随机过程课程作业-Week8

作者：48-丁力-202328015926048
日期：今天

目录

马尔科夫过程

13、设有一生灭过程 $\{\xi(t); t \geq 0\}$, 其中参数 $\lambda_n = \lambda, \mu_n = n\mu, \lambda$ 和 μ 均为大于零的常数, 其起始状态为 $\xi(0) = 0$ 。试求:

(a) 该过程的 Q 矩阵;
(b)列出福克一普朗克微分方程;
(c) 其均值函数 $M_\xi(t) = E\{\xi(t)\}$;
(d) 证明 $\lim_{t\to\infty} p_0(t) = \exp\{-\lambda/\mu\}$ 。

> (a):
>
> 在过程Q矩阵中，其满足如下条件：
>
> - 描述是极小时间内发生的事情，所以只能发生一个单元的跳变， 也只能发生如下转变：
>   - $P_{n,n-1} = n\mu$ (灭过程)
>   - $P_{n,n} = -(\lambda + n\mu)$ (离开n状态的负概率)
>   - $P_{n,n+1} = \lambda$ (生过程)
>   - $P_{\text{其他情况}} = 0$
>
> 如上，我们可以求得Q矩阵为：

$$Q = Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\mu & -(2\mu+\lambda) & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & n\mu & -(n\mu+\lambda) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

(b):

对于生灭过程的$K-F$方程，其一般表达形式为：

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \sum_m [W_{n,m}P_m(t) - W_{m,n}P_n(t)]$$

其中：

- $P_n(t)$ 是在时间 t 时系统处于状态 n 的概率。
- $W_{n,m}$ 是从状态 m 转移到状态 n 的转移率。
- $W_{m,n}$ 是从状态 n 转移到状态 m 的转移率。
- 从状态 n 到 $n+1$ 的转移率是 λ。
- 从状态 n 到 $n-1$ 的转移率 (对 $n>0$) 是 $n\mu$。

因此，对于这个生灭过程，$K-F$可以写为：

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) - (\lambda + n\mu)P_n(t)$$

- 第一项 $\lambda P_{n-1}(t)$ 表示由状态 $n-1$ “生”到状态 n 的概率流入。
- 第二项 $(n+1)\mu P_{n+1}(t)$ 表示由状态 $n+1$ “灭”到状态 n 的概率流入。
- 第三项 $(\lambda+n\mu)P_n(t)$ 表示从状态 n 流出到其他状态的概率。

当然，对于0状态，由于不存在-1这个状态，所以其$K-F$方程为：

$$\frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t) - \lambda P_0(t)$$

综上所述，方程可以表达为：

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \begin{cases} \mu P_1(t) - \lambda P_0(t) & \text{if } n = 0 \\ \lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) - (\lambda + n\mu)P_n(t) & \text{if } n > 0 \end{cases}$$

这里：

- 当 $n=0$ 时，方程考虑的是从状态 0 到状态 1 的转移（“生”）和从状态 1 到状态 0 的转移（“灭”）。
- 当 $n>0$ 时，方程考虑的是从状态 $n-1$ 到状态 n 的转移（“生”）、从状态 $n+1$ 到状态 n 的转移（“灭”）以及从状态 n 到其他状态的转移。

(c):

由定义可以得到:

$$\begin{aligned} M_\xi(t) &= E\{\xi(t)\} \\ &= \sum_n^\infty n \times P_n(t) \end{aligned}$$

直接求解比较困难， 所以这里考虑先求导，然后转换求导， 因为我们在(c)中给出了其对时间求导的关系式：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial M_\xi(t)}{\partial t} &= \frac{E\{\xi(t)\}}{\partial t} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \times \frac{P_n(t)}{\partial t} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n \times (\lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) - (\lambda + n\mu)P_n(t)) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n\lambda P_{n-1}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\mu P_{n+1}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} n(\lambda+n\mu)P_n(t)
\end{aligned}
$$

这里需要一点技巧了，

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda P_{n-1}(t) &= \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)\lambda P_m(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\lambda P_n(t) - \lambda P_0(t)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\mu P_{n+1}(t) &= \sum_{m=2}(m-1)m\mu P_m(t) \\
&= \sum_{n=1}(n-1)n\mu P_n(t) - 2\mu P_2(t)
\end{aligned}
$$

回带，得到原式为：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} n\lambda P_{n-1}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)\mu P_{n+1}(t) - \sum_{n=1}^{\infty} n(\lambda+n\mu)P_n(t) = \\
&\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\lambda P_n(t) - \lambda P_0(t) + \sum_{n=1}(n-1)n\mu P_n(t) - 2\mu P_2(t) - \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} n(\lambda+n\mu)P_n(t) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \lambda - \mu M_\xi(t)
\end{aligned}
$$

那么可以求得：

$$
M_\xi(t) = exp(-\mu t)M_\xi(0) + \int_0^t exp(-\mu(t-s))\lambda ds = \frac{1-exp(-\mu t)}{\mu}\lambda
$$

(d)：

$$
\lim_{t\to\infty} p_0(t) = \lim_{t\to\infty} e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}}
$$

14、有一个细菌群体, 在一段时间内假定可以通过分裂等方式产生新的细菌, 并不会死去。假设在长为 Δt 的一段时间内, 一个细菌分裂为两个, 即产生新细菌的概率为 $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, 令 $X(t)$ 表示时刻 t 的细菌群体的大小。

(a) 试说明 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是生灭过程;
(b) 试证 $\lambda_i = i\lambda, \mu_i = 0$, 并列出其前进方程和后退方程;
(c) 验证 $p_{kj}(t) = C_{j-1}^{j-k}\left(e^{-\lambda t}\right)^k\left(1-e^{-\lambda t}\right)^{j-k}, j \geq k \geq 1$ 是上述方程的解, 并计算

$$E\{X(s+t) - X(s) \mid X(s) = m\}。$$

(a)：

同13,容易得知 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是生灭过程是显然的，其 Q 矩阵为

$$
Q = \begin{pmatrix}
-\lambda & \lambda & & & \\
& -2\lambda & 2\lambda & & \\
& & -3\lambda & 3\lambda & \dots \\
& & & \ddots & \ddots \\
& & & & \ddots
\end{pmatrix}
$$

(b):

(c):

15、在一个线性生灭过程中, 假定人口中每个人在间隔 $(t, t+\Delta t)$ 内以概率 $\lambda \Delta t+o(\Delta t)$ 生一个儿女, 假定这些人是统计独立的, 则如果在时刻 t 人口中有 n 个人,在 $(t, t+\Delta t)$ 中出生的概率是 $n \lambda \Delta t+o(\Delta t)$ 。同样地, 如果在 $(t, t+\Delta t)$ 内一个人死亡的概率是 $\mu \Delta t+o(\Delta t)$, 则如果在 t 时刻有 n 个人活着, 在 $(t, t+\Delta t)$ 内死亡的概率是 $n \mu \Delta t+o(\Delta t)$, $X(t)$ 表示 t 时刻人口的数目, 且已知 $X(0)=n_0$, 则 $X(t)$ 是一马氏过程。

(a) 试写出过程的状态空间及 Q 矩阵, 求 $p_n(t)=P\{X(t)=n\}$ 满足的微分方程;

(b) 试导出 $m_X(t)=E\{X(t)\}$ 满足的微分方程;
(c) 求解 $m_X(t)$ 。

(a):

当 $\lambda_n=n \lambda+a, \mu_n=n \mu \quad(\lambda, \mu, a>0)$ 时, 可以得到此过程的 Q 矩阵:

令:

$$
\begin{gathered}
p_j(t)=P\{\xi(t)=j\} \\
\vec{p}(t)=\left(p_0(t), p_1(t), p_2(t), \cdots, p_n(t), \cdots\right)
\end{gathered}
$$

写出福克一普朗克方程:

初始条件: $p_{n_0}(0)=1, p_j(0)=0 \quad\left(j \neq n_0\right)$ 。
(b):

由数学期望的定义: $E\{\xi(t)\} \hat{=} M_{\xi}(t)=\sum_{n=0}^{\infty} n p_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t)$, 由此, 我们有:

$$
\begin{aligned}
\frac{d M_{\xi}(t)}{d t} & =\frac{d}{d t} \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty} n \frac{d p_n(t)}{d t}= \\
& =\sum_{n=1}^{\infty} n\left\{(n-1) \lambda+a] p_{n-1}(t)-[n(\lambda+\mu)+a] p_n(t)+(n+1) \mu p_{n+1}(t)\right\} \\
& =\sum_{n=1}^{\infty} n a p_{n-1}(t)-\sum_{n=1}^{\infty} n a p_n(t)+ \\
& \quad+\sum_{n=1}^{\infty} n\left[(n-1) \lambda p_{n-1}(t)-n(\lambda+\mu) p_n(t)+(n+1) \mu p_{n+1}(t)\right] \\
& =\sum_{n=0}^{\infty} a p_n(t)+\sum_{n=1}^{\infty} n\left[(n-1) \lambda p_{n-1}(t)-n(\lambda+\mu) p_n(t)+(n+1) \mu p_{n+1}(t)\right] \\
& =a+(\lambda-\mu) \sum_{n=1}^{\infty} n p_n(t)=a+(\lambda-\mu) M_{\xi}(t)
\end{aligned}
$$

即可得到描写 $M_{\xi}(t)$ 的微分方程:

$$
\left\{\begin{array}{l}
\frac{d M_{\xi}(t)}{d t}=a+(\lambda-\mu) M_{\xi}(t) \\
M_{\xi}(0)=n_0
\end{array}\right.
$$

(c):

解上面的微分方程, 我们有:

$$M_\xi(t) = n_0 e^{(\lambda-\mu)t} + \frac{a}{\mu-\lambda}\left[1-e^{(\lambda-\mu)t}\right]$$

以上得求解当 $a=0$ 时即是所要得解。

16、一条电路供给 m 个焊工用电，每个焊工均是间断地用电。现假设 (1) 若一焊工在 t 时刻用电，而在 $(t, t+\Delta t)$ 内停止用电的概率为 $\mu\Delta t + o(\Delta t)$; (2) 若一焊工在 t 时刻没有用电，而在 $(t, t+\Delta t)$ 内用电的概率为 $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ 。每一焊工的工作情况是相互独立的。设 $\xi(t)$ 表示在 t 时刻正在用电的焊工数。

(a) 试写出此过程的状态空间及 Q 矩阵;
(b) 设 $\xi(0)=0$, 写出福克一普朗克方程;
(c) 当 $t\to+\infty$ 时，求极限分布 P_n 。

(a):

令 $\xi(t)$ 表示 t 时刻系统中正在用电的焊工数，则 $\{\xi(t), t\geq 0\}$ 是一马氏过程，其状态空间为：$S=\{0,1,2,\cdots,m\}$ 。
Q 矩阵为:

$$Q=\begin{pmatrix} -m\lambda & m\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mu & -[\mu+(m-1)\lambda] & (m-1)\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2\mu & -[2\mu+(m-2)\lambda] & (m-2)\lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m\mu & -m\mu \end{pmatrix}$$

(b):

令: $p_j(t) = P\{\xi(t)=j\}$

$$\vec{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), p_2(t), \cdots, p_m(t)), \vec{p}(0) = (1,0,0,\cdots,0)$$

写出福克－普朗克方程:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{p}(t)}{dt} = \vec{p}(t)Q \\ \vec{p}(0) = (1,0,0,\cdots,0)_{1\times(m+1)} \end{cases}$$

(c):

(c) 画出状态转移率图，可得 $t\to\infty$ 时的平衡方程:

$$\begin{cases} m\lambda p_0 = \mu p_1 \\ [(m-1)\lambda+\mu]p_1 = m\lambda p_0 + 2\mu p_2 \\ \quad\vdots \\ [(m-n)\lambda + n\mu]p_n = (m-n+1)\lambda p_{n-1} + (n+1)\mu p_{n+1} \\ \quad\vdots \\ \lambda p_{m-1} = m\mu p_m \\ \sum_{n=0}^m p_n = 1 \end{cases}$$

由此可得:

$$(m-n)\lambda p_n - (n+1)\mu p_{n+1} = (m-n+1)\lambda p_{n-1} - n\mu p_n = \cdots = m\lambda p_0 - \mu p_1 = 0$$

即有:

$$(m-n)\lambda p_n - (n+1)\mu p_{n+1} = 0$$
$$p_{n+1} = \frac{(m-n)}{(n+1)}\cdot\frac{\lambda}{\mu}\cdot p_n,\quad n=0,1,2,\cdots,m$$

由此可以求得:

$$p_n = \frac{(m-n+1)}{n} \cdot \frac{(m-n)}{n-1} \cdots\cdots \frac{m}{1} \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot p_0 = C_m^n \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0, \quad n = 0, 1, \cdots, m$$

由 $\sum_{n=0}^{m} p_n = 1$，即可确定 p_0，最终得到所要的结果。