第六章　高斯（Gauss）过程

（一）　多元正态（Gauss）分布

1．n 元正态分布的定义

定义：设 $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$ 是 n 元随机向量，其均值为 $\vec{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^T$，其中 $\mu_i=E\{\xi_i\}, i=1,2,\cdots,n$，令：

$$b_{ik}=\operatorname{cov}(\xi_i,\xi_k)=E\{(\xi_i-\mu_i)(\xi_k-\mu_k)\}, i,k=1,2,\cdots,n$$

则可得 $\vec{\xi}$ 的协方差矩阵为：$B=(b_{ik})_{n\times n}$，注意矩阵 B 为一非负定对称矩阵，我们有如下的定义：

（1） 如果 B 是一正定矩阵，则 n 元随机向量 $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$ 服从正态分布时的概率分布密度为：

$$f_{\vec{\xi}}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{\vec{\xi}}(\vec{x}^T)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|B\right|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^T B^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\}$$

其特征函数为：

$$\Phi_{\vec{\xi}}(t_1,t_2,\cdots,t_n)=\Phi_{\vec{\xi}}(\vec{t}^T)=\exp\{j\vec{t}^T\cdot\vec{\mu}-\frac{1}{2}\vec{t}^T B\vec{t}\} \qquad \textbf{(A)}$$

n 元随机向量服从正态分布记为：$\vec{\xi}\sim N(\vec{\mu},B)$。

（2） 如果 B 不是一正定矩阵，则由（**A**）可以定义一特征函数，由此特征函数对应的分布函数我们定义为 n 元正态分布，仍记为 $\vec{\xi}\sim N(\vec{\mu},B)$。

2．n 元正态分布的边缘分布

定理：设 $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T$ 为服从 n 元正态分布的随机向量，即 $\vec{\xi}\sim N(\vec{\mu},B)$，则 $\vec{\xi}$ 的任意一个子向量 $(\xi_{k_1},\xi_{k_1},\cdots,\xi_{k_m}), m\le n$ 仍服从正态分布。

3． n元正态分布的独立性

定理：n元正态分布的随机变量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$相互独立的充分必要条件是它们两两不相关。

定理：设$\vec{\xi}^T=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$为正态分布的随机向量，且$\vec{\xi}^T=(\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2)^T$

$$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}$$

其中：B_{11},B_{22}分别是$\vec{\xi}_1,\vec{\xi}_2$的协方差矩阵，B_{12}是由$\vec{\xi}_1$及$\vec{\xi}_2$的相应分量的协方差构成的矩阵，$B_{12}=B_{21}^T$，则$\vec{\xi}_1$与$\vec{\xi}_2$相互独立的充分必要条件是$B_{12}=0$。

4． 正态随机变量线性变换后的性质

（**1**）设$\vec{\xi}^T=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\sim N(\vec{\mu}^T,B)$，$\vec{\mu}^T=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$，$\zeta=\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_k=\vec{a}^T\cdot\vec{\xi}$，$\vec{a}^T=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，则有$E\{\zeta\}=\vec{a}^T\cdot\vec{\mu}$，$D\{\zeta\}=\vec{a}^T B\vec{a}$。

（**2**）令$C=(c_{jk})_{m\times n}$，$\vec{\eta}=C\vec{\xi}$，则有：

$$E\{\vec{\eta}\}=C\vec{\mu},\ D\{\vec{\eta}\}=CBC^T$$

（**3**）$\vec{\xi}^T=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\sim N(\vec{\mu}^T,B)$的充分必要条件是：

$$\forall\zeta=\sum_{k=1}^{n}a_k\xi_k=\vec{a}^T\vec{\xi}\sim N(\sum_{k=1}^{n}a_k\mu_k,\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_k a_i b_{ki})=N(\vec{a}^T\vec{\mu},\ \vec{a}^T B\vec{a})$$

（**4**）若$\vec{\xi}^T=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\sim N(\vec{\mu}^T,B)$，$C=(c_{jk})_{m\times n}$为任意的矩阵，则有：$\vec{\eta}=C\vec{\xi}$为服从$m$元正态分布，即$\vec{\eta}=C\vec{\xi}\sim N(C\vec{\mu},CBC^T)$。

（**5**）若$\vec{\xi}^T=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\sim N(\vec{\mu}^T,B)$，则存在一正交矩阵$U$，使得$\vec{\eta}=U^T\vec{\xi}$是一独立正态分布的随机向量，它的均值为$U^T\vec{\mu}$，方差为矩阵$B$的特征值。

（**6**）n维正态随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的每一个分量都是正态变量；反

之，若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 都是正态随机变量，且相互独立，则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是 n 维正态随机变量。

5．例子

- 设 (X_1, X_2, X_3, X_4) 为服从正态分布的随机向量，且 $E\{X_i\}=0, i=1,2,3,4$，试证明：

$$\begin{aligned} &E\{X_1X_2X_3X_4\} \\ &\quad = E\{X_1X_2\}E\{X_3X_4\}+E\{X_1X_3\}E\{X_2X_4\}+E\{X_1X_4\}E\{X_2X_3\} \end{aligned}$$

证明：见教材 **P466**。

注意：此结论非常重要，经常会被应用。

- 设 X, Y 是服从均值为零的正态分布二维随机变量，其联合概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2}-\frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

则

$$E\{XY\}=r\sigma_1\sigma_2, \quad E\{X^2Y^2\}=\sigma_1^2\sigma_2^2+2r^2\sigma_1^2\sigma_2^2$$

$$E\{|XY|\}=\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi}[\varphi\sin\varphi+\cos\varphi]$$

其中：$\sin\varphi=r, -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$。

证明：由联合分布可以求得边缘分布和条件分布为：

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}\right\}$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_2^2}\left[y-\frac{r\sigma_2 x}{\sigma_1}\right]^2\right\}$$

由此可得：

$$E\{Y|X\}=\frac{r\sigma_2}{\sigma_1}X, \quad E\{Y^2|X\}=(1-r^2)\sigma_2^2+\frac{r^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2}X^2$$

因此，我们有：

$$E\{XY\}=E\{E\{XY|X\}\}=E\{XE\{Y|X\}\}$$
$$=\frac{r\sigma_2}{\sigma_1}E\{X^2\}=r\sigma_1\sigma_2$$

$$E\{X^2Y^2\}=E\{E\{X^2Y^2|X\}\}=E\{X^2E\{Y^2|X\}\}$$
$$=(1-r^2)\sigma_2^2E\{X^2\}+\frac{r^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2}E\{X^4\}=(1-r^2)\sigma_2^2\sigma_1^2+\frac{r^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\cdot 3\sigma_1^4$$
$$=\sigma_2^2\sigma_1^2+2r^2\sigma_2^2\sigma_1^2=E\{X^2\}E\{Y^2\}+2[E\{XY\}]^2$$

另外

$$E\{|XY|\}=\iint|xy|f(x,y)dxdy$$
$$=\iint_{xy>0}xyf(x,y)dxdy-\iint_{xy<0}xyf(x,y)dxdy$$
$$=E\{XY\}-2\iint_{xy<0}xyf(x,y)dxdy$$
$$=r\sigma_1\sigma_2-2\left[\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}xyf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{0}\int_0^{\infty}xyf(x,y)dxdy\right]$$

令：

$$\begin{cases}u=\dfrac{x}{\sigma_1}\\ v=\dfrac{y}{\sigma_2}\end{cases}$$

则有：

$$E\{|XY|\}=r\sigma_1\sigma_2-\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}uv\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[u^2-2ruv+v^2\right]\right\}dudv$$

$$=r\sigma_1\sigma_2-\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi\sqrt{1-r^2}}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0}uv\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}\right)^2+v^2\right]\right\}dudv$$

令：

$$\begin{cases}R\cos\theta=\dfrac{u-rv}{\sqrt{1-r^2}}\\ R\sin\theta=v\end{cases}$$

则有：

$$\begin{cases} u = \sqrt{1-r^2} R\cos\theta + rR\sin\theta \\ v = R\sin\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(R,\theta)} = R\sqrt{1-r^2} \quad \Rightarrow \quad dudv = R\sqrt{1-r^2}\, dRd\theta$$

因此有：

$$E\{|XY|\} = r\sigma_1\sigma_2 -$$

$$-\frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\arccos r}^{0} R\sin\theta\left[\sqrt{1-r^2}R\cos\theta + rR\sin\theta\right]\exp\{-\frac{R^2}{2}\}RdRd\theta$$

$$= r\sigma_1\sigma_2 - \frac{4\sigma_1\sigma_2}{\pi}\int_{-\arccos r}^{0}\sin\theta\left[\sqrt{1-r^2}\cos\theta + r\sin\theta\right]d\theta$$

$$= r\sigma_1\sigma_2 - \frac{4\sigma_1\sigma_2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sqrt{1-r^2}\sin^2\theta + \frac{1}{2}r\theta - \frac{1}{4}r\sin 2\theta\right]_{-\arccos r}^{0}$$

$$= \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi}\left[\varphi\sin\varphi + \cos\varphi\right]$$

其中：$\sin\varphi = r,\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$。

（二）　高斯（正态）过程

定义：如果随机过程$\{\xi(t);\, t\in T\}$的有限维分布均为正态分布，则称此随机过程为高斯过程或正态过程。正态过程是二阶矩过程。

设$t_1, t_2, \cdots, t_n \in T$，则由正态过程的定义，有：

$$f_\xi(x_{t_1}, x_{t_2}, \cdots, x_{t_n}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|B|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}(\vec{x}_t - \vec{\mu}_t)^T B^{-1}(\vec{x}_t - \vec{\mu}_t)\}$$

其中：

$$\vec{x}_t^{\,T} = (x_{t_1}, x_{t_2}, \cdots, x_{t_n})$$

$$\vec{\mu}_t^T = (\mu_{t_1}, \mu_{t_2}, \cdots, \mu_{t_n}), \quad \mu_{t_k} = E\{\xi(t_k)\}$$

$$b_{ki} = E\{(\xi(t_k) - \mu_{t_k})(\xi(t_i) - \mu_{t_i})\} = R_\xi(t_k, t_i) - \mu_{t_k}\mu_{t_i}, \quad B = (b_{ki})_{n\times n}$$

如果$\{\xi(t); t\in T\}$为实的宽平稳过程，则$\mu_{t_k} = E\{\xi(t_k)\} = \mu$为常数，$R_\xi(t_k, t_i) = R_\xi(t_k - t_i)$, $b_{ki} = R_\xi(t_k - t_i) - \mu^2 = b(t_k - t_i)$，因此可得有限维分布的特征函数为：

$$\Phi_\xi(u_1, u_2, \cdots, u_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) =$$

$$= \exp\left\{ j\left(\sum_{k=1}^n u_k\right)\mu - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^n b(t_k - t_i)u_k u_i \right\}$$

由此，实平稳正态过程也是实严平稳过程。关于正态过程我们有以下的结论。

定理：设$\{\vec{\xi}^{(n)}; n = 1,2,\cdots\}$为$k$维实正态随机向量序列，其中$\vec{\xi}^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots, \xi_k^{(n)})^T$，且$\vec{\xi}^{(n)}$均方收敛于$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k)^T$，即

$$\lim_{n\to\infty} E\{\left|\xi_i^{(n)} - \xi_i\right|^2\} = 0, \quad 1 \le i \le k$$

则$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k)^T$也是正态分布的随机向量。

定理：若正态过程$\{\xi(t); t\in T\}$在T上是均方可导的，则$\{\xi'(t); t\in T\}$也是正态过程。

定理：若正态过程$\{\xi(t); t\in T\}$在T上是均方可积的，则

$$\eta(t) = \int_a^t \xi(u)du,\ a, t\in T \quad 及 \quad \eta(t) = \int_a^b \xi(u)h(t,u)du,\ a, b\in T$$

也是正态过程。

（三）　正态马氏过程

定义：若正态过程$\{X(t); t\in T\}$又是马尔可夫过程，则称$\{X(t); t\in T\}$为正态马尔可夫（马氏）过程。

先考虑n维均值为零的正态随机向量的条件分布，设$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$为$n$维正态分布，其分布密度为：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|A|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}\vec{x}A^{-1}\vec{x}\}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|A|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\}$$

其中：$A^{-1}=(a_{ij})_{n\times n}$为正定对称矩阵。

考虑X_n在条件$X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_{n-1}=x_{n-1}$下的条件分布密度：

$$f(x_n\,|\,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})=\frac{f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\int_{-\infty}^{+\infty}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)dx_n}$$

$$=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\right\}dx_n}$$

利用式子：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}x_ix_j+a_{nn}x_n^2+2x_n\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}x_i$$

我们有：

$$f(x_n\,|\,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\right\}dx_n}=$$

$$=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}a_{nn}x_n^2-x_n\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}x_i\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}a_{nn}x_n^2-x_n\sum_{i=1}^{n-1}a_{in}x_i\right\}dx_n}=\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}a_{nn}\left[x_n+\sum_{i=1}^{n-1}(a_{in}/a_{nn})x_i\right]^2\right\}}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{1}{2}a_{nn}\left[x_n+\sum_{i=1}^{n-1}(a_{in}/a_{nn})x_i\right]^2\right\}dx_n}$$

$$=c\exp\left\{-\frac{1}{2}a_{nn}\left[x_n+\sum_{i=1}^{n-1}(a_{in}/a_{nn})x_i\right]^2\right\}$$

其中c是归一化常数，与$(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$无关。由此可知，X_n在给定条件$X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_{n-1}=x_{n-1}$下的条件分布密度$f(x_n\,|\,x_1,x_2,\cdots,x_{n-1})$是一

正态分布的概率分布密度，其均值为$-\sum_{i=1}^{n-1}(a_{in}/a_{nn})x_i$，于是有：

$$E\{X_n \mid X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_{n-1}=x_{n-1}\}=-\sum_{i=1}^{n-1}\frac{a_{in}}{a_{nn}}x_i \qquad \text{(B)}$$

$$E\{X_n \mid X_{n-1}=x_{n-1}\}=-\frac{a_{n-1,n}}{a_{nn}}x_{n-1} \qquad \text{(C)}$$

若$\{X(t);t\ge 0\}$为一均值为零的实正态过程，记：

$$R(s,t)=E\{X(s)X(t)\}$$

$$\rho(s,t)=\frac{R(s,t)}{\sqrt{R(s,s)R(t,t)}}=\frac{Cov(s,t)}{\sqrt{Cov(s,s)Cov(t,t)}}$$

则有以下的定理。

定理：设$\{X(t);t\ge 0\}$为一均值为零的实正态过程，则它是马氏过程的充要条件为：对于任意的$0\le t_1<t_2<\cdots<t_n,n\ge 2$，有：

$$E\{X_{t_n} \mid X_{t_1}=x_1,X_{t_2}=x_2,\cdots,X_{t_{n-1}}=x_{n-1}\}=E\{X_{t_n} \mid X_{t_{n-1}}=x_{n-1}\} \qquad \text{(D)}$$

证明：必要性显然。

充分性：只要验证

$$f_{X_n|X_{n-1},\cdots,X_1}(x_n \mid x_{n-1},\cdots,x_1)=f_{X_n|X_{n-1}}(x_n \mid x_{n-1}) \qquad \text{(E)}$$

即可。

由于$f_{X_n|X_{n-1},\cdots,X_1}(x_n \mid x_{n-1},\cdots,x_1)$和$f_{X_n|X_{n-1}}(x_n \mid x_{n-1})$都是正态分布，由（**D**）可知其均值相等，又由（**D**），有

$$\begin{aligned}D\{X_n \mid X_{n-1},\cdots,X_1\}&=E[X_n-E\{X_n \mid X_{n-1},\cdots,X_1\}]^2\\&=E[X_n-E\{X_n \mid X_{n-1}\}]^2=D\{X_n \mid X_{n-1}\}\end{aligned}$$

其方差也相等，因此（**E**）成立。

定理：设$\{X(t);t\ge 0\}$为一均值为零的实正态过程，则它是马氏过程的充要条件为：对于任意的$0\le t_1<t_2<t_3$，有：

$$\rho(t_1,t_3)=\rho(t_1,t_2)\rho(t_2,t_3)$$

证明：必要性：设$\{X(t); t\geq 0\}$为马氏过程，任取$0<s<t$，则由（**B**）有：

$$E\{X(t)\,|\,X(s)=x\}=-\left(\frac{a_{n-1,n}}{a_{nn}}\right)x \qquad \text{（F）}$$

考虑$(X(s),X(t))$的联合分布，其分布密度为：

$$f_{s,t}(x_1,x_2)=\frac{1}{(2\pi)|A|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}\vec{x}^T A^{-1}\vec{x}\}$$

其中：

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} R(s,s) & R(s,t) \\ R(t,s) & R(t,t) \end{pmatrix}^{-1}=$$

$$=\frac{1}{R(s,s)R(t,t)-R(s,t)^2}\begin{pmatrix} R(t,t) & -R(t,s) \\ -R(s,t) & R(s,s) \end{pmatrix}$$

由（**F**）有：

$$E\{X(t)\,|\,X(s)=x\}=\left(\frac{R(s,t)}{R(s,s)}\right)x$$

即：
$$E\{X(t)\,|\,X(s)\}=\left(\frac{R(s,t)}{R(s,s)}\right)X(s)$$

由马尔可夫性，有：

$$R(t_1,t_3)=E\{X(t_1)X(t_3)\}=E\{E[X(t_1)X(t_3)\,|\,X(t_2)]\}$$

$$=E\{E[X(t_1)\,|\,X(t_2)]E[X(t_3)\,|\,X(t_2)]\}$$

由上式，我们有：

$$R(t_1,t_3)=E\left\{\frac{R(t_1,t_2)}{R(t_2,t_2)}X(t_2)\frac{R(t_2,t_3)}{R(t_2,t_2)}X(t_2)\right\}=\frac{R(t_1,t_2)R(t_2,t_3)}{R(t_2,t_2)}$$

由此得到了$\rho(t_1,t_3)=\rho(t_1,t_2)\rho(t_2,t_3)$。

充分性：由$\rho(t_1,t_3)=\rho(t_1,t_2)\rho(t_2,t_3)$，可得，对于任意的$1\leq k\leq n-1$，有：

$$\rho(t_k,t_n)=\rho(t_k,t_{n-1})\rho(t_{n-1},t_n)$$

即有：

$$R(t_k,t_n)=\frac{R(t_k,t_{n-1})R(t_{n-1},t_n)}{R(t_{n-1},t_{n-1})}$$

因而对于任意的$1\le k\le n-1$，有：

$$E\left\{\left[X(t_n)-\frac{R(t_{n-1},t_n)}{R(t_{n-1},t_{n-1})}X(t_{n-1})\right]X(t_k)\right\}=0$$

这就意味正态随机变量$X(t_n)-\dfrac{R(t_{n-1},t_n)}{R(t_{n-1},t_{n-1})}X(t_{n-1})$与$X(t_1),\cdots,X(t_{n-1})$相互独立，故有：

$$E\left\{X(t_n)-\frac{R(t_{n-1},t_n)}{R(t_{n-1},t_{n-1})}X(t_{n-1})\,\middle|\,X(t_1)=x_1,\cdots,X(t_{n-1})=x_{n-1}\right\}=0$$

即有：

$$E\{X_{t_n}\,\big|\,X_{t_1}=x_1,X_{t_2}=x_2,\cdots,X_{t_{n-1}}=x_{n-1}\}=\frac{R(t_{n-1},t_n)}{R(t_{n-1},t_{n-1})}x_{n-1}$$

$$=E\{X_{t_n}\,\big|\,X_{t_{n-1}}=x_{n-1}\}$$

充分性得证。

对于平稳随机正态序列及平稳正态随机过程的情形，我们有：

定理：设$\{X(n);n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为正态分布、平稳的随机序列，且$C(0)\ne 0$，则$X(n)$是马氏链的充分必要条件是：

$$C(n)=a^nC(0),\quad n\ge 0,|a|\le 1$$

其中：$C(n)$为$X(n)$的协方差函数。

定理：设$\{X(t);t\ge 0\}$为一均方连续、平稳的实正态过程，$C(\tau)$为其协方差函数，则该过程是马氏过程的充分必要条件为：

$$C(\tau)=C(0)e^{a\tau},\quad \tau\ge 0,a<0$$

（四）　窄带平稳实高斯过程

1.　一维包络分布和一维相位分布

由前面关于窄带平稳信号的表示法，我们有：

$$\begin{cases}\xi(t)=x_c(t)\cos 2\pi f_0 t+x_s(t)\sin 2\pi f_0 t\\ \hat{\xi}(t)=x_c(t)\sin 2\pi f_0 t-x_s(t)\cos 2\pi f_0 t\end{cases}$$

及

$$\begin{cases}x_c(t)=\xi(t)\cos 2\pi f_0 t+\hat{\xi}(t)\sin 2\pi f_0 t\\ x_s(t)=\xi(t)\sin 2\pi f_0 t-\hat{\xi}(t)\cos 2\pi f_0 t\end{cases}$$

其中：$E\{\xi(t)\}=0$，$\hat{\xi}(t)$ 为 $\xi(t)$ 的 Hilbert 变换。

若 $\xi(t)$ 为一窄带平稳的实正态过程，则由以上两组表达式可知，$x_c(t), x_s(t)$ 均为正态过程，且是联合正态过程（为什么？）。

例：设有线性系统，它的冲激响应为 $h(t)$，输入为实平稳正态过程 $\xi(t)$。设其输出为 $\eta(t)$，试证明 $\xi(t)$、$\eta(t)$ 为联合正态随机过程。

证明：由线性系统输入、输出的关系：

$$\eta(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(t-\tau)\xi(\tau)\,d\tau$$

可知 $\eta(t)$ 为实正态随机过程。

令：$\varsigma=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\xi(t)\,dt$，其中 $g(\cdot)$ 是一任意实函数。则 ς 为一正态分布随机变量。

定义实函数：

$$g(t)=g_1(t)+\int_{-\infty}^{+\infty}g_2(u)h(u-t)\,du$$

则有：

$$\begin{aligned}\varsigma&=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\xi(t)\,dt\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}g_1(t)\xi(t)\,dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g_2(u)\,h(u-t)\,du\,\xi(t)\,dt\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}g_1(t)\xi(t)\,dt+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h(u-t)\xi(t)\,dt\,g_2(u)\,du\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}g_1(u)\xi(u)\,du+\int_{-\infty}^{+\infty}g_2(u)\eta(u)\,du\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}(g_1(u),g_2(u))\cdot\begin{pmatrix}\xi(u)\\ \eta(u)\end{pmatrix}du\end{aligned}$$

由于$g(t)$、$g_1(t)$、$g_2(t)$为任意的实函数，而ς为一正态分布随机变量，因此$\xi(t)$、$\eta(t)$为联合正态随机过程。

下面研究窄带平稳实高斯过程的一维包络分布和一维相位分布：

设$\xi(t)$的相关函数为$R_\xi(\tau)$，方差为$\sigma_\xi^2 = R_\xi(0)$，则$x_c(t), x_s(t)$的均值为零，方差为：

$$\sigma_{x_c}^2 = R_{x_c}(0) = \sigma_{x_s}^2 = R_{x_s}(0) = R_\xi(0) = \sigma_\xi^2$$

由于$R_{x_c x_s}(0) = E\{x_c(t)x_s(t)\} = 0$，因此$x_c(t), x_s(t)$相互独立。它们的联合分布密度为：

$$f(x_c, x_s) = f(x_c)f(x_s) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{x_c^2 + x_s^2}{2\sigma_\xi^2}\}$$

由$\xi(t)$的表达式，我们有：

$$\xi(t) = V(t)\cos[2\pi f_0 t + \theta(t)]$$

其中：

$$\begin{cases} V(t) = \sqrt{x_c^2(t) + x_s^2(t)} \\ \theta(t) = tg^{-1}\left(-\dfrac{x_s(t)}{x_c(t)}\right) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} V(t)\cos\theta(t) = x_c(t) \\ -V(t)\sin\theta(t) = x_s(t) \end{cases}$$

此变换的雅克比行列式为：

$$J = \frac{\partial(x_{c_t}, x_{s_t})}{\partial(V_t, \theta_t)} = \begin{vmatrix} \cos\theta_t & -\sin\theta_t \\ -V_t\sin\theta_t & -V_t\cos\theta_t \end{vmatrix} = -V_t \quad \Rightarrow \quad |J| = V_t$$

当$V_t > 0, 0 \le \theta_t \le 2\pi$时，有：

$$f(V_t, \theta_t) = \frac{V_t}{2\pi\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2}{2\sigma_\xi^2}\}$$

故：

$$f(V_t) = \begin{cases} \dfrac{V_t}{\sigma_\xi^2}\exp\{-\dfrac{V_t^2}{2\sigma_\xi^2}\}, & V_t \ge 0 \\ 0, & V_t < 0 \end{cases}$$

即$V(t)$服从瑞利分布。

$$f(\theta_t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & 0\le\theta_t\le 2\pi\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

且有：

$$f(V_t,\theta_t)=f(V_t)f(\theta_t)$$

因此，在同一时刻t，包络$V(t)$与相位$\theta(t)$是独立的随机变量，但它们不是独立的随机过程。

另外有：

$$E\{V(t)\}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_\xi^2,\ E\{V^2(t)\}=2\sigma_\xi^2,\ D\{V(t)\}=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma_\xi^2$$

2． 研究包络$V(t)$与相位$\theta(t)$在任意两个不同时刻t_1,t_2的联合分布

此时可以推出：

$$f(V_{t_1},V_{t_2},\theta_{t_1},\theta_{t_2})\neq f(V_{t_1},V_{t_2})f(\theta_{t_1},\theta_{t_2})$$

由此可知包络过程$V(t)$与相位过程$\theta(t)$不独立。详细推导课后阅读。

（五） 正弦波和窄带平稳实高斯过程之和

令：

$$\eta(t)=P\sin(\omega_0 t+\theta)+\xi(t)$$

其中：$P,\omega_0=2\pi f_0$为常数，$\xi(t)$为窄带平稳实高斯过程，ω_0为窄带平稳实高斯过程的功率谱密度的中心角频率，$\theta\sim U(0,2\pi)$。θ与$\xi(t)$相互独立，并且满足：

$$E\{\xi(t)\}=0,\ D\{\xi(t)\}=\sigma_\xi^2$$

若θ是一固定的值，则由上式定义的随机过程$\eta(t)$仍然是一高斯过程，且

$$E\{\eta(t)\}=P\sin(\omega_0 t+\theta)$$

它是一关于时间参数t的函数，因此$\eta(t)$不是一平稳过程。

若$\theta \sim U(0,2\pi)$，则由上式定义的随机过程$\eta(t)$的均值函数为：

$$E\{\eta(t)\} = E\{P\sin(\omega_0 t+\theta)+\xi(t)\} = E\{P\sin(\omega_0 t+\theta\} + E\{\xi(t)\} = 0$$

$$\begin{aligned} R_\eta(t_1,t_2) &= \frac{P^2}{2}\cos\omega_0(t_1-t_2) + R_\xi(t_1-t_2) \\ &= \frac{P^2}{2}\cos\omega_0\tau + R_\xi(\tau) = R_\eta(\tau) \quad \tau = t_1 - t_2 \end{aligned}$$

由此可知，此时$\eta(t)$是一平稳过程。但是此时$\eta(t)$不是一高斯过程。

随机相位正弦波的特征函数为：

$$\Phi_s(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\{juP\sin(\omega_0 t+\theta)\}d\theta = J_0(Pu)$$

其中：J_0为零级贝塞尔函数。

注：贝塞尔函数的定义：

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n\theta - z\sin\theta)d\theta$$

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-jx\cos\theta}d\theta$$

$$I_0(x) = J_0(jx) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{x\cos\theta}d\theta$$

称$J_0(x)$为零级贝塞尔函数，$I_0(x)$为修正的零级贝塞尔函数。

随机相位正弦波的概率密度为：

$$f_s(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{P^2-x^2}}, & |x| < P \\ 0, & |x| \ge P \end{cases}$$

另外，窄带平稳实高斯过程的一维分布密度为：

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\xi}\exp\{-\frac{x^2}{2\sigma_\xi^2}\}$$

其特征函数为：

$$\Phi_{\xi}(u)=\exp\{-\frac{1}{2}\sigma_{\xi}^{2}u^{2}\}$$

由此可得$\eta(t)$的一维概率密度为：

$$f_{\eta}(x)=f_{s}(x)*f_{\xi}(x)$$

其特征函数为：

$$\Phi_{\eta}(u)=\Phi_{s}(u)\cdot\Phi_{\xi}(u)=J_{0}(Pu)\exp\{-\frac{1}{2}\sigma_{\xi}^{2}u^{2}\}$$

对上式作 **Fourier** 逆变换，可得$\eta(t)$的一维概率密度为：

$$f_{\eta}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\xi}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{[-x^{2}/(2\sigma_{\xi}^{2})]^{k}}{k!}\cdot{}_{1}F_{1}\left(k+\frac{1}{2};1;-\frac{P^{2}}{2\sigma_{\xi}^{2}}\right)$$

其中：

$${}_{1}F_{1}(a;b;z)=1+\frac{a}{b}\frac{z}{1!}+\frac{a(a+1)}{b(b+1)}\frac{z^{2}}{2!}+\frac{a(a+1)(a+2)}{b(b+1)(b+2)}\frac{z^{3}}{3!}+\cdots$$

为合流型超几何级数。

注意，在$\eta(t)$的一维概率密度的表达式中，$P^{2}/(2\sigma_{\xi}^{2})$代表随机正弦信号功率与窄带噪声$\xi(t)$的功率之比。$\eta(t)$的一维分布密度显然不是一正态分布，但是当信噪比很弱时，$\eta(t)$的一维分布密度应该很接近于正态分布。

下面研究$\eta(t)$的包络，也就是研究信号$\eta(t)$的检波器输出问题。

利用$\xi(t)$是窄带平稳实正态信号，我们有：

$$\begin{aligned}\eta(t)&=P\sin(\omega_{0}t+\theta)+\xi(t)\\&=P\sin(\omega_{0}t+\theta)+x_{c}(t)\cos 2\pi f_{0}t+x_{s}(t)\sin 2\pi f_{0}t\\&=(P\sin\theta+x_{c}(t))\cos 2\pi f_{0}t+(P\cos\theta+x_{s}(t))\sin 2\pi f_{0}t\\&=z_{c}(t)\cos 2\pi f_{0}t+z_{s}(t)\sin 2\pi f_{0}t\end{aligned}$$

其中：

$$\begin{cases}z_{c}(t)=P\sin\theta+x_{c}(t)\\z_{s}(t)=P\cos\theta+x_{s}(t)\end{cases}$$

由于$x_c(t), x_s(t)$是独立的正态分布随机变量，均值为零，方差为σ_ξ^2，并且由条件$x_c(t), x_s(t)$和θ是独立的，故当$0 \le \theta \le 2\pi$时，有：

$$f(x_c, x_s, \theta) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi^2} \exp\{-\frac{x_c^2 + x_s^2}{2\sigma_\xi^2}\} \cdot \frac{1}{2\pi}$$

由变换：

$$\begin{cases} z_c = P\sin\theta + x_c \\ z_s = P\cos\theta + x_s \\ \theta = \theta \end{cases}$$

可得$(z_c(t), z_s(t), \theta)$的联合分布密度：

$$f(z_c, z_s, \theta) = \frac{1}{4\pi^2\sigma_\xi^2} \exp\{-\frac{1}{2\sigma_\xi^2}[(z_c - P\sin\theta)^2 + (z_s - P\cos\theta)^2]\}$$

$$= \frac{1}{4\pi^2\sigma_\xi^2} \exp\{-\frac{z_c^2 + z_s^2 + P^2 - 2P(z_c\sin\theta + z_s\cos\theta)}{2\sigma_\xi^2}\} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

另外，

$$\eta(t) = z_c(t)\cos 2\pi f_0 t + z_s(t)\sin 2\pi f_0 t$$
$$= V(t)\cos(2\pi f_0 t + \varphi(t))$$

其中：

$$\begin{cases} V(t)\cos\varphi(t) = z_c(t) = P\sin\theta + x_c(t) \\ -V(t)\sin\varphi(t) = z_s(t) = P\cos\theta + x_s(t) \\ \theta = \theta \end{cases}$$

由此变换及$(z_c(t), z_s(t), \theta)$的联合分布密度，可得$(V(t), \varphi(t), \theta)$的联合分布密度：

当$V_t \ge 0, 0 \le \varphi_t \le 2\pi, 0 \le \theta \le 2\pi$时，有：

$$f(V_t,\varphi_t,\theta)=$$

$$=\frac{V_t}{4\pi^2\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2+P^2-2P(V_t\cos\varphi_t\sin\theta-V_t\sin\varphi_t\cos\theta)}{2\sigma_\xi^2}\}$$

$$=\frac{V_t}{4\pi^2\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2+P^2-2PV_t\cos(\theta-\varphi_t)}{2\sigma_\xi^2}\}$$

当其它情况时，有：

$$f(V_t,\varphi_t,\theta)=0$$

由此可以求得关于包络$V(t)$的边缘分布为：

$$f(V_t)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}f(V_t,\varphi_t,\theta)d\varphi_t d\theta$$

$$=\frac{V_t}{4\pi^2\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2+P^2}{2\sigma_\xi^2}\}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\{\frac{PV_t\cos(\theta-\varphi_t)}{\sigma_\xi^2}\}d\theta d\varphi_t$$

$$=\frac{V_t}{\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2+P^2}{2\sigma_\xi^2}\}\cdot\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\{\frac{PV_t\cos(\theta-\varphi_t-\pi/2)}{\sigma_\xi^2}\}d\theta d\varphi_t$$

$$=\frac{V_t}{\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2+P^2}{2\sigma_\xi^2}\}\cdot\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\{\frac{PV_t\cos(\pi/2+\varphi_t-\theta)}{\sigma_\xi^2}\}d\theta d\varphi_t$$

令：

$$\pi/2+\varphi_t-\theta=\alpha$$

有：

$$f(V_t)=\frac{V_t}{\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2+P^2}{2\sigma_\xi^2}\}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2-\theta}^{2\pi+\pi/2-\theta}\exp\{\frac{PV_t\cos\alpha}{\sigma_\xi^2}\}d\alpha d\theta$$

$$=\begin{cases}\frac{V_t}{\sigma_\xi^2}\exp\{-\frac{V_t^2+P^2}{2\sigma_\xi^2}\}\cdot I_0(\frac{PV_t}{\sigma_\xi^2}) & V_t\ge 0\\ 0, & V_t<0\end{cases}$$

其中：

$$I_0(x)=J_0(jx)\text{（零级修正贝塞尔函数）}$$

注意，当$P=0$时，此结果和前面关于$\xi(t)$的包络一维分布是一致的。

令：

$$\begin{cases} v = \dfrac{V_t}{\sigma_\xi} \\ a = \dfrac{P}{\sigma_\xi} \end{cases}$$

则有：

$$f(v) = v\exp\{-\frac{v^2 + a^2}{2}\}I_0(av) \quad v \ge 0$$

其中：$\dfrac{a^2}{2} = \dfrac{P^2}{2\sigma_\xi^2}$ 为输入（功率）信噪比；$v = \dfrac{V_t}{\sigma_\xi}$ 为包络与噪声均方根值之比。

注意以下的结果。当 $PV_t >> \sigma_\xi^2$ 时，包络的一维分布密度可以近似地表示为：

$$f(V_t) = \frac{1}{\sigma_\xi}\left(\frac{V_t}{2\pi P}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{(V_t - P)^2}{2\sigma_\xi^2}\}$$

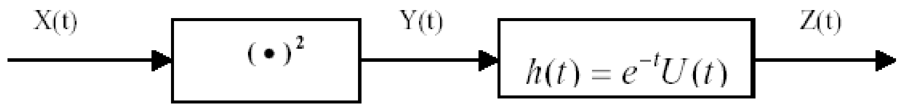
由此可知，当 V_t 接近于 P，且 $P >> \sigma_\xi$ 时，包络的一维分布密度近似于正态分布密度。

（六）例子

例 1．　设随机过程 $\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$ 是均值为零、自相关函数为 $R_X(\tau)$ 的实平稳正态过程，令随机过程 $Y(t) = X^2(t)$，试证明 $Y(t)$ 是平稳过程且其自相关函数为 $R_Y(\tau) = 2R_X^2(\tau) + R_X^2(0)$。若下图所示系统的输入 $X(t)$ 是一实平稳正态随机信号，其输出信号 $Z(t)$ 的功率谱密度函数为：

$$S_Z(\omega) = \frac{\pi\delta(\omega)}{1+\omega^2} + \frac{2\beta}{(\beta^2 + \omega^2)(1+\omega^2)} \qquad (\beta > 0)$$

试求随机信号 $X(t)$、$Y(t)$ 的自相关函数 $R_X(\tau)$ 和 $R_Y(\tau)$。



解：由于 $X(t)$ 是均值为零的实正态平稳过程，因此有：

$$E\{Y(t)\}=E\{X^2(t)\}=R_X(0)=\text{常数}$$

$$\begin{aligned}R_Y(\tau)&=E\{Y(t)Y(t-\tau)\}=E\{X^2(t)X^2(t-\tau)\}\\&=E\{X^2(t)\}E\{X^2(t-\tau)\}+2E\{X(t)X(t-\tau)\}\\&=2R_X^2(\tau)+R_X^2(0)\end{aligned}$$

因此 $Y(t)=X^2(t)$ 是平稳过程。

由题意可知：

$$H(\omega)=\int_0^{+\infty}e^{-t}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{1+j\omega}\quad\Rightarrow\quad |H(\omega)|^2=\frac{1}{1+\omega^2}$$

由：

$$S_Z(\omega)=|H(\omega)|^2S_Y(\omega)$$

可得：

$$S_Y(\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{2\beta}{(\beta^2+\omega^2)}$$

因此有：

$$R_Y(\tau)=\frac{1}{2}+e^{-\beta|\tau|}$$

根据式子：

$$R_Y(\tau)=2R_X^2(\tau)+R_X^2(0)$$

我们有：

$$\frac{3}{2}=R_Y(0)=3R_X^2(0)\quad\Rightarrow\quad R_X^2(0)=\frac{1}{2}$$

因此有：

$$R_X(\tau)=\sqrt{\frac{R_Y(\tau)-R_X^2(0)}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\beta|\tau|}{2}}$$

例 2．设有随机过程$\xi(t)=Xt^2+2Yt-1, 0<t<\infty$，$X$ 与Y是相互独立的正态随机变量，期望均为 0，方差分别是σ_X^2和σ_Y^2。问过程$\{\xi(t)\}$是否正态过程？是否平稳过程？均需说明理由。

解：任取$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，则有：

$$\begin{pmatrix}\xi(t_1)\\ \xi(t_2)\\ \vdots\\ \xi(t_n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Xt_1^2+2Yt_1-1\\ Xt_2^2+2Yt_2-1\\ \vdots\\ Xt_n^2+2Yt_n-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t_1^2 & 2t_1\\ t_2^2 & 2t_2\\ \vdots & \vdots\\ t_n^2 & 2t_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

由于X 与Y独立，且都服从正态分布，因此可得$(X,Y)^\tau$服从正态分布，根据随机向量线性变换的性质，由上式可知随机向量$(\xi(t_1),\xi(t_2),\cdots,\xi(t_n))^\tau$服从正态（高斯）分布，所以随机过程$\xi(t)=X\,t^2+Yt+1,\ 0<t<\infty$是正态（高斯）过程。

由于

$$m_\xi(t)=E\{Xt^2+2Yt-1\}=-1$$
$$R_\xi(s,t)=E\{\xi(s)\xi(t)\}=E\{[Xs^2+2Ys-1][Xt^2+2Yt-1]\}=$$
$$=E\{X^2s^2t^2+2XYs^2t-Xs^2+2XYt^2s+4Y^2st-2Ys-Xt^2-2Yt+1\}$$
$$=\sigma_X^2s^2t^2+4\sigma_Y^2st+1$$

由此可知，此随机过程不是平稳的。

例 3．设有随机过程$\xi(t)=X\,t^2+Yt+1,\ 0<t<\infty$，其中$X$ 与Y是相互独立的正态随机变量，期望均为 **0**，方差分别为σ_X^2和σ_Y^2。证明过程$\{\xi(t)\}$为均方可积的正态过程，并求过程$\{\ \eta(t)=\int_0^t\xi(s)ds,\ t>0\ \}$的相关函数。

解：正态过程的证明如上例。

由计算可得：

$$E\{\xi(t)\}=E\{Xt^2+Yt+1\}=t^2E\{X\}+tE\{Y\}+1=1$$

$$
\begin{aligned}
R_\xi(t_1,t_2) &= E\{\xi(t_1)\xi(t_2)\} = E\{[t_1^2X+t_1Y+1][t_2^2X+t_2Y+1]\} \\
&= t_1^2t_2^2E\{X^2\}+(t_1^2t_2+t_1t_2^2)E\{XY\}+t_1t_2E\{Y^2\}+ \\
&\qquad +(t_1^2+t_2^2)E\{X\}+(t_1+t_2)E\{Y\}+1 \\
&= t_1^2t_2^2E\{X^2\}+t_1t_2E\{Y^2\}+1 = t_1^2t_2^2\sigma_X^2+t_1t_2\sigma_Y^2+1
\end{aligned}
$$

由于$R_\xi(t_1,t_2)$连续，因此过程$\{\xi(t)\}$为均方可积。

过程$\{\ \eta(t)=\int_0^t\xi(s)ds,\ t>0\ \}$的相关函数为：

$$
\begin{aligned}
R_\eta(t_1,t_2) &= E\{\eta(t_1)\eta(t_2)\} = E\{\int_0^{t_1}\xi(u)du\int_0^{t_2}\xi(v)dv\} \\
&= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}E\{\xi(u)\xi(v)\}dudv = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}R_\xi(u,v)dudv \\
&= \int_0^{t_1}\int_0^{t_2}(u^2v^2\sigma_X^2+uv\sigma_Y^2+1)dudv
\end{aligned}
$$

（七）维纳过程（布朗运动）

1．维纳过程的定义

设质点每经过Δt时间，随机地以概率$p=1/2$向右移动$\Delta x>0$距离，以概率$q=1/2$向左移动$\Delta x>0$距离，且每次移动是相互独立的。记：

$$
X_i=\begin{cases}1, & 第i次质点向右移动\\ -1, & 第i次质点向左移动\end{cases}
$$

若$X(t)$表示在t时刻质点所处的位置，则有：

$$
X(t)=\Delta x(X_1+X_2+\cdots+X_{[\frac{t}{\Delta t}]})
$$

显然有：

$$
E\{X_i\}=0,\ D\{X_i\}=E\{X_i^2\}=1
$$

故有：

$$
E\{X(t)\}=0,\ D\{X(t)\}=(\Delta x)^2\left[\frac{t}{\Delta t}\right]
$$

假设$\Delta x=c\sqrt{\Delta t}$，其中$c>0$为常数，它由物理意义确定。

令$\Delta t \to 0$，即研究连续的游动，则有：

$$E\{X(t)\}=0$$

$$\lim_{\Delta t\to 0} D\{X(t)\}=\lim_{\Delta t\to 0}(\Delta x)^2\left[\frac{t}{\Delta t}\right]=\lim_{\Delta t\to 0} c^2\Delta t\left[\frac{t}{\Delta t}\right]=c^2 t$$

另一方面，任取两个时刻$0<t_1<t_2$，令：

$$n_1=\left[\frac{t_1}{\Delta t}\right],\quad n_2=\left[\frac{t_2}{\Delta t}\right]$$

则有：

$$X(t_1)=\Delta x(X_1+X_2+\cdots+X_{n_1})$$

$$X(t_2)=\Delta x(X_1+X_2+\cdots+X_{n_2})$$

$$X(t_2)-X(t_1)=\Delta x(X_{n_1+1}+\cdots+X_{n_2})$$

由于$(X_1+X_2+\cdots+X_{n_1})$与$(X_{n_1+1}+\cdots+X_{n_2})$是相互独立的，因此$X(t_1)$与$X(t_2)-X(t_1)$相互独立。即随机过程$X(t)$是一独立增量过程。由此$X(t)$可以看作由许多微小的相互独立的随机变量$X(t_i)-X(t_{i-1})$组成之和。由中心极限定理，当$\Delta t\to 0$时，我们有：

$$\lim_{\Delta t\to 0} P\left\{\frac{\sum_{i=0}^{\left[\frac{t}{\Delta t}\right]}\Delta x X_i-0}{\sqrt{c^2 t}}\le x\right\}=\Phi(x)$$

即有：

$$\lim_{\Delta t\to 0} P\left\{\frac{X(t)}{\sqrt{c^2 t}}\le x\right\}=\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\{-\frac{u^2}{2}\}du$$

故当$\Delta t\to 0$时，$X(t)$趋向于正态分布，即

$$\Delta t\to 0\text{时，}\ X(t)\sim N(0,c^2 t)$$

由此，我们引入维纳过程（**Wienner Process**）的定义：

定义：若一随机过程$\{W(t); t \geq 0\}$满足：

（1）$W(t)$是独立增量过程；

（2）$\forall s,t > 0, W(s+t) - W(s) \sim N(0, c^2 t)$；

（3）$W(t)$是关于t的连续函数；

则称$\{W(t); t \geq 0\}$是布朗运动或维纳过程（**Wienner Process**）。

若 $c = 1, W(0) = 0$ 时，称此时的维纳过程为标准的维纳过程，记为$\{W_0(t); t \geq 0\}$。标准维纳过程的一维概率密度为：

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\{-\frac{x^2}{2t}\}$$

且有：$W_0(t_i) - W_0(t_{i-1}) \sim N(0, t_i - t_{i-1})$。

注 1：维纳过程是正态过程（这一结论并不是显然的）:一般地，由维纳过程的定义可知，任取$t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，则$W(t_1), W(t_2) - W(t_1), \cdots, W(t_n) - W(t_{n-1})$相互独立，且都服从正态分布，由于：

$$\begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) \\ \vdots \\ W(t_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W(t_1) \\ W(t_2) - W(t_1) \\ \vdots \\ W(t_n) - W(t_{n-1}) \end{pmatrix}$$

因此 $W(t_1), W(t_2), \cdots, W(t_n)$ 也服从正态分布，即维纳过程也是正态过程。

注 2：维纳过程与 **Poission** 过程的比较。

定理：设$\{W_0(t); t \geq 0\}$为标准维纳过程，令 $x_0 = 0, t_0 = 0$，则对任意$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n$，$(W_0(t_1), W_0(t_2), \cdots, W_0(t_n))$的联合分布密度为：

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i - x_{i-1}; t_i - t_{i-1})$$

其中：

$$p(x; t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\{-\frac{x^2}{2t}\}$$

证明：令：$Y_1 = W_0(t_1), Y_i = W_0(t_i) - W_0(t_{i-1}), i = 2,3,\cdots,n$，则有：

$$W_0(t_i) = \sum_{k=1}^{i} Y_k \qquad \textbf{(*)}$$

由维纳过程的增量独立性知，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 是相互独立的，且 $Y_i \sim N(0, t_i - t_{i-1})$，则 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 的联合分布密度为：

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\{-\frac{y_i^2}{2(t_i - t_{i-1})}\}$$

由变换式子（*），可得 $(W_0(t_1), W_0(t_2), \cdots, W_0(t_n))$ 的联合密度函数为：

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = f(y_1, y_2, \cdots, y_n) \left| J \right|$$

其中：

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \left| J \right| = 1$$

故

$$g(x_1, x_2, \cdots, x_n; t_1, t_2, \cdots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\{-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\}$$

$$= \prod_{i=1}^{n} p(x_i - x_{i-1}; t_i - t_{i-1})$$

注意：由于标准维纳过程是独立增量过程，因此具有马氏性。即标准维纳过程是马氏过程。

2． 维纳过程的性质

下面主要研究标准维纳过程的基本性质。设 $\{W_0(t); t \geq 0\}$ 为标准维纳过程，则有：

$$E\{W_0(t)\}=0$$

$$E\{W_0(t_1)W_0(t_2)\}=E\{W_0(t_1)[W_0(t_2)-W_0(t_1)+W_0(t_1)]\}$$
$$=E\{W_0^2(t_1)\}=t_1 \quad t_1\le t_2$$

同理可得：

$$E\{W_0(t_1)W_0(t_2)\}=E\{W_0^2(t_2)\}=t_2 \quad t_1\ge t_2$$

因此有：

$$R_{W_0}(t_1,t_2)=E\{W_0(t_1)W_0(t_2)\}=\min(t_1,t_2)$$

故维纳过程不是平稳过程。

由于当 $t_1=t_2$ 时，标准维纳过程的相关函数 $R_{W_0}(t_1,t_2)$ 是一连续函数，因此标准维纳过程是均方连续的随机过程。

由于：

$$\frac{\partial}{\partial t_2}R_{W_0}(t_1,t_2)=u(t_1-t_2)=\begin{cases}1, & t_1>t_2\\ 0, & t_1<t_2\end{cases}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2}R_{W_0}(t_1,t_2)=\frac{\partial}{\partial t_1}u(t_1-t_2)=\delta(t_1-t_2)$$

因此若记标准维纳过程的均方导数为 $W_0^{/}(t)$，则有：

$$E\{W_0^{/}(t_1)W_0^{/}(t_2)\}=\frac{\partial}{\partial t_1}u(t_1-t_2)=\delta(t_1-t_2)=\delta(\tau) \quad \tau=t_1-t_2$$

由此可知 $W_0^{/}(t)$ 是一正态分布的白噪声。这提供了产生正态白噪声的一种方法。

记：$W(t)=\mu t+\sigma W_0(t)$，其中 μ,σ 为常数，则有：

$$E\{W(t)\}=\mu t$$

$$D\{W(t)\}=E\{[W(t)-\mu t]^2\}=\sigma^2E\{W_0^2(t)\}=\sigma^2 t$$

我们称 μ 为偏离系数，σ^2 为过程 $W(t)$ 的强度。$W(t)$ 的一维分布密度为：

$$f_W(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}\sigma}\exp\{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}\}$$

$W(t)$为非平稳过程。

例：设$\{B_t; t\geq 0\}$是初值为零标准布朗运动过程，试求它的概率转移密度函数 $p(s,t,x,y)\hat{=} f_{B_t|B_s}(y|x)$。

解：由标准维纳过程的定理：设$\{W_0(t); t\geq 0\}$为标准维纳过程，则对任意 $0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，$(W_0(t_1),W_0(t_2),\cdots,W_0(t_n))$的联合分布密度为：

$$g(x_1,x_2,\cdots,x_n;t_1,t_2,\cdots,t_n)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i-x_{i-1};t_i-t_{i-1})$$

其中：

$$p(x;t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\{-\frac{x^2}{2t}\}$$

可知：当$s<t$时，(B_s,B_t)的联合分布密度为：

$$f_{B_sB_t}(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right\}$$

B_s的分布密度为：

$$f_{B_s}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2s}\right\}$$

因此

$$p(s,t,x,y)\hat{=} f_{B_t|B_s}(y|x)=\frac{f_{B_sB_t}(x,y)}{f_{B_s}(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}}\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right\}$$

例：求随机过程$X(t)=W^2(t), t>0$,（其中$W(t)$是偏离系数为零，强度为σ^2的 Wienner 过程）的均值函数和相关函数，从而判定其均方连续性和均方可微性。

例：设$W(t)$是偏离系数为零，强度为σ^2的 Wienner 过程，求随机过程 $X(t)=\int_0^t sW(s)ds$ 和 $X(t)=tW\left(\frac{1}{t}\right)$ 的均值函数和相关函数。

3．维纳过程的应用

设$\xi(t)$是一正态分布的白噪声，研究其均方积分$\{\eta(t)=\int_0^t \xi(u)du; t\geq 0\}$的统计特性。

假设：

$$E\{\xi(t)\}=0,\ R_\xi(\tau)=\sigma^2\delta(\tau)$$

由于均方积分是一线性变换，由$\xi(t)$是一正态过程，可知$\int_0^t \xi(u)du$仍然为一正态过程。且有：

（1）$E\{\eta(t)\}=E\{\int_0^t \xi(u)du\}=0$

（2）$E\{\eta(0)\}=E\{\int_0^0 \xi(u)du\}=0$

（3）当$0\leq t_1<t_2$时，有：

$$R_\eta(t_1,t_2)=E\{\int_0^{t_1}\xi(u)du\int_0^{t_2}\xi(v)dv\}=E\{\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\xi(u)\xi(v)dudv\}$$

$$=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\sigma^2\delta(u-v)dvdu=\int_0^{t_1}\sigma^2 du=\sigma^2 t_1$$

当$0\leq t_2<t_1$时，有：

$$R_\eta(t_1,t_2)=E\{\int_0^{t_1}\xi(u)du\int_0^{t_2}\xi(v)dv\}=E\{\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}\xi(u)\xi(v)dudv\}$$

$$=\int_0^{t_2}\int_0^{t_1}\sigma^2\delta(u-v)dudv=\int_0^{t_2}\sigma^2 dv=\sigma^2 t_2$$

由此有：

$$R_\eta(t_1,t_2)=\sigma^2\min(t_1,t_2)$$

因此$\eta(t)$是一维纳过程。若$\sigma^2=1$，则$\eta(t)$是一标准维纳过程，即$\eta(t)=W_0(t)$。

由上面讨论的维纳过程的性质可知，当$\sigma^2=1$时，有：

$$\frac{d}{dt}W_0(t)=W_0'(t)\quad（W_0'(t)\text{为正态白噪声}）$$

$$\int_0^t W_0'(u)du=W_0(t)$$

（八）维纳积分

1. 维纳积分的定义

定义：给定$\{W_0(t);t\ge 0\}$是一标准维纳过程，$b(t)\,(t\ge 0)$为一确定性函数，且满足：

$$\int_0^t |b(u)|^2 du<\infty \quad \forall t\ge 0$$

给定$t>0$，对区间$[0,t]$作一任意划分$0=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=t$，作和为：

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1} b(t_k)[W_0(t_{k+1})-W_0(t_k)]$$

称S_n的均方极限为维纳积分，记为：

$$U(t)=\int_0^t b(u)dW_0(u)$$

即：

$$\lim_{\lambda\to 0} E\{\left| S_n-\int_0^t b(u)dW_0(u)\right|^2\}$$

$$=\lim_{\lambda\to 0} E\{\left|\sum_{k=0}^{n-1} b(t_k)[W_0(t_{k+1})-W_0(t_k)]-\int_0^t b(u)dW_0(u)\right|^2\}=0$$

其中：$\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}(t_k-t_{k-1})$。

注：可以证明S_n的均方极限一定存在。并且有以下的结果：

$$E\{U(t)\}=E\{\int_0^t b(u)dW_0(u)\}=0$$

$$R_U(t_1,t_2)=E\{\int_0^{t_1} b(u)dW_0(u)\int_0^{t_2} b(v)dW_0(v)\}$$

$$=\int_0^{\min(t_1,t_2)} b^2(u)du$$

注意以上定义中S_n的求和方式。

例：试研究维纳积分：

$$U(t)=\int_0^t \sin\omega u dW_0(u)$$

的均值，相关函数。令 $\Delta U=U(t_2)-U(t_1)$ $(t_2>t_1)$，试研究 ΔU 的均值和相关函数。

解：由于：$\int_0^t \sin^2\omega u du<\infty$，故维纳积分是存在的。因此：$E\{U(t)\}=0$，

$$R_U(t_1,t_2)=\int_0^{\min(t_1,t_2)}\sin^2(\omega u)du=\int_0^{\min(t_1,t_2)}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2\omega u)\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\min(t_1,t_2)-\frac{1}{4\omega}\sin\{2\omega[\min(t_1,t_2)]\}\quad (t_1\ge 0,t_2\ge 0)$$

由于维纳过程是一正态过程，因此维纳积分 $U(t)$ 仍然为一正态过程，所以 ΔU 是正态分布的随机变量。由此我们有：

$$E\{\Delta U\}=0$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\Delta U}^2&=E\{[U(t_2)-U(t_1)]^2\}\\&=R_U(t_2,t_2)-2R_U(t_2,t_1)+R_U(t_1,t_1)\\&=\frac{t_2}{2}-\frac{\sin 2\omega t_2}{4\omega}-t_1+\frac{\sin 2\omega t_1}{2\omega}+\frac{t_1}{2}-\frac{\sin 2\omega t_1}{4\omega}\\&=\frac{1}{2}(t_2-t_1)-\frac{1}{2\omega}\cos\omega(t_1+t_2)\sin\omega(t_2-t_1)\end{aligned}$$

2． 维纳积分的性质

（1） 关于确定性函数的线性性：

设 a_1,a_2 为常数，$b_1(u),b_2(u)$ 为确定性函数，且满足：

$$\int_0^t b_1^2(u)du<\infty,\ \int_0^t b_2^2(u)du<\infty,\quad \forall t\ge 0$$

则有：

$$\int_0^t [a_1b_1(u)+a_2b_2(u)]dW_0(u)=a_1\int_0^t b_1(u)dW_0(u)+a_2\int_0^t b_2(u)dW_0(u)$$

（2） 可加性

$$\int_0^{t_1} b(u)dW_0(u) + \int_{t_1}^{t_2} b(u)dW_0(u) = \int_0^{t_2} b(u)dW_0(u), 0 \le t_1 < t_2$$

注意：当 $t \ge 0, b(u) > 0$ 时，并不一定有 $U(t) = \int_0^t b(u)dW_0(u) > 0$，例如：取 $b(u) = 1$ 时，有 $U(t) = \int_0^t 1 dW_0(u) = W_0(t)$，而 $W_0(t)$ 是一正态分布的随机变量，它可能取负值。

3． 维纳积分的统计特性

维纳积分 $\{U(t); t \ge 0\}$ 是一随机过程，它具有以下基本性质：

（**1**）$U(0) = 0$；

（**2**）$E\{U(t)\} = 0$

（**3**）$\{U(t); t \ge 0\}$ 是一正态过程；

（**4**）$\{U(t); t \ge 0\}$ 是一独立增量过程，因此是一马氏过程；

（**5**）$U(t)$ 的方差为 $\sigma_U^2(t) = \int_0^t b^2(u)du$；

（**6**）$U(t)$ 的方差的导数为：$\dfrac{d\sigma_U^2}{dt} = b^2(t)\ (t \ge 0)$，它是一时间 t 的函数。

注意到维纳过程方差的导数是一常数，因此我们称 $U(t)$ 为非齐次维纳过程，$b(t)$ 为 $U(t)$ 的强度函数。

由于 $\dfrac{d}{dt}W_0(t) = W_0'(t)$，$W_0'(t)$ 为正态白噪声，因此，考虑一个线性系统，其冲激响应为 $h(t,\tau)$，冲激响应满足平方可积。以正态白噪声输入此系统，则输出为：

$$\eta(t) = \int_0^t h(t,\tau)W_0'(\tau)d\tau = \int_0^t h(t,\tau)dW_0(\tau)$$

因此，输出是一维纳积分，它是一非齐次的维纳过程，并且有：

$$E\{\eta(t)\} = 0$$

$$R_\eta(t_1,t_2)=E\left\{\int_0^{t_1}h(t_1,u)W_0^{/}(u)du\int_0^{t_2}h(t_2,v)W_0^{/}(v)dv\right\}$$

$$=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}h(t_1,u)h(t_2,v)E\{W_0^{/}(u)W_0^{/}(t_2)\}dudv$$

$$=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}h(t_1,u)h(t_2,v)\delta(u-v)dudv$$

$$=\int_0^{\min(t_1,t_2)}h(t_1,u)h(t_2,u)du$$

4． 广义维纳积分

设有两个独立的标准维纳过程$\{W_{01}(t);t\ge 0\}$和$\{W_{02}(t);t\ge 0\}$，定义：

$$W_0(t)=\begin{cases}W_{01}(t); & t\ge 0\\ W_{02}(-t); & t<0\end{cases}$$

并假定

$$\int_{-\infty}^{t}|h(t,u)|^2du<\infty$$

记

$$\xi(t)=\int_{-\infty}^{t}h(t,u)dW_0(u)\hat{=}\lim_{t_1\to-\infty}\int_{t_1}^{t}h(t,u)dW_0(u)\quad(-\infty<t<\infty)$$

则称$\xi(t)$为广义维纳积分。

广义维纳积分具有以下的基本性质：

（1）$E\{\xi(t)\}=0$

（2）$R_\xi(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\min(t_1,t_2)}h(t_1,u)h(t_2,u)du\quad(-\infty<t_1,t_2<\infty)$

例：设：

$$h(t,u)=\begin{cases}\beta\exp\{-\alpha(t-u)\}, & -\infty<u<t<\infty\\ 0, & -\infty<t<u<\infty\end{cases}\qquad \alpha,\beta>0$$

试研究广义维纳积分的统计性质。

解：由广义维纳积分的性质有$E\{\xi(t)\}=0$。其中：

$$\xi(t)=\beta\int_{-\infty}^{t}\exp\{-\alpha(t-u)\}dW_0(u)$$

$$R_\xi(t_1,t_2)=\beta^2\int_{-\infty}^{\min(t_1,t_2)}\exp\{-\alpha(t_1-u)\}\exp\{-\alpha(t_2-u)\}du$$

当$t_2>t_1$时，有：

$$R_\xi(t_1,t_2)=\beta^2\int_{-\infty}^{t_1}\exp\{-\alpha(t_1+t_2)\}\exp\{2\alpha u\}du=\frac{\beta^2}{2\alpha}\exp\{-\alpha(t_2-t_1)\}$$

当$t_2<t_1$时，有：

$$R_\xi(t_1,t_2)=\beta^2\int_{-\infty}^{t_2}\exp\{-\alpha(t_1+t_2)\}\exp\{2\alpha u\}du=\frac{\beta^2}{2\alpha}\exp\{-\alpha(t_1-t_2)\}$$

故：

$$R_\xi(t_1,t_2)=\frac{\beta^2}{2\alpha}\exp\{-\alpha|t_1-t_2|\}=\frac{\beta^2}{2\alpha}\exp\{-\alpha|\tau|\},\quad \tau=t_1-t_2$$

因此$\xi(t)$是一平稳过程。由于：

$$\xi(t)=\beta\int_{-\infty}^{t}\exp\{-\alpha(t-u)\}dW_0(u)=\beta\int_{-\infty}^{t}\exp\{-\alpha(t-u)\}W_0'(u)du$$

而$W_0'(t)$为正态白噪声，因此$\xi(t)$是一正态过程，而且是一马氏过程，参数为$\beta^2/(2\alpha),\alpha$。

注意：例中给出的过程$\xi(t)$称为奥斯坦－乌伦贝克（**Ornstein-Uhlenbeck**）过程，它是一正态马氏过程。

（九）伊藤（Ito）随机积分

1. 伊藤（Ito）随机积分的定义

考察以下随机微分方程：

$$\begin{cases}\dfrac{dX(t)}{dt}=f(t,X(t))+g(t,X(t))\dfrac{dW(t)}{dt}\\ X(t_0)=X_0\end{cases}$$

其中：$W(t)$为维纳过程。此随机方程我们称为伊藤（Ito）随机微分方程。此方

程形式上的解可以写成：

$$X(t)=X_0+\int_{t_0}^{t}f(t,X(t))dt+\int_{t_0}^{t}g(t,X(t))dW(t)$$

此积分称为伊藤（**Ito**）随机积分方程。

要研究此方程的解，我们需要引入伊藤（**Ito**）随机积分的定义。

定义：设 $X(t)$ 为一二阶矩过程，$W(t)$ 为维纳过程，对区间 $[a,b]\ (b>a\geq 0)$ 进行划分：$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$，记 $\lambda=\max\limits_{1\leq k\leq n}\{t_k-t_{k-1}\}$，作和式：

$$\eta_n=\sum_{k=1}^{n}X(t_{k-1})[W(t_k)-W(t_{k-1})]$$

若以上和式 η_n 当 $\lambda\to 0, n\to\infty$ 时均方收敛，则其均方极限称为 $X(t)$ 关于维纳过程 $W(t)$ 的伊藤（**Ito**）随机积分。记为：

$$\underset{\lambda\to 0,n\to\infty}{l.i.m}\ \eta_n=\int_a^b X(t)dW(t)$$

注意：和式中求和取点的方式。

定理：设 $X(t)$ 为均方连续的二阶矩过程，并且对任意的 $s_1',s_2'\leq t_{k-1}<t_k$ 及 $s_1<s_2\leq t_{k-1}<t_k$，随机向量 $(X(s_1'),X(s_2'),W(s_2)-W(s_1))$ 与 $W(t_k)-W(t_{k-1})$ 相互独立，则 $X(t)$ 关于维纳过程 $W(t)$ 的伊藤（**Ito**）随机积分存在且唯一。

若 $W(t)$ 为标准维纳过程时，则有：

$$E\left\{\left(\int_a^b X(t)dW_0(t)\right)^2\right\}=\int_a^b E\left\{X^2(t)\right\}dt$$

例：研究伊藤（**Ito**）随机积分 $\int_a^b W_0(t)dW_0(t)$。

解：标准维纳过程 $W_0(t)$ 满足以上定理的要求，因此伊藤（**Ito**）积分 $\int_a^b W_0(t)dW_0(t)$ 存在且唯一。对区间 $[a,b]$ 进行划分：

$$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_{n-1}<t_n=b,\quad \lambda=\max_{1\leq k\leq n}\{t_k-t_{k-1}\},$$

作和式如下：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} W_0(t_{k-1})[W_0(t_k)-W_0(t_{k-1})]= \\
&\quad =-\sum_{k=1}^{n} W_0(t_{k-1})[W_0(t_{k-1})-W_0(t_k)] \\
&\quad =-\{W_0^2(t_0)-W_0(t_0)W_0(t_1)+W_0^2(t_1)-W_0(t_1)W_0(t_2)+ \\
&\qquad +\cdots+W_0^2(t_{n-1})-W_0(t_{n-1})W_0(t_n)\} \\
&\quad =-\left\{\frac{1}{2}W_0^2(t_0)+\frac{1}{2}[W_0(t_0)-W_0(t_1)]^2+\frac{1}{2}[W_0(t_1)-W_0(t_2)]^2+\right. \\
&\qquad \left.+\cdots+\frac{1}{2}[W_0(t_{n-1})-W_0(t_n)]^2-\frac{1}{2}W_0^2(t_n)\right\} \\
&\quad =\frac{1}{2}[W_0^2(b)-W_0^2(a)]-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[W_0(t_k)-W_0(t_{k-1})]^2
\end{aligned}
$$

令：

$$
\Delta W_{0k}=W_0(t_k)-W_0(t_{k-1}),\quad \Delta t_k=t_k-t_{k-1}
$$

则由：

$$
\begin{aligned}
&E\left\{\left[\sum_{k=1}^{n}(\Delta W_{0k})^2-(b-a)\right]^2\right\}=E\left\{\sum_{k=1}^{n}[(\Delta W_{0k})^2-\Delta t_k]\right\}^2 \\
&=E\{\sum_{k=1}^{n}[\Delta W_{0k}^2-\Delta t_k]^2+2\sum_{k,i=1;k\neq i}^{n}[\Delta W_{0k}^2-\Delta t_k][\Delta W_{0i}^2-\Delta t_i]\} \\
&=\sum_{k=1}^{n}E[\Delta W_{0k}^2-\Delta t_k]^2+2\sum_{k,i=1;k\neq i}^{n}E\{[\Delta W_{0k}^2-\Delta t_k][\Delta W_{0i}^2-\Delta t_i]\} \\
&=\sum_{k=1}^{n}E[\Delta W_{0k}^2-\Delta t_k]^2+2\sum_{k,i=1;k\neq i}^{n}E\{\Delta W_{0k}^2-\Delta t_k\}E\{\Delta W_{0i}^2-\Delta t_i\} \\
&=\sum_{k=1}^{n}E[\Delta W_{0k}^2-\Delta t_k]^2 \\
&=\sum_{k=1}^{n}E\{\Delta W_{0k}^4-2[\Delta W_{0k}^2](\Delta t_k)+(\Delta t_k)^2\} \\
&=\sum_{k=1}^{n}\{3(\Delta t_k)^2-2(\Delta t_k)(\Delta t_k)+(\Delta t_k)^2\}=2\sum_{k=1}^{n}(\Delta t_k)^2\le 2\lambda\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k \\
&=2\lambda(b-a)\to 0\quad(\lambda\to 0)
\end{aligned}
$$

可知：

$$\underset{\lambda\to 0}{l.i.m}\sum_{k=1}^{n}[W_0(t_k)-W_0(t_{k-1})]^2=b-a$$

由上面推导的和式，我们有：

$$\int_a^b W_0(t)dW_0(t)=\frac{1}{2}[W_0^2(b)-W_0^2(a)]-\frac{1}{2}\underset{\lambda\to 0}{l.i.m}\sum_{k=1}^{n}[W_0(t_k)-W_0(t_{k-1})]^2$$

$$=\frac{1}{2}[W_0^2(b)-W_0^2(a)]-\frac{1}{2}(b-a)$$

注意：如果令：

$$I_n=\sum_{k=1}^{n}W_0(t_{k-1})[W_0(t_k)-W_0(t_{k-1})]$$

$$J_n=\sum_{k=1}^{n}W_0(t_k)[W_0(t_k)-W_0(t_{k-1})]$$

则有：

$$J_n-I_n=\sum_{k=1}^{n}[W_0(t_k)-W_0(t_{k-1})]^2$$

$$\underset{\lambda\to 0}{l.i.m}(J_n-I_n)=b-a$$

这就是在伊藤（Ito）随机积分的定义中，我们为什么在作和式 $\eta_n=\sum_{k=1}^{n}X(t_{k-1})[W(t_k)-W(t_{k-1})]$ 时要在 $X(\cdot)$ 中取划分小区间左边的点 t_{k-1}，而不取任意的 $t_k' \in [t_{k-1},t_k]$ 的原因。

2．伊藤（Ito）积分的性质

（1）线性性：

$$\int_a^b[\alpha X(t)+\beta Y(t)]dW(t)=\alpha\int_a^b X(t)dW(t)+\beta\int_a^b Y(t)dW(t)$$

（2）如果 $a\le b\le c$，则有

$$\int_a^c X(t)dW(t)=\int_a^b X(t)dW(t)+\int_b^c X(t)dW(t)$$

（**3**）设 $\int_a^b X(t)\,dW_0(t)$ 存在，则对于 $a \le t \le b$，有：

$$Y(t) = \int_a^t X(u) dW_0(u)$$

存在，且关于 t 均方连续。

（**4**）设 $\{X_n(t), t \in [a,b]\}$ 是均方连续的二阶矩过程序列，且满足伊藤（**Ito**）随机积分存在的条件。如果关于 t 一致地有：

$$X(t) = \underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n(t)$$

则 $X(t)$ 也是均方连续的，且满足伊藤（**Ito**）随机积分存在的条件，对于一切的 $a \le t \le b$，一致地有：

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m} \int_a^t X_n(u) dW_0(u) = \int_a^t X(u) dW_0(u)$$

注意：在伊藤（**Ito**）随机积分中，如果 $X(t)$ 为一确定性函数，则它就是上面定义的维纳积分。

3． 伊藤（**Ito**）随机积分的应用

研究线性伊藤（**Ito**）随机微分方程（**Langevin** 方程）：

$$\begin{cases} \dfrac{dX(t)}{dt} = -\alpha X(t) + \beta \dfrac{dW_0(t)}{dt} \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

其中：$\alpha > 0, \beta > 0$ 为常数。

解：注意到方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} + \alpha x(t) = \beta y(t) & t \ge 0 \\ x(0) = 0 \end{cases} \qquad \textbf{(*)}$$

的解可以写成：

$$x(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} y(u) du$$

因此以上的线性伊藤（**Ito**）随机微分方程可以看作以白噪声 $\beta \dfrac{dW_0(t)}{dt}$ 激励由方

程（*）确定的线性系统，因此 $X(t)$ 形式上可以写成：

$$X(t)=\int_0^t e^{-\alpha(t-u)}\beta W_0^{/}(u)du=\beta\int_0^t e^{-\alpha(t-u)}dW_0(u)$$

因此有：

$$E\{X(t)\}=0$$

$$R_X(t_1,t_2)=\beta^2\int_0^{\min(t_1,t_2)}\exp\{-\alpha(t_1-u)\}\exp\{-\alpha(t_2-u)\}du$$

$$=\beta^2\exp\{-\alpha(t_1+t_2)\}\int_0^{\min(t_1,t_2)}\exp\{2\alpha u)\}du$$

$$=\frac{\beta^2}{2\alpha}[\exp\{-\alpha|t_1-t_2|\}-\exp\{-\alpha(t_1+t_2)\}]\quad t_1,t_2\geq 0$$

注意 $X(t)$ 不是一平稳的随机过程（有瞬时效应），如果激励时间换成 $t=-\infty$，则有

$$R_X(t_1,t_2)=\frac{\beta^2}{2\alpha}\exp\{-\alpha|t_1-t_2|\}\quad t_1,t_2\geq 0$$

此时的输出即为一平稳的随机过程。以上的输出 $X(t)=\beta\int_0^t e^{-\alpha(t-u)}dW_0(u)$ 称为奥斯坦－乌伦贝克（Ornstein -Uhlenbeck）过程。

（十）例子

例 **1**． 设 $\{W(t);t\geq 0\}$ 为一标准的维纳过程，令随机过程 $Y(t)=W(t+1)-W(t)$，$t\geq 0$。

（a）试证明随机过程 $\{Y(t);t\geq 0\}$ 是平稳过程；

（b）试证明随机过程 $\{Y(t);t\geq 0\}$ 的功率谱密度为:

$$S_Y(\omega)=(\omega/2)^{-2}\cdot\sin^2(\omega/2)$$

（c）试求 $W(1)+W(2)+\cdots+W(n)$ 的分布。

解：解：（a）显然有，

$$E\{Y(t)\}=E\{W(t+1)-W(t)\}=E\{W(t+1)\}-E\{W(t)\}=0$$

$$R_Y(s,t)=E\{Y(s)Y(t)\}=E\{[W(s+1)-W(s)][W(t+1)-W(t)]\}$$
$$=\min\{s+1,t+1\}-\min\{s,t+1\}-\min\{s+1,t\}+\min\{s,t\}$$

因此，我们有：

当$0\le s\le t\le s+1$时：$R_Y(s,t)=s+1-s-t+s=1+(s-t)$

当$0\le t\le s\le t+1$时：$R_Y(s,t)=t+1-t-s+t=1-(s-t)$

当 $t\ge s+1$，或 $s\ge t+1$时：$R_Y(s,t)=0$

令$\tau=s-t$，则$Y(t)$的自相关函数为：

$$R_Y(\tau)=\begin{cases}1-|\tau|, & |\tau|\le 1\\ 0, & |\tau|>1\end{cases}$$

所以随机过程$\{Y(t);t\ge 0\}$是平稳过程。

（**b**）由维纳－辛钦公式，有：

$$S_Y(\omega)=\int_{-1}^{1}(1-|\tau|)e^{-j\omega\tau}d\tau$$
$$=\int_0^1 2(1-\tau)\cos(\omega\tau)d\tau=(\omega/2)^{-2}\cdot\sin^2(\omega/2)$$

（c）由于维纳过程是正态过程，因此可知$\xi=W(1)+W(2)+\cdots+W(n)$是正态分布的随机变量，且$E\{\xi\}=E\{W(1)+W(2)+\cdots+W(n)\}=0$，下面求此随机变量的方差：

$$D\{\xi\}=E\{\xi^2\}=E\{[W(1)+W(2)+\cdots+W(n)]^2\}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}E\{W^2(i)\}+2\sum_{1\le i<j\le n}E\{W(i)W(j)\}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

所以 $\xi=W(1)+W(2)+\cdots+W(n)\sim N\left(0,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$。