随机过程课程作业-Week14

作者：48-丁力-202328015926048
日期：今天

目录

泊松过程

7. 某商场为调查客源情况, 考察男女顾客到达商场的人数。假设 $[0,t)$ 时间内男女顾客到达商场的人数分别独立地服从参数为 λ 和 μ 的泊松过程。问:

(1) $[0,t)$ 时间内到达商场的总人数应该服从什么分布?
(2) 在已知 $[0,t)$ 时间内商场到达 n 位顾客的条件下, 其中有 k 位是女顾客的概率为何？平均有多少位女顾客？

- (1)

假设$W(t)$和$M(t)$ 分别为$[0,t)$内到达的男顾客和女顾客人数。那么对于两者的总和的概率分布有:

$$
\begin{aligned}
P(W(t)+M(t)=k) &= \sum_{i=0}^{k} P(W(t)=i)P(M(t)=k-i) \\
&= \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda t)^i}{i!}e^{-\lambda t}\frac{(\mu t)^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\mu t} \\
&= \frac{((\lambda+\mu)t)^k}{k!}e^{-(\lambda+\mu)t}
\end{aligned}
$$

所以其服从参数为$\lambda+\mu$的泊松分布。

- (2)

该概率为:

$$
\begin{aligned}
P(W(t)=k|W(t)+M(t)=n) &= \frac{P(W(t)+M(t)=n, W(t)=k)}{P(W(t)+M(t)=n)} \\
&= \frac{P(M(t)=n-k, W(t)=k)}{P(W(t)+M(t)=n)} \\
&\text{由于两者独立} \\
&= \frac{P(M(t)=n-k)P(W(t)=k)}{P(W(t)+M(t)=n)} \\
&= \frac{\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\frac{(\mu t)^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\mu t}}{\frac{((\lambda+\mu)t)^n}{n!}e^{-(\lambda+\mu)t}} \\
&= \frac{n\mu}{\mu+\lambda}
\end{aligned}
$$

8. 设在时间区间 $(0, t]$ 到达某商店的顾客数 $N(t), t \geq 0$ 是强度为 $\lambda > 0$ 的齐次泊松过程， $N(0) = 0$, 且每个顾客购买商品的概率 $p > 0$, 没有买商品的概率为 $q = 1 - p$, 分别以 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 表示 $(0, t]$ 所有购买商品的顾客数和所有没有购买商品的顾客数, $t \geq 0$ 。证明 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 分别是服从参数为 λp 和 λq 的泊松过程, 并且是相互独立的。进一步求 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的均值函数 $m(t)$ 和相关函数 $R(s, t)$ 。

由题，我们可以知道:

$$N(t) = X(t) + Y(t)$$

所以有:

$$
\begin{aligned}
P\{X(t)=n, Y(t)=m\} &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(t)=n, Y(t)=m \mid N(t)=k\}P\{N(t)=k\} \\
&= P\{X(t)=n, Y(t)=m \mid N(t)=n+m\}P\{N(t)=n+m\} \\
&= C_{n+m}^{n} p^n q^m \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda pt)^n}{n!}e^{-\lambda pt} \cdot \frac{(\lambda qt)^m}{m!}e^{-\lambda qt}
\end{aligned}
$$

首先求$X(t)$的分别，同理可得$Y(t)$的分布。

$$
\begin{aligned}
P(X(t)=n) &= \sum_{m=0}^{\infty} P\{X(t)=n, Y(t)=m\} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(\lambda pt)^n}{n!}e^{-\lambda pt} \cdot \frac{(\lambda qt)^m}{m!}e^{-\lambda qt}\right] \\
&= \frac{(\lambda pt)^n}{n!}e^{-\lambda pt}
\end{aligned}
$$

同理可得$Y(t)$的分布:

$$P(Y(t)=m) = \frac{(\lambda pt)^m}{m!}e^{-\lambda qt}$$

所以有:

$$P\{X(t)=n, Y(t)=m\} = P(X(t)=n) \times P(Y(t)=m)$$

所以两者独立，并且服从参数为$\lambda p, \lambda q$的泊松过程。

由泊松过程的性质可得:

$$
\begin{aligned}
&m_X(t) = E\{X(t)\} = \lambda pt, \quad t \geq 0, \quad m_Y(t) = E\{Y(t)\} = \lambda qt, \quad t \geq 0 \\
&R_X(s,t) = E\{X(s)X(t)\} = (\lambda p)^2 st + (\lambda p)\min\{s,t\}, \quad s,t \geq 0 \\
&R_Y(s,t) = E\{Y(s)Y(t)\} = (\lambda q)^2 st + (\lambda q)\min\{s,t\}, \quad s,t \geq 0
\end{aligned}
$$

9. 在某公共汽车起点站, 有甲、乙两路公交车。设乘客到达甲、乙两路公交车的人数分别为参数 λ_1、λ_2 的齐次 Poisson 过程, 且它们是相互独立的。假设 $t=0$ 时, 两路公交车同时开始接受乘客上车。

(1) 如果甲车在时刻 t 发车, 计算在 $[0, t]$ 内到达甲车的乘客等待开车时间总和的期望值;
(2) 如果当甲路车上有 n 个乘客时, 甲路车发车; 当乙路车上有 m 个乘客时, 乙路车发车。求甲路车比乙路车发车早的概率。(写出表达式即可)

(1)

乘客到站的时间为齐次 Poisson 过程中的阶跃点，其间隔服从指数分布。对于 Poisson 过程，事件间的时间间隔服从参数为

λ_1，指数分布的期望值为$\frac{1}{\lambda_1}$，在时间内，每个乘客到达的时间可看作均匀分布在$[0,t]$所以其平均到达时间为:

$$\frac{t}{2}$$

总时间为:

$$k \times \frac{t}{2} = \frac{kt}{2}$$

(2)

假设$[0,t]$时刻到达甲车的人数为$M(t)$，那么由于其满足泊松过程，那么我们有:

$$P(M(t)=k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda_1 t}$$

其期望为:

$$m_M(t) = \lambda_1 t$$

假设第i个人，在第S_i个时刻降临，那么$[0,t]$时刻内到达甲车的乘客总等待时间为:

$$\sum_{i=1}^{M(t)} (t - S_i)$$

当$M(t)=k$时:

$$E(\sum_{i=1}^{M(t)} (t - S_i) | M(t) = k) = \frac{kt}{2}$$

那么其期望值为:

$$E(S(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kt}{2} P(M(t)=k) = \frac{t}{2} E(M(t)) = \frac{\lambda_1 t^2}{2}$$

(2)

$$P\{S_n < S_m\} = \int_0^{+\infty} dt_2 \int_0^{t_2} \frac{(\lambda_1 t_1)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1} \cdot \frac{(\lambda_2 t_2)^{m-1}}{(m-1)!} \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2} dt_1$$