

第二章 Markov 过程习题

- 1、设 $\{\xi_n, n \geq 1\}$ 为相互独立同分布的随机变量序列，其分布为：

$$P\{\xi_n = 1\} = p > 0, \quad P\{\xi_n = 0\} = q = 1 - p > 0$$

定义随机序列 $\{X_n, n \geq 2\}$ 和 $\{Y_n, n \geq 2\}$ 如下：

$$X_n = \begin{cases} 0, & \xi_n = 0, \xi_{n-1} = 0; \\ 1, & \xi_n = 0, \xi_{n-1} = 1; \\ 2, & \xi_n = 1, \xi_{n-1} = 0; \\ 3, & \xi_n = 1, \xi_{n-1} = 1; \end{cases} \quad Y_n = \begin{cases} 0, & \xi_n = 0, \xi_{n-1} = 0; \\ 1, & \text{其它}; \end{cases}$$

试问随机序列 $\{X_n, n \geq 2\}$ 和 $\{Y_n, n \geq 2\}$ 是否为马氏链？如果是的话，请写出其一步转移概率矩阵并研究各个状态的性质。不是的话，请说明理由。

- 2、天气预报模型如下：今日是否下雨依赖于前三天是否有雨（即一连三天有雨；前两天有雨，第三天是晴天；…），试将此问题归纳为马尔可夫链，并确定其状态空间。如果过去一连三天有雨，今天有雨的概率是 0.8；过去三天连续为晴天，而今天有雨的概率为 0.2；在其它天气情况时，今天的天气和昨日相同的概率为 0.6。试求此马氏链的转移概率矩阵。

- 3、设 $\{X_n; n \geq 0\}$ 是一齐次马氏链，状态空间为 $S = \{0, 1, 2\}$ ，它的初始状态的概率分布为： $P\{X_0 = 0\} = 1/4$ ， $P\{X_0 = 1\} = 1/2$ ， $P\{X_0 = 2\} = 1/4$ ，它的一步转移转移概率矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

(1) 计算概率： $P\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1\}$ ；

(2) 计算 $p_{01}^{(2)}, p_{12}^{(3)}$ 。

- 4、某通信系统由 n 个中继站组成，从上一站向下一站传送数字信号 0 或 1 时，接收的正确率为 p 。如用 X_0 表示初始站发出的数字信号，用 X_k 表示第 k 个中继站接收到的数字信号，试证： $\{X_k; 0 \leq k \leq n\}$ 是一个马氏链，且有

$$P\{X_0 = 1 | X_n = 1\} = \frac{\alpha + \alpha(p-q)^n}{1 + (2\alpha - 1)(p-q)^n}$$

其中: $\alpha = P\{X_0 = 1\}$, $q = 1 - p$ 。请说明上述条件概率的实际意义。

5、设有一个三个状态 $S = \{0, 1, 2\}$ 的齐次马氏链, 它一步转移概率矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & q_1 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 \\ q_3 & 0 & p_3 \end{pmatrix}$$

试求:

(1) $f_{00}^{(1)}, f_{00}^{(2)}, f_{00}^{(3)}, f_{01}^{(1)}, f_{01}^{(2)}, f_{01}^{(3)}$;

(2) 确定状态分类, 哪些属于常返的, 哪些属于非常返的。

6、试确定下列齐次马氏链的状态分类, 哪些属于常返的, 哪些属于非常返的。已知该链的一步转移矩阵为:

(1) $P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$;

(2) $P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$;

(3) $P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{40} & p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。

7、设具有三个状态的齐次马氏链的一步转移概率矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

(a) 求 3 步首达概率 $f_{02}^{(3)}$;

(b) 写出三个状态的常返性、周期性; 此链是否遍历? 说明理由。

8、设 $\{X_n; n = 0, 1, 2, \dots\}$ 是一齐次马氏链, 其初始分布为

$$P\{X_0 = 0\} = p_0, P\{X_0 = 1\} = p_1, P\{X_0 = 2\} = p_2, P\{X_0 = 3\} = p_3$$

一步转移概率矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(1) 试求概率 $P\{X_0 = 0, X_1 = 1, X_2 = 1\}$;

(2) 计算 $p_{01}^{(2)}$;

(3) 试求首达概率 $f_{00}^{(n)}, n = 1, 2, 3, \dots$;

(4) 写出四个状态的常返性、周期性; 此链是否遍历? 说明理由。

9、考虑三个状态的齐次马氏链, 其转移概率矩阵为

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p & q & r \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

其中: $p, q, r > 0, p + q + r = 1$,

(a) 假定过程从状态 1 出发, 试求过程被状态 0 (或 2) 吸收的概率;

(b) 试求过程进入吸收态而永远停留在那里所需的平均时间。

10、 设齐次马氏链 $\{X_n, n \geq 0\}$, $S = \{1, 2, 3, 4\}$, 一步转移概率矩阵如下:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 写出切普曼-柯尔莫哥洛夫方程 (C-K 方程);

(2) 求 n 步转移概率矩阵;

(3) 试问此马氏链是平稳序列吗? 为什么?

11、 某车间有两台独立工作的机器, 每台机器有两种状态: 正常工作和故障修理。已知正常工作的机器在某天出故障的概率为 a , 机器处于故障修理状态在某天恢复正常工作的概率为 b , 其中 $0 < a, b < 1$ 。令 X_n 表示第 n 天车间正常工作的机器数, 试求:

(1) 证明 $\{X_n; n = 1, 2, \dots\}$ 是一齐次马氏链, 并写出其一步转移概率矩阵;

(2) 此马氏链是否存在极限分布? 存在的话, 计算其平稳分布;

(3) 若车间里有 m 台独立工作的机器, 假设条件不变, 问其平稳分布是什么?

12、 设 $\{X_n; n \geq 0\}$ 是一齐次马氏链, 状态空间为 $\bar{S} = S_0 \cup S$, 其中: $S = \{1, 2, \dots, m\}$

为瞬时态集, $S_0 = \{0\}$ 为吸收态集, 且转移矩阵为 $\tilde{P} = \begin{bmatrix} P & P_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 其中 $P_0 = (I - P) \cdot \bar{e}$,

$\vec{e} = (1, 1, \dots, 1)^T$ 。定义从瞬时态集到吸收态集的首达时间为：

$$\tau = \inf\{n : n \geq 0, X_n \in S_0\}.$$

令： $\vec{\pi}(0) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m)$ 为马氏链的初始分布，记： $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ ，且满足：

$$\alpha_k \geq 0 \ (k = 0, 1, \dots, m), \quad \sum_{k=0}^m \alpha_k = 1.$$

令： $g_k = P\{\tau = k\}$ (称为 **Phase-Type** 分布)， $G(\lambda) = E\{\lambda^\tau\} = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k \lambda^k$ 。

试证明：

(a) 对于任意 $k \in N$ ，有： $g_0 = \alpha_0$ ， $g_k = \vec{\alpha} P^{k-1} P_0 = \vec{\alpha} P^{k-1} (I - P) \vec{e}$ ；

(b) 对于任意 $0 \leq \lambda \leq 1$ ，有： $G(\lambda) = \alpha_0 + \lambda \vec{\alpha} (I - \lambda P)^{-1} (I - P) \vec{e}$ 。

13、 设有一生灭过程 $\{\xi(t); t \geq 0\}$ ，其中参数 $\lambda_n = \lambda$ ， $\mu_n = n\mu$ ， λ 和 μ 均为大于零的常数，其起始状态为 $\xi(0) = 0$ 。试求：

(a) 该过程的 Q 矩阵；

(b) 列出福克-普朗克微分方程；

(c) 其均值函数 $M_\xi(t) = E\{\xi(t)\}$ ；

(d) 证明 $\lim_{t \rightarrow \infty} p_0(t) = \exp\{-\lambda / \mu\}$ 。

14、 有一个细菌群体，在一段时间内假定可以通过分裂等方式产生新的细菌，并不会死去。假设在长为 Δt 的一段时间内，一个细菌分裂为两个，即产生新细菌的概率为 $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ ，令 $X(t)$ 表示时刻 t 的细菌群体的大小。

(a) 试说明 $\{X(t), t \geq 0\}$ 是生灭过程；

(b) 试证 $\lambda_i = i\lambda$ ， $\mu_i = 0$ ，并列出其前进方程和后退方程；

(c) 验证 $p_{kj}(t) = C_{j-1}^{j-k} (e^{-\lambda t})^k (1 - e^{-\lambda t})^{j-k}$ ， $j \geq k \geq 1$ 是上述方程的解，并计算

$$E\{X(s+t) - X(s) \mid X(s) = m\}.$$

15、 在一个线性生灭过程中，假定人口中每个人在间隔 $(t, t + \Delta t)$ 内以概率 $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ 生一个儿女，假定这些人是统计独立的，则如果在时刻 t 人口中有 n 个人，在 $(t, t + \Delta t)$ 中出生的概率是 $n\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ 。同样地，如果在 $(t, t + \Delta t)$ 内一个人死亡的概率是 $\mu \Delta t + o(\Delta t)$ ，则如果在 t 时刻有 n 个人活着，在 $(t, t + \Delta t)$ 内死亡的概率是 $n\mu \Delta t + o(\Delta t)$ ， $X(t)$ 表示 t 时刻人口的数目，且已知 $X(0) = n_0$ ，则 $X(t)$ 是一马氏过程。

(a) 试写出过程的状态空间及 Q 矩阵，求 $p_n(t) = P\{X(t) = n\}$ 满足的微分方程；

- (b) 试导出 $m_X(t) = E\{X(t)\}$ 满足的微分方程;
- (c) 求解 $m_X(t)$ 。
- 16、 一条电路供给 m 个焊工用电, 每个焊工均是间断地用电。现假设 (1) 若一焊工在 t 时刻用电, 而在 $(t, t + \Delta t)$ 内停止用电的概率为 $\mu \Delta t + o(\Delta t)$; (2) 若一焊工在 t 时刻没有用电, 而在 $(t, t + \Delta t)$ 内用电的概率为 $\lambda \Delta t + o(\Delta t)$ 。每一焊工的工作情况是相互独立的。设 $\xi(t)$ 表示在 t 时刻正在用电的焊工数。
- (a) 试写出此过程的状态空间及 Q 矩阵;
- (b) 设 $\xi(0) = 0$, 写出福克-普朗克方程;
- (c) 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 求极限分布 P_n 。