随机过程课程作业-Week3

作者：48-丁力-202328015926048
日期：今天

目录

随机过程及其分类

题目1

12、考察两个谐波随机信号 $X(t)$ 和 $Y(t)$, 其中:

$$X(t)=A\cos\left(\omega_c t+\phi\right),\quad Y(t)=B\cos\left(\omega_c t\right)$$

式中 A 和 ω_c 为正的常数; ϕ 是 $[-\pi,\pi]$ 内均匀分布的随机变量, B 是标准正态分布的 随机变量。
(a) 求 $X(t)$ 的均值、方差和相关函数;
(b) 若 ϕ 与 B 独立, 求 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 的互相关函数。

> **答案**：
>
> - (a):
>
> 下面，我们将一个个计算这些值：
>
> **期望:**
>
> $$\begin{aligned} E(X(t)) &= E(A\cos(\omega_c t+\phi)) \\ &\text{由于其中}A\text{为常数} \\ &= AE(\cos(\omega_c t+\phi)) \\ &= AE(\cos(\omega_c t)\cos(\phi)-\sin(\omega_c t)\sin(\phi)) \\ &= A(E(\cos(\omega_c t)\cos(\phi))-E(\sin(\omega_c t)\sin(\phi))) \\ &\text{由于}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\phi)d\phi=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\phi)d\phi=0 \\ &= A(0-0) \\ &= 0 \end{aligned}$$
>
> **方差:**
>
> $$\begin{aligned} D(X(t)) &= E(X^2(t))-E^2(X(t)) \\ &= E(X^2(t)) \\ &= E(A^2\cos^2(\omega_c t+\phi)) \\ &= A^2E(\cos^2(\omega_c t+\phi)) \\ &= A^2E(\frac{1+\cos(2(\omega_c t+\phi))}{2}) \\ &= A^2(E(\frac{1}{2})+E(\frac{\cos(2(\omega_c t+\phi)}{2})) \\ &= A^2(\frac{1}{2}+0) \\ &= \frac{A^2}{2} \end{aligned}$$
>
> **相关函数:**

$$
\begin{aligned}
R_{XX}(X(t_1),X(t_2)) &= E(X_{t_1}X_{t_2}) \\
&= E(A^2\cos(\omega_c t_1+\phi)\cos(\omega_c t_2+\phi)) \\
&= A^2 E(\cos(\omega_c t_1+\phi)\cos(\omega_c t_2+\phi)) \\
&\text{由积化和差公式：} \\
&= A^2 E(\cos(w_c(t_1+t_2))+\cos(w_c(t_1-t_2))) \\
&= A^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos(w_c(t_1+t_2+2\phi))+\cos(w_c(t_1-t_2))\frac{1}{2\pi}d\phi \\
&\text{因为}2\pi\text{是周期性的，所以前一项直接变为}0\text{，那么也就是求} \\
&= A^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos(w_c(t_1-t_2))\frac{1}{2\pi}d\phi \\
&= A^2\cos(w_c(t_1-t_2))
\end{aligned}
$$

- (b):

现在让我们来求这个互相关函数：

$$
\begin{aligned}
R(X(t),Y(t)) &= E(X(t)Y(t)) \\
&= E(A\cos(\omega_c t+\phi)B\cos(\omega_c t)) \\
&= AE(\cos(\omega_c t+\phi)B\cos(\omega_c t)) \\
&= A\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}d\phi\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\omega_c t+\phi)\cos(\omega_c t)B\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{B^2}{2}}dB \\
&\text{由于其为奇函数, 所以在对称区间积分为}0\text{，也就是} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

也就是说，这个互相关函数为0。

13、设 $\xi(t)=X\sin(Yt);t\geq 0$, 而随机变量 X、Y 是相互独立且都服从 $[0,1]$ 上的均匀分布, 试求此过程的均值函数及相关函数。

答案：

同上，我们会一个个的计算这两个函数：

- 均值函数：

求其对应的均值函数也就是求其期望，也即

$$
\begin{aligned}
E(\xi(t)) \quad &= \int_0^1 dY\int_0^1 X\sin(Yt)dX \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\sin(Yt)dY \\
&= \frac{1-\cos t}{2t}, \quad t\geq 0
\end{aligned}
$$

- 相关函数

$$
\begin{aligned}
R(\xi(t_1),\xi(t_2)) &= E(\xi(t_1)\xi(t_2)) \\
&= E(X^2\sin(Yt_1)\sin(Yt_2)) \\
&\text{由积化和差公式可以得到} \\
&= E(X^2\frac{1}{2}(\cos(Y(t_1-t_2))-\cos(Y(t_1+t_2))) \\
&= E(X^2\frac{1}{2}(\cos(Y(t_1-t_2))))-E(X^2\frac{1}{2}(\cos(Y(t_1+t_2))) \\
&= \frac{1}{2}(E(X^2(\cos(Y(t_1-t_2))))-E(X^2(\cos(Y(t_1+t_2)))) \\
&= \frac{1}{2}(\int_0^1 dY\int_0^1 X^2\cos(Y(t_1-t_2))dX-\int_0^1 dY\int_0^1 X^2\cos(Y(t_1-t_2))dX) \\
&= \frac{1}{6}(\int_0^1\cos(Y(t_1-t_2))dY-\int_0^1\cos(Y(t_1+t_2))dY) \\
&= \frac{1}{6}(\frac{\sin(t_1-t_2)}{t_1-t_2}-\frac{\sin(t_1+t_2)}{t_1+t_2})
\end{aligned}
$$

题目3

15、设 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right), Y$ 满足参数为 p 的几何分布, 即 $P\{Y=k\}=(1-p)^{k-1} p$, 其中: $0<p<1, k=1,2, \cdots, X$ 与 Y 独立。令 $X(t)=X+e^{-t} Y$, 试求:
(1) $X(t)$ 在 $t>0$ 的一维概率密度函数;
(2) $E\{X(t)\}, \operatorname{Cov}(X(s), X(t))(0 \leq s \leq t)$;

> **答案**:
>
> - (1):
>
> 首先，我们先求其对应的概率分布函数， 由定义，我们可以得到:
>
> $$\begin{aligned} F_{X(t)}(u) &= P_{X(t)}(X(t) \leq u) \\ &= P_{X(t)}(X+e^{-t}Y \leq u) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X+e^{-t}Y \leq u \mid Y=k) p(1-p)^{1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P(X \leq u-e^{-t}k) p(1-p)^{1-k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{u-e^{-t}k} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} p(1-p)^{k-1} dx \end{aligned}$$
>
> 那么，现在我们求解概率密度函数，也就是对概率分布函数进行求导得到:
>
> $$\begin{aligned} f_{X(t)}(u) &= \frac{\partial F_{X(t)}(u)}{\partial u} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(u-e^t k-\mu)^2}{2\sigma^2}} p(1-p)^{k-1} \end{aligned}$$
>
> - (2)
>
> 下面，我们将一个个求解这些变量:
>
> - $E(X(t))$
>
> $$\begin{aligned} E(X(t)) &= E(X+e^{-t}Y) \\ &= E(X)+E(e^{-t}Y) \\ &= \mu+\frac{1}{pe^t} \end{aligned}$$
>
> - $\operatorname{Cov}(X(s), X(t))(0 \leq s \leq t)$
>
> $$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(X(s), X(t)) &= E(X(s)X(t)) - E(X(s))E(X(t)) \\ &= E((X+e^{-s}Y)(X+e^{-t}Y)) - (\mu^2+\frac{\mu}{p}(\frac{1}{e^t}+\frac{1}{e^s})+\frac{1}{p^2e^{s+t}}) \\ &= E(X^2+XY(e^{-s}+e^{-t})+Y^2e^{-(t+s)}) - (\mu^2+\frac{\mu}{p}(\frac{1}{e^t}+\frac{1}{e^s})+\frac{1}{p^2e^{s+t}}) \\ &= E^2(X)+D(X)+(\frac{1}{e^t}+\frac{1}{e^s})\sum_{k=1}^{\infty} E(X|Y)p(1-p)^{k-1}+(E^2(Y)+D(Y))\frac{1}{e^{t+s}} - (\mu^2+\frac{\mu}{p}(\frac{1}{e^t}+\frac{1}{e^s})+\frac{1}{p^2e^{s+t}}) \\ & \text{由于} X \text{和} Y \text{独立} \\ &= \mu^2+\sigma^2+(\frac{1}{e^t}+\frac{1}{e^s})\sum_{k=1}^{\infty} E(X)p(1-p)^{k-1}+(\frac{1}{p^2}+\frac{1-p}{p^2})\frac{1}{e^{t+s}} - (\mu^2+\frac{\mu}{p}(\frac{1}{e^t}+\frac{1}{e^s})+\frac{1}{p^2e^{s+t}}) \\ &= \mu^2+\sigma^2+(\frac{1}{e^t}+\frac{\mu}{p}(\frac{1}{e^t}+\frac{1}{e^s})+(\frac{1}{p^2}+\frac{1-p}{p^2})\frac{1}{e^{t+s}} - (\mu^2+\frac{\mu}{p}(\frac{1}{e^t}+\frac{1}{e^s})+\frac{1}{p^2e^{s+t}}) \\ &= \sigma^2+\frac{1-p}{p^2e^{s+t}} \end{aligned}$$

题目4

17、设随机过程 $\xi(t)=X\cos 2t+Y\sin 2t, -\infty<t<+\infty$, 其中随机变量 X 和 Y 独立同分布。
(1) 如果 $X \sim U(0,1)$, 试求过程 $\xi(t)$ 的均值函数和相关函数;
(2) 如果 $X \sim N(0,1)$, 试求过程 $\xi(t)$ 的均值函数和相关函数;

答案:

- (1):

  下面，我们将一个个的求解这些内容:

  - $E(\xi(t))$

$$\begin{aligned}E(\xi(t)) &= E(X\cos 2t + Y\sin 2t)\\ &= \cos 2tE(X) + \sin 2tE(Y)\\ &= \frac{\cos 2t + \sin 2t}{2}, t \in R\end{aligned}$$

  - $R(\xi(t), \xi(s))$

$$\begin{aligned}R(\xi(t), \xi(s)) &= E(\xi(t)\xi(s))\\ &= E((X\cos 2t + Y\sin 2t) \times (X\cos 2s + Y\sin 2s))\\ &= E(X^2\cos 2t\cos 2s + XY(\sin 2s\cos 2t + \sin 2t\cos 2s) + Y^2\sin 2s\sin 2t)\\ &= \cos 2t\cos 2sE(X^2) + \sin(2s+2t)E(XY) + \sin 2s\sin 2tE(Y^2)\\ &= (\sin 2t\sin 2s + \cos 2t\cos 2s)(\frac{1}{12} + (\frac{1}{2})^2) + \sin(2s+2t)E(X)E(Y)\\ &= \frac{1}{3}\cos(2t-2s) + \frac{1}{4}\sin(2t+2s)\end{aligned}$$

- (2):

  同上，我们可以简单的计算得到这些内容，与上面不同的是，此时的两者期望值和方程分别变成:

$$E(X) = 0, D(X) = 1, E(X^2) = D(X) + E^2(X) = 1$$

所以，简单替换，便可以得到:

- $E(\xi(t))$

$$\begin{aligned}E(\xi(t)) &= E(X\cos 2t + Y\sin 2t)\\ &= \cos 2tE(X) + \sin 2tE(Y)\\ &= 0\end{aligned}$$

- $R(\xi(t), \xi(s))$

$$\begin{aligned}R(\xi(t), \xi(s)) &= E(\xi(t)\xi(s))\\ &= E((X\cos 2t + Y\sin 2t) \times (X\cos 2s + Y\sin 2s))\\ &= E(X^2\cos 2t\cos 2s + XY(\sin 2s\cos 2t + \sin 2t\cos 2s) + Y^2\sin 2s\sin 2t)\\ &= \cos 2t\cos 2sE(X^2) + \sin(2s+2t)E(XY) + \sin 2s\sin 2tE(Y^2)\\ &= (\sin 2t\sin 2s + \cos 2t\cos 2s)\\ &= \cos(2t-2s)\end{aligned}$$

问题5

20、设随机变量 X 与随机变量 Θ 独立, 且都服从均匀分布, 即 $X \sim U[2,4], \Theta \sim U[1,3]$ 。 令: $Z = Xe^{\Theta\ln 2}$, 试求随机变量 Z 的分布密度函数。思考: 若给定随机过程: $Z(t) = Xe^{\Theta\ln t}(t > 0)$, 则其一维分布如何确定?

首先，令$Y = e^{\Theta\ln 2}$, 然后我们来求其对应的概率分布:

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P_Y(Y \le y)\\ &= P_Y(e^{\theta\ln 2} \le y)\\ &= P_Y(\theta \le \frac{\ln y}{\ln 2})\\ &= \int_1^{\frac{\ln y}{\ln 2}} f_\Theta(\theta)d\theta\\ &= \frac{\ln y}{2\ln 2}, \quad y \in [2,8]\end{aligned}$$

那么，我们可以得到其对应的概率密度函数:

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{F_Y(y)}{dy} \\
&= \frac{1}{(2\ln 2)y}, \quad y \in [2,8]
\end{aligned}
$$

那么，进行变换，我们可以得到Z的新的表达式。

$$Z = XY$$

由公式，我们可以得到：

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mid x \mid} f_X(x) f_Y(\frac{z}{x}) dx$$

又有：

$$y = \frac{z}{x} \in [2,8] \rightarrow x \in [\frac{z}{8}, \frac{z}{2}]$$

又因为：

$$x \in [2,4], z \in [4,32]$$

这里我们需要讨论z的取值范围：

$$\begin{cases} z/2 \geq 2, z/2 \leq 4 \\ z/2 \geq 4, z/8 \leq 2 \\ z/8 \geq 2 \end{cases}$$

也就是：

$$\begin{cases} 4 \leq z \leq 8 \\ 8 \leq z \leq 16 \\ 16 \leq z \leq 32 \end{cases}$$

其对应的x的积分区间为：

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq z/2 \\ 2 \leq z \leq 4 \\ z/8 \leq z \leq 4 \end{cases}$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mid x \mid} f_X(x) f_Y(\frac{z}{x}) dx = \frac{1}{(4\ln 2)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z} dx$$

那么，我们容易求得其概率密度函数在不同区间的函数：

$$f_z(Z) = \begin{cases} \frac{1}{(4\ln 2)}(\frac{1}{2} - \frac{2}{z}), 4 \leq z \leq 8 \\ \frac{1}{(2\ln 2)z}, 8 \leq z \leq 16 \\ \frac{1}{(4\ln 2)}(\frac{4}{z} - \frac{1}{8}), 16 \leq z \leq 32 \end{cases}$$

- $Z(t) = Xe^{\Theta \ln t}(t > 0)$**，则其一维分布如何确定？**

> 其实可以用和上面相同的算法来计算：
>
> - $t = 1$时，
>
>   此时，$Z(t) = X \sim U[2,4]$。
> - $t \neq 1$时，
>
>   此时，我们同样令$Y = e^{\Theta \ln t}$，那么可以得到其概率密度函数为：
>   - $t > 1$时
>
> $$f_y(Y) = \frac{1}{(2\ln t)y}, y \in [t, t^3]$$
>
>   所以：
>
> $$z \in [2t, 4t^3]$$
>
>   同上：

$$y=\frac{z}{x}\in[t,t^3]\to x\in[\frac{z}{t^3},\frac{z}{t}]\to x\in[\frac{2}{t^2}.4t^2]$$

进行讨论可以得到如下区间:

$$\begin{cases}z\le\min(2t^3,4t)\\2t^3\le z\le 4t\\4t\le z\le 2t^3\\\max(2t^3,4t)\le z\end{cases}$$

所以对于t的划分，可以分为:

$$\begin{cases}2t^3>4t\\2t^3\le 4t\end{cases}\to\begin{cases}t\ge\sqrt{2}\\1<t<\sqrt{2}\end{cases}$$

$t\ge\sqrt{2}$时:

> $$\begin{cases}z\le 4t\\4t\le z\le 2t^3\\2t^3\le z\end{cases}\xrightarrow{\text{积分区间}}\begin{cases}[2,\frac{z}{t}]\\[2,4]\\[\frac{z}{t^3},4]\end{cases}$$
>
> 所以，此时可以得到其对应的概率密度为:
>
> $$f_z(Z(t))=\begin{cases}\frac{1}{(4\ln t)}(\frac{1}{t}-\frac{2}{z}),z\in[2t,4t]\\\frac{1}{(2\ln t)z},z\in[4t,2t^3]\\\frac{1}{(4\ln t)}(\frac{4}{z}-\frac{1}{t^3}),z\in[2t^3,4t^3]\end{cases}$$

$1<t<\sqrt{2}$时:

> 容易知道，此时概率密度函数相同，但是取值范围不同:
>
> $$f_z(Z(t))=\begin{cases}\frac{1}{(4\ln t)}(\frac{1}{t}-\frac{2}{z}),z\in[2t,2t^3]\\\frac{1}{(2\ln t)z},z\in[2t^3,4t]\\\frac{1}{(4\ln t)}(\frac{4}{z}-\frac{1}{t^3}),z\in[4t,4t^3]\end{cases}$$

- $t<1$时

$$f_y(Y)=-\frac{1}{(2\ln t)y},y\in[t^3,t]$$

所以:

$$z\in[2t^3,4t]$$

同上:

$$y=\frac{z}{x}\in[t^3,t]\to x\in[\frac{z}{t},\frac{z}{t^3}]\to x\in[2t^2.\frac{4}{t^2}]$$

- $t<1$时

  对于这种情况，我们已经知道 $f_Y(y)=-\frac{1}{(2\ln t)y}$，且 y 的取值范围为 $[t^3,t]$。

  同样地，我们可以得到 z 的取值范围为 $[2t^3,4t]$。

  由于 $y=\frac{z}{x}$，我们可以得到 x 的取值范围为 $[2t^2,\frac{4}{t^2}]$。

  接下来，我们可以使用卷积公式来求解 Z 的概率密度函数。

  1. 对于 $2t^3\le z\le 2t$ 的情况:

  $$f_Z(z(t))=\frac{2t-z}{4z\ln t}$$

  2. 对于 $2t\le z\le 4t$ 的情况:

  $$f_Z(z(t))=\frac{1}{2z\ln t}$$

3. 对于 $4t \le z \le 4t^3$ 的情况：

$$f_Z(z(t)) = \frac{4t^3 - z}{4z \ln t}$$

我们有：

$$f_Z(z(t)) = \begin{cases} \frac{2t-z}{4z\ln t}, & 2t^3 \le z \le 2t \\ \frac{1}{2z\ln t}, & 2t \le z \le 4t \\ \frac{4t^3-z}{4z\ln t}, & 4t \le z \le 4t^3 \end{cases}$$

结论：

对于随机变量 $Z(t) = Xe^{\Theta \ln t}$，其一维分布可以根据 t 的不同值进行划分。具体来说：

1. 当 $t = 1$ 时，$Z(t)$ 的分布与 X 相同，即 $Z(t) \sim U[2,4]$。
2. 当 $t \ne 1$ 时，$Z(t)$ 的分布会受到 t 的值的影响，具体如下：
   - 当 $t > 1$ 时，$Z(t)$ 的概率密度函数为：

$$f_Z(z(t)) = \begin{cases} \frac{1}{(4\ln t)}(\frac{1}{t} - \frac{2}{z}), & z \in [2t, 4t] \\ \frac{1}{(2\ln t)z}, & z \in [4t, 2t^3] \\ \frac{1}{(4\ln t)}(\frac{4}{z} - \frac{1}{t^3}), & z \in [2t^3, 4t^3] \end{cases}$$

   - 当 $1 < t < \sqrt{2}$ 时，$Z(t)$ 的概率密度函数为：

$$f_Z(z(t)) = \begin{cases} \frac{1}{(4\ln t)}(\frac{1}{t} - \frac{2}{z}), & z \in [2t, 2t^3] \\ \frac{1}{(2\ln t)z}, & z \in [2t^3, 4t] \\ \frac{1}{(4\ln t)}(\frac{4}{z} - \frac{1}{t^3}), & z \in [4t, 4t^3] \end{cases}$$

   - 当 $t < 1$ 时，$Z(t)$ 的概率密度函数为：

$$f_Z(z(t)) = \begin{cases} \frac{2t-z}{4z\ln t}, & z \in [2t^3, 2t] \\ \frac{1}{2z\ln t}, & z \in [2t, 4t] \\ \frac{4t^3-z}{4z\ln t}, & z \in [4t, 4t^3] \end{cases}$$