随机过程课程作业-Week8

作者：48-丁力-202328015926048
日期：今天

目录

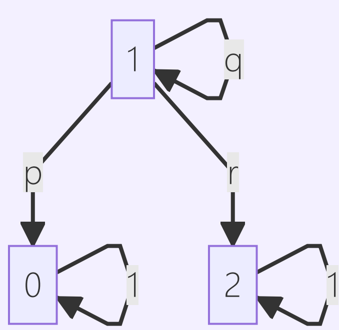
马尔科夫过程

9、考虑三个状态的齐次马氏链, 其转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中: $p,q,r>0, p+q+r=1,$

（a）假定过程从状态 1 出发, 试求过程被状态 0 （或 2）吸收的概率;

> 首先，为了计算被吸收的概率，我们首先要画出其状态转移图：
>
> 
>
>
> 然后我们进行如下定义：
>
> - $P\{C_0 \mid 1\}$ 表示从状态1被状态0吸收的概率。
> - $p_{11}P\{C_0 \mid 1\}$ 表示从状态转移到状态1的概率，然后再被状态 0 吸收的概率。
> - p_{10} 是从状态 1 直接转移到状态 0 的概率。

- $P\{C_2 \mid 1\}$ 表示从状态1被状态2吸收的概率。

- $p_{12}P\{C_2 \mid 1\}$ 表示从状态2转移到状态1的概率，然后再被状态 1 吸收的概率。

- p_{12} 是从状态 1 直接转移到状态2的概率。

那么，我们可以列出如下表达式:

$$\begin{cases} P\{C_0 \mid 1\} = p_{11}P\{C_0 \mid 1\} + p_{10} \\ P\{C_2 \mid 1\} = p_{11}P\{C_2 \mid 1\} + p_{12} \end{cases}$$

然后，我们知道:

$$\begin{cases} p_{10} = p \\ p_{11} = q \\ p_{12} = r \end{cases}$$

带入上式子，我们可以得到:

$$\begin{cases} P\{C_0 \mid 1\} = \frac{p}{1-q} \\ P\{C_2 \mid 1\} = \frac{r}{1-q} \end{cases}$$

（b）试求过程进入吸收态而永远停留在那里所需的平均时间。

我们假设这个时间为T，那么该期望由三部分组成:

1. 从1进入0， 然后停留。

2. 从1进入2，然后停留。

3. 从1进入1，此时$T+1$, 然后重复1,2,3 过程，

那么我可以求得其递推关系式为:

$$T = p \times 1 + r \times 1 + q \times (T+1)$$

那么，我们可以求得T为:

$$T = \frac{p+r+q}{1-q} = \frac{1}{1-q}$$

10、设齐次马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}, S = \{1,2,3,4\}$, 一步转移概率矩阵如下:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 写出切普曼一柯尔莫哥洛夫方程 $(C-K$ 方程);

定理：对于 m 步转移概率有如下的 $\mathbf{C}-\mathbf{K}$ 方程:

$$p_{ij}^{(m+r)}(n) = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)}(n) p_{kj}^{(r)}(n+m) \quad (i,j \in S)$$

对于齐次马氏链，此方程为:

$$p_{ij}^{(m+r)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(r)} \quad (i,j \in S) \quad (\mathbf{C}-\mathbf{K} \text{ 方程 })$$

(2) 求 n 步转移概率矩阵;

其n步转移概率矩阵，可以通过P^n 求得，对于该题而言，显然是分别求其$P^2, P^3, P^4, ..$ 地推出P^n的表达式。

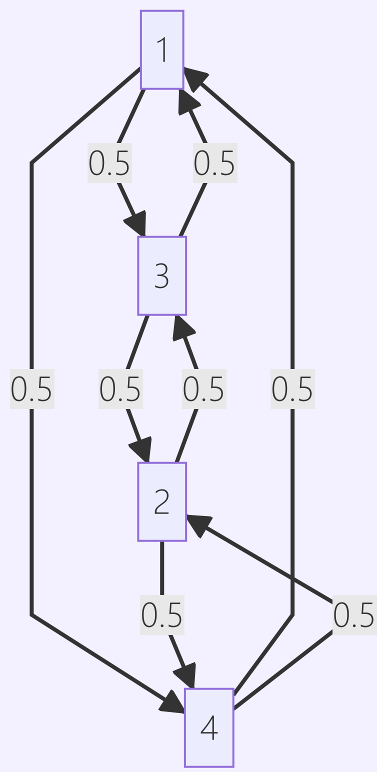
$$P^2 = P \times P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$
$$P^3 = P^2 \times P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P$$

不难看出：

$$P^n = \begin{cases} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, n \text{ is odd} \\ P^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, n \text{ is even} \end{cases}$$

(3) 试问此马氏链是平稳序列吗？为什么？

画出其状态转移图如下：



从(2)中可以看出，其n步转移矩阵只具有两个状态，也就是说此马氏链具有两个不可约子链，它们是互不通讯的，导致整个链不具有遍历性，不是平稳序列。

11、某车间有两台独立工作的机器, 每台机器有两种状态: 正常工作和故障修理。知正常工作的机器在某天出故障的概率为 a, 机器处于故障修理状态在某天恢复正常工作的概率为 b, 其中 $0<a,b<1$。令 X_n 表示第 n 天车间正常工作的机器数, 试求:

(1) 证明 $\{X_n; n=1,2,\cdots\}$ 是一齐次马氏链, 并写出其一步转移概率矩阵;

> 由于该车间只有两台机器，所以X_n的状态空间为：
>
> $$S=\{0,1,2\}$$
>
> 由题意可知，当天机器是否出问题只和前一天有关，所以其为一齐次马氏链， 并且我们也容易知道。
>
> $$\begin{aligned}
> &P_{X_{n-1}=0,X_n=0}=(1-b)^2\\
> &P_{X_{n-1}=0,X_n=1}=\binom{2}{1}(1-b)\times b=2b(1-b)\\
> &P_{X_{n-1}=0,X_n=2}=b^2\\
> &P_{X_{n-1}=1,X_n=0}=a(1-b)\\
> &P_{X_{n-1}=1,X_n=1}=(1-b)(1-a)+ba\\
> &P_{X_{n-1}=1,X_n=2}=b(1-a)\\
> &P_{X_{n-1}=2,X_n=0}=a^2\\
> &P_{X_{n-1}=2,X_n=1}=\binom{2}{1}(1-a)a\times=2a(1-a)\\
> &P_{X_{n-1}=2,X_n=2}=(1-a)^2
> \end{aligned}$$
>
> 那么我们可以得到其状态矩阵：
>
> $$P=\begin{bmatrix}(1-b)^2 & 2b(1-b) & b^2\\ a(1-b) & (1-b)(1-a)+ba & b(1-a)\\ a^2 & 2a(1-a) & (1-a)^2\end{bmatrix}$$

(2) 此马氏链是否存在极限分布? 存在的话, 计算其平稳分布;

> 由于$0<a,b<1$，所以$P>0$，所以该马氏链存在， 设其平稳分布的表达为:
>
> $$\pi=[p_0,p_1,p_2]$$
>
> 并且有$p_0+p_1+p_2=1$，由其定义，我们可以得到:
>
> $$\pi P=\pi$$
>
> 计算得到:
>
> $$p_0=\frac{a^2}{(a+b)^2},\quad p_1=\frac{2ab}{(a+b)^2},\quad p_2=\frac{b^2}{(a+b)^2}$$
>
> 上述内容即为所求的平稳分布， 不难看出，其为参数为$\frac{b}{a+b}$ 的二项分布。

(3) 若车间里有 m 台独立工作的机器, 假设条件不变, 问其平稳分布是什么?

> 由于(2)中为两台机器的分布，为二项分布， 所以m独立机器的平稳分布为伯努利分布，为:
>
> $$p_i=\binom{m}{i}(\frac{b}{a+b})^i(\frac{a}{a+b})^{m-i}$$

12、

设 $\{X_n; n \geq 0\}$ 是一齐次马氏链, 状态空间为 $\bar{S} = S_0 \cup S$, 其中: $S = \{1, 2, \cdots, m\}$为瞬时态集, $S_0 = \{0\}$ 为吸收态集, 且转移矩阵为 $\widetilde{P} = \begin{bmatrix} P & P_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 其中 $P_0 = (I - P) \cdot \vec{e}, \vec{e} = (1, 1, \cdots 1)^{\tau}$ 。定义从瞬时态集到吸收态集的首达时间为:

$$\tau = \inf \{n : n \geq 0, X_n \in S_0\}$$

令: $\vec{\pi}(0) = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m)$ 为马氏链的初始分布, 记: $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$, 且满足:

$$\alpha_k \geq 0 (k = 0, 1, \cdots, m), \sum_{k=0}^{m} \alpha_k = 1$$

令: $g_k = P\{\tau = k\}$ (称为 Phase-Type 分布), $G(\lambda) = E\{\lambda^\tau\} = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \lambda^k$ 。试证明:

(a) 对于任意 $k \in N$, 有: $g_0 = \alpha_0, g_k = \vec{\alpha} P^{k-1} P_0 = \vec{\alpha} P^{k-1} (I - P) \vec{e}$;

用数学归纳法证明
当 $k = 0$ 时, $g_0 = P\{\tau = 0\} = P\{X_0 = 0\} = \alpha_0$;
当 $k = 1$ 时, $g_1 = P\{\tau = 1\} = P\{X_0 \in S, X_1 = 0\} = \sum_{i \in S} \alpha_i p_{i0} = \vec{\alpha} P_0$;
当 $k = 2$ 时,

$$\begin{aligned} g_2 &= P\{\tau = 2\} = P\{X_0 \in S, X_1 \in S, X_2 = 0\} = \\ &= \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} P\{X_0 = i, X_1 = j, X_2 = 0\} = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \alpha_i p_{ij} p_{j0} = \vec{\alpha} P^{2-1} P_0 \end{aligned}$$

假设当 $k = n$ 时结论成立, 即 $g_n = \vec{\alpha} P^{n-1} P_0 = \vec{\alpha} P^{n-1} (I - P) \vec{e}$, 则当 $k = n + 1$ 时, 作如下分解, (1) 从初始状态 i 转移一步到状态 j; (2) 以 j 作为初始状态转移 n 步被吸收, 结合归纳假设, 我们有:

$$g_{n+1} = P\{\tau = n + 1\} = \vec{\alpha} P \cdot P^{n-1} P_0 = \vec{\alpha} P^{(n+1)-1} P_0$$

即当 $k = n + 1$ 时结论成立。
因此, 对于任意 $k \in N$, 有: $g_0 = \alpha_0, g_k = \vec{\alpha} P^{k-1} P_0 = \vec{\alpha} P^{k-1} (I - P) \vec{e}$ 。

(b) 对于任意 $0 \leq \lambda \leq 1$, 有: $G(\lambda) = \alpha_0 + \lambda \vec{\alpha} (I - \lambda P)^{-1} (I - P) \vec{e}$ 。

注意到 S 为瞬时态集, 因此有

$$\lim_{n \to +\infty} P^n = 0$$

因此, 当 n 充分大时, 有:

$$\det(I - P^n) = |I - P^n| \neq 0$$

由于:

$$(I - P)\left(I + P + P^2 + \cdots + P^{n-1}\right) = I - P^n$$

因此当 n 充分大时, 有

$$|I - P| \cdot \left|I + P + P^2 + \cdots + P^{n-1}\right| \neq 0$$

于是

$$|I - P| \neq 0$$

即

$(I-P)^{-1}$存在，

在 (A) 式中左右两边乘以 $(I-P)^{-1}$，令 $n \to +\infty$，则有

$$(I-P)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} P^k$$

将 g_k 的表达式代入，利用上面的结论，有

$$\begin{aligned}
G(\lambda) &= E\{\lambda^\tau\} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \lambda^k \\
&= \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \vec{\alpha} P^{k-1} P_0 \lambda^k \\
&= \alpha_0 + \lambda \vec{\alpha} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} (\lambda P)^{k-1} \right] P_0 \\
&= \alpha_0 + \lambda \vec{\alpha} (I - \lambda P)^{-1} P_0 \\
&= \alpha_0 + \lambda \vec{\alpha} (I - \lambda P)^{-1} (I - P) \vec{e}
\end{aligned}$$