第四章 二阶矩过程、平稳过程和随机分析 习题

1、设 $X_n = \sum_{k=1}^{N} \sigma_k \sqrt{2} \cos(\alpha_k n - U_k)$，其中 σ_k 和 α_k 为正常数，$U_k \sim U(0, 2\pi)$，且相互独立，$k = 1,2,\cdots,N$，试计算 $\{X_n, n = 0,\pm1,\cdots\}$ 的均值函数和相关函数，并说明其是否是平稳过程。

2、设有随机过程 $X(t) = A\cos(\omega t + \pi\eta(t))$，其中 $\omega > 0$ 为常数，$\{\eta(t), t \geq 0\}$ 是泊松过程，A 是与 $\eta(t)$ 独立的随机变量，且 $P\{A = -1\} = P\{A = 1\} = 1/2$。

（1）试画出此过程的样本函数，并问样本函数是否连续？

（2）试求此过程的相关函数，并问该过程是否均方连续？

3、设 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是一实的零初值正交增量过程，且 $X(t) \sim N(\mu, \sigma^2 t)$。令 $Y(t) = 2X(t) - 1$，$t \geq 0$。试求过程 $\{Y(t), t \geq 0\}$ 的相关函数 $R_Y(s,t)$。

4、设有随机过程 $X(t) = 2Z\sin(t + \Theta)$，$-\infty < t < +\infty$，其中 Z、Θ 是相互独立的随机变量，$Z \sim N(0,1)$，$P(\Theta = \pi/4) = P(\Theta = -\pi/4) = 1/2$。问过程 $X(t)$ 是否均方可积过程？说明理由。

5、设随机过程 $\xi(t) = X\cos 2t + Y\sin 2t$，$-\infty < t < +\infty$，其中随机变量 X 和 Y 独立同分布。

（1）如果 $X \sim U(0,1)$，问过程 $\xi(t)$ 是否平稳过程？说明理由；

（2）如果 $X \sim N(0,1)$，问过程 $\xi(t)$ 是否均方可微？说明理由。

6、设随机过程 $\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$ 是一实正交增量过程，并且 $E\{X(t)\} = 0$，及满足：

$$E\left\{[X(t) - X(s)]^2\right\} = |t - s|,\quad -\infty < s,t < +\infty;$$

令：$Y(t) = X(t) - X(t-1), -\infty < t < +\infty$，试证明 $Y(t)$ 是平稳过程。

7、设 $\xi(t) = X\sin(Yt); t \geq 0$，而随机变量 X、Y 是相互独立且都服从 $[0, 1]$ 上的均匀分布，试求此过程的均值函数及相关函数。并问此过程是否是平稳过程，是否连续、可导？

8、设 $\{X(t), t \in R\}$ 是连续平稳过程，均值为 m，协方差函数为 $C_X(\tau) = ae^{-b|\tau|}$，其中：$\tau \in R$，$a,b > 0$。对固定的 $T > 0$，令 $Y = T^{-1}\int_0^T X(s)ds$，证明：$E\{Y\} = m$，$Var(Y) = 2a[(bT)^{-1} - (bT)^{-2}(1 - e^{-bT})]$。

9、设 $(X,Y) \sim N(0,0,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，令 $X(t) = X + tY$，以及 $Y(t) = \int_0^t X(u)du$，$Z(t) = \int_0^t X^2(u)du$，对于任意 $0 \leq s \leq t$，

（1）求 $E\{X(t)\}$，$E\{Y(t)\}$，$E\{Z(t)\}$，$Cov(X(s),X(t))$，$Cov(Y(s),Y(t))$；

（2）证明 $X(t)$ 在 $t>0$ 上均方连续、均方可导；

（3）求 $Y(t)$ 及 $Z(t)$ 的均方导数。

10、　设随机过程 $\{X(t);-\infty<t<+\infty\}$ 是均值为零、自相关函数为 $R_X(\tau)$ 的实平稳正态过程。设 $X(t)$ 通过线性全波检波器后，其输出为 $Y(t)=\left|X(t)\right|$，试求：

（1）随机过程 $Y(t)$ 的相关函数 $R_Y(\tau)$，并说明其是否为平稳过程；

（2）随机过程 $Y(t)$ 的均值和方差；

（3）随机过程 $Y(t)$ 的一维概率分布密度函数 $f_Y(y)$。