随机过程课程作业-Week15

作者：48-丁力-202328015926048
日期：今天

目录

二阶矩过程、平稳过程和随机分析

1.设 $X_n=\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\cos\left(\alpha_k n-U_k\right)$, 其中 σ_k 和 α_k 为正常数, $U_k\sim U(0,2\pi)$, 且相互独立, $k=1,2,\cdots,N$, 试计算 $\{X_n,n=0,\pm1,\cdots\}$ 的均值函数和相关函数, 并说明其是否是平稳过程。

首先尝试计算其均值函数:

$$\begin{aligned}
E(X_n) &= E(\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\cos\left(\alpha_k n-U_k\right)) \\
&= \sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}E(\cos\left(\alpha_k n-U_k\right)) \\
&= \sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}E(\cos(\alpha_k n)\cos(U_k)+\sin(\alpha_k n)\sin(U_k)+) \\
&= 0
\end{aligned}$$

然后尝试计算其相关函数:

$$\begin{aligned}
R_x(m,n) &= E([\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\cos\left(\alpha_k m-U_k\right)][\sum_{k=1}^{N}\sigma_k\sqrt{2}\cos\left(\alpha_k n-U_k\right)]) \\
&= 2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_i\sigma_j E\left\{\cos\left(\alpha_i n-U_i\right)\cos\left(\alpha_j m-U_j\right)\right\} \\
&= 2\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2 E\left\{\cos\left(\alpha_i n-U_i\right)\cos\left(\alpha_i m-U_i\right)\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2\cos\left[\alpha_i(n-m)\right]
\end{aligned}$$

由于其期望是常数，并且自相关函数是只依赖于时间间隔，所以其为平稳过程。

2.设有随机过程 $X(t) = A\cos(\omega t + \pi\eta(t))$, 其中 $\omega > 0$ 为常数, $\{\eta(t), t \geq 0\}$ 是泊松过程, A 是与 $\eta(t)$ 独立的随机变量, 且 $P\{A=-1\} = P\{A=1\} = 1/2$。

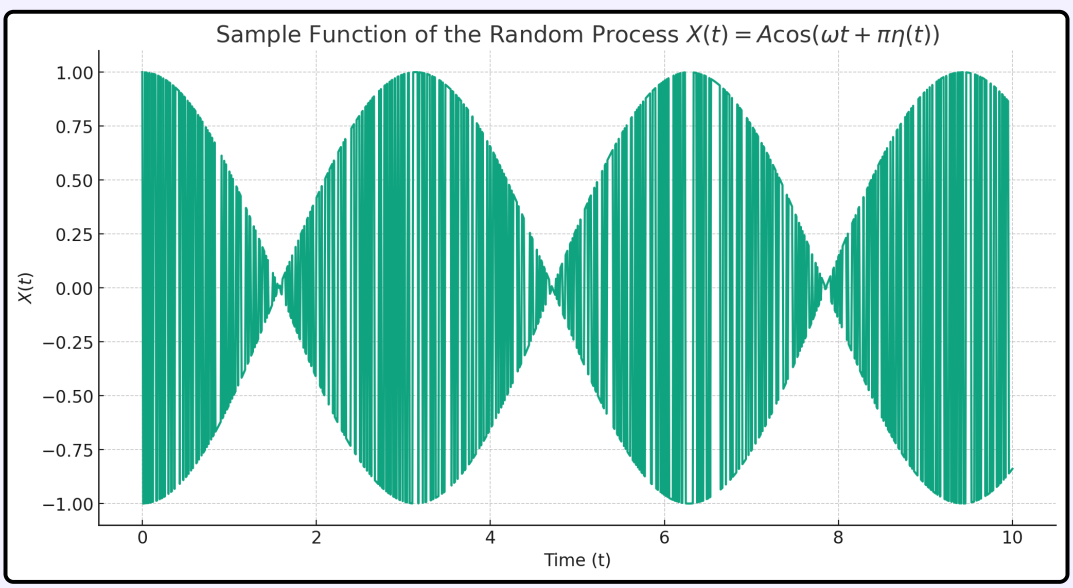
(1)试画出此过程的样本函数, 并问样本函数是否连续?
(2)试求此过程的相关函数, 并问该过程是否均方连续?

(1)

泊松过程 $\eta(t)$ 是一个以离散跳跃形式增长的过程，这意味着 $\eta(t)$ 在跳跃点上不连续。由于 $X(t)$ 依赖于 $\eta(t)$，所以当 $\eta(t)$ 发生跳跃时，$X(t)$ 也会不连续。因此，这个过程的样本函数不是连续的。

借助于下述 `Python` 代码，我可以给出其样本函数:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# 设置参数
omega = 1  # 频率omega
time = np.linspace(0, 10, 1000)  # 时间范围为0到10秒，共1000个点
# 生成泊松过程
rate = 1  # 泊松过程的速率（跳跃频率），假设为每秒1次
poisson_process = np.random.poisson(rate, time.shape)
# 生成随机变量A的值
A = np.random.choice([-1, 1], time.shape)
# 计算随机过程X(t)
X_t = A * np.cos(omega * time + np.pi * np.cumsum(poisson_process))
# 绘制样本函数
plt.figure(figsize=(12, 6))
plt.plot(time, X_t)
plt.title("Sample Function of the Random Process $X(t) = A \cos(\omega t + \pi \eta(t))$")
plt.xlabel("Time (t)")
plt.ylabel("$X(t)$")
plt.grid(True)
plt.show()
```



从图中也能看出，其为不连续的。

(2)

现在我们来求其自相关函数如下:

$$
\begin{aligned}
R(s,t) &= E(A\cos(\omega t+\pi\eta(s))\times A\cos(\omega t+\pi\eta(t))) \\
&= A^2E(\cos(\omega s+\pi\eta(s))\cos(\omega t+\pi\eta(t))) \\
&= \frac{A^2}{2}E(\cos(\omega(t+s)+\pi(\eta(s)+\eta(t))+\cos(\omega(s-t)+\pi(\eta(s)-\eta(t)))) \\
&= \frac{A^2}{2}[E(\cos(\omega(t+s)+\pi(\eta(s)+\eta(t)))+E(\cos(\omega(s-t)+\pi(\eta(s)-\eta(t))))] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left\{\cos\left[\omega\left(t+s\right)\right]+\cos\left[\omega\left(s-t\right)\right]\right\}\cdot\frac{\left[\lambda\left(s-t\right)\right]^k}{k!}\cdot e^{-\lambda(s-t)} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\cos\left[\omega\left(s+t\right)\right]+\cos\left[\omega\left(s-t\right)\right]\right\}\cdot e^{-2\lambda(s-t)} \\
&= \cos\omega t\cos\omega s\cdot e^{-2\lambda(s-t)}
\end{aligned}
$$

在给定的随机过程$X(t)=A\cos(\omega t+\pi\eta(t))$ 中，我们发现相关函数 $R_X(s,t)$ 在 s 趋近于 t 时，趋向于 $\cos^2\omega t$，这表明即使时间点非常接近，随机过程在这两点上的值仍然有较强的相关性。这种特性表明了过程是均方连续的——即使考虑了随机变量的波动，随机过程在时间上仍然展现出一定程度的平滑性。