随机过程课程作业-Week12

作者：48-丁力-202328015926048
日期：今天

目录

泊松过程

4、设 $Y(t)=X(-1)^{N(t)}, t \geq 0$, 其中 $\{N(t); t \geq 0\}$ 为强度为 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程, 随机变量 X 与此 Poisson 过程独立, 且有如下分布:

$$P\{X=-a\}=P\{X=a\}=1/4, \quad P\{X=0\}=1/2, \quad a>0$$

试求随机过程 $Y(t), t \geq 0$ 的均值函数和相关函数。

- (1)

$$\begin{aligned}
E(Y(t)) &= E(X(-1)^{N(t)}) \\
&\text{由于}X\text{和}Possion\text{过程独立，那么有} \\
&= E(X)E((-1)^{N(t)}) \\
&= ((a-a)\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2})E((-1)^{N(t)}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

- (2)

$$
\begin{aligned}
R_Y(t_1,t_2) &= E(X^2(-1)^{N(t_1)+N(t_2)}) \\
&= E(X^2)E((-1)^{N(t_1)+N(t_2)}) \\
&= ((a^2+a^2)\times\frac{1}{4}+0\times\frac{1}{2})E((-1)^{N(t_1)+N(t_2)}) \\
&= \frac{a^2}{2}E((-1)^{N(t_1)+N(t_2)}) \\
&= \frac{a^2}{2}E((-1)^{2N(t_1)+N(t_2)-N(t_1)}) \\
&= \frac{a^2}{2}E((-1)^{N(t_2)-N(t_1)}) \\
&= \frac{a^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}E((-1)^{N(t_2)-N(t_1)}|N(t_2)-N(t_1)=n)P(N(t_2)-N(t_1)=n) \\
&= \frac{a^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\lambda(t_2-t_1))^n e^{-\lambda(t_2-t_1)}}{n!} \\
&= \frac{a^2}{2}e^{-2\lambda(t_2-t_1)}
\end{aligned}
$$

5、设 $\{N(t),t\geq 0\}$ 是一强度为 λ 的泊松过程, $S_0=0$, S_n 为第 n 个事件发生的时刻, 求:

(1) (S_2,S_5) 的联合概率密度函数;
(2) $E\{S_1\mid N(t)\geq 1\}$;
(3) (S_1,S_2) 在 $N(t)=1$ 条件下的条件概率密度函数。

(1)

令: $0<t_2<t_5$, 取充分小的 $h>0$, 使得:

$$
t_2-\frac{h}{2}<t_2<t_2+\frac{h}{2}<t_5-\frac{h}{2}<t_5<t_5+\frac{h}{2}
$$

由

$$
\begin{aligned}
&\{t_2-\frac{h}{2}<S_2\leq t_2+\frac{h}{2},t_5-\frac{h}{2}<S_5\leq t_5+\frac{h}{2}\Big\} = \\
&\quad\Big\{N\left(t_2-\frac{h}{2}\right)=1,N\left(t_2+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_2-\frac{h}{2}\right)=1, \\
&\quad N\left(t_5-\frac{h}{2}\right)-N\left(t_2+\frac{h}{2}\right)=2,N\left(t_5+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_5-\frac{h}{2}\right)=1\Big\}\cup H_n
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
H_n=\Big\{&N\left(t_2-\frac{h}{2}\right)=1,N\left(t_2+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_2-\frac{h}{2}\right)=1, \\
&N\left(t_5-\frac{h}{2}\right)-N\left(t_2+\frac{h}{2}\right)=2,N\left(t_5+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_5-\frac{h}{2}\right)\geq 2\Big\}
\end{aligned}
$$

因此有

$$
\begin{aligned}
&P\left\{t_2-\frac{h}{2}<S_2\leq t_2+\frac{h}{2},t_5-\frac{h}{2}<S_5\leq t_5+\frac{h}{2}\right\} = \\
&=\lambda\left(t_2-\frac{h}{2}\right)e^{-\lambda\left(t_2-\frac{h}{2}\right)}\cdot(\lambda h)e^{-\lambda h}\cdot\frac{1}{2}[\lambda\left(t_5-t_2-h\right)]^2e^{-\lambda(t_5-t_2-h)}\cdot(\lambda h)e^{-\lambda h}+o\left(h^2\right)
\end{aligned}
$$

由此可得 (S_2,S_5) 的联合概率密度函数为

$$
\begin{aligned}
g\left(t_2,t_5\right)&=\lim_{h\to 0}\frac{P\left\{t_2-\frac{h}{2}<S_2\leq t_2+\frac{h}{2},t_5-\frac{h}{2}<S_5\leq t_5+\frac{h}{2}\right\}}{h^2} \\
&=\frac{\lambda^5}{2}t_2(t_5-t_2)^2e^{-\lambda t_5},\quad 0<t_2<t_5
\end{aligned}
$$

(2)

由于 $\{N(t) \geq 1\} = \{S_1 \leq t\}$, 由泊松过程与指数分布的关系可知, 在 $\{S_1 \leq t\}$ 条件下， S_1 的分布密度函数为

$f(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda t}}, \quad 0 \leq x \leq t$

因此有:

$$E\{S_1 \mid N(t) \geq 1\} = E\{S_1 \mid S_1 \leq t\} = \int_0^t x \cdot \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda t}} dx = \frac{1}{\lambda} + \frac{1-te^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda t}}$$

(3)

由于 $\{N(t)=1\} = \{S_1 \leq t < S_2\}$, 令: $0 < t_1 \leq t < t_2$, 取充分小的 $h_1, h_2 > 0$, 使得: $t_1 - h_1 < t_1 \leq t < t_2 - h_2 < t_2$, 由

$$\begin{aligned}
&\{t_1 - h_1 < S_1 \leq t_1, t_2 - h_2 < S_2 \leq t_2\} = \\
&\quad = \{N(t_1 - h_1) = 0, N(t_1) - N(t_1 - h_1) = 1, \\
&\quad N(t_2 - h_2) - N(t_1) = 0, N(t_2) - N(t_2 - h_2) = 1\} \cup H_n
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
H_n = \{&N(t_1 - h_1) = 0, N(t_1) - N(t_1 - h_1) = 1, \\
&N(t_2 - h_2) - N(t_1) = 0, N(t_2) - N(t_2 - h_2) \geq 2\}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&P\{t_1 - h_1 < S_1 \leq t_1, t_2 - h_2 < S_2 \leq t_2\} = \\
&\quad = e^{-\lambda(t_1 - h_1)} \cdot (\lambda h_1) \cdot e^{-\lambda h_1} \cdot e^{-\lambda(t_2 - h_2 - t_1)} \cdot (\lambda h_2) \cdot e^{-\lambda h_2} + o(h_1 h_2)
\end{aligned}$$

由此可得在 $N(t)=1$ 的条件下 (S_1, S_2) 的联合概率密度函数为

$$\begin{aligned}
&g(t_1, t_2 \mid N(t) = 1) = \\
&\quad = \lim_{h_1, h_2 \to 0} \frac{P\{t_1 - h_1 < S_1 \leq t_1, t_2 - h_2 < S_2 \leq t_2\}}{h_1 h_2 P\{N(t) = 1\}} = \frac{\lambda}{t} e^{-\lambda(t_2 - t)}, \quad 0 < t_1 \leq t < t_2
\end{aligned}$$

6、设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一强度为 λ 的泊松过程, 设 T 为第一个事件出现的时间, $N(T/a)$ 为第一个事件后, 在 T/a 时间间隔内出现的事件数, 其中 a 为正常数。试计算:

(1) $E\{TN(T/a)\}$;
(2) $E\left\{[TN(T/a)]^2\right\}$ 。

(1)

由题可知T满足参数为λ的指数分布，也就是有:

$$E(N(t)) = \lambda t$$

$$\begin{aligned}
E\{TN(T/a)\} &= \int_0^\infty E(TN(T/a)|T=t) f_T(t) dt \\
&= \int_0^\infty E(TN(T/a)|T=t) \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= \int_0^\infty E(tN(t/a)) \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= \int_0^\infty t\lambda \frac{t}{a} \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= \frac{2}{a\lambda}
\end{aligned}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
E\left\{[TN(T/a)]^2\right\} &= \int_0^\infty E([TN(T/a)]^2|T=t)f_T(t)dt \\
&= \int_0^\infty E([TN(T/a)]^2|T=t)\lambda e^{-\lambda t}dt \\
&= \int_0^\infty E([tN(t/a)]^2)\lambda e^{-\lambda t}dt \\
&= \int_0^\infty t^2E([N(t/a)]^2)\lambda e^{-\lambda t}dt \\
&= \int_0^\infty t^2(D(N(t/a)) + E(N(t/a)^2))\lambda e^{-\lambda t}dt \\
&= \int_0^\infty t^2(\lambda t/a + \frac{\lambda^2 t^2}{a^2}))\lambda e^{-\lambda t}dt \\
&= \frac{6a+24}{a^2\lambda^2}
\end{aligned}
$$