附录：协方差矩阵及 n 维正态分布

一、**协方差矩阵**：设 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的二阶混合中心矩

$$c_{ij} = Cov(X_i, X_j) = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\},\ i, j = 1,2,\cdots,n$$

都存在，则称矩阵：

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

为 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**协方差矩阵**。它是一对称矩阵。

二、 **n 维正态分布**

- **定义**：若 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的协方差矩阵 Σ 是正定矩阵，且其**概率密度函数**可以表示成以下的形式:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det\Sigma)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T \Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\right\}$$

其中: $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$， $\vec{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)^T = (E(X_1), E(X_2, \cdots, E(X_n))^T$，则称 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n 维正态随机变量， $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 n 维正态概率密度函数。

由于协方差矩阵 Σ 是正定矩阵，因此其可逆，且逆矩阵 Σ^{-1} 还是正定矩阵。证明如下：

Σ 是对称的正定矩阵，因此其特征值都大于零，记其特征值为 $\lambda_i > 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则由线性代数的知识可知，存在可逆正交矩阵 P， $P^T P = I$， $P^{-1} = P^T$ 有

$$\Sigma = P^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} P$$

因此，有

$$\Sigma^{-1} = P^T \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^{-1} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} P$$

即矩阵Σ^{-1}是正定矩阵。又由于

$$\Sigma^{-1} = P^T \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1^{-1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2^{-1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3^{-1}} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n^{-1}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1^{-1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2^{-1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3^{-1}} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n^{-1}} \end{pmatrix} P$$

$$= A^T A$$

其中：

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1^{-1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2^{-1}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda_3^{-1}} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n^{-1}} \end{pmatrix} P$$

是一可逆矩阵。且有$\Sigma = A^{-1}(A^{-1})^T$，$\det(\Sigma) = [\det(A^{-1})]^2$，$\det(A^{-1}) = \sqrt{\det(\Sigma)}$ 。

做变换：$\vec{y} = A(\vec{x} - \vec{\mu})$，即$\vec{x} = A^{-1}\vec{y} + \vec{\mu}$，则其变换的雅可比行列式为

$$J = \det(A^{-1}) = \sqrt{\det(\Sigma)}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu}) \right\} dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} (\det \Sigma)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} | J | \exp\left\{ -\frac{1}{2} \vec{y}^T \vec{y} \right\} dy_1 dy_2 \cdots dy_n \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \vec{y}^T \vec{y} \right\} dy_1 dy_2 \cdots dy_n \end{aligned}$$

利用

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} dy = \sqrt{2\pi}$$

我们有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_1dx_2\cdots dx_n = 1$$

n 维正态随机变量的性质：

（1）设随机变量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T \sim N(\vec{\mu},\Sigma)$，$C$ 为 $m\times n$ 矩阵，令：$Y=CX$（即 Y 为 X 的线性变换），则 Y 为 m 维正态随机变量，且 $Y\sim N(C\vec{\mu},\, C\Sigma C^T)$。

（2）设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，则 X 服从 n 维正态分布的充要条件是 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的任意的线性组合 $Y=c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_nX_n$ 服从一维正态分布。

（3）设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T \sim N(\vec{\mu},\Sigma)$，则 X 的任意一个子向量均服从正态分布。换言之，正态分布的边缘分布仍为正态分布。

（4）特别地，n 维正态随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的每一个分量都是正态变量；反之，若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 都是正态随机变量，且相互独立，则 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是 n 维正态随机变量

（5）设 $X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$ 是 n 元正态分布随机变量，均值向量为 $\vec{\mu}=\begin{pmatrix}\vec{\mu}_1\\\vec{\mu}_2\end{pmatrix}$，协方差矩阵为

$$\Sigma_X=\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & \Sigma_{12}\\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22}\end{pmatrix}$$

其中：$\Sigma_{11}=E\{(X_1-\vec{\mu}_1)(X_1-\vec{\mu}_1)^T\}$，$\Sigma_{22}=E\{(X_2-\vec{\mu}_2)(X_2-\vec{\mu}_2)^T\}$，$X_1$ 的维数是 n_1，X_2 的维数为 n_2，其互协方差为：$\Sigma_{12}=\Sigma_{21}=E\{(X_1-\vec{\mu}_1)(X_2-\vec{\mu}_2)^T\}$，$n_1+n_2=n$，则 X_1 与 X_2 独立的充分必要条件为 $\Sigma_{12}=0$。

证明：必要性显然。下面证明充分性。若 $\Sigma_{12}=0$，则

$$\Sigma_X=\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & 0\\ 0 & \Sigma_{22}\end{pmatrix}$$

则正态随机变量 X 的密度函数为

$$f_X(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det\Sigma_X)^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\vec{x}_1-\vec{\mu}_1\\ \vec{x}_2-\vec{\mu}_2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}\Sigma_{11} & 0\\ 0 & \Sigma_{22}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\vec{x}_1-\vec{\mu}_1\\ \vec{x}_2-\vec{\mu}_2\end{pmatrix}\right)$$

于是有

$$f_X(\vec{x}_1,\vec{x}_2)=\frac{1}{(2\pi)^{n_1/2}(\det\Sigma_{11})^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)^T\Sigma_{11}^{-1}(\vec{x}_1-\vec{\mu}_1)\right)\times$$
$$\times\frac{1}{(2\pi)^{n_{12}/2}(\det\Sigma_{22})^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)^T\Sigma_{22}^{-1}(\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)\right)$$

其中：$n=n_1+n_2$。因此 X_1 与 X_2 独立，即若两个随机向量服从联合正态分布，且互协方差为零，蕴含了它们之间的独立性。

推论：设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 服从 n 维正态分布，则“$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立”与“$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 两两不相关”是等价的。

注：（**去相关方法**）设 $X=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$ 服从 n 维联合正态分布，X_1 的维数是 n_1，X_2 的维数为 n_2，$n_1+n_2=n$，设有变换

$$Y=\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{n_1}&A\\0&I_{n_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}$$

试确定矩阵 A，使得 Y_1 与 Y_2 的互协方差为零，即 Y_1 与 Y_2 不相关。由

$$\begin{aligned}0&=E\{(Y_1-E\{Y_1\})(Y_2-E\{Y_2\})^T\}=\\&=E\{(X_1-E\{X_1\})(X_2-E\{X_2\})^T\}+E\{A(X_2-E\{X_2\})(X_2-E\{X_2\})^T\}\\&=\Sigma_{12}+A\Sigma_{22}\end{aligned}$$

即有

$$A=-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}$$

此时 Y 的协方差矩阵为

$$\Sigma_Y=E\{(Y-E\{Y\})(Y-E\{Y\})^T\}=E\left\{\begin{pmatrix}Y_1-E\{Y_1\}\\Y_2-E\{Y_2\}\end{pmatrix}(Y_1-E\{Y_1\})^T,(Y_2-E\{Y_2\})^T\right\}$$
$$=\begin{pmatrix}\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}&0\\0&\Sigma_{22}\end{pmatrix}$$

由上面的性质（1）可知，Y 仍为多元正态分布，且有 $\Sigma_Y=C\Sigma_XC^T$，即

$$\begin{pmatrix}\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}&0\\0&\Sigma_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_{n_1}&-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\\0&I_{n_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Sigma_{11}&\Sigma_{12}\\\Sigma_{21}&\Sigma_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{n_1}&-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\\0&I_{n_2}\end{pmatrix}^T$$

由于

$$\begin{pmatrix}I_{n_1}&-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\\0&I_{n_2}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}I_{n_1}&\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\\0&I_{n_2}\end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} I_{n_1} & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}^T\right]^{-1} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ (\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1})^T & I_{n_2} \end{pmatrix}$$

即有

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{n_1} & \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ (\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1})^T & I_{n_2} \end{pmatrix}$$

因此有

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \left[\begin{pmatrix} I_{n_1} & \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ (\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1})^T & I_{n_2} \end{pmatrix}\right]^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} I_{n_1} & 0 \\ -(\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1})^T & I_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})^{-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{22}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{n_1} & -\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1} \\ 0 & I_{n_2} \end{pmatrix}$$

且有

$$\det(\Sigma_X) = \det(\Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}) \cdot \det(\Sigma_{22})$$

令：

$$\hat{\Sigma}_{11} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\ ,\quad \hat{\vec{\mu}}_1 = \vec{\mu}_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\vec{x}_2 - \vec{\mu}_2)$$

因此，我们有如下多元正态分布密度函数的去相关分解形式：

$$f_X(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det \Sigma_X)^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 - \vec{\mu}_1 \\ \vec{x}_2 - \vec{\mu}_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 - \vec{\mu}_1 \\ \vec{x}_2 - \vec{\mu}_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n_1/2}(\det \hat{\Sigma}_{11})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}_1 - \hat{\vec{\mu}}_1)^T (\hat{\Sigma}_{11})^{-1} (\vec{x}_1 - \hat{\vec{\mu}}_1) \right) \times$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^{n_2/2}(\det \Sigma_{22})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}_2 - \vec{\mu}_2)^T \Sigma_{22}^{-1} (\vec{x}_2 - \vec{\mu}_2) \right)$$

另外：

设 $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ 服从 n 维联合正态分布，X_1 的维数是 n_1，X_2 的维数为 n_2，$n_1 + n_2 = n$，求 X_1 在条件 $X_2 = \vec{x}_2$ 下的条件分布及条件数学期望。由上面去相关方法得到的结果，我们有

$$f_X(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \frac{1}{(2\pi)^{n_1/2}(\det \hat{\Sigma}_{11})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}_1 - \hat{\vec{\mu}}_1)^T (\hat{\Sigma}_{11})^{-1} (\vec{x}_1 - \hat{\vec{\mu}}_1) \right) \times$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^{n_2/2}(\det \Sigma_{22})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}_2 - \vec{\mu}_2)^T \Sigma_{22}^{-1} (\vec{x}_2 - \vec{\mu}_2) \right)$$

其中：$\hat{\Sigma}_{11} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$，$\hat{\vec{\mu}}_1 = \vec{\mu}_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\vec{x}_2 - \vec{\mu}_2)$。

由多元正态分布的性质（3）可知，X_2 的边缘分布为

$$f_{X_2}(\vec{x}_2)=\frac{1}{(2\pi)^{n_2/2}(\det\Sigma_{22})^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)^T\Sigma_{22}^{-1}(\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)\right)$$

因此，X_1 在条件 $X_2=\vec{x}_2$ 下的条件分布为

$$f_{X_1|X_2}(\vec{x}_1\,|\,\vec{x}_2)=\frac{f_X(\vec{x}_1,\vec{x}_2)}{f_{X_2}(\vec{x}_2)}=\frac{1}{(2\pi)^{n_1/2}(\det\hat{\Sigma}_{11})^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\vec{x}_1-\hat{\vec{\mu}}_1)^T(\hat{\Sigma}_{11})^{-1}(\vec{x}_1-\hat{\vec{\mu}}_1)\right)$$

即已知 $X_2=\vec{x}_2$ 的条件下，X_1 的条件分布仍为正态分布，且有

$$E\{X_1\,|\,X_2=\vec{x}_2\}=\hat{\vec{\mu}}_1=\vec{\mu}_1+\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(\vec{x}_2-\vec{\mu}_2)$$

$$E\{X_1\,|\,X_2\}=\hat{\vec{\mu}}_1=\vec{\mu}_1+\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2-\vec{\mu}_2)$$

条件协方差矩阵为：$\Sigma_{X_1|X_2}=\hat{\Sigma}_{11}=\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$。

令：$Z=X_1-E\{X_1\,|\,X_2\}=(X_1-\vec{\mu}_1)-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2-\vec{\mu}_2)$，则 Z 为 n_1 维随机变量，由于

$$Z=(I_{n_1},\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1})\begin{pmatrix}X_1-\vec{\mu}_1\\X_2-\vec{\mu}_2\end{pmatrix}$$

因此 n_1 维随机变量 Z 仍为正态分布，且

$$E\{Z\}=E\{(X_1-\vec{\mu}_1)-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2-\vec{\mu}_2)\}=0$$

$$\begin{aligned}\Sigma_Z&=E\{ZZ^T\}=E\{[(X_1-\vec{\mu}_1)-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2-\vec{\mu}_2)][(X_1-\vec{\mu}_1)-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(X_2-\vec{\mu}_2)]^T\}\\&=\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\end{aligned}$$

即

$$Z=X_1-E\{X_1\,|\,X_2\}\sim N(\vec{0},\Sigma_{11}-\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21})$$

由此可知，n_1 维随机变量 $X_1-E\{X_1\,|\,X_2\}$ 的协方差矩阵与在给定 X_2 条件时的条件协方差矩阵 $\Sigma_{X_1|X_2}$ 相同，这一结论在统计估值理论中会有重要的应用。

例：设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)\,(\sigma>0)$ 的简单随机样本。记 $\overline{X}_k=\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}X_i,1\le k<n$，求统计量 $T=\overline{X}_k-\overline{X}_{k+1}$ 的分布。

解：由于 $T=\overline{X}_k-\overline{X}_{k+1}=\dfrac{1}{k(k+1)}X_1+\cdots+\dfrac{1}{k(k+1)}X_k-\dfrac{1}{k+1}X_{k+1}$

因此：$ET=0$，$D(T)=\dfrac{1}{[k(k+1)]^2}\sigma^2+\cdots+\dfrac{1}{[k(k+1)]^2}\sigma^2+\dfrac{1}{(k+1)^2}\sigma^2=\dfrac{1}{k(k+1)}\sigma^2$

因此：$T\sim N(0,\dfrac{1}{k(k+1)}\sigma^2)$

例：设随机向量 (X,Y) 的两个分量相互独立，且均服从标准正态分布 $N(0,1)$。

（a）　分别写出随机变量 $X+Y$ 和 $X-Y$ 的分布密度

（b）　试问：$X+Y$ 与 $X-Y$ 是否独立？说明理由。

解：（a）$X+Y\sim N(0,2),\quad X-Y\sim N(0,2)$

（b）由于：

$$\begin{pmatrix}X+Y\\X-Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\quad ,\det B=-2\neq 0$$

因此$\begin{pmatrix}X+Y\\X-Y\end{pmatrix}$是服从正态分布的二维随机向量，其协方差矩阵为：

$$D=BE_2B^T=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$$

因此 $X+Y$ 与 $X-Y$ 独立。