随机过程课程作业-Week16

作者：48-丁力-202328015926048
日期：今天

目录

二阶矩过程、平稳过程和随机分析

7、设 $\xi(t)=X\sin(Yt); t\geq 0$, 而随机变量 X、Y 是相互独立且都服从 $[0,1]$ 上的均匀分布,试求此过程的均值函数及相关函数。并问此过程是否是平稳过程, 是否连续、可导?

- 首先求其均值函数:

$$\begin{aligned}E(\xi(t)) &= E(X\sin(Yt)) \\ &\text{由于}X\text{和}Y\text{独立} \\ &= E(X)E(\sin(Yt)) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 Y\sin(Yt)dY \\ &= \frac{1}{2}\frac{t-t\cos(t)}{t^2} \\ &= \frac{1-\cos(t)}{2t}\end{aligned}$$

- 然后求其相关函数:

$$\begin{aligned}R(s,t) &= E(\xi(s)\xi(t)) \\ &= E(X^2\sin(Yt)\sin(Ys)) \\ &= E(X^2)E(\sin(Yt)\sin(Ys)) \\ &= \frac{1}{3}E(\frac{\cos(Y(t-s))-\cos(Y(t+s)))}{2}) \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{t\cos(t)\sin(s)-s\cos(s)\sin(t)}{s^2-t^2}\right)\end{aligned}$$

由于其期望不是常数，并且相关函数不是只与$t-s$有关，所以该过程不是平稳过程，并且不连续，不可导。

8、设 $\{X(t), t \in R\}$ 是连续平稳过程, 均值为 m, 协方差函数为 $C_X(\tau) = ae^{-b|\tau|}$, 其中: $\tau \in R, a, b > 0$。对固定的 $T > 0$, 令 $Y = T^{-1} \int_0^T X(s)ds$, 证明:

$$E\{Y\} = m, \mathrm{Var}(Y) = 2a\left[(bT)^{-1} - (bT)^{-2}\left(1 - e^{-bT}\right)\right]$$

题干要求所求的内容为期望与方差，那么我们一个个的开始计算：

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(T^{-1}\int_0^T X(s)ds) \\ &= T^{-1}\int_0^T E(X(s))ds \\ &= T^{-1}\int_0^T mds \\ &= m \end{aligned}$$

Q.E.D

- 然后我们来计算其方差：

$$\begin{aligned} Var(Y) &= E(Y^2) - E^2(Y) \\ &= E(Y^2) - m^2 \\ &= E([T^{-1}\int_0^T X(s)ds]^2) - m^2 \\ &= T^{-2}\int_0^T\int_0^T E(X(s)X(u))dsdu - m^2 \\ &= T^{-2}\int_0^T\int_0^T R_X(s-u)dsdu - m^2 \\ &= T^{-2}\int_0^T\int_0^T [C_X(s-u) + m^2]dsdu - m^2 \\ &= T^{-2}\int_0^T\int_0^T ae^{-b|\tau|}dsdu \\ &= 2a\left[(bT)^{-1} - (bT)^{-2}\left(1 - e^{-bT}\right)\right] \end{aligned}$$

Q.E.D

9、设 $(X, Y) \sim N\left(0, 0, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho\right)$, 令 $X(t) = X + tY$, 以及 $Y(t) = \int_0^t X(u)du, Z(t) = \int_0^t X^2(u)du$, 对于任意 $0 \le s \le t$,

(1) 求 $E\{X(t)\}, E\{Y(t)\}, E\{Z(t)\}, \mathrm{Cov}(X(s), X(t)), \mathrm{Cov}(Y(s), Y(t))$;

(2) 证明 $X(t)$ 在 $t > 0$ 上均方连续、均方可导

(3) 求 $Y(t)$ 及 $Z(t)$ 的均方导数。

- (1)

- 首先来求 $X(t)$的期望：

$$\begin{aligned} E(X(t)) &= E(X + tY) \\ &= E(X) + E(tY) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

- 再来求$Y(t)$的期望：

$$
\begin{aligned}
E(Y(t)) &= E(\int_0^t X(u)du) \\
&= E(\int_0^t X+uY du) \\
&= \int_0^t E(X)+E(uY)du \\
&= 0+0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

- 再来求$Z(t)$的期望:

$$
\begin{aligned}
E(Z(t)) &= E(\int_0^t X^2(u)du) \\
&= E(\int_0^t [X+uY]^2 du) \\
&= E(\int_0^t X^2+2uXY+u^2Y^2 du) \\
&= E(X^2u+u^2XY+\frac{u^3}{3}Y^2 \mid_0^t) \\
&= E(X^2t+t^2XY+\frac{t^3}{3}Y^2) \\
&= t\sigma_1^2+t^2\rho\sigma_1\sigma_2+\frac{t^3}{3}\sigma_2^2
\end{aligned}
$$

- 然后我们再来求其的协方差:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X(s),X(t)) &= R_X(s,t) \\
&= E(X(s)X(t)) \\
&= E([X+sY][X+tY]) \\
&= E(X^2+tXY+sXY+stY^2) \\
&= E^2(X)+D(X)+(t+s)E(XY)+stE(Y^2) \\
&= \sigma_1^2+(s+t)\rho\sigma_1\sigma_2+st\sigma_2^2
\end{aligned}
$$

- 然后我们再来求Y的自相关函数:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Y(s),Y(t)) &= R_Y(s,t) \\
&= E(Y(s)Y(t)) \\
&= E(\int_0^t X(u)du\int_0^s X(u)du) \\
&= E(\int_0^t [X+uY]du\int_0^s [X+uY]du) \\
&= E([tX+\frac{t^2}{2}Y][sX+\frac{s^2}{2}Y]) \\
&= E(stX^2+[\frac{ts^2+t^2s}{2}XY+\frac{s^2t^2}{4}Y^2]) \\
&= st\sigma_1^2+\frac{ts^2+t^2s}{2}\rho\sigma_1\sigma_2+\frac{s^2t^2}{4}\sigma_2^2 \\
&= st\sigma_1^2+\frac{t+s}{2}ts\rho\sigma_1\sigma_2+\frac{s^2t^2}{4}\sigma_2^2
\end{aligned}
$$

- (2)

因为由:

$$R_X(s,t)=\sigma_1^2+(s+t)\rho\sigma_1\sigma_2+st\sigma_2^2$$

可知，$X(t)$ 在 $t>0$ 上均方连续、均方可导。

- (3)

$$R_Y(s,t)=\sigma_1^2st+\frac{1}{2}\rho\sigma_1\sigma_2st(s+t)+\frac{1}{4}\sigma_2^2s^2t^2,$$

可知，$Y(t)$ 在 $t>0$ 上均方可导。其均方导数 $Y'(t)$ 的均值函数和相关函数分别为

$$\mu_{Y'} = E\left\{Y'(t)\right\} = 0$$

$$R_{Y'}(s,t) = \frac{\partial^2 R_Y(s,t)}{\partial s \partial t} = \sigma_1^2 + \rho\sigma_1\sigma_2(s+t) + \sigma_2^2 st$$

10、设随机过程 $\{X(t); -\infty < t < +\infty\}$ 是均值为零、自相关函数为 $R_X(\tau)$ 的实平稳正态过程。设 $X(t)$ 通过线性全波检波器后, 其输出为 $Y(t) = |X(t)|$, 试求:

（1）随机过程 $Y(t)$ 的相关函数 $R_Y(\tau)$, 并说明其是否为平稳过程;
（2）随机过程 $Y(t)$ 的均值和方差;
（3）随机过程 $Y(t)$ 的一维概率分布密度函数 $f_Y(y)$ 。

- (1)设 X, Y 是服从均值为零的正态分布二维随机变量, 其联合概率密度为:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\left(1-r^2\right)}\left[\frac{x^2}{\sigma_1^2} - \frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

则有:

$$E\{|XY|\} = \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\pi}[\varphi\sin\varphi + \cos\varphi]$$

其中: $\sin\varphi = r, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ 。
因为 $X(t+\tau)$ 与 $X(t)$ 是联合正态分布的, 且各自的均值为零, 方差为 $R_X(0)$, 相关系数为

$$r = \frac{E\{X(t+\tau)E(t)\}}{\sqrt{E\left\{X^2(t+\tau)\right\}}\sqrt{E\left\{X^2(t)\right.}} = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}$$

由此, 我们有:

$$R_Y(\tau) = E\{|X(t+\tau)||X(t)|\} = \frac{2R_X(0)[\varphi\sin\varphi + \cos\varphi]}{\pi}$$

其中: $\sin\varphi = \frac{R_X(\tau)}{R_X(0)}, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ 。

$$m_Y = E\{Y(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X(x) dx = 2\int_0^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2R_X(0)}\right\} dx = \sqrt{\frac{2R_X(0)}{\pi}}$$

由此可知, 随机过程 $Y(t)$ 是平稳过程。

- (2) 均值计算如上 (1), 方差计算如下:

$$E\left\{Y^2(t)\right\} = E\left\{X^2(t)\right\} = R_X(0)$$

$$\sigma_Y^2 = E\left\{Y^2(t)\right\} - m_Y^2 = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)R_X(0)$$

- (3) 因为 $X(t)$ 的一维分布为正态分布, 其分布密度函数为:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2R_X(0)}\right\}, \quad -\infty < x < +\infty$$

因此，我们有:

$$f_Y(y) = [f_X(y) + f_X(-y)] = \frac{2}{\sqrt{2\pi R_X(0)}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2R_X(0)}\right\}, \quad y > 0$$