

第二章 Markov 过程

4. 马尔可夫链状态的分类

(六) 闭集和状态空间的分解

定义：设 C 是状态空间 S 的一个子集，如果从 C 内任何一个状态 i 不能到达 C 外的任何状态，则称 C 是一个闭集。如果单个状态 i 构成的集 $\{i\}$ 是闭集，则称状态 i 是吸收态。如果闭集 C 中不再含有任何非空闭的真子集，则称 C 是不可约的。闭集是存在的，因为整个状态空间 S 就是一个闭集，当 S 不可约时，则称此马氏链不可约，否则称此马氏链可约。

有关的性质：

- (1) C 是闭集 $\Leftrightarrow p_{ij} = 0, \forall i \in C, j \notin C \Leftrightarrow p_{ij}^{(n)} = 0 (n \geq 1), \forall i \in C, j \notin C$;
- (2) C 是闭集 $\Leftrightarrow \sum_{j \in C} p_{ij} = 1, \forall i \in C$;
- (3) i 为吸收态 $\Leftrightarrow p_{ii} = 1$;
- (4) 齐次马氏链不可约 \Leftrightarrow 任何两个状态均互通;
- (5) 所有常返态构成一个闭集;
- (6) 在不可约马氏链中，所有状态具有相同的状态类型;

定义：对 $i \in S$ ，若正整数集 $\{n; n \geq 1, p_{ii}^{(n)} > 0\}$ 非空，则定义其最大公约数为状态 i 的周期，记为 d_i ，当 $d_i = 1$ 时，称该状态无周期。

定义：称非周期正常返状态为遍历态。

注意：一个不可约的、非周期的、有限状态的马氏链一定是遍历的。

(七) 常返、非常返、周期状态的分类特性

设 $i \leftrightarrow j$ ，则 i 和 j 或者都是非常返态，或者都是零常返态，或者都是正常

返非周期的（遍历），或者都是正常返有周期的且有相同的周期。

$$\text{状态} \begin{cases} \text{非常返态} \\ \text{常返态} \begin{cases} \text{零常返态} \\ \text{正常返态} \begin{cases} \text{有周期} \\ \text{非周期（遍历态）} \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

（八）周期状态的判别

- （1）按互通性将状态分类后，在同一类集合中选一个状态判别其周期性即可。
- （2）如有正整数 n ，使得 $p_{ii}^{(n)} > 0, p_{ii}^{(n+1)} > 0$ ，则状态 i 无周期。
- （3）如有正整数 m ，使得 m 步转移概率矩阵 P^m 中相应某状态 j 的那一列元素全不为零，则状态 j 无周期

（九）分解定理

- （1）齐次马氏链的状态空间 S 可唯一地分解为有限多个或可列多个互不相交的状态子集 D, C_1, C_2, \dots 之并，即有 $S = D \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots$ 。

其中： D 是非常返态集，每个 $C_n, n=1,2,\dots$ 均是由常返状态组成的不可约集，其中的状态互通，因此 $C_n, n=1,2,\dots$ 中的状态具有相同的状态类型：或者均为零常返；或者均为正常返非周期（遍历）；或者均为正常返有且相同的周期；而且对于 $i, j \in C_n, f_{ij} = 1$ 。

- （2）（周期链分解定理）一个周期为 d 的不可约马氏链，其状态空间 S 可以分解为 d 个互不相交的集 J_1, J_2, \dots, J_d 之并，即有：

$$S = \bigcup_{r=1}^d J_r, \quad J_k \cap J_l = \emptyset, k \neq l,$$

且

$$\sum_{j \in J_{r+1}} p_{ij} = 1, i \in J_r, r=1,2,\dots$$

其中约定 $J_{r+1} = J_1$ 。

- (3) 基于上面的 (1), 我们将状态空间 S 中的状态依 D, C_1, C_2, \dots 的次序重新排列, 则转移矩阵具有以下形式

$$P = \begin{pmatrix} P_D & P_{D_1} & P_{D_2} & \cdots \\ & P_1 & & \\ & & P_2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{matrix} D \\ C_1 \\ C_2 \\ \vdots \end{matrix}$$

其中 P_1, P_2, \dots 均为随机矩阵, 他们对应的链是不可约的。称以上形式的转移矩阵为标准形式。

(十) 有限状态马氏链的性质

- (1) 所有非常返状态组成的集合不可能是闭集; (无限状态马氏链不一定)
- (2) 没有零常返状态;
- (3) 必有正常返状态;
- (4) 不可约有限马氏链只有正常返态;
- (5) 状态空间可以分解为:

$$S = D \cup C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$$

其中: 每个 $C_n, n=1, 2, \dots, k$ 均是由正常返状态组成的有限不可约闭集, D 是非常返态集。

(十一) 例子

例 1 设有三个状态 $\{0, 1, 2\}$ 的齐次马氏链, 它的一步转移概率矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

试研究其状态关系。

例 2 设有四个状态 $\{0, 1, 2, 3\}$ 的齐次马氏链, 它的一步转移概率矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

试研究其状态关系。

解：{0,1} 正常返，{2} 非常返，{3} 吸收态。

例 3 设马氏链的状态空间为 $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，一步转移概率为：

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

试分析此链并指出各状态的常返性、周期性及求此链的闭集。

解：画出状态转移图， $S = D \cup C_1 \cup C_2 = \{4\} \cup \{1, 3, 5\} \cup \{2, 6\}$ 。

例 4 设马氏链的状态空间为 $S = \{1, 2, 3, \dots\}$ ，转移概率为： $p_{11} = 1/2$ ，

$p_{ii+1} = 1/2$ ， $p_{i1} = 1/2, i \in S$ ，研究各状态的分类。

解：画出状态转移图，可知：

$f_{11}^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ，故 $f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$ ，故状态 1 是常返的。

又 $\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty$ ，故状态 1 是正常返的。

易知状态 1 是非周期的，从而状态 1 是遍历的。

对于其它状态，由于 $1 \leftrightarrow i, i \in S$ ，因此也是遍历的。

例 5 设有八个状态 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 的齐次马氏链，它的一步转移概率矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

讨论其周期性。

解：主对角线为 0 ，它是具有周期性的转移矩阵的标准形式。八个状态可以分为四个子集， $c_1 = \{0\}$ ， $c_2 = \{1, 2, 3\}$ ， $c_3 = \{4, 5\}$ ， $c_4 = \{6, 7\}$ ，它们互不相交，它们的并是整个状态空间，该过程具有确定的周期转移，即： $c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_3 \rightarrow c_4 \rightarrow c_1$ ，周期为 4 。

例 6 设齐次马氏链的状态空间为 $\{1, 2, 3\}$ ，一步转移矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

求：(1) T_{13} 的分布率及 ET_{13} ，(2) f_{ii} ($i=1, 2, 3$)

解：(1) 画出状态转移图，可得 T_{13} 的分布率为：

$T_{13} = n$	1	2	3	4	...	n	...
$f_{13}^{(n)} = P\{T_{13} = n\}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4^2}$	$\frac{3^2}{4^3}$	$\frac{3^3}{4^4}$...	$\frac{3^{n-1}}{4^n}$...

因此， $ET_{13} = \sum_{n=1}^{\infty} nP\{T_{13} = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{3^{n-1}}{4^n} = 4$ 。

(2) 由于：

$$f_{11}^{(1)} = 1/2, f_{11}^{(n)} = 0, n > 1, \text{ 故 } f_{11} = 1/2 < 1$$

$$f_{22}^{(1)} = 3/4, f_{22}^{(n)} = 0, n > 1, \text{ 故 } f_{22} = 3/4 < 1$$

$$f_{33}^{(1)} = 1, f_{11}^{(n)} = 0, n > 1, \text{ 故 } f_{33} = 1$$

因此, 状态 1 和 2 为非常返态, 3 为常返态。

例 7 设齐次马氏链的状态空间为 $\{1, 2, 3, 4\}$, 一步转移矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

试研究其状态关系。

解: 画出状态转移图, 可知:

$$f_{44}^{(n)} = 0 (n \geq 1) \Rightarrow f_{44} = 0 < 1$$

$$f_{33}^{(1)} = \frac{2}{3}, f_{33}^{(n)} = 0 (n > 1) \Rightarrow f_{33} = \frac{2}{3} < 1$$

故状态 3 和 4 为非常返态。

$$f_{11} = f_{11}^{(1)} + f_{11}^{(2)} + 0 + \cdots + 0 + \cdots = 1$$

$$f_{22} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{22}^{(n)} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = 1$$

$$\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} < \infty$$

$$\mu_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{22}^{(n)} = 1 \times 0 + 2 \times \frac{1}{2} + \cdots + n \cdot \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = 3 < \infty$$

故状态 1 和 2 都是正常返的, 易知它们是非周期的, 从而是遍历状态。

例 8 设一齐次马氏链的状态空间为 $S = \{0, 1, 2, \cdots\}$, 其状态转移矩阵为:

$$\begin{pmatrix} 1-p_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p_2 & 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

试讨论此链状态的分类及常返的充分必要条件。

解: 画出状态转移图, 图中可以看出任意二状态都相通, 链是不可约的, 因此只要确定任一状态是常返的条件即可。

由状态转移图, 可得:

$$f_{00}^{(1)} = 1 - p_0; f_{00}^{(2)} = p_0(1 - p_1) = p_0 - p_0 p_1;$$

$$f_{00}^{(3)} = p_0 p_1(1 - p_2) = p_0 p_1 - p_0 p_1 p_2; \cdots$$

$$f_{00}^{(n)} = p_0 p_1 \cdots p_{n-2} - p_0 p_1 \cdots p_{n-1}; \cdots$$

因此有：

$$\sum_{n=1}^N f_{00}^{(n)} = 1 - p_0 p_1 \cdots p_{N-1}$$

即

$$f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} p_0 p_1 \cdots p_{N-1}$$

因此此链常返的充分必要条件为： $\lim_{N \rightarrow \infty} p_0 p_1 \cdots p_{N-1} = 0$

例 9 设一口袋中装有三种颜色（红、黄、白）的小球，其数量分别为 3、4、3。现在不断地随机逐一摸球，有放回，且视摸出球的颜色计分：红、黄、白分别计 1、0、-1 分。第一次摸球之前没有积分。以 Y_n 表示第 n 次取出球后的累计积分， $n = 0, 1, \cdots$

(1) Y_n , $n = 0, 1, \cdots$ 是否齐次马氏链？说明理由。

(2) 如果不是马氏链，写出它的有穷维分布函数族；如果是，写出它的一步转移概率 p_{ij} 和两步转移概率 $p_{ij}^{(2)}$ 。

(3) 令 $\tau_0 = \min\{n; Y_n = 0, n > 0\}$ ，求 $P\{\tau_0 = 5\}$ 。

解：(1) 是齐次马氏链。

由于目前的积分只与最近一次取球后的积分有关，因此此链具有马氏性且是齐次的。

状态空间为： $S = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ 。

$$(2) \quad p_{ij} = P\{Y_{n+1} = j | Y_n = i\} = \begin{cases} 0.3, & j = i + 1 \\ 0.4, & j = i \\ 0.3, & j = i - 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$p_{ij}^{(2)} = P\{Y_{n+2} | Y_n = i\} = \begin{cases} 0.3^2, & j = i + 2 \\ 2 \times 0.3 \times 0.4, & j = i + 1 \\ 0.4^2 + 2 \times 0.3^2, & j = i \\ 2 \times 0.3 \times 0.4, & j = i - 1 \\ 0.3^2, & j = i - 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(3) 即求首达概率，画状态转移图，我们有：

$$P\{\tau_0 = 5\} = 2 \times [3 \times 0.3^4 \times 0.4 + 0.3^2 \times 0.4^3] = 0.03096$$

注意：此题实际上就是直线上的随机游动。

例 10 设有无穷多个袋子，各装红球 r 只，黑球 b 只及白球 w 只。今从第 1 个袋子中随机取一球，放入第 2 个袋子，再从第 2 个袋子中随机取一球，放入第 3 个袋子，如此继续。令：

$$R_k = \begin{cases} 1, & \text{当第 } k \text{ 次取出红球} \\ 0, & \text{反之} \end{cases}, \quad k = 1, 2, \dots$$

(1) 试求 R_k 的分布；

(2) 试证 $\{R_k; k = 1, 2, \dots\}$ 为马氏链，并求一步转移概率矩阵。

解：(1) 计算得 R_k 的分布列为：

$$\begin{pmatrix} R_k & 1 & 0 \\ P & \frac{r}{r+b+w} & \frac{b+w}{r+b+w} \end{pmatrix}$$

(2) R_k 的状态空间为 $S = \{0, 1\}$ ，一步转移概率矩阵为：

$$P = \begin{bmatrix} \frac{r+1}{r+b+w+1} & \frac{b+w}{r+b+w+1} \\ \frac{r}{r+b+w+1} & \frac{b+w+1}{r+b+w+1} \end{bmatrix}$$

例 11 设一具有 3 个状态的马氏链的一步转移矩阵为：

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

试确定此马氏链的状态分类。

附录：转移矩阵估计问题

例：某计算机经常出故障，研究人员每隔一刻钟记录一次计算机的运行状态，收集了 24 小时的数据（97 次记录），用 1 表示正常状态，0 表示故障状态，所得数据如下：

111001001111111001111011111100111111110001101101

111011011010111101110111101111110011011111100111

设 X_n 为第 n 个时段的计算机状态，可以认为此是一齐次马氏链，状态空间为 $S = \{0,1\}$ ，试确定此马氏链的状态一步转移矩阵。

若已知计算机在某一时段的状态为 0，问在此条件下从此时段起此计算机能连续正常工作 3 刻钟的条件概率为多少？

设 $\{X_n; n \geq 0\}$ 为一齐次马氏链，状态空间为 S ，我们有此马氏链的一次实现（样本） x_0, x_1, \dots, x_N ，而转移矩阵未知，如何用现有数据来估计转移矩阵 P ？

记在状态 i 之后首次出现状态 j 的时间为 $n(i, j)$ ，定义似然函数：

$$L = \prod_{i,j \in S} p_{ij}^{n(i,j)}$$

相应的对数似然函数为：

$$L = \sum_{i,j \in S} n(i, j) \ln p_{ij} = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} n(i, j) \ln p_{ij}$$

利用约束条件 $\sum_{j \in S} p_{ij} = 1 \forall i \in S$ ，由极大似然估计法（MLEs）我们有如下估计式：

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n(i, j)}{\sum_{k \in S} n(i, k)}$$

注：此估计为局部最大估计。也可以由以下引理得到以上的估计。

引理：设 $z_i \geq 0 (i \leq N)$ ，则在约束条件 $\sum_{i=1}^N x_i = 1, x_i \geq 0 (i \leq N)$ 下，函数

$\sum_{i=1}^N z_i \ln x_i$ 在 $x_i = \frac{z_i}{\sum_{i=1}^N z_i} (i \leq N)$ 处取得最大。

5. 马氏链的极限性态与平稳分布

当一个马氏链系统无限期的运行下去时，我们所关心和需要解决的问题：

(1) 当 $n \rightarrow \infty$ 时， $P\{X_n = i\} = \pi_i(n)$ 的极限是否存在？即当马氏链系统无限期的运行下去时，此链处于各个状态的概率（可能性）分布。

(2) 在什么情况下，一个马氏链是一个平稳序列？

关于第一个问题，由于： $\pi_j(n) = \sum_{i \in S} \pi_i(0) p_{ij}^{(n)}$ ，其中 $\pi_i(0) = P\{X_0 = i\}$ ， $\{\pi_i(0), i \in S\}$ 是马氏链的初始分布，因此，问题可以转化为研究 $p_{ij}^{(n)}$ 的极限性质，即研究 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ 是否存在？存在的话，其极限是否与 i 有关？

关于第二个问题，实际上是一个平稳分布是否存在的问题。

(一) P^n 的极限性态

(I) $j \in S$ 是非常返状态或零常返状态的情形

前面我们已经得到结论：若 $j \in S$ 为非常返状态，则对于任意的 $i \in S$ ，有 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ 。针对零常返状态的情形，我们要进行详细的讨论。

引理：(Hardy-Littlewood) 设幂级数 $G(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n$ 在 $0 \leq s < 1$ 上收敛，

且系数 a_n 非负，则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k = \lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s)G(s)$$

引理：设非负数列 a_n 的极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在，则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n a_k$$

定理：设 $j \in S$ 为常返状态，则对于任意的 $i \in S$ ，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n p_{ij}^{(k)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

证明：记： $P_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n = \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n$ ， $F_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} s^n$ ，有

$$P_{jj}(s) = \frac{1}{1 - F_{jj}(s)}, \quad P_{ij}(s) = \delta_{ij} + F_{ij}(s)P_{jj}(s)$$

因此，当 $i \neq j$ 时，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n p_{ij}^{(k)} = \lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s)P_{ij}(s) = \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{1-s}{1-F_{jj}(s)} F_{ij}(s)$$

由 $\lim_{s \rightarrow 1^-} F_{ij}(s) = f_{ij}$ ， $\lim_{s \rightarrow 1^-} F'_{jj}(s) = \mu_j$ ，以及洛必达法则，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n p_{ij}^{(k)} = \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{1-s}{1-F_{jj}(s)} F_{ij}(s) = \frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

当 $i = j$ 时，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n p_{ii}^{(k)} = \lim_{s \rightarrow 1^-} (1-s)P_{ii}(s) = \lim_{s \rightarrow 1^-} \frac{1-s}{1-F_{ii}(s)} = \frac{1}{\mu_i}$$

定理：设 $i \in S$ 是周期为 d 的常返状态，则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i}$$

其中 μ_i 为 i 的平均返回时间。

定理：设 $i \in S$ 为常返状态，则有

(1) i 为零常返状态，当且仅当， $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = 0$ ；

(2) i 为遍历状态，当且仅当， $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} > 0$ ；

(3) 若 $j \in S$ 为零常返状态，则对于任意的 $i \in S$ ，有 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ 。

证明：(1) 若 i 为零常返状态，则有上一定理可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(nd)} = 0$ ，由周期性

的定义可知, 当 n 不能被 d 整除时, 有 $p_{ii}^{(n)} = 0$, 因此有 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = 0$ 。反之,

若 $p_{ii}^{(n)} = 0$, 假设 i 为正常返状态, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i} > 0$, 矛盾, 故 i 为零常返状态。

(2) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} > 0$, 由 (1) 可知 i 为正常返状态, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_i}$,

因此 $d=1$, 故 i 为遍历状态。反之由上面的定理即得。

(3) 若 $j \in S$ 为零常返状态, 则对于任意的 $i \in S$, 我们取 $m < n$, 有

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^n f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} \leq \sum_{l=1}^m f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} + \sum_{l=m+1}^n f_{ij}^{(l)}$$

对上式固定 m , 令 $n \rightarrow \infty$, 由 (1) 可知上式右边第一项为零, 再令 $m \rightarrow \infty$,

由于 $\sum_{l=1}^{+\infty} f_{ij}^{(l)} \leq 1$, 因此上式右边的第二项也为零, 故有 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ 。

(II) $j \in S$ 是非周期正常返的情形

定理 (Markov): 设有一有限状态的马氏链, 若存在一个正整数 m , 使得对于 $\forall i, j \in S$, 有 $p_{ij}^{(m)} > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \pi$, 其中 π 是一随机矩阵, 且它的各行都相同。

证明: (A) $m=1$ 时的情形;

此时, 由题意可知, 存在 $0 < \varepsilon < 1$, 使得 $p_{ij} \geq \varepsilon > 0, \forall i, j \in S$,

令: $m_j(n) \triangleq \min_{i \in S} p_{ij}^{(n)}$, 表示在 n 步转移后在 j 列中最小的一个元素;

令: $M_j(n) \triangleq \max_{i \in S} p_{ij}^{(n)}$, 表示在 n 步转移后在 j 列中最大的一个元素;

(1) 由 C-K 方程, 证明 $m_j(n), M_j(n)$ (注意: 都是有界量) 的单调性:

由于对于 $\forall i \in S$, 有:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in S} p_{ik} p_{kj}^{(n-1)} \geq \sum_{k \in S} p_{ik} m_j(n-1) = m_j(n-1)$$

因此, 可得:

$$m_j(n) \geq m_j(n-1)$$

由于对于 $\forall i \in S$, 有:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in S} p_{ik} p_{kj}^{(n-1)} \leq \sum_{k \in S} p_{ik} M_j(n-1) = M_j(n-1)$$

因此, 可得:

$$M_j(n) \leq M_j(n-1)$$

(2) 证明 $m_j(n), M_j(n)$ 收敛于同一极限:

$$\text{令: } p_{i_0j}^{(n)} = m_j(n) \triangleq \min_{i \in S} p_{ij}^{(n)}; \quad p_{i_1j}^{(n-1)} = M_j(n-1) \triangleq \max_{i \in S} p_{ij}^{(n-1)}$$

则有:

$$\begin{aligned} m_j(n) = p_{i_0j}^{(n)} &= \sum_{k \in S} p_{i_0k} p_{kj}^{(n-1)} = \varepsilon p_{i_1j}^{(n-1)} + (p_{i_0i_1} - \varepsilon) p_{i_1j}^{(n-1)} + \sum_{k \in S, k \neq i_1} p_{i_0k} p_{kj}^{(n-1)} \\ &\geq \varepsilon M_j(n-1) + \left[p_{i_0i_1} - \varepsilon + \sum_{k \in S, k \neq i_1} p_{i_0k} \right] m_j(n-1) \end{aligned}$$

因此有:

$$m_j(n) \geq \varepsilon M_j(n-1) + (1-\varepsilon) m_j(n-1) \quad (\text{a})$$

$$\text{令: } p_{i'_0j}^{(n)} = M_j(n) \triangleq \max_{i \in S} p_{ij}^{(n)}; \quad p_{i_2j}^{(n-1)} = m_j(n-1) \triangleq \min_{i \in S} p_{ij}^{(n-1)}$$

则有:

$$\begin{aligned} M_j(n) = p_{i'_0j}^{(n)} &= \sum_{k \in S} p_{i'_0k} p_{kj}^{(n-1)} = \varepsilon p_{i_2j}^{(n-1)} + (p_{i'_0i_2} - \varepsilon) p_{i_2j}^{(n-1)} + \sum_{k \in S, k \neq i_2} p_{i'_0k} p_{kj}^{(n-1)} \\ &\leq \varepsilon m_j(n-1) + \left[p_{i'_0i_2} - \varepsilon + \sum_{k \in S, k \neq i_2} p_{i'_0k} \right] M_j(n-1) \end{aligned}$$

因此有:

$$M_j(n) \leq \varepsilon m_j(n-1) + (1-\varepsilon) M_j(n-1) \quad (\text{b})$$

由 (a) 和 (b) 式, 我们有:

$$M_j(n) - m_j(n) \leq (1-2\varepsilon)[M_j(n-1) - m_j(n-1)]$$

由上式递归可得:

$$0 \leq M_j(n) - m_j(n) \leq (1-2\varepsilon)^{n-1} [M_j(1) - m_j(1)] \leq (1-2\varepsilon)^{n-1}$$

由于, $0 < \varepsilon < 1 \Rightarrow -1 < 1-2\varepsilon < 1$, 对上式两边令 $n \rightarrow +\infty$ 求极限, 得:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_j(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} m_j(n) \triangleq \pi_j$$

由此证明了当 $m=1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \pi$ 。

(B) $m > 1$ 时的情形;

$$\text{由于: } \lim_{n \rightarrow \infty} [P^{(m)}]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} P^{(nm)} = \pi$$

对于 $k=1, 2, \dots, m-1$, 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(nm+k)} = \lim_{n \rightarrow \infty} P^{(k)} P^{(nm)} = P^{(k)} \pi = \pi$$

至此定理得证。

注意: 如果状态空间是无限可列的马氏链, 则定理要修改为:

- (1) 或者是 π 中的所有元素都大于零 (此时仍为随机矩阵)
- (2) 或者是 π 中的所有元素都等于零

推论 1 P^n 的极限矩阵 π 是唯一的, 且满足:

- (1) $\sum_{i \in S} \pi_i p_{ij} = \pi_j, \pi_i > 0$, 即: $\pi P = \pi$ 。
- (2) $\sum_{i \in S} \pi_i = 1$,

推论 2 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n = j\} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n = j\}$ 所取的值与初始状态的分布无关。

证: 由于:

$$\begin{aligned} P\{X_n = j\} &= \sum_{i \in S} P\{X_n = j \mid X_0 = i\} P\{X_0 = i\} \\ &= \sum_{i \in S} p_{ij}^{(n)} P\{X_0 = i\} \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n = j\} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in S} p_{ij}^{(n)} P\{X_0 = i\} \\ &= \sum_{i \in S} \pi_j P\{X_0 = i\} = \pi_j \sum_{i \in S} P\{X_0 = i\} = \pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} \end{aligned}$$

即, 经过无穷次转移后处于 j 状态的概率与初始状态无关, 与初始状态的分布也

无关。

下面不加证明地给出几个常用的定理。注意：当 j 是正常返时，情况比较复杂， $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ 不一定存在，即使存在，也可能与 i 有关。

定理：若 j 是遍历状态，则对于任意的 $i \in S$ ，有：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}$$

定理：对于不可约的遍历链，则对于任意的 $i, j \in S$ ，有 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$ 。

定理：若马氏链是不可约的遍历链，则 $\left\{ \pi_i = \frac{1}{\mu_i}, i \in S \right\}$ 是方程组

$$x_j = \sum_{i \in S} x_i p_{ij}, \quad j \in S$$

满足条件 $x_j \geq 0, j \in S, \sum_{j \in S} x_j = 1$ 的唯一解。

例：设有一状态空间为 $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 的齐次马氏链，其一步转移矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.1 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.6 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

试画出该链的状态转移图，研究各状态的性质及状态的分类，并讨论该链的极限特性。

（二）平稳分布

定义：一个定义在状态空间上的概率分布 $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_i, \dots\}$ 称为马氏链的平稳分布，如有：

$$\pi = \pi P$$

即, $\forall j \in S$, 有:

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}$$

平稳分布也称为马氏链的不变概率测度。对于一个平稳分布 π , 显然有:

$$\pi = \pi P = \pi P^2 = \cdots = \pi P^n$$

定理: 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是一马氏链, 则 $\{X_n, n \geq 0\}$ 为平稳过程的充分必要条件是 $\pi(0) = (\pi_i(0), i \in S)$ 是平稳分布, 即有:

$$\pi(0) = \pi(0)P$$

证明: 充分性: 记 $\pi(0) \triangleq \pi$, 则有:

$$\pi(1) = \pi(0)P = \pi$$

$$\pi(2) = \pi(1)P = \pi(0)P = \pi, \quad \cdots$$

$$\pi(n) = \pi(n-1)P = \cdots = \pi$$

因此, 对于 $\forall i_k \in S, t_k \in N, n \geq 1, 1 \leq k \leq n, t \in N$, 有:

$$\begin{aligned} P\{X_{t_1} = i_1, X_{t_2} = i_2, \cdots, X_{t_n} = i_n\} &= \pi_{i_1}(t_1) p_{i_1 i_2}^{(t_2-t_1)} \cdots p_{i_{n-1} i_n}^{(t_n-t_{n-1})} \\ &= \pi(t_1+t) p_{i_1 i_2}^{(t_2-t_1)} \cdots p_{i_{n-1} i_n}^{(t_n-t_{n-1})} \\ &= P\{X_{t_1+t} = i_1, X_{t_2+t} = i_2, \cdots, X_{t_n+t} = i_n\} \end{aligned}$$

所以 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是严平稳过程。

必要性: 由于 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是平稳过程, 因此有:

$$\pi(n) = \pi(n-1) = \cdots = \pi(0)$$

又由 $\pi(1) = \pi(0)P$ 得:

$$\pi(0) = \pi(0)P$$

即 $\pi(0)$ 是平稳分布。

定理：不可约的遍历链恒有唯一的平稳分布 $\left\{ \pi_i = \frac{1}{\mu_i}, i \in S \right\}$ ，且

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}。$$

(三) $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j(n)$ 的存在性

定义：若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{X_n = j\} = \pi_j^*, j \in S$ 存在，则称 $\pi^* = \{\pi_1^*, \dots, \pi_j^*, \dots\}$ 为马氏链的极限分布。

定理：非周期的不可约链是正常返的充分必要条件是它存在平稳分布，且此时平稳分布就是极限分布。

证明：充分性：设存在平稳分布： $\pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_j, \dots\}$ ，由此有：

$$\pi = \pi P = \pi P^2 = \dots = \pi P^n$$

即：

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}^{(n)}$$

由于： $\pi_j \geq 0, j \in S, \sum_{j \in S} \pi_j = 1$ ，

由控制收敛定理，有：

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in S} \pi_i p_{ij}^{(n)} = \sum_{i \in S} \pi_i \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \left(\sum_{i \in S} \pi_i \right) \frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j}$$

因为

$$\sum_{j \in S} \pi_j = \sum_{j \in S} \frac{1}{\mu_j} = 1$$

于是至少存在一个 $\pi_l = \frac{1}{\mu_l} > 0$ ，从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{il}^{(n)} = \frac{1}{\mu_l} > 0$$

即有：

$$\mu_l < \infty$$

故 l 为正常返状态，由不可约性，可知整个链是正常返的，且有

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j} > 0, j \in S$$

必要性：由于马氏链是正常返非周期链，即为遍历链，由以上的定理立即可得结果。且有：

$$\pi_j = \pi_j^* = \frac{1}{\mu_j}, j \in S$$

由此定理可知，对于不可约遍历链，则极限分布 $\pi^* = \pi$ 存在，且就是等于平稳分布。

（四）例子

例 1 设 $S = \{1, 2\}$ ，且一步转移矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 5/8 & 3/8 \end{pmatrix}$$

求平稳分布及 $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ 。

解：由 $\pi = \pi P$ ，解得：

$$\pi_1 = 5/7, \pi_2 = 2/7$$

故 $\pi = (5/7, 2/7)$ ，由 $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$ ，故 $\mu_1 = 7/5, \mu_2 = 7/2$ 。

且： $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{pmatrix} 5/7 & 2/7 \\ 5/7 & 2/7 \end{pmatrix}$ 。

例 2 在一计算机系统中，每一循环具有误差的概率取决于先前一个循环是否有误差，以 0 表示误差状态，以 1 表示无误差状态。设状态的一步转移概率矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.25 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

试说明相应齐次马氏链是遍历的，并求其极限分布（平稳分布）。

解：可以看出一步转移概率矩阵中的元素都大于零，因此可知是遍历的。

(1) 由矩阵的对角化可得：

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}^{-1}$$

因此有：

$$P^n = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}^{-1}$$

由此，可得：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

极限分布为： $\pi = (2/3, 1/3)$ 。

(2) 由 $\pi = \pi P$ ，解得： $\pi = (2/3, 1/3)$ 。

例 3 在直线上带有反射壁的随机游动，只考虑质点取 1、2、3 三个点，一步转移矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 \\ q & 0 & p \\ 0 & q & p \end{pmatrix}$$

讨论它是否为遍历链。

解：计算得：

$$P^2 = \begin{pmatrix} q^2 + pq & pq & p^2 \\ q^2 & 2pq & p^2 \\ q^2 & pq & p^2 + pq \end{pmatrix}$$

可以看出其中得元素都大于零，因此可知是遍历的。即 $\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ ，与 i 无关。

求极限分布时，只要解方程 $\pi = \pi P$ 即可，可以求得：

$$\pi_1 = \left[1 + \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q} \right)^2 \right]^{-1}$$

$$\pi_2 = \frac{p}{q} \left[1 + \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q} \right)^2 \right]^{-1}$$

$$\pi_3 = \left(\frac{p}{q} \right)^2 \left[1 + \frac{p}{q} + \left(\frac{p}{q} \right)^2 \right]^{-1}$$

例 4 限制性酶切片断平均长度的计算。

序列：TACTAATCGGATAACCAAACA...，切点为 AA 和 AC 的情况。

状态空间： $S_1 = \{A, B = C \cup G \cup T, AA\}$ ； $S_2 = \{A, C, G \cup T, AC\}$

X_n 定义为记录原始序列在 n 位置的状态情况。则 $\{X_n; n \geq 1\}$ 为一齐次马氏链，转移矩阵分别为：

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & q & p \\ p & q & 0 \\ p & q & 0 \end{pmatrix} \quad p = p_A, q = p_C + p_G + p_T$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} p_A & 0 & p_G + p_T & p_C \\ p_A & p_C & p_G + p_T & 0 \\ p_A & p_C & p_G + p_T & 0 \\ p_A & p_C & p_G + p_T & 0 \end{pmatrix}$$

由此可得，AA 酶切片断平均长度为： $\frac{1}{p_A^2} + \frac{1}{p_A}$ ； AC 酶切片断平均长度为：

$$\frac{1}{p_A p_C}。$$

6. 非常返态分析

由状态空间的分解可知，状态空间 S 可唯一地分解为：

$$S = D \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots = D \cup C$$

其中： D 是非常返态集，每个 $C_n, n=1,2,\dots$ 均是由常返状态组成的不可约集，其中的状态互通。

(一) 计算从状态 i 出发进入状态子集 C_k 的概率 $P\{C_k | i\}$ 。

若 $i \in C_k$ ，则有 $P\{C_k | i\} = 1$ ；若 $i \in C_m, m \neq k$ ，则有 $P\{C_k | i\} = 0$ ；若 $i \in D$ ，则有：

$$P\{C_k | i\} = \sum_{j \in S} p_{ij} P\{C_k | j\}$$

由此，我们有：

$$P\{C_k | i\} - \sum_{j \in D} p_{ij} P\{C_k | j\} = \sum_{j \in C_k} p_{ij}, \quad i \in D$$

解上式的线性方程组，即可得概率 $P\{C_k | i\}$ ，称此概率为 C_k 的吸收概率。

(二) 非常返态进入常返态所需的平均时间

设 T 为从状态 $i \in S$ 出发进入常返态类所需的时间，称此时间为吸收时间。 T 为取值于 $N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ 的随机变量。

设 $P\{T = n | i\}, n = 0, 1, 2, \dots$ 为过程经过 n 步转移后由状态 i 进入常返态类的概率，则

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N P\{T = n | i\} = P\{T < \infty | i\}$$

表示从状态 i 出发迟早进入常返态类的概率。

称： $1 - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N P\{T = n | i\} = 1 - P\{T < \infty | i\}$ 为过程的亏值 (defect)，它表

示过程永远停留在非常返态的概率。

若 $i \in C$ ，则有： $P\{T = 0 | i\} = 1, P\{T > 0 | i\} = 0$ ；

若 $i \in S$ ，我们有：

$$P\{T = n + 1 | i\} = \sum_{j \in S} p_{ij} P\{T = n | j\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

因此, 若 $i \in D$, 则由:

$$\begin{cases} P\{T = 1 | i\} = \sum_{j \in C} p_{ij} & (\text{起始条件}) \\ P\{T = n + 1 | i\} = \sum_{j \in D} p_{ij} P\{T = n | j\}, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

可以计算出吸收时间的概率分布。

另外, 也可以利用首达概率计算吸收时间的概率分布如下:

$$P\{T = n | i\} = \sum_{j \in C} f_{ij}^{(n)} \quad i \in D, n = 1, 2, \dots$$

当亏值为 0 时, 计算非常返态进入常返态所需的平均时间为:

$$E\{T | i\} = \sum_{n=1}^{\infty} n P\{T = n | i\}$$

当亏值不为 0 时, 上式无意义。

我们还可以计算非常返态进入常返态所需的平均时间如下:

$$\text{由: } P\{T = n + 1 | i\} = \sum_{j \in S} p_{ij} P\{T = n | j\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

两边各乘以 n , 有:

$$(n+1)P\{T = n + 1 | i\} - P\{T = n + 1 | i\} = \sum_{j \in S} n \cdot p_{ij} P\{T = n | j\}$$

上式对 $n = 0, 1, 2, \dots$ 求和, 我们有

$$E\{T | i\} - \sum_{n=1}^{\infty} P\{T = n | i\} = \sum_{j \in S} E\{T | j\} p_{ij} \quad (\text{A})$$

如果 $j \in C$, 则 $E\{T | j\} = 0$;

若过程的亏值为 0, 则有 $\sum_{n=1}^{\infty} P\{T = n | i\} = 1$, 由 (A) 可得:

$$E\{T | i\} - \sum_{j \in D} E\{T | j\} p_{ij} = 1, \quad i \in D$$

由上面的方程组即可计算非常返态进入常返态所需的平均时间。

例 (网球比赛): 网球一局比赛在两个选手 (发球者和接发球者) 之间进行, 网球的记分制是: 15、30、40、和 60 分。平分是指第五球后双方分数相同。平分后, 从第六球开始, 如果发球者得分/失分, 则此时发球者占先/接发球者占先。

如果发球者在发球占先后再得分，则发球者赢得该局。如果接发球者在接发球后占先后再得分，则接发球者赢得该局。若发球者发一球获胜的概率为 p ，输的概率为 q ， $p + q = 1$ ，试回答以下问题：

- (1) 试用马氏链建模网球一局比赛过程，确定其状态，画出状态转移图；
- (2) 分析各状态的性质；
- (3) 试确定一局网球比赛发球者获胜的概率；
- (4) 试确定一局比赛平均需要发几个球才能结束。

解：课堂中详细板书讲解。