第五章 平稳过程的谱分析 习题解答

1、设有一线性系统，其输入为零均值白高斯噪声 $n(t)$，其功率谱密度为 $\dfrac{N_0}{2}$，系统的冲激响应为：

$$h(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}, & t\ge 0 \\ 0\ , & t<0 \end{cases}$$

此线性系统的输出为 $\xi(t)$。令：$\eta(t)=\xi(t)-\xi(t-T)$，其中 $T>0$ 为一常数，试求过程 $\eta(t)$ 的一维概率密度函数。

解：由于线性系统的输入是零均值的高斯白噪声，因此输出 $\xi(t)$ 是正态过程，由题意有：

$$\eta(t)=\xi(t)-\xi(t-T)$$

因此，$\eta(t)$ 也是正态过程。由题意，可知系统的转移函数为：

$$H(j\omega)=\frac{1}{\alpha+j\omega} \quad \Rightarrow \quad |H(j\omega)|^2=\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}$$

因此我们有：

$$S_\xi(\omega)=|H(j\omega)|^2 S_n(\omega)=\frac{N_0}{2(\alpha^2+\omega^2)}$$

由维纳－辛嵌定理，有：

$$R_\xi(\tau)=F^{-1}[S_\xi(\omega)]=\frac{N_0}{4\alpha}e^{-\alpha|\tau|}$$

由于

$$E\{\eta(t)\}=0\ ,\quad D\{\eta(t)\}=E\{\eta(t)\eta(t)\}=2[R_\xi(0)-R_\xi(T)]=\frac{N_0}{2\alpha}\left[1-e^{-\alpha T}\right]\hat{=}\,\sigma_\eta^2$$

由此得一维分布密度函数为：

$$f_{\eta_t}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\eta}\exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma_\eta^2}\right\}$$

2、设 $s(t)$ 为一确定性信号，在 $(0,T)$ 内具有能量 $E_s=\int_0^T s^2(t)dt$，$n(t)$ 为一零均值的白高斯过程，其相关函数为：$R_n(\tau)=\dfrac{N_0}{2}\delta(\tau)$。令：$\eta_1=\int_0^T s(t)[s(t)+n(t)]dt$，$\eta_2=\int_0^T s(t)n(t)dt$。试求：

（1）给定一常数 γ，求概率 $P\{\eta_1>\gamma\}$；

（2）给定一常数γ，求概率$P\{\eta_2 > \gamma\}$。

解：由于噪声是零均值高斯随机过程，由题意可知，η_1, η_2是正态分布的随机变量。

（1）由于：

$$\eta_1 = \int_0^T s(t)[s(t)+n(t)]dt = \int_0^T s^2(t)dt + \int_0^T s(t)n(t)dt = E_s + \int_0^T s(t)n(t)dt$$

因此：

$$E\{\eta_1\} = E\left[\int_0^T s^2(t)dt + \int_0^T s(t)n(t)dt\right] = E_s$$

$$\begin{aligned} D\{\eta_1\} &= E\{\eta_1^2\} - [E\{\eta_1\}]^2 = E_s^2 + 2E_s\int_0^T s(t)E[n(t)]dt + E\left[\{\int_0^T s(t)n(t)dt\}^2\right] - E_s^2 \\ &= E\left[\{\int_0^T s(t)n(t)dt\}^2\right] = E\left[\int_0^T s(u)n(u)du \cdot \int_0^T s(v)n(v)dv\right] \\ &= \frac{N_0}{2}\int_0^T\int_0^T s(u)s(v)\delta(u-v)dudv = \frac{N_0E_s}{2} \end{aligned}$$

由此所求概率为：

$$P\{\eta_1 > \gamma\} = 1 - P\{\eta_1 \le \gamma\} = 1 - \int_{-\infty}^{\gamma} f_{\eta_1}(u)du$$

其中：

$$f_{\eta_1}(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 E_s}} e^{-\frac{(u-E_s)^2}{N_0E_s}}$$

（2）由于：$\eta_2 = \int_0^T s(t)n(t)dt$，

因此

$$E\{\eta_2\} = E\left[\int_0^T s(t)n(t)dt\right] = 0$$

$$\begin{aligned} D\{\eta_2\} &= E\{\eta_2^2\} - [E\{\eta_2\}]^2 = E\left[\{\int_0^T s(t)n(t)dt\}^2\right] \\ &= E\left[\int_0^T s(u)n(u)du \cdot \int_0^T s(v)n(v)dv\right] \\ &= \frac{N_0}{2}\int_0^T\int_0^T s(u)s(v)\delta(u-v)dudv = \frac{N_0E_s}{2} \end{aligned}$$

由此所求概率为：

$$P\{\eta_2 > \gamma\} = 1 - P\{\eta_2 \le \gamma\} = 1 - \int_{-\infty}^{\gamma} f_{\eta_2}(u)du$$

其中：

$$f_{\eta_2}(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0 E_s}} e^{-\frac{u^2}{N_0E_s}}$$

3、 设有一非线性系统，其输入为零均值平稳实高斯过程，其协方差函数为：

$$C_{\xi}(\tau)=Pe^{-\alpha|\tau|}$$

其中 $P>0$ 为一常数。系统的输出为：

$$\zeta=\frac{1}{T}\int_0^T \xi^2(t)dt$$

试求：

（1）输出均值：$E\{\zeta\}$；

（2）输出方差：$D\{\zeta\}$；

（3）设 $y=\dfrac{D\{\zeta\}}{[E\{\zeta\}]^2}$，$x=\alpha T$，画出 y 对 x 的关系简图。

解：（1）由于输入 $\xi(t)$ 是零均值的实平稳高斯过程，且其相关函数为：

$$R_{\xi}(\tau)=C_{\xi}(\tau)=Pe^{-\alpha|\tau|}$$

由此可知输出均值为：

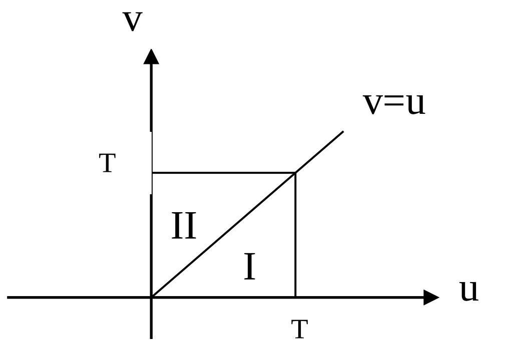
$$E\{\zeta\}=E\left[\frac{1}{T}\int_0^T \xi^2(t)dt\right]=\frac{1}{T}\int_0^T E[\xi^2(t)]dt=\frac{1}{T}\int_0^T R_{\xi}(0)dt=P$$

（2）输出方差为：

$$\begin{aligned}
D\{\zeta\}&=E\{\zeta^2\}-[E\{\zeta\}]^2=E\left[\frac{1}{T^2}\{\int_0^T \xi^2(t)dt\}^2\right]-P^2\\
&=\frac{1}{T^2}E\left[\left(\int_0^T \xi^2(u)du\right)\cdot\left(\int_0^T \xi^2(v)dv\right)\right]-P^2\\
&=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T E\{\xi^2(u)\xi^2(v)\}dudv-P^2\\
&=\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T [R_{\xi}^2(0)+2R_{\xi}^2(u-v)]dudv-P^2\\
&=\frac{2}{T^2}\int_0^T\int_0^T R_{\xi}^2(u-v)dudv
\end{aligned}$$

将相关函数代入计算，我们有：

$$\begin{aligned}
D\{\zeta\}&=\frac{2P^2}{T^2}\int_0^T\int_0^T e^{-2\alpha|u-v|}dudv\\
&=\frac{2P^2}{T^2}\iint_{I} e^{-2\alpha|u-v|}dudv+\frac{2P^2}{T^2}\iint_{II} e^{-2\alpha|u-v|}dudv\\
&=\frac{2P^2}{T^2}\int_0^T du\int_0^u e^{-2\alpha(u-v)}dv+\frac{2P^2}{T^2}\int_0^T du\int_u^T e^{2\alpha(u-v)}dv\\
&=\frac{2P^2}{\alpha T}+\frac{P^2}{\alpha^2T^2}\left[e^{-2\alpha T}-1\right]
\end{aligned}$$



（3）令 $x=\alpha T$，则有：

$$u(x)=\frac{D\{\zeta\}}{[E\{\zeta\}]^2}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\left[e^{-2x}-1\right]$$

4、 设有一线性系统，输入输出分别为 $\xi(t)$ 和 $\eta(t)$，其中输入过程 $\xi(t)$ 为零均值平稳实高斯过程，它的相关函数为：$R_\xi(\tau)=\sigma_\xi^2 e^{-\alpha|\tau|}$ $(\alpha>0)$。系统的单位冲激响应为：

$$h(t)=\begin{cases} e^{-\beta t}\ , & t\ge 0,\beta>0,\beta\ne\alpha \\ 0\ , & t<0 \end{cases}$$

若 $\xi(t)$ 在 $t=-\infty$ 时接入系统，试求：

（1）在 $t=0$ 时输出 $\eta(0)$ 大于 y 的概率 $P\{\eta(0)>y\}$；

（2）求条件概率 $P\{\eta(0)>y\,|\,\xi(-T)=0\}$，其中 $T>0$；

（3）求条件概率 $P\{\eta(0)>y\,|\,\xi(T)=0\}$，其中 $T>0$。

解：由题意，可知系统的转移函数为：

$$H(j\omega)=\frac{1}{\beta+j\omega}\quad\Rightarrow\quad |H(j\omega)|^2=\frac{1}{\beta^2+\omega^2}$$

由维纳－辛嵌定理，有：

$$S_\xi(\omega)=F[R_{\xi\xi}(\tau)]=\frac{2\alpha\sigma_\xi^2}{\alpha^2+\omega^2}$$

由输入输出功率谱的关系，有：

$$S_\eta(\omega)=|H(j\omega)|^2 S_\xi(\omega)=\frac{2\alpha\sigma_\xi^2}{(\beta^2+\omega^2)(\alpha^2+\omega^2)}$$
$$=\frac{2\alpha\sigma_\xi^2}{\alpha^2-\beta^2}\left(\frac{1}{\beta^2+\omega^2}-\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\right)$$

因此，我们有

$$R_{\eta\eta}(\tau)=F^{-1}[S_{\eta}(\omega)]=\frac{\sigma_{\xi}^{2}}{(\alpha^{2}-\beta^{2})\beta}\left[\alpha e^{-\beta|\tau|}-\beta e^{-\alpha|\tau|}\right]$$

求互相关函数：

$$\begin{aligned}R_{\eta\xi}(t_1,t_2)&=E\{\eta(t_1)\xi(t_2)\}=R_{\eta\xi}(\tau)=\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}h(u)R_{\xi\xi}(\tau-u)du=\sigma_{\xi}^{2}\int_{0}^{+\infty}e^{-\beta u}\cdot e^{-\alpha|\tau-u|}du\end{aligned}$$

其中$\tau=t_1-t_2$，当$\tau=t_1-t_2\geq 0$时，我们有：

$$\begin{aligned}R_{\eta\xi}(\tau)&=\sigma_{\xi}^{2}\int_{0}^{\tau}e^{-\beta u}\cdot e^{-\alpha(\tau-u)}du+\sigma_{\xi}^{2}\int_{\tau}^{+\infty}e^{-\beta u}\cdot e^{\alpha(\tau-u)}du\\&=\sigma_{\xi}^{2}e^{-\alpha\tau}\int_{0}^{\tau}e^{(\alpha-\beta)u}du+\sigma_{\xi}^{2}e^{\alpha\tau}\int_{\tau}^{+\infty}e^{-(\alpha+\beta)u}du\\&=\frac{2\alpha\sigma_{\xi}^{2}}{\alpha^{2}-\beta^{2}}e^{-\beta\tau}-\frac{\sigma_{\xi}^{2}}{\alpha-\beta}e^{-\alpha\tau}\end{aligned}$$

当$\tau=t_1-t_2<0$时，我们有：

$$R_{\eta\xi}(\tau)=\sigma_{\xi}^{2}\int_{0}^{+\infty}e^{-\beta u}\cdot e^{\alpha(\tau-u)}du=\sigma_{\xi}^{2}e^{\alpha\tau}\int_{0}^{+\infty}e^{-(\alpha+\beta)u}du=\frac{\sigma_{\xi}^{2}}{\alpha+\beta}e^{\alpha\tau}$$

（1）由题意，由于输入为零均值的平稳实高斯过程，因此输出也是高斯过程，且当$t\geq 0$时是平稳的。由此可知，随机变量$\eta(0)$是正态分布的随机变量，均值和方差为：

$$E\{\eta(0)\}=0\qquad \sigma_{\eta}^{2}\triangleq D(\eta(0))=R_{\eta\eta}(0)=\frac{\sigma_{\xi}^{2}}{(\alpha+\beta)\beta}$$

因此所求概率为：

$$P\{\eta(0)>y\}=1-P\{\eta(0)\leq y\}=1-\int_{-\infty}^{y}f_{\eta}(u)du$$

其中：

$$f_{\eta}(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{\eta}}e^{-\frac{u^{2}}{2\sigma_{\eta}^{2}}}$$

（2）由于高斯过程经过线性系统的输入输入是联合高斯过程，令：$X=\xi(-T),\ Y=\eta(0)$，则有：X,Y的联合分布密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^{2})}\left[\frac{x^{2}}{\sigma_1^{2}}-\frac{2rxy}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{y^{2}}{\sigma_2^{2}}\right]\right\}$$

其中：

$$\sigma_1^{2}=\sigma_{\xi}^{2},\ \sigma_2^{2}=\sigma_{\eta}^{2}=\frac{\sigma_{\xi}^{2}}{(\alpha+\beta)\beta}$$

$$r=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_1\sigma_2}=\frac{E\{XY\}}{\sigma_1\sigma_2}=\frac{R_{\eta\xi}(T)}{\sigma_1\sigma_2}$$

其条件分布密度函数为：

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_2^2}\left[y-\frac{r\sigma_2 x}{\sigma_1}\right]^2\right\}$$

因此所求的概率为：

$$P\{\eta(0)>y\,|\,\xi(-T)=0\}=1-P\{\eta(0)\le y\,|\,\xi(-T)=0\}=1-\int_{-\infty}^{y}f(u)du$$

其中：

$$f(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}\sigma_2}\exp\left\{-\frac{u^2}{2(1-r^2)\sigma_2^2}\right\}$$

（3）解法如上面的（2），唯一的区别为此时的相关系数为：

$$r=\frac{R_{\eta\xi}(-T)}{\sigma_1\sigma_2}$$

5、设实平稳过程 $\{X(t);-\infty<t<+\infty\}$ 的自相关函数和功率谱密度分别为 $R_X(\tau)$ 和 $S_X(\omega)$，令随机过程 $Y(t)=X(t+a)-X(t-a)$ 的相关函数和功率谱密度分别为 $R_Y(\tau)$ 和 $S_Y(\omega)$，其中 a 是常数。

（1）试证明： $R_Y(\tau)=2R_X(\tau)-R_X(\tau+2a)-R_X(\tau-2a)$；

（2）试证明： $S_Y(\omega)=4S_X(\omega)\sin^2(a\omega)$。

解：（1）由题设可知：

$$\begin{aligned}R_Y(\tau)&=E\{Y(t)Y(t-\tau)\}\\&=E\{[X(t+a)-X(t-a)][X(t-\tau+a)-X(t-\tau-a)]\}\\&=R_X(\tau)-R_X(\tau+2a)-R_X(\tau-2a)+R_X(\tau)\\&=2R_X(\tau)-R_X(\tau+2a)-R_X(\tau-2a)\end{aligned}$$

（2）由维纳－辛钦公式，有：

$$\begin{aligned}S_Y(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}R_Y(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\\&=2\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau-\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau+2a)e^{-j\omega\tau}d\tau-\int_{-\infty}^{+\infty}R_X(\tau+2a)e^{-j\omega\tau}d\tau\\&=S_X(\omega)\left[2-e^{2j\omega a}-e^{-2j\omega a}\right]\\&=S_X(\omega)[2-2\cos(2a\omega)]=4S_X(\omega)\sin^2(a\omega)\end{aligned}$$