第二章　Markov 过程 习题解答

1、设 $\{\xi_n, n \ge 1\}$ 为相互独立同分布的随机变量序列，其分布为：

$$P\{\xi_n = 1\} = p > 0,\quad P\{\xi_n = 0\} = q = 1 - p > 0$$

定义随机序列 $\{X_n, n \ge 2\}$ 和 $\{Y_n, n \ge 2\}$ 如下：

$$X_n = \begin{cases} 0, & \xi_n = 0, \xi_{n-1} = 0; \\ 1, & \xi_n = 0, \xi_{n-1} = 1; \\ 2, & \xi_n = 1, \xi_{n-1} = 0; \\ 3, & \xi_n = 1, \xi_{n-1} = 1; \end{cases} \qquad Y_n = \begin{cases} 0, & \xi_n = 0, \xi_{n-1} = 0; \\ 1, & \text{其它}; \end{cases}$$

试问随机序列 $\{X_n, n \ge 2\}$ 和 $\{Y_n, n \ge 2\}$ 是否为马氏链？如果是的话，请写出其一步转移概率矩阵并研究各个状态的性质。不是的话，请说明理由。

解：（1）显然，随机序列 $\{X_n, n \ge 2\}$ 的状态空间为 $S = \{0,1,2,3\}$。

任意取 $i, j, i_2, i_3, \cdots, i_{n-1} \in S$，由于当 $X_n = i$ 给定时，即 ξ_n, ξ_{n-1} 的值给定时，就可以确定 X_{n+1} 的概率特性，即我们有：

$$P\{X_{n+1} = j \big| X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \cdots, X_3 = i_3, X_2 = i_2\} = P\{X_{n+1} = j \big| X_n = i\}$$

因此 $\{X_n, n \ge 2\}$ 是齐次马氏链，其一步转移概率矩阵为：

$$P = \begin{bmatrix} q & 0 & p & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & q & 0 & p \end{bmatrix}$$

由于 $p > 0, q = 1 - p > 0$，画出状态转移图，可知各个状态都相通，且都是非周期的，因此此链是不可约的遍历链。（也可以利用 $P^2 > 0$ 判定此链是不可约的遍历链）

（2）显然，$\{Y_n, n \ge 2\}$ 的状态空间为 $S = \{0,1\}$，由于：

$$P\{Y_4 = 0 \big| Y_3 = 1, Y_2 = 1\} = \frac{P\{Y_4 = 0, Y_3 = 1, Y_2 = 1\}}{P\{Y_3 = 1, Y_2 = 1\}}$$

$$P\{Y_4 = 0 \big| Y_3 = 1, Y_2 = 0\} = \frac{P\{Y_4 = 0, Y_3 = 1, Y_2 = 0\}}{P\{Y_3 = 1, Y_2 = 0\}}$$

由 $\{Y_n, n \ge 2\}$ 的定义，可知

$$\begin{aligned}\{Y_3 = 1, Y_2 = 1\} = {} & \{\xi_3 = 1, \xi_2 = 0, \xi_1 = 1\} \cup \{\xi_3 = 0, \xi_2 = 1, \xi_1 = 0\} \cup \\ & \cup \{\xi_3 = 1, \xi_2 = 1, \xi_1 = 0\} \cup \{\xi_3 = 0, \xi_2 = 1, \xi_1 = 1\} \cup \{\xi_3 = 1, \xi_2 = 1, \xi_1 = 1\}\end{aligned}$$

$$\{Y_4 = 0, Y_3 = 1, Y_2 = 1\} = \{\xi_4 = 0, \xi_3 = 0, \xi_2 = 1, \xi_1 = 0\} \cup \{\xi_4 = 0, \xi_3 = 0, \xi_2 = 1, \xi_1 = 1\}$$

$\{Y_3=1,Y_2=0\}=\{\xi_3=1,\xi_2=0,\xi_1=0\}$，　$\{Y_4=0,Y_3=1,Y_2=0\}=\varnothing$

利用$\{\xi_n,n\ge 1\}$是相互独立同分布的随机变量序列及其分布，我们有：

$$P\{Y_3=1,Y_2=1\}=pq^2+3p^2q+q^3$$

$$P\{Y_4=0,Y_3=1,Y_2=1\}=pq^3+p^2q^2$$

$$P\{Y_3=1,Y_2=0\}=pq^2$$

$$P\{Y_4=0,Y_3=1,Y_2=0\}=0$$

即有：

$$P\{Y_4=0\big|Y_3=1,Y_2=1\}=\frac{pq^2+p^2q}{pq+3p^2+q^2}$$

$$P\{Y_4=0\big|Y_3=1,Y_2=0\}=0$$

由于 $p>0,q=1-p>0$，因此有

$$P\{Y_4=0\big|Y_3=1,Y_2=1\}\ne P\{Y_4=0\big|Y_3=1,Y_2=0\}$$

根据马氏链的定义可知$\{Y_n,n\ge 2\}$不是马氏链。

2、天气预拨模型如下：今日是否下雨依赖于前三天是否有雨（即一连三天有雨；前两天有雨，第三天是晴天；…），试将此问题归纳为马尔可夫链，并确定其状态空间。如果过去一连三天有雨，今天有雨的概率是 0.8；过去三天连续为晴天，而今天有雨的概率为 0.2；在其它天气情况时，今日的天气和昨日相同的概率为 0.6。试求此马氏链的转移概率矩阵。

解：设一次观察今天及前两天的天气状况，将连续三天的天气状况定义为马氏链的状态，则此问题就是一个马氏链，它有 8 个状态。记每一天天晴为 0，下雨为 1，则此链的状态可以由三位二进制数表示。如三天晴为 000，为状态 0；第一天晴，第二天晴，第三天雨为 001，为状态 1；第一天晴，第二天雨，第三天晴为 010，为状态 2；第一天晴，后两天阴为 011，为状态 3，等等。根据题目条件，得到一步转移矩阵如下：

$$P=\begin{array}{c} \\ 000\\001\\010\\011\\100\\101\\110\\111 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \end{array}\\ \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6\\ 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}\end{array}$$

3、设$\{X_n; n\ge 0\}$是一齐次马氏链，状态空间为$S=\{0,1,2\}$，它的初始状态的概率分布为：$P\{X_0=0\}=1/4$，$P\{X_0=1\}=1/2$，$P\{X_0=2\}=1/4$，它的一步转移转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

（1）计算概率：$P\{X_0=0, X_1=1, X_2=1\}$；

（2）计算 $p_{01}^{(2)}, p_{12}^{(3)}$。

解：（1）由马氏链的马氏性，我们有：

$$\begin{aligned} &P\{X_0=0,\ X_1=1,\ X_2=1\}= \\ &=P\{X_2=1|X_1=1\}\cdot P\{X_1=1|X_0=0\}\cdot P\{X_0=0\} \\ &=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{16} \end{aligned}$$

（2）由齐次马氏链的性质，有：

$$P^{(2)}=P^2=\begin{bmatrix} \frac{5}{16} & \frac{7}{16} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{36} & \frac{16}{36} & \frac{13}{36} \\ \frac{1}{12} & \frac{13}{48} & \frac{31}{48} \end{bmatrix}$$

因此：$P_{01}^{(2)}=\dfrac{7}{16}$，

同理可求$P_{12}^{(3)}$。

4、独立地连续抛掷一颗质地均匀的骰子，以ξ_n表示前n次抛掷出的最大点数，试证明$\{\xi_n; n\ge 1\}$是一马氏链，并求其n步转移概率矩阵。

解：令X_k表示第k此抛掷掷得的点数，$k\ge 1$，则：

$$\xi_n=\max_{1\le k\le n}\{X_k\},\quad n=1,2,\cdots$$

易见状态空间为：$S=\{1,2,3,4,5,6\}$。因为对于任意的正整数n及状态空间中的状态：$i_1\le i_2\le\cdots\le i_{n-1}\le i$　及j，我们有：

$$P\{\xi_{n+1}=j\,|\,\xi_1=i_1,\xi_2=i_2,\cdots,\xi_{n-1}=i_{n-1},\xi_n=i\}=$$

$$=\begin{cases}0, & j<i\\ \dfrac{i}{6}, & j=i\\ \dfrac{1}{6}, & j>i\end{cases}$$

$$=P\{\xi_{n+1}=j\,|\,\xi_n=i\}=p_{ij}$$

所以由定义可知$\{\xi_n;n\ge 1\}$是一齐次马氏链，其一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix}1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6\\ 0 & 2/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6\\ 0 & 0 & 3/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6\\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 1/6 & 1/6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 1/6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

求解上面矩阵的特征根及特征向量，我们有：$\lambda_i=i/6,\ i=1,2,3,4,5,6$，及

$$\Lambda=\begin{bmatrix}1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2/6 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3/6 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},H=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},H^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

即有：$P=H\Lambda H^{-1}$，因此有：

$$P^{(n)}=H\Lambda^n H^{-1}=$$

$$=\begin{bmatrix}(1/6)^n & (2/6)^n-(1/6)^n & (3/6)^n-(2/6)^n & (4/6)^n-(3/6)^n & (5/6)^n-(4/6)^n & 1-(5/6)^n\\ 0 & (2/6)^n & (3/6)^n-(2/6)^n & (4/6)^n-(3/6)^n & (5/6)^n-(4/6)^n & 1-(5/6)^n\\ 0 & 0 & (3/6)^n & (4/6)^n-(3/6)^n & (5/6)^n-(4/6)^n & 1-(5/6)^n\\ 0 & 0 & 0 & (4/6)^n & (5/6)^n-(4/6)^n & 1-(5/6)^n\\ 0 & 0 & 0 & 0 & (5/6)^n & 1-(5/6)^n\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

5、 设有一个三个状态$S=\{0,1,2\}$的齐次马氏链，它的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix}p_1 & q_1 & 0\\ 0 & p_2 & q_2\\ q_3 & 0 & p_3\end{pmatrix}$$

试求：

（1） $f_{00}^{(1)},f_{00}^{(2)},f_{00}^{(3)},f_{01}^{(1)},f_{01}^{(2)},f_{01}^{(3)}$；

（2）确定状态分类，哪些属于常返的，哪些属于非常返的。

解：（1）画出状态转移图，有：

$$f_{00}^{(1)}=p_{00}^{(1)}=p_1,\quad f_{00}^{(2)}=0,\quad f_{00}^{(3)}=q_1q_2q_3;$$
$$f_{01}^{(1)}=q_1,\quad f_{01}^{(2)}=p_1q_1,\quad f_{01}^{(3)}=p_1^2q_1.$$

（2）由状态转移图可知所有状态都是相通的，每一个状态都是非周期状态。因为是有限状态马氏链，因此所有状态都是正常返状态，而且都是遍历状态。

6、 试确定下列齐次马氏链的状态分类，哪些属于常返的，哪些属于非常返的。已知该链的一步转移矩阵为：

（1） $P=\begin{pmatrix}p_{00}&p_{01}&p_{02}\\p_{10}&p_{11}&p_{12}\\p_{20}&p_{21}&p_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1/2&1/2\\1/2&0&1/2\\1/2&1/2&0\end{pmatrix}$；

（2） $P=\begin{pmatrix}p_{00}&p_{01}&p_{02}&p_{03}&p_{04}\\p_{10}&p_{11}&p_{12}&p_{13}&p_{14}\\p_{20}&p_{21}&p_{22}&p_{23}&p_{24}\\p_{30}&p_{31}&p_{32}&p_{33}&p_{34}\\p_{40}&p_{41}&p_{42}&p_{43}&p_{44}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2&0&1/2&0&0\\1/4&1/2&1/4&0&0\\1/2&0&1/2&0&0\\0&0&0&1/2&1/2\\0&0&0&1/2&1/2\end{pmatrix}$；

（3） $P=\begin{pmatrix}p_{00}&p_{01}&p_{02}&p_{03}&p_{04}\\p_{10}&p_{11}&p_{12}&p_{13}&p_{14}\\p_{20}&p_{21}&p_{22}&p_{23}&p_{24}\\p_{30}&p_{31}&p_{32}&p_{33}&p_{34}\\p_{40}&p_{41}&p_{42}&p_{43}&p_{44}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/4&3/4&0&0&0\\1/2&1/2&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&1/3&2/3&0\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}$。

解：画出状态转移图，有：

（1）由于三个状态都是相通的，所以三个状态都是正常返态。

（2）状态 3、4 无法和其他状态相通，组成一个闭集，且 $f_{33}=1$，所以状态 3、4 为常返态；另外状态 0、2 相通组成一个闭集，且 $f_{00}=1$，故状态 0、2 是常返态；因为 $f_{11}^{(1)}=1/2,\ f_{11}^{(n)}=0\ (n>1)$，故 $f_{11}=1/2<1$，所以状态 1 为非常返态。

（3）0、1 相通作成一闭集，且 $f_{00}=1$，故 0、1 为常返态；又 $f_{22}^{(1)}=1,\ f_{22}^{(n)}=0(n>1)$，因此 $f_{22}=1$，故 2 为常返态； $f_{44}=0<1,\ f_{33}=2/3<1$，故 3、4 为非常返态。

7、 设具有三个状态的齐次马氏链的一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

（a）　求 3 步首达概率 $f_{02}^{(3)}$；

（b）　写出三个状态的常返性、周期性；此链是否遍历？说明理由。

解：（a）画出状态转移图，可知：$f_{02}^{(3)}=1/8$；

（b）由状态转移图可知，状态 0 和 2 相通，并且

$$\begin{aligned} & f_{00}^{(1)}=1/2,\ f_{00}^{(2)}=(1/2)(1/4),\ f_{00}^{(3)}=(1/2)(3/4)(1/4),\cdots, \\ & f_{00}^{(k)}=(1/2)(3/4)^{k-2}(1/4),\cdots \quad (k\ge 2) \end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned} f_{00} &= 1/2+(1/2)(1/4)+(1/2)(3/4)(1/4)+\cdots+(1/2)(3/4)^k(1/4)+\cdots \\ &= 1/2+(1/8)[1+3/4+(3/4)^2+(3/4)^3+\cdots]=1 \end{aligned}$$

所以状态 0 和 2 是常返的。又因为，$f_{11}^{(k)}=0,\ \ (k\ge 1)$，因此，$f_{11}=0<1$，所以状态 1 是非常返的。由于 $p_{00}=1/2>0,\ p_{00}^{(2)}=3/8>0$，因此状态 0 和 2 是非周期的，状态 1 也是非周期的。由于对于任意的正整数 n，我们有 P^n 中的第二列元素均为 0，因此此链不是遍历的。

8、 设 $\{X_n;\ n=0,1,2,\cdots\}$ 是一齐次马氏链，其初始分布为

$$P\{X_0=0\}=p_0,\ P\{X_0=1\}=p_1,\ P\{X_0=2\}=p_2,\ P\{X_0=3\}=p_3$$

一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

（1）试求概率 $P\{X_0=0,\ X_1=1,\ X_2=1\}$；

（2）计算 $p_{01}^{(2)}$；

（3）试求首达概率 $f_{00}^{(n)},\ n=1,2,3,\cdots$；

（4）写出四个状态的常返性、周期性；此链是否遍历？说明理由。

解：（1）$P\{X_0=0,\ X_1=1,\ X_2=1\}=p_{11}p_{01}p_0=0$；

（2）$p_{01}^{(2)}=0$；

（3）画出状态转移图，可以求得：

$$f_{00}^{(1)}=\frac{1}{2},\quad f_{00}^{(2)}=\left(\frac{1}{2}\right)^2,\quad f_{00}^{(3)}=\left(\frac{1}{2}\right)^3,\quad f_{00}^{(n)}=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2},\quad n\ge 4$$

（4）由状态转移图可知四个状态都是相通的，且都是非周期的，因此所有状态都为非周期的正常返状态，此链是遍历链。

9、 考虑三个状态的齐次马氏链，其转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中： $p,q,r>0,\ p+q+r=1$，

（a）　假定过程从状态 1 出发，试求过程被状态 0（或 2）吸收的概率；

（b）　试求过程进入吸收态而永远停留在那里所需的平均时间。

解：（a）状态集$C_0=\{0\}$，$C_2=\{2\}$为吸收状态集，状态1为非常返态，且状态0,1,2都为非周期状态。由：$P\{C_k \mid i\}-\sum_{j\in D}p_{ij}P\{C_k \mid j\}=\sum_{j\in C_k}p_{ij}$，　$i\in D$，可知

$$P\{C_0 \mid 1\}-p_{11}P\{C_0 \mid 1\}=p_{10}$$

$$P\{C_2 \mid 1\}-p_{11}P\{C_2 \mid 1\}=p_{12}$$

由此得：

$$P\{C_0 \mid 1\}=\frac{p}{1-q},\quad P\{C_2 \mid 1\}=\frac{r}{1-q}$$

（b）由：$E\{T \mid i\}-\sum_{j\in D}E\{T \mid j\}p_{ij}=1,\quad i\in D$，可得：

$$E\{T \mid 1\}-E\{T \mid 1\}p_{11}=1$$

由此可得：

$$E\{T \mid 1\}=\frac{1}{1-q}$$

10、　　设齐次马氏链$\{X_n,n\ge 0\},S=\{1,2,3,4\}$，**一步转移概率矩阵如下：**

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（1）写出切普曼－柯尔莫哥洛夫方程（C－K 方程）；

（2）求 n 步转移概率矩阵；

（3）试问此马氏链是平稳序列吗？ 为什么？

解：（1）略；

（2）$P(n)=P^n=\begin{cases} P & n=\text{奇数} \\ P^2 & n=\text{偶数} \end{cases}$

（3）此链不具遍历性，不是平稳序列。

11、　某车间有两台独立工作的机器，每台机器有两种状态：正常工作和故障修理。已知正常工作的机器在某天出故障的概率为 a，机器处于故障修理状态在某天恢复正常工作的概率为 b，其中 $0<a,b<1$。令 X_n 表示第 n 天车间正常工作的机器数，试求：

（1）证明 $\{X_n;\ n=1,2,\cdots\}$ 是一齐次马氏链，并写出其一步转移概率矩阵；

（2）此马氏链是否存在极限分布？存在的话，计算其平稳分布；

（3）若车间里有 m 台独立工作的机器，假设条件不变，问其平稳分布是什么？

解：（1）由题意可知，随机序列 X_n 将来状态的分布只与目前的状态有关，因此是一齐次马氏链，状态空间为：$S=\{0,1,2\}$，其一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} (1-b)^2 & 2b(1-b) & b^2 \\ a(1-b) & ab+(1-b)(1-a) & b(1-a) \\ a^2 & 2a(1-a) & (1-a)^2 \end{pmatrix}$$

（2）由于 $0<a,b<1$，$P>0$，因此极限分布（平稳分布）存在，令极限分布为 (p_0,p_1,p_2)，则由

$$(p_0,p_1,p_2)\begin{pmatrix} (1-b)^2 & 2b(1-b) & b^2 \\ a(1-b) & ab+(1-b)(1-a) & b(1-a) \\ a^2 & 2a(1-a) & (1-a)^2 \end{pmatrix}=(p_0,p_1,p_2)$$

及 $p_0+p_1+p_2=1$

解得：

$$p_0=\frac{a^2}{(a+b)^2},\quad p_1=\frac{2ab}{(a+b)^2},\quad p_2=\frac{b^2}{(a+b)^2}$$

令：$p=\dfrac{b}{a+b}$，$q=1-p=1-\dfrac{b}{a+b}=\dfrac{a}{a+b}$，则有：

$$(p_0,p_1,p_2)=(C_2^0q^2,C_2^1pq,C_2^2p^2)$$

因此该马氏链的极限分布（平稳分布）是参数为 $p=\dfrac{b}{a+b}$ 的二项分布。

（3）当有 m 台机器时，由于机器之间是相互独立的，因此其平稳分布为：

$$p_i = C_m^i \left(\frac{b}{a+b} \right)^i \left(\frac{a}{a+b} \right)^{m-i}, \quad i = 0,1,2,\cdots,m$$

12、 设 $\{X_n; n \ge 0\}$ 是一齐次马氏链，状态空间为 $\bar{S} = S_0 \cup S$，其中：$S = \{1, 2, \cdots, m\}$ 为瞬时态集，$S_0 = \{0\}$ 为吸收态集，且转移矩阵为 $\tilde{P} = \begin{bmatrix} P & P_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，其中 $P_0 = (I-P)\cdot \vec{e}$，$\vec{e} = (1,1,\cdots 1)^\tau$。定义从瞬时态集到吸收态集的首达时间为：

$$\tau = \inf\{ n : n \ge 0, X_n \in S_0 \}。$$

令：$\vec{\pi}(0) = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ 为马氏链的初始分布，记：$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$，且满足：

$$\alpha_k \ge 0 \ (k = 0,1,\cdots,m)，\ \sum_{k=0}^{m} \alpha_k = 1。$$

令：$g_k = P\{\tau = k\}$（称为 **Phase-Type** 分布），$G(\lambda) = E\{\lambda^\tau\} = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \lambda^k$。

试证明：

（a）　对于任意 $k \in N$，有：$g_0 = \alpha_0$，$g_k = \vec{\alpha} P^{k-1} P_0 = \vec{\alpha} P^{k-1}(I-P)\vec{e}$；

（b）　对于任意 $0 \le \lambda \le 1$，有：$G(\lambda) = \alpha_0 + \lambda \vec{\alpha}(I - \lambda P)^{-1}(I-P)\vec{e}$。

证明：（a）用数学归纳法证明

当 $k = 0$ 时，$g_0 = P\{\tau = 0\} = P\{X_0 = 0\} = \alpha_0$；

当 $k = 1$ 时，$g_1 = P\{\tau = 1\} = P\{X_0 \in S, X_1 = 0\} = \sum_{i \in S} \alpha_i p_{i0} = \vec{\alpha} P_0$；

当 $k = 2$ 时，

$$\begin{aligned} g_2 &= P\{\tau = 2\} = P\{X_0 \in S, X_1 \in S, X_2 = 0\} = \\ &= \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} P\{X_0 = i, X_1 = j, X_2 = 0\} = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \alpha_i p_{ij} p_{j0} = \vec{\alpha} P^{2-1} P_0 \end{aligned}$$

假设当 $k = n$ 时结论成立，即 $g_n = \vec{\alpha} P^{n-1} P_0 = \vec{\alpha} P^{n-1}(I-P)\vec{e}$，则当 $k = n+1$ 时，作如下分解，（1）从初始状态 i 转移一步到状态 j；（2）以 j 作为初始状态转移 n 步被吸收，结合归纳假设，我们有：

$$g_{n+1} = P\{\tau = n+1\} = \vec{\alpha} P \cdot P^{n-1} P_0 = \vec{\alpha} P^{(n+1)-1} P_0$$

即当 $k = n+1$ 时结论成立。

因此，对于任意 $k \in N$，有：$g_0 = \alpha_0$，$g_k = \vec{\alpha} P^{k-1} P_0 = \vec{\alpha} P^{k-1}(I-P)\vec{e}$。

（b）注意到 S 为瞬时态集，因此有

$$\lim_{n\to+\infty} P^n = 0$$

因此，当n充分大时，有：$\det(I-P^n)=\left|I-P^n\right|\neq 0$。

由于：

$$(I-P)(I+P+P^2+\cdots+P^{n-1})=I-P^n \qquad \text{（A）}$$

因此当n充分大时，有

$$\left|I-P\right|\cdot\left|I+P+P^2+\cdots+P^{n-1}\right|\neq 0$$

于是$\left|I-P\right|\neq 0$，即$(I-P)^{-1}$存在，在（A）式中左右两边乘以$(I-P)^{-1}$，令$n\to+\infty$，则有

$$(I-P)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}P^k$$

将g_k的表达式代入，利用上面的结论，有

$$\begin{aligned}G(\lambda)=E\{\lambda^\tau\}&=\sum_{k=0}^{+\infty}g_k\lambda^k=\alpha_0+\sum_{k=1}^{+\infty}\vec{\alpha}P^{k-1}P_0\lambda^k=\alpha_0+\lambda\vec{\alpha}[\sum_{k=1}^{+\infty}(\lambda P)^{k-1}]P_0\\&=\alpha_0+\lambda\vec{\alpha}(I-\lambda P)^{-1}P_0=\alpha_0+\lambda\vec{\alpha}(I-\lambda P)^{-1}(I-P)\vec{e}\end{aligned}$$

13、　设有一生灭过程$\{\xi(t);t\geq 0\}$，其中参数$\lambda_n=\lambda,\mu_n=n\mu$，$\lambda$和$\mu$均为大于零的常数，其起始状态为$\xi(0)=0$。试求：

（a）　该过程的Q矩阵；

（b）　列出福克－普朗克微分方程；

（c）　其均值函数$M_\xi(t)=E\{\xi(t)\}$；

（d）　证明$\lim_{t\to\infty}p_0(t)=\exp\{-\lambda/\mu\}$。

解：（a）根据题意得到Q矩阵为：

$$Q=\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 2\mu & -(2\mu+\lambda) & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \cdots & \cdots & n\mu & -(n\mu+\lambda) & \lambda & \cdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\end{bmatrix}$$

（b）由福克－普朗克方程得：

$$\begin{cases} \dfrac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t) \\ \dfrac{dp_n(t)}{dt} = \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu) p_n(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t)\ (n \ge 1) \end{cases}$$

（c）计算均值函数为

$$\begin{aligned} M_\xi(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} \left\{ \frac{1}{n!} [\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})]^n \right\} \\ &= e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} [\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})]^n \\ &= e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} \cdot \frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t}) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})]^n \\ &= e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} \cdot \frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t}) \cdot e^{\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} = \frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t}) \end{aligned}$$

（d）计算得：

$$\lim_{t\to\infty} p_0(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

14、　有一个细菌群体，在一段时间内假定可以通过分裂等方式产生新的细菌，并不会死去。假设在长为 Δt 的一段时间内，一个细菌分裂为两个，即产生新细菌的概率为 $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$，令 $X(t)$ 表示时刻 t 的细菌群体的大小。

（a）　试说明 $\{X(t), t \ge 0\}$ 是生灭过程；

（b）　试证 $\lambda_i = i\lambda$，$\mu_i = 0$，并列出其前进方程和后退方程；

（c）　验证 $p_{kj}(t) = C_{j-1}^{j-k}(e^{-\lambda t})^k (1-e^{-\lambda t})^{j-k}$，$j \ge k \ge 1$ 是上述方程的解，并计算

$$E\{X(s+t) - X(s) | X(s) = m\}。$$

解：（a）由题意，$\{X(t), t \ge 0\}$ 是生灭过程是显然的，其 Q 矩阵为

$$Q = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & & & \\ & -2\lambda & 2\lambda & & \\ & & -3\lambda & 3\lambda & \cdots \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

（b）$\lambda_i = i\lambda$，$\mu_i = 0$，显然；

（c）由前进方程，有

$$p_{kk}'(t) = -k\lambda p_{kk}(t), \quad p_{kj}'(t) = (j-1)\lambda p_{k,j-1}(t) - j\lambda p_{kj}(t) \quad (j > k)$$

将 $p_{kj}(t)=C_{j-1}^{j-k}(e^{-\lambda t})^k(1-e^{-\lambda t})^{j-k}$， $j\ge k\ge 1$，代入前进方程中，可以验证两边相等。同理可以验证后退方程。

记：$E\{X(s+t)-X(s)|\,X(s)=m\}=h(t)$，先令：

$p_{m,n+m}(t)=P\{X(s+t)=n+m|\,X(s)=m\}=P\{X(s+t)-X(s)=n|\,X(s)=m\}$

于是

$$h(t)=E\{X(s+t)-X(s)|\,X(s)=m\}=\sum_{n=0}^{\infty}np_{m,n+m}(t)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}nC_{n+m-1}^{n}(e^{-\lambda t})^m(1-e^{-\lambda t})^n$$

注意到

$$1=\sum_{j=0}^{\infty}p_{mj}(t)=\sum_{j=m}^{\infty}p_{mj}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}p_{m,n+m}(t)=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+m-1}^{n}(e^{-\lambda t})^m(1-e^{-\lambda t})^n$$

将上式两边对 t 求导数，得

$$0=\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+m-1}^{n}n(e^{-\lambda t})^m(1-e^{-\lambda t})^{n-1}\lambda e^{-\lambda t}+\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+m-1}^{n}(-m\lambda)e^{-\lambda mt}(1-e^{-\lambda t})^n=$$

$$=\frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda t}}h(t)-m\lambda$$

由此得到

$$E\{X(s+t)-X(s)|\,X(s)=m\}=h(t)=m(e^{\lambda t}-1)$$

15、　在一个线性生灭过程中，假定人口中每个人在间隔 $(t,t+\Delta t)$ 内以概率 $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ 生一个儿女，假定这些人是统计独立的，则如果在时刻 t 人口中有 n 个人，在 $(t,t+\Delta t)$ 中出生的概率是 $n\lambda\Delta t+o(\Delta t)$。同样地，如果在 $(t,t+\Delta t)$ 内一个人死亡的概率是 $\mu\Delta t+o(\Delta t)$，则如果在 t 时刻有 n 个人活着，在 $(t,t+\Delta t)$ 内死亡的概率是 $n\mu\Delta t+o(\Delta t)$， $X(t)$ 表示 t 时刻人口的数目，且已知 $X(0)=n_0$，则 $X(t)$ 是一马氏过程。

（a）　试写出过程的状态空间及 Q 矩阵，求 $p_n(t)=P\{X(t)=n\}$ 满足的微分方程；

（b）　试导出 $m_X(t)=E\{X(t)\}$ 满足的微分方程；

（c）　求解 $m_X(t)$。

解：（a）当 $\lambda_n=n\lambda+a$， $\mu_n=n\mu$　　$(\lambda,\mu,a>0)$ 时，

可以得到此过程的 Q 矩阵：

$$Q=\begin{pmatrix} -a & a & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+a+\mu) & \lambda+a & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -(2\lambda+a+2\mu) & 2\lambda+a & 0 & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & n\mu & -[n(\lambda+\mu)+a] & & n\lambda+a & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

令：

$$p_j(t)=P\{\xi(t)=j\}$$

$$\vec{p}(t)=(p_0(t),\ p_1(t),\ p_2(t),\cdots,\ p_n(t)\ ,\cdots)$$

写出福克－普朗克方程：

$$\begin{cases} \dfrac{d\,p_0(t)}{dt}=-a\,p_0(t)+\mu\,p_1(t) \\ \dfrac{d\,p_1(t)}{dt}=a\,p_0(t)-[(\lambda+\mu)+a]p_1(t)+2\mu\,p_2(t) \\ \dfrac{d\,p_2(t)}{dt}=(\lambda+a)\,p_1(t)-[2(\lambda+\mu)+a]\,p_2(t)+3\mu\,p_3(t) \\ \qquad\vdots \\ \dfrac{d\,p_n(t)}{dt}=[(n-1)\lambda+a]\,p_{n-1}(t)-[n(\lambda+\mu)+a]\,p_n(t)+ \\ \qquad\qquad +(n+1)\mu\,p_{n+1}(t) \\ \qquad\vdots \end{cases}$$

初始条件：$p_{n_0}(0)=1$，　$p_j(0)=0\quad(j\neq n_0)$。

（b）由数学期望的定义：$E\{\xi(t)\}\triangleq M_\xi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}n\,p_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n\,p_n(t)$，由此，我们有：

$$\begin{aligned} \frac{dM_\xi(t)}{dt}&=\frac{d}{dt}\sum_{n=1}^{\infty}n\,p_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{d\,p_n(t)}{dt}= \\ &=\sum_{n=1}^{\infty}n\{[(n-1)\lambda+a]\,p_{n-1}(t)-[n(\lambda+\mu)+a]\,p_n(t)+(n+1)\mu\,p_{n+1}(t)\} \\ &=\sum_{n=1}^{\infty}na\,p_{n-1}(t)-\sum_{n=1}^{\infty}na\,p_n(t)+ \\ &\qquad+\sum_{n=1}^{\infty}n\big[(n-1)\lambda\,p_{n-1}(t)-n(\lambda+\mu)\,p_n(t)+(n+1)\mu\,p_{n+1}(t)\big] \\ &=\sum_{n=0}^{\infty}a\,p_n(t)+\sum_{n=1}^{\infty}n\big[(n-1)\lambda\,p_{n-1}(t)-n(\lambda+\mu)\,p_n(t)+(n+1)\mu\,p_{n+1}(t)\big] \\ &=a+(\lambda-\mu)\sum_{n=1}^{\infty}n\,p_n(t)=a+(\lambda-\mu)M_\xi(t) \end{aligned}$$

即可得到描写 $M_\xi(t)$ 的微分方程：

$$\begin{cases} \dfrac{dM_\xi(t)}{dt} = a + (\lambda - \mu)M_\xi(t) \\ M_\xi(0) = n_0 \end{cases}$$

（c）解上面的微分方程，我们有：

$$M_\xi(t) = n_0 e^{(\lambda-\mu)t} + \frac{a}{\mu - \lambda}\left[1 - e^{(\lambda-\mu)t}\right]$$

以上得求解当 $a = 0$ 时即是所要得解。

16、　一条电路供给 m 个焊工用电，每个焊工均是间断地用电。现假设（1）若一焊工在 t 时刻用电，而在 $(t, t+\Delta t)$ 内停止用电的概率为 $\mu\Delta t + o(\Delta t)$；（2）若一焊工在 t 时刻没有用电，而在 $(t, t+\Delta t)$ 内用电的概率为 $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$。每一焊工的工作情况是相互独立的。设 $\xi(t)$ 表示在 t 时刻正在用电的焊工数。

（a）　试写出此过程的状态空间及 Q 矩阵；

（b）　设 $\xi(0) = 0$，写出福克－普朗克方程；

（c）　当 $t \to +\infty$ 时，求极限分布 P_n。

解：（a）令 $\xi(t)$ 表示 t 时刻系统中正在用电的焊工数，则 $\{\xi(t), t \ge 0\}$ 是一马氏过程，其状态空间为：$S = \{0,1,2,\cdots,m\}$。

Q 矩阵为：

$$Q = \begin{pmatrix} -m\lambda & m\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu & -[\mu + (m-1)\lambda] & (m-1)\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\mu & -[2\mu + (m-2)\lambda] & (m-2)\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m\mu & -m\mu \end{pmatrix}$$

（b）令：$p_j(t) = P\{\xi(t) = j\}$

$$\vec{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), p_2(t), \cdots, p_m(t)),\ \vec{p}(0) = (1, 0, 0, \cdots, 0)$$

写出福克－普朗克方程：

$$\begin{cases} \dfrac{d\,\vec{p}(t)}{dt} = \vec{p}(t)Q \\ \vec{p}(0) = (1, 0, 0, \cdots, 0)_{1\times(m+1)} \end{cases}$$

（c）画出状态转移率图，可得 $t \to \infty$ 时的平衡方程：

$$\begin{cases} m\lambda p_0 = \mu p_1 \\ [(m-1)\lambda + \mu] p_1 = m\lambda p_0 + 2\mu p_2 \\ \qquad\quad \vdots \\ [(m-n)\lambda + n\mu] p_n = (m-n+1)\lambda p_{n-1} + (n+1)\mu p_{n+1} \\ \qquad\quad \vdots \\ \lambda p_{m-1} = m\mu p_m \\ \sum_{n=0}^{m} p_n = 1 \end{cases}$$

由此可得：

$$\begin{aligned}(m-n)\lambda p_n - (n+1)\mu p_{n+1} &= (m-n+1)\lambda p_{n-1} - n\mu p_n = \cdots = \\ &m\lambda p_0 - \mu p_1 = 0\end{aligned}$$

即有：

$$(m-n)\lambda p_n - (n+1)\mu p_{n+1} = 0$$

$$p_{n+1} = \frac{(m-n)}{(n+1)} \cdot \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_n\,, \quad n = 0,1,2,\cdots,m$$

由此可以求得：

$$p_n = \frac{(m-n+1)}{n} \cdot \frac{(m-n)}{n-1} \cdot \cdots \cdot \frac{m}{1} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot p_0 = C_m^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0\,, \quad n = 0,1,\cdots,m$$

由 $\sum_{n=0}^{m} p_n = 1$，即可确定 p_0，最终得到所要的结果。