2,\cdots,t_n),t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\geq 1\right\}$$

为随机过程$\{X(t);t\in T\}$的有限维特征函数族。

数字特征之间的关系：

$$\begin{aligned}C_X(s,t)&\triangleq E\{[X(s)-\mu_X(s)][X(t)-\mu_X(t)]\}\\&=E\{X(s)X(t)\}-\mu_X(s)\cdot\mu_X(t)\\&=R_X(s,t)-\mu_X(s)\cdot\mu_X(t)\end{aligned}$$

$$\sigma_X^2(t)=D_X(t)=C_X(t,t)=R_X(t,t)-[\mu_X(t)]^2$$

例 7：考察上面的例 **1**，**（1）**写出$X(t)$的一维分布列$X(1/2),\ X(1)$；**（2）**写出$X(t)$的二维分布列$(X(1/2),\ X(1))$；**（3）**求该过程的均值函数和相关函数。

例 8：求例 2 中随机过程的均值函数和相关函数。

（二）　两个随机过程的情形

设$\{X(t);t\in T\}$、$\{Y(t);t\in T\}$是两个随机过程，它们具有相同的参数集，对于它们的数字特征，除了有它们自己的数字特征外，我们还有：

（**a**）　互协方差函数：随机过程$\{X(t);t\in T\}$和$\{Y(t);t\in T\}$的互协方差函数定义为：

$$C_{XY}(s,t)\triangleq E\{[X(s)-\mu_X(s)][Y(t)-\mu_Y(t)]\}$$

（**b**）　互相关函数：随机过程$\{X(t);t\in T\}$和$\{Y(t);t\in T\}$的互相关函数定义为：

$$R_{XY}(s,t)\triangleq E\{X(s)Y(t)\}$$

互协方差函数和互相关函数有以下的关系：

$$C_{XY}(s,t)=R_{XY}(s,t)-\mu_X(s)\cdot\mu_Y(t)$$

如果两个随机过程$\{X(t);t\in T\}$和$\{Y(t);t\in T\}$，对于任意的两个参数$s,t\in T$，有

$$C_{XY}(s,t)=0$$

或

$$R_{XY}(s,t)=\mu_X(s)\cdot\mu_Y(t)=E\{X(s)\}\cdot E\{Y(t)\}$$

则称随机过程$\{X(t);t\in T\}$和$\{Y(t);t\in T\}$是统计不相关的或不相关的。

（三）　有限维分布族

设$\{X(t);t\in T\}$是一随机过程，对于$\forall n\in N$，$\forall t_i\in T\ (1\le i\le n)$，记

$$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)$$
$$=P\{X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\cdots,X(t_n)\le x_n\}$$

其全体

$$\left\{F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n),t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\ge 1\right\}$$

称为随机过程$\{X(t);t\in T\}$的有限维分布族。它具有以下的性质：

（1）　对称性：对$(1,2,\cdots,n)$的任意排列$(j_1,j_2,\cdots,j_n)$，则有：

$$F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=F_X(x_{j_1},x_{j_2},\cdots,x_{j_n};t_{j_1},t_{j_2},\cdots,t_{j_n})$$

（2）　相容性：对于$m<n$，有：

$$\begin{aligned}&F_X(x_1,x_2,\cdots,x_m,+\infty,\cdots,+\infty;t_1,t_2,\cdots,t_m,t_{m+1},\cdots,t_n)\\&=F_X(x_1,x_2,\cdots,x_m;t_1,t_2,\cdots,t_m)\end{aligned}$$

注 **1**：随机过程的统计特性完全由它的有限维分布族决定。

注 **2**：有限维分布族与有限维特征函数族相互唯一确定。

问题：一个随机过程$\{X(t);t\in T\}$的有限维分布族，是否描述了该过程的全部概率特性？解决此问题有以下著名的定理，此定理是随机过程理论的基础。

定理：（**Kolmogorov** 存在性定理）

设分布函数族$\left\{F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n),t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\ge 1\right\}$满足以上提到的对称性和相容性，则必存在唯一的随机过程$\{X(t);t\in T\}$，使$\left\{F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n),t_1,t_2,\cdots,t_n\in T,n\ge 1\right\}$恰好是$\{X(t);t\in T\}$的有限维分布族，即：

$$\begin{aligned}&F_X(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)\\&=P\{X(t_1)\le x_1,X(t_2)\le x_2,\cdots,X(t_n)\le x_n\}\end{aligned}$$

注：定理说明了随机过程$\{X(t);t\in T\}$的有限维分布族包含了$\{X(t);t\in T\}$的所有概率信息。因此，研究随机过程的统计特征可以通过研究其有限维分布函数族的特性来达到。

（四）两个随机过程的独立性

设$\{X(t);t\in T\}$、$\{Y(t);t\in T\}$是两个随机过程，它们具有相同的参数集，任取$n,m\in N$，以及$t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$，$t_1',t_2',\cdots,t_m'\in T$，则称$n+m$维随机向量

$(X(t_1), X(t_2), \cdots, X(t_n), Y(t_1'), Y(t_2'), \cdots, Y(t_m'))$ 的联合分布函数：

$$\begin{aligned} & F_{XY}(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n; y_1, y_2, \cdots, y_n; t_1', t_2', \cdots, t_m') \\ & = P\{X(t_1) \le x_1, \cdots, X(t_n) \le x_n, Y(t_1') \le y_1, \cdots, Y(t_m') \le y_m\} \end{aligned}$$

为随机过程$\{X(t); t \in T\}$和$\{Y(t); t \in T\}$的$n+m$维联合分布函数。

如果对于任取的$n, m \in N$，以及任意的$t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$，$t_1', t_2', \cdots, t_m' \in T$，随机过程$\{X(t); t \in T\}$和$\{Y(t); t \in T\}$的联合分布函数满足：

$$\begin{aligned} & F_{XY}(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n; y_1, y_2, \cdots, y_n; t_1', t_2', \cdots, t_m') \\ & = F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) \cdot F_Y(y_1, y_2, \cdots, y_n; t_1', t_2', \cdots, t_m') \end{aligned}$$

则称随机过程$\{X(t); t \in T\}$和$\{Y(t); t \in T\}$是独立的。

注：随机过程$\{X(t); t \in T\}$和$\{Y(t); t \in T\}$独立可以得到随机过程$\{X(t); t \in T\}$和$\{Y(t); t \in T\}$统计不相关，反之不对。但对于正态过程来说是等价的，这一点我们以后将看到。

4．δ－函数及离散型随机变量分布列的δ－函数表示

（1）δ－函数（Dirac 函数）的定义及性质

定义：对于任意的无穷次可微的函数$f(t)$，如果满足：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(t) f(t) dt$$

其中：

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & 0 \le t \le \varepsilon \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases}$$

则称$\delta_\varepsilon(t)$的弱极限为δ－函数，记为$\delta(t)$。

显然，对于任意的$\varepsilon > 0$，有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta_{\varepsilon}(t)dt=\int_{0}^{\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon}dt=1$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$$

注 1：$\delta(t)$ 在 $t=0$ 点的取值为 ∞，在 $t\neq 0$ 点的取值为 0，并且满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$。

注 2：工程（信号处理等）上 δ －函数也称为单位脉冲函数或单位冲激函数。

δ －函数的筛选性质：

若 $f(t)$ 为无穷次可微的函数，则有：

$$\int_{I}\delta(t)f(t)dt=f(0)$$

其中 I 是包含点 $t=0$ 的任意区间。特殊地，有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)dt=f(0)$$

更一般地，我们有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)f(t)dt=f(t_0)$$

（2）离散型随机变量分布列的 δ －函数表示

设离散型随机变量 X 的分布列为：$P\{X=x_i\}=p_i \quad i=1,2,\cdots$，则由 δ －函数的筛选性质可以定义离散型随机变量 X 的分布密度（离散型分布密度）为：

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}p_i\delta(x-x_i)$$

因为，由 δ －函数的筛选性质，离散型随机变量 X 的分布函数可以表示为：

$$F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{x_i\le x}p_i=\int_{-\infty}^{x}\sum_{i=1}^{\infty}p_i\delta(u-x_i)du$$

注：工程上，常用离散型随机变量分布列的 δ －函数表示法。它将离散型随机变量的分布列表示成分布密度的形式，因此与连续型随机变量的概率分布密度函数一样，可以进行统一处理。在下面的例子中我们将看到它的应用。

5．条件数学期望

条件数学期望是随机数学中最基本最重要的概念之一，它在随机过程课程中具有广泛的应用，需要同学们很好地掌握。

（1）　离散型情形

定义：设二维离散型随机变量(X,Y)所有可能取的值是(x_i,y_j)，其联合分布率为$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\ge 0$，记：

$$E\{X\mid Y\}\hat{=}\sum_j I_{(Y=y_j)}(\omega)E\{X\mid Y=y_j\}$$

称$E\{X\mid Y\}$为X关于Y的条件数学期望。

注 **1**：定义中的$I_{(Y=y_j)}(\omega)$是示性函数，即：

$$I_{(Y=y_j)}(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in\{\omega:Y(\omega)=y_j\}\\ 0, & \omega\notin\{\omega:Y(\omega)=y_j\}\end{cases}$$

注 **2**：条件数学期望$E\{X\mid Y\}$是随机变量Y的函数，因此有关于它的分布，其分布为：

当$E\{X\mid Y=y_j\}\ne E\{X\mid Y=y_k\}\ (j\ne k)$时，

$$P\{E\{X\mid Y\}=E\{X\mid Y=y_j\}\}=P\{Y=y_j\}$$

否则，令：$D_j=\{k:E\{X\mid Y=y_k\}=E\{X\mid Y=y_j\}\}$，则

$$P\{E\{X\mid Y\}=E\{X\mid Y=y_j\}\}=\sum_{k\in D_j}P\{Y=y_k\}$$

注 **3**：由于条件数学期望$E\{X\mid Y\}$是随机变量Y的函数，故可以求其数学期望，其数学期望为：

$$E\{E\{X\mid Y\}\}=\sum_j E\{X\mid Y=y_j\}P\{Y=y_j\}=E\{X\}\text{。}$$

例 **9**：离散型随机变量(X,Y)的联合分布率如下表所示，试求$E\{X\mid Y\}$的分布率，$E\{X\},E\{E\{X\mid Y\}\}$。

Y \ X	1	2	3	$p_{\bullet j}$
1	**2/27**	**4/27**	**1/27**	**7/27**
2	**5/27**	**7/27**	**3/27**	**15/27**
3	**1/27**	**2/27**	**2/27**	**5/27**
$p_{i\bullet}$	**8/27**	**13/27**	**6/27**	**1**

（2）　连续型情形

定义：设二维随机变量具有联合分布密度函数 $f(x,y)$，Y 的边缘分布为 $f_Y(y)$，若随机变量 $E\{X|Y\}$满足：

（a）$E\{X|Y\}$是随机变量Y的函数，当$Y=y$时，它的取值为$E\{X|Y=y\}$；

（b）对于任意的事件D，有：

$$E\{E\{X|Y\}|Y\in D\}=E\{X|Y\in D\}$$

则称随机变量$E\{X|Y\}$为X关于Y的条件数学期望。

注 1：由于条件数学期望$E\{X|Y\}$是随机变量Y的函数，故可以求其数学期望，其数学期望为：

$$E\{E\{X|Y\}\}=\int_{-\infty}^{+\infty}E(X|Y=y)f_Y(y)dy=E\{X\}$$

例 10：设：$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\rho,\sigma_1^2,\sigma_2^2)$，则有：

$$E\{Y|X=x\}=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)$$

$$E\{Y|X\}=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X-\mu_1)$$

解：先求Y关于$X=x$的条件分布密度，

$$f_{Y|X=x}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2(1-\rho^2)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_2^2(1-\rho^2)}\left[y-\mu_2-\rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(x-\mu_1)\right]^2\right\}$$

即

$$f_{Y|X=x}(y|x) \sim N[\mu_2 + \rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(x-\mu_1), \sigma_2^2(1-\rho^2)]$$

$$E\{Y|X=x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X=x}(y|x)dy = \mu_2 + \rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(x-\mu_1)$$

$$E\{Y|X\} = \mu_2 + \rho\sigma_2\sigma_1^{-1}(X-\mu_1)$$

（3）　条件数学期望的性质

在各给定的随机变量的数学期望存在的条件下，我们有：

（a）$E\{X\} = E\{E\{X|Y\}\}$；

（b）$E\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i \,\middle|\, Y\right\} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i E\{X_i|Y\}$ **a.s.**；其中α_i $(1 \le i \le n)$为常数；

（c）$E\{g(X)h(Y)|Y\} = h(Y)E\{g(X)|Y\}$ **a.s.**；

（d）$E\{g(X)h(Y)\} = E\{h(Y)E\{g(X)|Y\}\}$；

（e）　如果X, Y独立，则有 $E\{X|Y\} = E\{X\}$；

证明：设$(X,Y) \sim f(x,y)$，则有：

$$\begin{aligned} E\{g(X)h(Y)\} &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h(y)f(x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}dx\right]h(y)f_Y(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E\{g(X)|Y=y\}h(y)f_Y(y)dy = E\{h(Y)E\{g(X)|Y\}\} \end{aligned}$$

注 1：常用的计算式子：

$$E\{g(X)h(Y)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} E\{g(X)|Y=y\}h(y)f_Y(y)dy$$

$$P\{A\} = \int_{-\infty}^{+\infty} P\{A|Y=y\}f_Y(y)dy$$

$$P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} P\{X \le x|Y=y\}f_Y(y)dy$$

6．随机过程举例

例 a：如果正弦波随机过程为

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta)$$

其中振幅 A 取常数，角频率 ω 取常数，而相位 θ 是一个随机变量，它均匀分布于 $(-\pi, \pi)$ 之间，即：

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & -\pi \le x \le \pi \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求在 t 时刻 $X(t)$ 的概率密度。

解：固定时刻 t，则随机变量 $X(t) = A\cos(\omega t + \theta)$ 是随机变量 θ 的函数。由分布函数的定义：

$$F_{X(t)}(y) = P\{X(t) \le y\} = P\{A\cos(\omega t + \theta) \le y\}$$

当 $y < -A$ 时，$F_{X(t)}(y) = 0$；当 $y \ge +A$ 时，$F_{X(t)}(y) = 1$

当 $-A \le y < +A$ 时，我们有：

$$\begin{aligned} F_{X(t)}(y) &= P\{X(y) \le y\} = P\{A\cos(\omega t + \theta) \le y\} = \\ &= P(\{-\pi < \theta \le -\omega t - \arccos\frac{y}{A}\} \cup \{\arccos\frac{y}{A} - \omega t < \theta \le \pi\}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\omega t - \arccos\frac{y}{A}} dx + \int_{\arccos\frac{y}{A} - \omega t}^{\pi} dx\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\omega t - \arccos\frac{y}{A} + \pi + \pi - \arccos\frac{y}{A} + \omega t\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\pi - \arccos\frac{y}{A}\right] \end{aligned}$$

因此，当 $-A \le y < +A$ 时，$X(t)$ 的概率密度为：

$$f_{X(t)}(y) = F'_{X(t)}(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - y^2}}$$

最终得到 $X(t)$ 的概率密度为：

$$f_{X(t)}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2 - y^2}}, & -A \le y \le +A \\ 0, & \text{其　它} \end{cases}$$

例 b：设一由正弦振荡器输出的随机过程：

$$X(t)=A\cos(\Omega t+\theta),\quad t\in(-\infty,+\infty)$$

其中 A、Ω 和 θ 是相互独立的随机变量，并且已知它们的分布密度函数分别为：$\Omega\sim U(250,350)$、$\theta\sim U(0,2\pi)$ 及

$$f_A(a)=\begin{cases}\dfrac{2a}{A_0^2}, & a\in(0,A_0)\\ 0, & a\notin(0,A_0)\end{cases}$$

试求随机过程 $X(t)$ 的一维概率密度。

解：设 $Y(t)=a\cos(\omega t+\theta)$,其中 a 和 ω 是常数，$\theta\sim U(0,2\pi)$，由例 **a** 的结果可知 $Y(t)$ 的一维分布密度为：

$$f_{Y(t)}(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2-y^2}}, & -a\le y\le +a\\ 0, & \text{其　它}\end{cases}$$

比较 $X(t)$ 与 $Y(t)$，我们有：

$$Y(t)=X(t\,|\,A=a,\Omega=\omega)$$

由连续型全概率公式，我们有：

$$P\{X(t)\le x\}=\iint P\{X(t)\le x\,|\,A,\Omega\}dF(a,\omega)$$

由于 A,Ω 相互独立，因此有：

$$dF(a,\omega)=f(a,\omega)da d\omega=f_A(a)f_\Omega(\omega)da d\omega$$

故有 $X(t)$ 的一维概率密度为：

$$f_{X(t)}(x)=\iint\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}f_A(a)f_\Omega(\omega)da d\omega=$$

$$=\int_x^{A_0}da\int_{250}^{350}\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\frac{2a}{A_0^2}\cdot\frac{1}{100}d\omega$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi A_0^2}\sqrt{A_0^2-x^2}, & |x|\le A_0\\ 0, & |x|>A_0\end{cases}$$

例 **c**：（一维随机游动）设有一质点在x轴上作随机游动，即在$t=0$时质点属于x轴的原点，在$t=1,2,3,\cdots$时质点可以在x轴上正向或反向移动一个单位距离，作正向和作反向移动的概率分别为p和$q=1-p$。经时间n，质点偏离原点的距离为k，问经时间n步后，质点处于位置k的概率如何？

解：设质点第i次移动时的距离为ξ_i，则ξ_i是离散的随机变量，它可取＋**1**，也可取－**1**。且$P\{\xi_i=+1\}=p$，$P\{\xi_i=-1\}=1-p=q$

设：质点在$t=n$时，偏离原点的距离为X_n，则X_n也是一随机变量，且有：

$$X_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i \qquad X_0=0$$

由题意，ξ_i与质点所处位置无关，且ξ_i与ξ_k（$i\neq k$）独立。

当$t=n$时，质点可取的值为:

$$n,n-2,n-4,\cdots,-(n-4),-(n-2),-n$$

如果在n次游动中有m次质点右向移动一个单位，即有m次$\xi_i=+1$发生，则有$n-m$次质点左向移动一个单位，即有$n-m$次$\xi_i=-1$发生，此时有：

$$X_n=\sum_{i=1}^{n}\xi_i=m\times(+1)+(n-m)\times(-1)=2m-n=k$$

由此得到 $m=\dfrac{n+k}{2}$。

因此，由题意，我们有：

$$P\{X_n=k\}=C_n^m p^m q^{n-m}=C_n^{\frac{n+k}{2}}p^{\frac{n+k}{2}}q^{\frac{n-k}{2}}=\frac{n!}{(\frac{n+k}{2})!(\frac{n-k}{2})!}p^{\frac{n+k}{2}}q^{\frac{n-k}{2}}$$

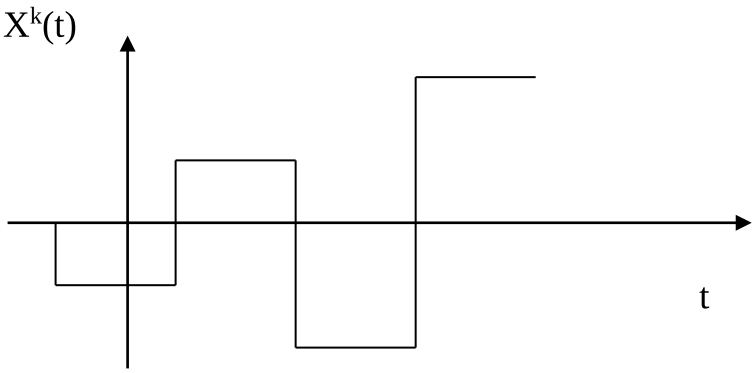
此式中m是一正整数，则如果n为奇数时，k也是奇数$(k<n)$；如果n为偶数时，k也是偶数$(k<n)$。

例 **d**：设有一脉冲数字通信系统，它传送的信号是脉宽为T_0的脉冲信号，每隔 T_0 送出一个脉冲。脉冲幅度 $X(t)$ 是一随机变量，它可取四个值 $\{+2,+1,-1,-2\}$，且取这四个值的概率是相等的，即：

$$P\{X(t)=+2\}=P\{X(t)=+1\}=P\{X(t)=-1\}=P\{X(t)=-2\}=1/4$$

不同周期内脉冲的幅度是相互统计独立的，脉冲的起始时间相对于原点的时间差u为均匀分布在$(0,T_0)$内的随机变量。试求在两个时刻t_1 ,t_2时，随机过程$X(t)$所取值$(X(t_1),X(t_2))$的二维联合概率密度。

解：典型样本函数如下图：



在时间轴上任意固定两个时刻t_1,t_2，我们令：

事件C：t_1,t_2间有不同周期的脉冲存在，即t_1,t_2处在不同的脉冲周期内；

事件C^c：t_1,t_2间没有不同周期的脉冲存在，即t_1,t_2处在相同的脉冲周期内；

（1） 当$|t_1-t_2|>T_0$时，有$P\{C\}=1$ 和 $P\{C^c\}=0$

（2） 当$|t_1-t_2|\le T_0$时，t_1,t_2可能处在同一脉冲内，也可能不处在同一脉冲内。假设θ为t_1所在的脉冲的起始时刻，由于脉冲的起始时刻相对于原点$t=0$的时间差u是$(0,T_0)$内的均匀分布，而且该信号是等宽的脉冲信号，因此θ可以看作均匀分布于(t_1-T_0,t_1)的随机变量。

如果$t_1<t_2$，则：

$$P\{C^c\}=P\{t_2<\theta+T_0\}=P\{\theta>t_2-T_0\}=1-P\{\theta<t_2-T\}$$
$$=1-\frac{1}{T_0}\int_{t_1-T_0}^{t_2-T_0}d\theta=1-\frac{t_2-t_1}{T_0}$$

如果$t_1>t_2$，则：$P\{C^c\}=P\{t_2>\theta\}=\frac{1}{T_0}\int_{t_1-T_0}^{t_2}d\theta=1-\frac{t_1-t_2}{T_0}$

因此有：　$P\{C^c\}=1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0}$　　$P\{C\}=\frac{|t_1-t_2|}{T_0}$

由全概率公式：

$$f_{X_{t_1}X_{t_2}}(x_1,x_2)=f_{X_{t_1}X_{t_2}|C}(x_1,x_2|C)P\{C\}+f_{X_{t_1}X_{t_2}|C^c}(x_1,x_2|C^c)P\{C^c\}$$

根据不同周期内脉冲幅度是相互独立的随机变量，我们有：

$$f_{X_{t_1}X_{t_2}|C}(x_1,x_2|C)=\left[\sum_{i=-2,-1,1,2}\frac{1}{4}\delta(x_1-i)\right]\times\left[\sum_{k=-2,-1,1,2}\frac{1}{4}\delta(x_2-k)\right]$$

如果t_1,t_2处在同一周期内，则 $X_{t_1}=X_{t_2}$，此时有：

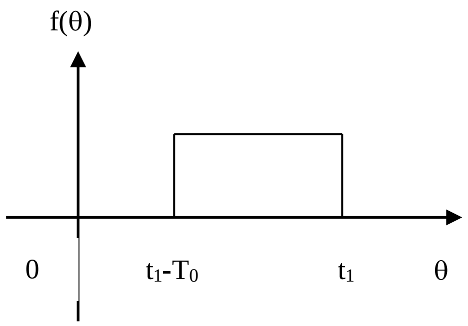
$$f_{X_{t_1}X_{t_2}|C^c}(x_1,x_2|C^c)=\left[\sum_{i=-2,-1,1,2}\frac{1}{4}\delta(x_1-i)\delta(x_2-i)\right]$$

由此最终得到$(X(t_1),X(t_2))$的二维联合概率密度如下：

当$|t_1-t_2|\le T_0$时：

$$f_{X_{t_1}X_{t_2}}(x_1,x_2)=\left[\sum_{i=-2,-1,1,2}\frac{1}{4}\delta(x_1-i)\right]\times\left[\sum_{k=-2,-1,1,2}\frac{1}{4}\delta(x_2-k)\right]\frac{|t_1-t_2|}{T_0}$$
$$+\left[\sum_{i=-2,-1,1,2}\frac{1}{4}\delta(x_1-i)\delta(x_2-i)\right]\left(1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0}\right)$$

当$|t_1-t_2|>T_0$时：$f_{X_{t_1}X_{t_2}}(x_1,x_2)=\left[\sum_{i=-2,-1,1,2}\frac{1}{4}\delta(x_1-i)\right]\times\left[\sum_{k=-2,-1,1,2}\frac{1}{4}\delta(x_2-k)\right]$



例 **e**：设有某通信系统，它传送的信号是脉宽为T_0的脉冲信号，脉冲信号的周期为T_0。如果脉冲幅度$X(t)$是随机的，幅度服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，不同周期内的的幅度是相互统计独立的。脉冲沿的位置也是随机的，脉冲的起始时间相对于原点的时间差u为均匀分布在$(0,T_0)$内的随机变量。u和脉冲幅度间也是相互统计独立的（脉冲幅度调制信号），试求在两个时刻t_1 ,t_2时，该随机过程$X(t)$所取值$(X(t_1),X(t_2))$的二维联合概率密度。

解：在时间轴上任意固定两个时刻t_1,t_2，讨论同例 **d**。

特别注意此时的状态空间！

（**a**） 当$|t_1-t_2|>T_0$时，t_1,t_2位于不同的周期内，此时我们有：

$$f_{X_{t_1}X_{t_2}}(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}\right\}$$

（**b**） 当$|t_1-t_2|\le T_0$时，t_1,t_2位于两个不同的周期内的概率为：

$$P\{C\}=\frac{|t_1-t_2|}{T_0}$$

t_1,t_2位于相同的周期内的概率为：

$$P\{C^c\}=1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0}$$

根据全概率公式，我们有：

$$\begin{aligned}f_{X_{t_1}X_{t_2}}(x_1,x_2)&=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left\{-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\sigma^2}\right\}\cdot\frac{|t_1-t_2|}{T_0}\\&+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2}\right\}\delta(x_1-x_2)\cdot\left[1-\frac{|t_1-t_2|}{T_0}\right]\end{aligned}$$

因为当t_1,t_2处在同一脉冲周期时，$X(t_1),X(t_2)$取相同的值，所以上式的第二项出现了$\delta(x_1-x_2)$函数。

此例中看出，$X(t_1),X(t_2)$的二维联合概率密度不再是二维正态分布，虽然

$X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 都是正态分布。

例 f：考察一随机过程，它在 t_0+nT_0 时刻具有宽度为 b 的矩形脉冲波，脉冲幅度 A 为一等概率取值 $\pm a$ 的随机变量，且 $b<T_0$，t_0 是在 $(0,T_0)$ 上服从均匀分布的随机变量，并且脉冲幅度 A 与 t_0 独立，试求该过程的相关函数和方差。

解：由给定的随机过程，我们有：

$$E\{X(t)\}=a\times p+(-a)\times p+0\times(1-2p)=0$$

下面求相关函数：

任意取 t_1,t_2，且 $t_1<t_2$，当 $|t_1-t_2|>T_0$ 时，t_1,t_2 位于不同的周期内，此时有：

$$E\{X(t_1)X(t_2)\}=E\{X(t_1)\}E\{X(t_2)\}=0$$

当 $|t_1-t_2|\le T_0$，且 t_1,t_2 位于两个不同的周期内时，我们有：

$$E\{X(t_1)X(t_2)\}=E\{X(t_1)\}E\{X(t_2)\}=0$$

当 $|t_1-t_2|\le T_0$，且 t_1,t_2 位于同一的周期内时，假设 θ 为 t_1 所在的脉冲的起始时刻，只有当 $t_2<\theta+b$ 时，$X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 取到不为零的值，此时的概率为：

$$P\{t_2<\theta+b\}=1-P\{\theta<t_2-b\}=1-\frac{1}{T_0}\int_{t_1-T_0}^{t_2-b}d\theta=\frac{b-(t_2-t_1)}{T_0}$$

由此，我们有：

$$E\{X(t_1)X(t_2)\}=a^2\cdot\frac{b-(t_2-t_1)}{T_0}$$

同理，当 $t_1>t_2$ 是，我们有：

$$E\{X(t_1)X(t_2)\}=a^2\cdot\frac{b-(t_1-t_2)}{T_0}$$

因此，最终得到：

$$R_X(\tau)=\frac{a^2(b-|\tau|)}{T_0},\quad \tau=t_2-t_1,\quad |\tau|\le b，D_X(t)=R_X(0)=\frac{a^2b}{T_0}$$

例 g：随机电报信号定义如下：

（1）在任何时刻 t **，** $X(t)$ **取值为 0 或 1，只有两种可能状态。并设**

$$P\{X(t)=0\}=1/2\,,\,P\{X(t)=1\}=1/2$$

（2）每个状态的持续时间是随机的，设在 T **时间内波形变化的次数** μ **服从 Poisson 分布即：**

$$P\{\mu=k\}=\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}\quad (\lambda>0,T>0)$$

（3） $X(t)$ **取何值（即所处的状态）与随机变量** μ **是相互统计独立的。**

求随机电报信号 $X(t)$ 的均值函数和自相关函数。

解：由均值函数和自相关函数的定义，有：

（1）　均值函数：$E\{X(t)\}=1\times\frac{1}{2}+0\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，即均值函数是常数。

（2）　相关函数：在时间轴上任意固定两个时刻 t_1,t_2，如果 $t_2>t_1$，则

$$\begin{aligned}R_{XX}(t_1,t_2)=E\{X(t_1)X(t_2)\}&=1\times 1P\{X(t_1)=1,X(t_2)=1\}+\\&+0\times 1P\{X(t_1)=0,X(t_2)=1\}+1\times 0P\{X(t_1)=1,X(t_2)=0\}\\&+0\times 0P\{X(t_1)=0,X(t_2)=0\}\end{aligned}$$

下面求 $P\{X(t_1)=1,X(t_2)=1\}$。由于事件：$\{X(t_1)=1,X(t_2)=1\}$ 等价于事件：$\{X(t_1)=1,\text{在}t_2-t_1\text{时间内波形发生偶数次变化}\}$，即等价于事件：$\{X(t_1)=1,\mu\text{＝偶数}\}$，故：

$$\begin{aligned}R_{XX}(t_1,t_2)&=P\{X(t_1)=1,\mu\text{＝偶数}\}\\&=P\{X(t_1)=1\}P\{\mu\text{＝偶数}\}\\&=\frac{1}{2}P\{\mu\text{＝偶数}\}=\frac{1}{2}\sum_{k=\text{偶数}}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}\\&=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[-\lambda(t_2-t_1)]^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}]\\&=\frac{1}{4}e^{-\lambda(t_2-t_1)}[e^{\lambda(t_2-t_1)}+e^{-\lambda(t_2-t_1)}]=\frac{1}{4}[1+e^{-2\lambda(t_2-t_1)}]\end{aligned}$$

同理，如果$t_2 < t_1$，则有

$$R_{XX}(t_1,t_2)=\frac{1}{4}[1+e^{2\lambda(t_2-t_1)}]$$

故有：

$$R_{XX}(t_1,t_2)=\frac{1}{4}[1+e^{-2\lambda|t_1-t_2|}]$$

因此有：

$$\begin{aligned}C_{XX}(t_1,t_2)&=R_{XX}(t_1,t_2)-\mu_X(t_1)\mu_X(t_2)=Cov(X(t_1),X(t_2))\\&=\frac{1}{4}e^{-2\lambda|t_1-t_2|}\end{aligned}$$

设时间差$\tau=t_1-t_2$，则有

$$R_{XX}(t_1,t_2)=\frac{1}{4}[1+e^{-2\lambda|\tau|}]$$

$$C_{XX}(t_1,t_2)=Cov(X(t_1),X(t_2))=\frac{1}{4}e^{-2\lambda|\tau|}$$

因为随机电报信号$X(t)$的均值函数为常数，相关函数仅为时间差的函数，故随机电报信号是宽平稳过程。

6．复随机过程

定义：设X,Y为同一概率空间(Ω,Σ,P)上的两个取实数值的随机变量，并设$Z=X+jY$，则称Z为该概率空间上的一个复随机变量。

我们有：

$$E\{Z\}=E\{X\}+jE\{Y\}$$

$$\begin{aligned}D\{Z\}&=E\{|Z-E\{Z\}|^2\}=E\{[Z-E\{Z\}]\overline{[Z-E\{Z\}]}\}\\&=E\{(X-EX)^2\}+E\{(Y-EY)^2\}\end{aligned}$$

定义：设$\{X(t)\}$和$\{Y(t)\}$是具有相同参数和概率空间的一对实随机过程，

则 $Z(t)=X(t)+jY(t)$ 称为复随机过程。

同样有：

$E\{Z(t)\}=E\{X(t)\}+jE\{Y(t)\}$，称为均值函数。

$R_{ZZ}(t_1,t_2)\hat{=}E\{Z(t_1)\overline{Z(t_2)}\}=E\{[X(t_1)+jY(t_1)]\overline{[X(t_2)+jY(t_2)]}\}$，称为复随机过程的相关函数。

例 **8**：设有复随机过程 $\xi(t)=\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t}$，其中 $\eta_k\ (1\le k\le N)$ 是相互独立的随机变量，且服从正态分布 $N(0,\sigma_k^2)$，ω_k 为常数。试求 $\xi(t)$ 的均值函数和相关函数。

解：由于：

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t}=\sum_{k=1}^{N}\eta_k\cos(\omega_k t)+j\sum_{k=1}^{N}\eta_k\sin(\omega_k t)$$

因此有：

$$E\{\xi(t)\}=E\{\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t}\}=E\{\sum_{k=1}^{N}\eta_k\cos(\omega_k t)+j\sum_{k=1}^{N}\eta_k\sin(\omega_k t)\}=0$$

$$R_{\xi}(t_1,t_2)=E\{\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)}\}=E\left\{\left(\sum_{k=1}^{N}\eta_k e^{j\omega_k t_1}\right)\overline{\left(\sum_{i=1}^{N}\eta_i e^{j\omega_i t_2}\right)}\right\}$$

$$=E\left\{\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\eta_k\eta_i e^{j\omega_k t_1-j\omega_i t_2}\right\}=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2 e^{j\omega_k(t_1-t_2)}=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k^2 e^{j\omega_k\tau}$$

其中 $\tau=t_1-t_2$。

注意：均值为零，相关函数是时间差的函数，是宽平稳过程。