

第三章 Poisson 过程 (Poisson 信号流) 习题

- 1、设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一强度为 λ 的齐次泊松过程, 而 $X(t) = N(t)/2 - 1, t \geq 0$ 。对 $s > 0$, 试求:
 - (1) 计算 $E\{N(t)N(t+s)\}$ 及 $E\{N(s+t) | N(s)\}$ 的分布律;
 - (2) 证明过程 $X(t), t \geq 0$ 是马氏过程并写出转移概率 $p(s, i; t, j)$, 其中 $s \leq t$ 。
- 2、设 $\{X(t); t \geq 0\}$ 与 $\{Y(t); t \geq 0\}$ 是相互独立, 参数分别为 λ_1 与 λ_2 的 Poisson 过程。定义随机过程 $Z(t) = X(t) - Y(t), t \geq 0$, 且令: $p_n(t) = P\{Z(t) = n\}$ 。
 - (1) 试求随机过程 $\{Z(t); t \geq 0\}$ 的均值函数 $E\{Z(t)\}$ 和二阶矩 $E\{Z^2(t)\}$;
 - (2) 试证明: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p_n(t) u^n = \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_2)t\} \cdot \exp\{\lambda_1 u t + \lambda_2 u^{-1} t\}$ 。
- 3、设 $\{N_1(t); t \geq 0\}$ 和 $\{N_2(t); t \geq 0\}$ 是相互独立的 Poisson 过程, 其参数分别为 λ_1 和 λ_2 。若 $N_0(t) = N_1(t) - N_2(t)$, 问:
 - (1) $\{N_0(t); t \geq 0\}$ 是否为 Poisson 过程, 请说明理由;
 - (2) $\{N_0(t); t \geq 0\}$ 是否为平稳过程, 请说明理由。
- 4、设 $Y(t) = X(-1)^{N(t)}, t \geq 0$, 其中 $\{N(t); t \geq 0\}$ 为强度为 $\lambda > 0$ 的 Poisson 过程, 随机变量 X 与此 Poisson 过程独立, 且有如下分布:

$$P\{X = -a\} = P\{X = a\} = 1/4, P\{X = 0\} = 1/2, a > 0$$
 试求随机过程 $Y(t), t \geq 0$ 的均值函数和相关函数。
- 5、设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一强度为 λ 的泊松过程, $S_0 = 0$, S_n 为第 n 个事件发生的时刻, 求:
 - (1) (S_2, S_5) 的联合概率密度函数;
 - (2) $E\{S_1 | N(t) \geq 1\}$;
 - (3) (S_1, S_2) 在 $N(t) = 1$ 条件下的条件概率密度函数。
- 6、设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一强度为 λ 的泊松过程, 设 T 为第一个事件出现的时间, $N(T/a)$ 为第一个事件后, 在 T/a 时间间隔内出现的事件数, 其中 a 为正常数。试计算:
 - (1) $E\{TN(T/a)\}$;
 - (2) $E\{[TN(T/a)]^2\}$ 。
- 7、某商场为调查客源情况, 考察男女顾客到达商场的人数。假设 $[0, t)$ 时间内男女顾客到达商场的人数分别独立地服从参数为 λ 和 μ 的泊松过程。问:

- (1) $[0, t)$ 时间内到达商场的总人数应该服从什么分布?
- (2) 在已知 $[0, t)$ 时间内商场到达 n 位顾客条件下, 其中有 k 位是女顾客的概率为何? 平均有多少位女顾客?
- 8、设在时间区间 $(0, t]$ 到达某商店的顾客数 $N(t), t \geq 0$ 是强度为 $\lambda > 0$ 的齐次泊松过程, $N(0) = 0$, 且每个顾客购买商品的概率 $p > 0$, 没有买商品的概率为 $q = 1 - p$, 分别以 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 表示 $(0, t]$ 所有购买商品的顾客数和所有没有购买商品的顾客数, $t \geq 0$ 。证明 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 分别是服从参数为 λp 和 λq 的泊松过程, 并且是相互独立的。进一步求 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的均值函数 $m(t)$ 和相关函数 $R(s, t)$ 。
- 9、在某公共汽车起点站, 有甲、乙两路公交车。设乘客到达甲、乙两路公交车的人数分别为参数 λ_1 、 λ_2 的齐次 Poisson 过程, 且它们是相互独立的。假设 $t = 0$ 时, 两路公交车同时开始接受乘客上车。
- (1) 如果甲车在时刻 t 发车, 计算在 $[0, t]$ 内到达甲车的乘客等待开车时间总和的期望值;
- (2) 如果当甲路车上有 n 个乘客时, 甲路车发车; 当乙路车上有 m 个乘客时, 乙路车发车。求甲路车比乙路车发车早的概率。(写出表达式即可)
- 10、设 $\{X_n, n \geq 1\}$ 独立同分布, X_n 的概率密度函数为 $f(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}, x \geq 0$, 试求相应的更新函数 $m(t)$ 。
- 11、设更新过程 $N(t), t \geq 0$ 的时间间隔 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 服从参数为 μ 的泊松分布, 试求:
- (1) $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ 的分布;
- (2) 计算 $P\{N(t) = n\}$ 。