

## 第二章 Markov 过程

本章我们先讨论一类参数离散、状态空间离散的特殊随机过程，即参数为  $T = \{0, 1, 2, \dots\} = N_0$ ，状态空间为可列  $S = \{1, 2, \dots\}$  或有限  $S = \{1, 2, \dots, n\}$  的 Markov 链。Markov 链最初由 Markov 于 1906 年引入，至今它在自然科学、工程技术、生命科学及管理科学等诸多领域中都有广泛的应用。之后我们将讨论另一类参数连续状态空间离散的随机过程，即研究纯不连续 Markov 过程。

### 1. Markov 链的定义

定义：设随机序列  $\{X(n); n \geq 0\}$  的状态空间为  $S$ （离散），如果对  $\forall n \in N_0$ ，及  $i_0, i_1, \dots, i_n, i_{n+1} \in S$ ， $P\{X(0)=i_0, X(1)=i_1, \dots, X(n)=i_n\} > 0$ ，有：

$$\begin{aligned} P\{X(n+1)=i_{n+1} \mid X(0)=i_0, X(1)=i_1, \dots, X(n)=i_n\} &= \\ &= P\{X(n+1)=i_{n+1} \mid X(n)=i_n\} \end{aligned} \quad (\text{A})$$

则称  $\{X(n); n \geq 0\}$  为 Markov 链。

注 1：随机序列  $\{X(n); n \geq 0\}$  也可记为  $\{X_n; n \geq 0\}$ 。

注 2：等式 (A) 刻画了 Markov 链的特性，称此特性为 Markov 性或无后效性（即随机过程将来的状态只与现在的状态有关，而与过去无关），简称为马氏性。Markov 链也称为马氏链。

定义：设  $\{X(n); n \geq 0\}$  为马氏链，状态空间为  $S$ ，对于  $\forall i, j \in S$ ，称

$$P\{X(n+1)=j \mid X(n)=i\} \triangleq p_{ij}(n)$$

为马氏链  $\{X(n); n \geq 0\}$  在  $n$  时刻的一步转移概率。若对于  $\forall i, j \in S$ ，有

$$P\{X(n+1)=j \mid X(n)=i\} \triangleq p_{ij}(n) \equiv p_{ij}$$

即上面式子的右边与时刻  $n$  无关，则称此马氏链为齐次（或时齐的）马氏链。

对于齐次马氏链，我们记  $P = (p_{ij})$ ，称矩阵  $P$  为齐次马氏链的一步转移概

率矩阵，简称为转移矩阵。

注 3: 对于马氏链  $\{X(n); n \geq 0\}$ ，我们有：

$$\begin{aligned}
 & P\{X(0)=i_0, X(1)=i_1, \dots, X(n)=i_n\} = \\
 & = P\{X(n)=i_n \mid X(0)=i_0, X(1)=i_1, \dots, X(n-1)=i_{n-1}\} \cdot \\
 & \quad \cdot P\{X(0)=i_0, X(1)=i_1, \dots, X(n-1)=i_{n-1}\} \\
 & = P\{X(n)=i_n \mid X(n-1)=i_{n-1}\} \cdot P\{X(0)=i_0, X(1)=i_1, \dots, X(n-1)=i_{n-1}\} \\
 & = \dots \\
 & = P\{X(n)=i_n \mid X(n-1)=i_{n-1}\} \cdot P\{X(n-1)=i_{n-1} \mid X(n-2)=i_{n-2}\} \cdot \dots \cdot \\
 & \quad \cdot P\{X(1)=i_1 \mid X(0)=i_0\} \cdot P\{X(0)=i_0\} \\
 & = p_{i_{n-1}i_n}(n-1) p_{i_{n-2}i_{n-1}}(n-2) \cdot \dots \cdot p_{i_0i_1}(0) \cdot P\{X(0)=i_0\}
 \end{aligned}$$

因此，只要得到了马氏链的一步转移概率及初始分布，就可以求得马氏链的任意前  $n+1$  维的联合分布。特别地，若马氏链是齐次的，则由转移矩阵及初始分布，就可以得到齐次马氏链的任意前  $n+1$  维的联合分布。

注 4: 一步转移概率满足：

$$p_{ij}(n) \geq 0 \quad (i, j \in S)$$

$$\sum_{j \in S} p_{ij}(n) = 1 \quad i \in S$$

注 5: 若状态空间是有限的，设状态数为  $n$  则一步转移矩阵是  $n$  阶方阵，若状态是无限可列的情形，则一步转移矩阵只是形式上的矩阵。

## 2. 切普曼—柯尔莫哥洛夫 (C-K) 方程

### (一) $m$ 步转移概率的定义

定义：称  $p_{ij}^{(m)}(n) = P\{X(n+m)=j \mid X(n)=i\}$  为马氏链  $\{X(n); n \geq 0\}$  的  $m$  步转移概率。在齐次马氏链的情况下， $p_{ij}^{(m)}(n)$  与  $n$  无关，我们记为  $p_{ij}^{(m)}$ ，称

$$P^{(m)} = (p_{ij}^{(m)})$$

为齐次马氏链的  $m$  步转移（概率）矩阵。

显然有：

$$p_{ij}^{(m)}(n) \geq 0 \quad (i, j \in S)$$

$$\sum_{j \in S} p_{ij}^{(m)}(n) = 1 \quad (i \in S)$$

$m=1$  时，即为一步转移矩阵。

规定：

$$p_{ij}^{(0)}(n) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

## （二）切普曼—柯尔莫哥洛夫（C—K）方程

定理：对于  $m$  步转移概率有如下的 C—K 方程：

$$p_{ij}^{(m+r)}(n) = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)}(n) p_{kj}^{(r)}(n+m) \quad (i, j \in S)$$

对于齐次马氏链，此方程为：

$$p_{ij}^{(m+r)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(r)} \quad (i, j \in S) \quad (\text{C—K 方程})$$

证明：由  $m$  步转移概率的定义、全概率公式及马氏性，有：

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(m+r)}(n) &= \\ &= P\{X(n+m+r) = j \mid X(n) = i\} \\ &= \sum_{k \in S} P\{X(n+m+r) = j, X(n+m) = k \mid X(n) = i\} \\ &= \sum_{k \in S} P\{X(n+m+r) = j \mid X(n+m) = k, X(n) = i\} \cdot \\ &\quad \cdot P\{X(n+m) = k \mid X(n) = i\} \\ &= \sum_{k \in S} P\{X(n+m+r) = j \mid X(n+m) = k\} P\{X(n+m) = k \mid X(n) = i\} \\ &= \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)}(n) p_{kj}^{(r)}(n+m) \end{aligned}$$

对于齐次马氏链的情形：我们可以写成矩阵的形式即有：

$$P^{(m+r)} = P^{(m)} P^{(r)}$$

由此推出：

$$P^{(m)} = P^{(m-1)} P^{(1)} = \cdots = (P)^m = P^m$$

其中：  $P^{(1)} = P$

由此可知：对于齐次马氏链，如果知道了它的初始分布  $\pi(0)$  和一步转移矩阵  $P$ ，就可以求得  $X(n)$  的所有有限维概率分布。即有：

$$\begin{aligned} P\{X(n_1)=i_1, X(n_2)=i_2, \cdots, X(n_k)=i_k\} &= \\ &= \sum_{j \in S} p_{i_k-1 i_k}^{(n_k-n_{k-1})} p_{i_{k-2} i_{k-1}}^{(n_{k-1}-n_{k-2})} \cdots p_{i_1 i_2}^{(n_2-n_1)} p_{j i_1}^{(n_1)} P\{X(0)=j\} \end{aligned}$$

上式中各  $m$  步转移概率均可由 C-K 方程求出，利用一步转移矩阵及初始分布就可以完全确定齐次马氏链的统计性质。

### 3. 马氏链的例子

- 随机游动：

(1) 无限制的随机游动：

以  $X(n)$  表示时刻  $n$  时质点所处的位置，则  $\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$  是一齐次马氏链，其状态空间为  $S = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ ，一步转移概率为：

$$\begin{cases} p_{ii+1} = p, & (i \in S, 0 < p < 1) \\ p_{ii-1} = q = 1 - p, & (i \in S, 0 < p < 1) \\ p_{ij} = 0, & (i \neq i+1, i-1, j \in S) \end{cases}$$

现在求  $n$  步转移概率  $p_{ij}^{(n)}$ ：

设  $n$  次转移中向右  $m_1$  次，向左  $m_2$  次，则有

$$\begin{cases} m_1 + m_2 = n \\ m_1(+1) + m_2(-1) = j - i \end{cases} \Rightarrow m_1 = \frac{n + j - i}{2}, \quad m_2 = \frac{n - j + i}{2}$$

即有：

$$p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} C_n^{\frac{n+j-i}{2}} p^{\frac{n+j-i}{2}} q^{\frac{n-j+i}{2}}, & (n+j-i \text{ 是偶数}) \\ 0, & (n+j-i \text{ 是奇数}) \end{cases}$$

$$p_{ii}^{(n)} = \begin{cases} C_n^{\frac{n}{2}} p^{\frac{n}{2}} q^{\frac{n}{2}}, & (n \text{ 是偶数}) \\ 0, & (n \text{ 是奇数}) \end{cases}$$

(2) 带有一个吸收壁的随机游动:

特点: 当  $X(n) = 0$  时,  $X(n+1)$  就停留在零状态。

此时  $\{X(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$  是一齐次马氏链, 其状态空间为  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,

一步转移概率为:

$$\begin{cases} p_{ii+1} = p & (i \geq 1, i \in S) \\ p_{ii-1} = q & (i \geq 1, i \in S) \\ p_{ij} = 0 & (j \neq i+1, i-1, i \geq 1, i \in S) \\ p_{00} = 1 \end{cases}$$

注意:  $i$  状态为马氏链的吸收状态的充要条件是:  $p_{ii} = 1$ 。

(3) 带有二个吸收壁的随机游动:

此时  $\{X(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$  是一齐次马氏链, 状态空间为  $S = \{0, 1, 2, \dots, a\}$ ,

0,  $a$  为两个吸收状态, 它的一步转移概率为:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \cdots & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(a+1) \times (a+1)}$$

即有:

$$\begin{aligned}
 p_{ii+1} &= p & (1 \leq i \leq a-1) \\
 p_{ii-1} &= q = 1 - p & (1 \leq i \leq a-1) \\
 p_{ij} &= 0 & (j \neq i+1, i-1; 1 \leq i \leq a-1) \\
 p_{00} &= 1 \\
 p_{aa} &= 1 \\
 p_{0j} &= 0 & (j \neq 0) \\
 p_{aj} &= 0 & (j \neq a)
 \end{aligned}$$

(4) 带有一个反射壁的随机游动:

特点: 一旦质点进入零状态, 下一步它以概率  $p$  向右移动一格, 以概率  $q = 1 - p$  停留在零状态。

此时的状态空间为  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ , 它的一步转移概率为:

$$\begin{aligned}
 p_{ii+1} &= p & (i \geq 1) \\
 p_{ii-1} &= q = 1 - p & (i \geq 1) \\
 p_{ij} &= 0 & (j \neq i+1, i-1; i \geq 1) \\
 p_{01} &= p \\
 p_{00} &= 1 - p = q \\
 p_{0j} &= 0 & (j \neq 0, 1)
 \end{aligned}$$

(5) 带有二个反射壁的随机游动:

此时的状态空间为  $S = \{0, 1, 2, \dots, a\}$ , 它的一步转移概率矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \cdots & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & q & p \end{pmatrix}_{(a+1) \times (a+1)}$$

即有:

$$p_{00} = q = 1 - p$$

$$p_{01} = p$$

$$p_{aa} = p$$

$$p_{a, a-1} = q = 1 - p$$

$$p_{0j} = 0 \quad (j \neq 0, 1)$$

$$p_{aj} = 0 \quad (j \neq a, a-1)$$

## ● 排队模型

### (1) 离散排队系统

考虑顾客到达一服务台排队等待服务的情况。

若服务台前至少有一顾客等待，则在单位时间周期内，服务员完成一个顾客的服务后，该顾客立刻离去；若服务台前没有顾客，则服务员空闲。

在一个服务周期内，顾客可以到达，设第  $n$  个周期到达的顾客数  $\xi_n$  是一个取值为非负整数的随机变量，且  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  相互独立同分布。在每个周期开始时系统的状态定义为服务台前等待服务的顾客数。若现在状态为  $i$ ，则下周期的状态  $j$  应该为：

$$j = \begin{cases} (i-1) + \xi, & i \geq 1 \\ \xi, & i = 0 \end{cases}$$

其中  $\xi$  为该周期内到达的顾客数。

记第  $n$  个周期开始的顾客数为  $X_n$ ，则  $X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + \xi_n$ ，其中  $a^+ \triangleq \max\{a, 0\}$ ，根据马氏链的定义，可知  $\{X_n, n \geq 0\}$  是一马氏链。

若假设  $P\{\xi_n = k\} = a_k, a_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$ ，则  $\{X_n, n \geq 0\}$  的一步转移概率为：

$$p_{0j} = a_j \quad j \geq 0$$

$$p_{1j} = a_j \quad j \geq 0$$

$$p_{ij} = a_{j+1-i} \quad i > 1, j \geq i-1$$

$$p_{ij} = 0 \quad i > 1, j < i-1$$

易见：当  $E\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} ka_k > 1$  时，则当  $n$  充分大后，等待顾客的队伍将无限增

大；若  $E\xi_n = \sum_{k=0}^{\infty} ka_k < 1$ ，则等待服务的顾客队伍长度趋近某种平衡。

## (2) G/M/1 排队系统

略。（见纯不连续马氏过程的内容，以后会讲到。）

### ● 离散分支过程

考虑某一群体，假定某一代的每一个个体可以产生  $\xi$  个下一代，其中  $\xi$  是取值非负整数的离散型随机变量， $P\{\xi = k\} = a_k, a_k \geq 0, k \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$ ，设某一代各个体产生下一代的个数相互独立同分布且与上一代相互独立。

令： $X_n$  表示第  $n$  代个体的数目，则当  $X_n = 0$  时，有  $X_{n+1} = 0$ ；当  $X_n > 0$  时，有：

$$X_{n+1} = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{X_n}$$

其中  $\xi_i$  是第  $n$  代中第  $i$  个个体产生下一代的个数。

由此可知，只要给定  $X_n$ ，那么  $X_{n+1}$  的分布就完全决定了，且与以前的  $X_{n-1}, X_{n-2}, \cdots$  无关，故  $\{X_n, n \geq 1\}$  是一马氏链。把这一类马氏链称为离散的分支过程。由母函数的性质，可以证明一步转移概率为：

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = P\{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_{X_n} = j \mid X_n = i\} \\ &= P\{\xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_i = j\} \\ &= \frac{\partial^j \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right)^i}{j! \partial x^j} \Big|_{x=0} \end{aligned}$$

注 1：母函数的定义：设  $F(s)$  是随机变量  $\xi$  的母函数，则  $F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ ；

注 2：母函数的性质：（1） $X$  的母函数与其分布率是一一对应的，且有  $p_k = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}$ ；（2）设非负整值随机变量  $X_1, X_2, \cdots, X_n$  相互独立，而



$g_1, g_2, \dots, g_n$  分别是它们的母函数, 则  $Y = \sum_{k=1}^n X_k$  的母函数为:

$$g_Y(s) = g_1(s)g_2(s)\cdots g_n(s).$$

注 3: 显然有:  $p_{00} = 1, p_{0k} = 0 (k > 0)$ , 因此, 状态 0 是离散分支过程的吸收状态。在离散分支过程模型中, 我们最关心的是此过程被状态 0 吸收的概率, 即灭绝概率问题。

● 卜里耶 (Polya) 模型 (非齐次马氏链的例子):

设盒子装有  $b$  个黑球,  $r$  个红球。从盒子中随机摸出一球, 观察颜色后将该球放回并加入与摸出的球同颜色的球  $c$  只。如此取放继续, 经过  $n$  次摸放, 研究盒子中的黑球数。

以  $X_n, n \geq 1$  表示第  $n$  次摸球后盒子中的黑球数 (状态), 每取放一次后黑球数或者不变, 或者增加  $c$  只, 因此一步转移概率为:

$$p_{ij}(n) = P\{X_{n+1} = j | X_n = i\} = \begin{cases} \frac{i}{b+r+nc}, & j = i+c \\ 1 - \frac{i}{b+r+nc}, & j = i \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

注意: 此过程是一非齐次的马氏链。另外, 在研究实际问题时, 如何设置过程的状态是非常重要的, 考察下面的思考题会有深刻的体会。

思考题: 在只装有  $r$  个红球和  $b$  个黑球的袋子中逐次随机取一球, 每次将取出的球记下颜色并放回, 同时在袋子中加进  $c$  个同色球。令:

$$R_k = \begin{cases} 1, & \text{当第 } k \text{ 次取出红球} \\ 0, & \text{反之} \end{cases}; k = 1, 2, \dots$$

问  $\{R_k\}$  是否独立同分布? 过程  $\{R_k\}$  是否是马氏链?

解: 由题意, 我们有:

$$P\{R_1 = 1\} = \frac{r}{b+r}, \quad P\{R_1 = 0\} = \frac{b}{b+r}$$

$$\begin{aligned}
 P\{R_2 = 1\} &= P\{R_2 = 1 \mid R_1 = 1\}P\{R_1 = 1\} + P\{R_2 = 1 \mid R_1 = 0\}P\{R_1 = 0\} \\
 &= \frac{r+c}{b+r+c} \cdot \frac{r}{b+r} + \frac{r}{b+r+c} \cdot \frac{b}{b+r} = \frac{r}{b+r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P\{R_2 = 0\} &= P\{R_2 = 0 \mid R_1 = 1\}P\{R_1 = 1\} + P\{R_2 = 0 \mid R_1 = 0\}P\{R_1 = 0\} \\
 &= \frac{b}{b+r+c} \cdot \frac{r}{b+r} + \frac{b+c}{b+r+c} \cdot \frac{b}{b+r} = \frac{b}{b+r}
 \end{aligned}$$

下面利用归纳法证明  $R_k$  的分布为:  $P\{R_k = 1\} = \frac{r}{b+r}$ ,  $P\{R_k = 0\} = \frac{b}{b+r}$ 。

当  $k=1$  时, 结论成立。设当  $k=l$  时, 结论成立, 即:

$$P\{R_l = 1\} = \frac{r}{b+r}, \quad P\{R_l = 0\} = \frac{b}{b+r}$$

当  $k=l+1$  时, 设在第  $l$  次取球之前, 袋中有  $m$  只红球,  $n$  只黑球, 根据假设  
有:

$$P\{R_l = 1\} = \frac{m}{m+n} = \frac{r}{b+r}, \quad P\{R_l = 0\} = \frac{n}{m+n} = \frac{b}{b+r}$$

由全概率公式, 我们有:

$$\begin{aligned}
 P\{R_{l+1} = 1\} &= P\{R_{l+1} = 1 \mid R_l = 1\}P\{R_l = 1\} + P\{R_{l+1} = 1 \mid R_l = 0\}P\{R_l = 0\} \\
 &= \frac{m+c}{m+n+c} \cdot \frac{m}{m+n} + \frac{m}{m+n+c} \cdot \frac{n}{m+n} = \frac{m}{m+n} = \frac{r}{b+r}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P\{R_{l+1} = 0\} &= P\{R_{l+1} = 0 \mid R_l = 1\}P\{R_l = 1\} + P\{R_{l+1} = 0 \mid R_l = 0\}P\{R_l = 0\} \\
 &= \frac{n}{m+n+c} \cdot \frac{m}{m+n} + \frac{n+c}{m+n+c} \cdot \frac{n}{m+n} = \frac{n}{m+n} = \frac{b}{b+r}
 \end{aligned}$$

因此, 由归纳法可知:

$$P\{R_k = 1\} = \frac{r}{b+r}, \quad P\{R_k = 0\} = \frac{b}{b+r}$$

又因为:

$$P\{R_2 = 1, R_1 = 1\} = P\{R_2 = 1 \mid R_1 = 1\}P\{R_1 = 1\} = \frac{r+c}{b+r+c} \cdot \frac{r}{b+r}$$

$$P\{R_2 = 1\}P\{R_1 = 1\} = \frac{r}{b+r} \cdot \frac{r}{b+r}$$

显然有:

$$P\{R_2 = 1, R_1 = 1\} \neq P\{R_2 = 1\}P\{R_1 = 1\}$$

因此,  $\{R_k\}$  不是独立的, 但同分布。

又有：

$$P\{R_{k+1} = 1 \mid R_k = 1, R_{k-1} = 1, \dots, R_1 = 1\} = \frac{r + kc}{b + r + kc}$$

$$P\{R_{k+1} = 1 \mid R_k = 1, R_{k-1} = 0, \dots, R_1 = 0\} = \frac{r + c}{b + r + kc}$$

如果过程  $\{R_k\}$  是马氏链，我们应该有：

$$P\{R_{k+1} = 1 \mid R_k = 1, R_{k-1} = 1, \dots, R_1 = 1\} = P\{R_{k+1} = 1 \mid R_k = 1\}$$

$$P\{R_{k+1} = 1 \mid R_k = 1, R_{k-1} = 0, \dots, R_1 = 0\} = P\{R_{k+1} = 1 \mid R_k = 1\}$$

即应该有：

$$P\{R_{k+1} = 1 \mid R_k = 1, R_{k-1} = 1, \dots, R_1 = 1\} = P\{R_{k+1} = 1 \mid R_k = 1, R_{k-1} = 0, \dots, R_1 = 0\}$$

但由上面的计算，当  $k > 1$  时，显然有：

$$P\{R_{k+1} = 1 \mid R_k = 1, R_{k-1} = 1, \dots, R_1 = 1\} \neq P\{R_{k+1} = 1 \mid R_k = 1, R_{k-1} = 0, \dots, R_1 = 0\}$$

因此，过程  $\{R_k\}$  不是马氏链。

### ● 应用例子：

某保密通信系统采用软件无线电，其信号的调制方式有 5 种。若此通信系统一直处于繁忙状态，在任何时刻只能采用其中一种信号调制方式，并且假设每经过一单位时间系统要进行调制方式转换，在转换时，这 5 种不同的调制信号方式被选择的概率分别为  $1/5, 2/5, 1/10, 1/10, 1/5$ ，且每次转换之间是独立的。 $\xi_n$  表示前  $n$  次信号转换中采用的信号调制方式为第二种方式的次数，问  $\{\xi_n, n \geq 1\}$  是否为齐次马氏链？如果是，写出其一步转移概率矩阵。

解：根据题意，此时的状态空间为  $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ ，由于调制方式的每次转换之间是独立的，因此

$$P\{\xi_{n+1} = j \mid \xi_1 = i_1, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}, \xi_n = i\} = P\{\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i\}$$

所以此链是马氏链，且是齐次的，其一步转移矩阵为：

$$P = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 3/5 & 2/5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3/5 & 2/5 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

## 4. 马尔可夫链状态的分类

### (一) 到达与相通

定义：对给定的两个状态  $i, j \in S$ ，若存在正整数  $n \geq 1$ ，使得  $p_{ij}^{(n)} > 0$ ，则称从状态  $i$  可到达状态  $j$ ，记作  $i \rightarrow j$ ，反之称从状态  $i$  不可到达状态  $j$ 。

注意：当状态  $i$  不能到达状态  $j$  时，对于  $\forall n \geq 1$ ， $p_{ij}^{(n)} = 0$ ，因此

$$\begin{aligned} P\{\text{到达状态 } j \mid X_0 = i\} &= P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = j \mid X_0 = i\right\} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n = j \mid X_0 = i\} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} = 0 \end{aligned}$$

定义：有两个状态  $i$  和  $j$ ，如果由  $i$  状态可到达  $j$  状态，即  $i \rightarrow j$ ，且由  $j$  状态也可到达  $i$  状态，即  $j \rightarrow i$ ，则称状态  $i$  和状态  $j$  相通，记作  $i \leftrightarrow j$ 。

定理：可到达和相通都具有传递性。即若  $i \rightarrow k, k \rightarrow j$ ，则  $i \rightarrow j$ ；若  $i \leftrightarrow k, k \leftrightarrow j$ ，则  $i \leftrightarrow j$ 。

证明：如果  $i \rightarrow k, k \rightarrow j$ ，则由定义，存在  $r \geq 1$  和  $n \geq 1$ ，使得：

$$p_{ik}^{(r)} > 0, \quad p_{kj}^{(n)} > 0$$

根据 C-K 方程，我们有：

$$p_{ij}^{(r+n)} = \sum_{m \in S} p_{im}^{(r)} p_{mj}^{(n)} \geq p_{ik}^{(r)} p_{kj}^{(n)} > 0 \quad (k \in S)$$

因此， $i \rightarrow j$ 。同理可以证明相通的情形。

### (二) 首达时间和首达概率：

定义：对于任意给定的  $i, j \in S$ ，称随机变量：

$$T_{ij}(\omega) \triangleq \min\{n: X_0=i, X_n(\omega)=j, n \geq 1\}$$

为从状态  $i$  出发首次到达（进入）状态  $j$  的时间（时刻），简称首达时间。

注意：首达时间  $T_{ij}: \Omega \rightarrow N_\infty \subset R$  是一随机变量，它取值于  $N_\infty = \{1, 2, \dots, \infty\}$ 。

定义：对于任意给定的  $i, j \in S$ ，称：

$$f_{ij}^{(n)} \triangleq P\{T_{ij} = n | X_0 = i\}$$

为系统在 0 时从状态  $i$  出发，经  $n$  步首次到达状态  $j$  的概率。

由定义，显然有：

$$f_{ij}^{(n)} = P\{X_n = j; X_m \neq j, m = 1, 2, \dots, n-1 | X_0 = i\}$$

$$f_{ij}^{(1)} = p_{ij} = P\{X_1 = j | X_0 = i\}$$

$$f_{ij}^{(\infty)} = P\{X_m \neq j, \forall m \geq 1 | X_0 = i\}$$

定义：对于任意给定的  $i, j \in S$ ，称：

$$f_{ij} = \sum_{1 \leq n < \infty} f_{ij}^{(n)} = \sum_{1 \leq n < \infty} P\{T_{ij} = n | X_0 = i\} = P\{T_{ij} < \infty\}$$

为系统在 0 时从状态  $i$  出发经过有限步转移后迟早到达状态  $j$  的概率。

注意： $P\{T_{ij} = \infty\} \triangleq f_{ij}^{(\infty)} = 1 - f_{ij}$ ，它表示系统在 0 时从状态  $i$  出发，经过有限步转移后不能到达状态  $j$  的概率。

（三）首达概率的基本性质：

（1）对于任意的  $i, j \in S$ ， $0 \leq f_{ij}^{(n)} \leq p_{ij}^{(n)} \leq f_{ij} \leq 1$ ；

（2）对于任意的  $i, j \in S$  及  $1 \leq n < \infty$ ，有： $p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^n f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}$ ；

（3）对于任意的  $i, j \in S$ ， $f_{ij} > 0 \Leftrightarrow i \rightarrow j$ ；

(4) 对于任意的  $i, j \in S$ ,  $f_{ij} > 0$  and  $f_{ji} > 0 \Leftrightarrow i \leftrightarrow j$ ;

证明：因为：

$$\begin{aligned} \{X_0 = i, X_n = j\} &= \{X_0 = i, X_n = j\} \cap \left\{ \bigcup_{l=1}^{\infty} (T_{ij} = l) \right\} \\ &= \bigcup_{l=1}^n \{X_0 = i, X_n = j, T_{ij} = l\} \cup \left\{ \bigcup_{l>n} \{X_0 = i, X_n = j, T_{ij} = l\} \right\} \end{aligned}$$

而

$$\bigcup_{l>n} \{X_0 = i, X_n = j, T_{ij} = l\} = \emptyset$$

于是我们有：

$$\{X_0 = i, X_n = j\} = \bigcup_{l=1}^n \{X_0 = i, X_n = j, T_{ij} = l\}$$

因此，有：

$$\begin{aligned} P\{X_0 = i\}P\{X_n = j | X_0 = i\} &= \\ &= \sum_{l=1}^n P\{X_0 = i\}P\{T_{ij} = l | X_0 = i\}P\{X_n = j | X_0 = i, T_{ij} = l\} \end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned} P\{X_n = j | X_0 = i\} &= \\ &= \sum_{l=1}^n P\{T_{ij} = l | X_0 = i\}P\{X_n = j | X_0 = i, T_{ij} = l\} \\ &= \sum_{l=1}^n P\{T_{ij} = l | X_0 = i\}P\{X_n = j | X_0 = i, X_k \neq j, 1 \leq k \leq l-1, X_l = j\} \\ &= \sum_{l=1}^n f_{ij}^{(l)} P\{X_n = j | X_l = j\} \\ &= \sum_{l=1}^n f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} \end{aligned}$$

即有：

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^n f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}$$

于是结论 (2) 成立。

当  $i \rightarrow j$  时,  $\exists n > 0$ , 使得  $p_{ij}^{(n)} > 0$ , 取:

$$n' = \min\{n: p_{ij}^{(n)} > 0\},$$

则有:

$$f_{ij}^{(n')} = P\{T_{ij} = n' | X_0 = i\} = p_{ij}^{(n')} > 0$$

因此

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \geq f_{ij}^{(n')} > 0$$

反之, 当  $f_{ij} > 0$  时,  $\exists n' > 0$ , 使得  $f_{ij}^{(n')} > 0$ , 从而  $p_{ij}^{(n')} > 0$ , 得  $i \rightarrow j$ 。

因此 (3) 成立, (4) 是 (3) 的结果。

#### (四) 状态的分类

定义: 对于状态  $i \in S$ , 如果  $f_{ii} = 1$ , 则称状态  $i$  为常返态 (返回态); 如果  $f_{ii} < 1$ , 则称状态  $i$  为非常返态 (滑过态、瞬时态)。

令条件数学期望:

$$\mu_{ij} \triangleq E\{T_{ij} | X_0 = i\} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$$

$\mu_{ij}$  是从状态  $i$  出发, 首次到达状态  $j$  的平均转移步数 (时间)。

注意: 特别地, 若  $i = j$ , 则  $\mu_{ii} \triangleq \mu_i$  是从状态  $i$  出发, 首次返回状态  $i$  的平均转移步数, 称为状态  $i$  的平均返回时间; 对应的  $f_{ii}$  称为状态  $i$  的返回概率;  $f_{ii}^{(n)}$  称为从状态  $i$  出发, 经  $n$  步首次返回状态  $i$  的概率。

定义: 对于常返态  $i \in S$ , 若  $\mu_i < +\infty$ , 则称状态  $i$  是正常返的; 否则, 若  $\mu_i = \infty$ , 则称状态  $i$  是零常返的。

## (五) 常返态和非常返态的判别

(1) 状态  $i \in S$  是常返的 ( $f_{ii} = 1$ )  $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ 。

(2) 状态  $i \in S$  是非常返的 ( $f_{ii} < 1$ )  $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{ii}} < \infty$ 。

(3) 如果  $j \in S$  是非常返的, 则对  $\forall i \in S$ , 有  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$ ;  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ 。

(4) 设  $i \leftrightarrow j$ , 则  $i$  和  $j$  或者都是正常返的, 或者都是非常返的, 或者都是零常返的。

证明: 对于序列  $\{p_{ij}^{(n)}, n \geq 0\}$  和  $\{f_{ij}^{(n)}, n \geq 1\}$ , 分别引入其母函数为:

$$P_{ij}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n = \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n$$

$$F_{ij}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} s^n$$

上面两个级数当  $|s| < 1$  时, 都是绝对收敛的。利用公式:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{v=1}^n f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)}$$

我们有:

$$\begin{aligned} P_{ij}(s) &= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} s^n = \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{v=1}^n f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(n-v)} \right) s^n \\ &= \delta_{ij} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=1}^n (f_{ij}^{(v)} s^v) (p_{jj}^{(n-v)} s^{n-v}) \\ &= \delta_{ij} + \sum_{v=1}^{\infty} f_{ij}^{(v)} s^v \sum_{n=v}^{\infty} (p_{jj}^{(n-v)} s^{n-v}) \\ &= \delta_{ij} + \sum_{v=1}^{\infty} f_{ij}^{(v)} s^v \sum_{m=0}^{\infty} (p_{jj}^{(m)} s^m) \\ &= \delta_{ij} + F_{ij}(s) P_{jj}(s) \end{aligned}$$

令  $j = i$ , 由上式, 有:

$$P_{ii}(s) = \frac{1}{1 - F_{ii}(s)}$$



在上式中, 令  $s \rightarrow 1^-$ , 我们有:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{ii}}$$

由此可得以上结论的 (1)、(2)。

另外, 当  $j$  是非常返态, 且  $i \neq j$  时, 由

$$P_{ij}(s) = \delta_{ij} + F_{ij}(s)P_{ij}(s)$$

可得:

$$P_{ij}(1) = F_{ij}(1)P_{ij}(1) \leq P_{jj}(1) < \infty$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty, \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$$

由此可得结论 (3)。

若  $i \leftrightarrow j$ , 则存在正整数  $k, m$ , 使得

$$p_{ij}^{(k)} > 0, \quad p_{ji}^{(m)} > 0$$

因此对于任意的正整数  $r$ , 有:

$$p_{jj}^{(k+r+m)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(r)} p_{ij}^{(k)}$$

由此可得:

$$\sum_{r=0}^{\infty} p_{jj}^{(k+r+m)} \geq \sum_{r=0}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(r)} p_{ij}^{(k)} = p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(k)} \sum_{r=0}^{\infty} p_{ii}^{(r)}$$

因此, 当  $i$  是常返态时, 可知  $j$  也是常返态; 当  $i$  是非常返态时, 可知  $j$  也是非常返态。结论 (4) 成立。

引入随机变量:

$$Y_n(i) = \begin{cases} 1, & X_n = i \\ 0, & X_n \neq i \end{cases}; \quad n=1, 2, \dots$$

令:  $Y(i) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(i)$ ,  $Y(i)$  表示马氏链  $\{X_n; n \geq 1\}$  处于状态  $i$  的次数, 若  $i$  是非

常返状态, 计算:

$$\begin{aligned} E\left\{\sum_{n=1}^{\infty} Y_n \mid X_0 = i\right\} &= \sum_{n=1}^{\infty} E\{Y_n \mid X_0 = i\} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 \times P\{Y_n = 1 \mid X_0 = i\} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{X_n = i \mid X_0 = i\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} - 1 < \infty \end{aligned}$$

由此可知，若  $i$  是非常返状态，则在过程中访问它的平均次数是有限的。

对于  $\forall i, j \in S$ ，将从状态  $i$  出发至少到达状态  $j$   $m$  次的概率记为  $g_{ij}(m)$ ，即：

$$g_{ij}(m) = P\{Y(j) \geq m \mid X_0 = i\}$$

由于事件  $\{Y(j) \geq m\} \supset \{Y(j) \geq m+1\}$ ，因此  $\{g_{ij}(m); m=1, 2, \dots\}$  为单调有界数列，其极限一定存在。记此极限为  $g_{ij}$ ，它表示从状态  $i$  出发无限次访问状态  $j$  的概率，即：

$$g_{ij} = \lim_{m \rightarrow \infty} g_{ij}(m) = P\{Y(j) = +\infty \mid X_0 = i\}$$

定理：对于  $\forall i, j \in S$ ，有： $g_{ij} = f_{ij} g_{jj}$ ， $g_{ii} = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_{ii})^n$ 。

证明：由于

$$\begin{aligned} \{Y(j) \geq m+1\} &= \{Y(j) \geq m+1\} \cap \left[ \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{T_{ij} = k\} \right] = \\ &= \bigcup_{k=1}^{+\infty} \{Y(j) \geq m+1, T_{ij} = k\} \end{aligned}$$

记： $k$  时刻之后（不包括  $k$  时刻）访问状态  $j$  的次数为  $Y^k(j)$ ，则有：

$$\begin{aligned} g_{ij}(m+1) &= P\{Y(j) \geq m+1 \mid X_0 = i\} = \sum_{k=1}^{+\infty} P\{Y(j) \geq m+1, T_{ij} = k \mid X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\{Y^k(j) \geq m, X_k = j, X_l \neq j, 1 \leq l \leq k-1 \mid X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P\{Y^k(j) \geq m \mid X_k = j, X_l \neq j, 1 \leq l \leq k-1, X_0 = i\} \times \\ &\quad \times P\{X_k = j, X_l \neq j, 1 \leq l \leq k-1 \mid X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} P\{Y(j) \geq m \mid X_k = j\} = \sum_{k=1}^{+\infty} f_{ij}^{(k)} g_{jj}(m) = f_{ij} g_{jj}(m) \end{aligned}$$

特别地， $g_{ij}(1) = f_{ij}$ ，因此有

$$g_{ii}(m+1) = f_{ii} g_{ii}(m) = \dots = (f_{ii})^m g_{ii}(1) = (f_{ii})^{m+1}$$

因此，一般地有

$$g_{ij}(m+1) = f_{ij}(f_{jj})^m$$

两边令  $m \rightarrow +\infty$ ，即有： $g_{ij} = f_{ij}g_{jj}$ ， $g_{ii} = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_{ii})^n$ 。

注意：(1) 对于一个常返态  $i$ ，由  $g_{ii} = 1$  可知，在过程中访问它的次数必然是无限的；(2) 对于一个非常返态  $i$ ，由  $g_{ii} = 0$  可知，在过程中访问它的次数必然是有限的；(3) 一个状态有限的马氏链，不可能所有状态都为非常返态。

定理：若  $i$  为常返状态，且  $i \rightarrow j$ ，则有  $i \leftrightarrow j$ ，且  $j$  为常返状态。

例 1（赌徒输光问题）赌徒甲有赌资  $a$  元，赌徒乙有赌资  $b$  元， $a, b$  为不小于 1 的正整数。两人进行一系列的赌博。每赌一局，输者给赢者 1 元，没有和局，直赌到两人中有一人输光为止。设在每局中甲赢的概率为  $p$ ，输的概率为  $1-p$ ，求甲输光的概率。

解：此问题实际上就是状态空间为  $S = \{0, 1, 2, \dots, a+b\}$  的一个马氏链，其中状态 0 和状态  $a+b$  为吸收态。甲开始处于状态  $a$ ，最后它要么到达状态 0（输光），要么到达状态  $a+b$ （将对方赢完），然后就不赌了。求甲输光的概率，实际上就是求甲从状态  $a$  首达状态 0 的概率。理论上有一步转移概率矩阵（很容易写出）就可以求得，但这样求相当麻烦，现在用其它方法来求。

令  $u_i$  为甲从状态  $i$  出发首达状态 0 的概率。我们要求的是  $u_a$ 。因为状态 0 和状态  $a+b$  为吸收态，所以  $u_0 = 1, u_{a+b} = 0$ ，用全概率公式，

我们有：

$$u_i = pu_{i+1} + qu_{i-1} \Rightarrow (p+q)u_i = pu_{i+1} + qu_{i-1}$$

因此有：

$$\begin{aligned} p(u_{i+1} - u_i) &= q(u_i - u_{i-1}) \Rightarrow (u_{i+1} - u_i) = \frac{q}{p}(u_i - u_{i-1}) = \\ &= \dots = \left(\frac{q}{p}\right)^i (u_1 - u_0) \end{aligned}$$

因此有：

$$\sum_{i=k}^{a+b-1} (u_{i+1} - u_i) = \sum_{i=k}^{a+b-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i (u_1 - u_0)$$

$$u_{a+b} - u_k = (u_1 - 1) \sum_{i=k}^{a+b-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i \quad k = 0, 1, 2, \dots, a+b$$

令  $k=0$ ，利用  $u_0=1, u_{a+b}=0$ ，可得：

$$-1 = (u_1 - 1) \sum_{i=0}^{a+b-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i \Rightarrow (-1) / \sum_{i=0}^{a+b-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i = u_1 - 1$$

代入上面的式子，有

$$u_{a+b} - u_k = \frac{-1}{\sum_{i=0}^{a+b-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i} \sum_{i=k}^{a+b-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i \quad k = 0, 1, 2, \dots, a+b$$

令  $k=a$ ， $u_{a+b}=0$ ，可得：

$$u_a = \frac{1}{\sum_{i=0}^{a+b-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i} \sum_{i=a}^{a+b-1} \left(\frac{q}{p}\right)^i$$

此即为所要求的结果。

$$\text{当 } p=q=0.5 \text{ 时, } u_a = \frac{b}{a+b}$$

$$\text{当 } p \neq q \text{ 时, } u_a = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^a - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{a+b}}。$$

**例 2** 设有一电脉冲，脉冲的幅度是随机的，其幅度的可取值是  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ ，且各幅度出现的概率相同。现用一电表测量其幅度，每隔一单位时间测量一次，从首次测量开始，记录其最大幅值为  $X_n$  ( $n \geq 1$ )。(1) 证明该过程为一齐次马氏链；(2) 写出一步转移概率矩阵；(3) 仪器记录到最大值  $n$  的期望时间。

**解：**(1) 记： $\xi_i$  是第  $i$  ( $i=1, 2, \dots$ ) 次记录的幅度值，则  $\xi_i$  是相互独立同分布的随机变量序列。 $X_m$  是前  $m$  次记录幅度的最大值。

则有：

$$\begin{aligned}
P\{X_{m+k} = j \mid X_m = i, X_{m-1} = i_{m-1}, \dots, X_1 = i_1\} \\
= P\{\max_{m+1 \leq l \leq m+k} (\xi_l, i) = j\} \\
= P\{\max_{2 \leq l \leq k+1} (\xi_l, i) = j\}
\end{aligned}$$

以上用到了  $\xi_i$  的相互独立性。

因此：

$$\begin{aligned}
p_{ij}^{(k)}(m) &= P\{X_{m+k} = j \mid X_m = i\} \\
&= P\{\max_{1 \leq l \leq m+k} \xi_l = j \mid \max_{1 \leq l \leq m} \xi_l = i\} \\
&= P\{\max_{2 \leq l \leq k+1} (\xi_l, i) = j\}
\end{aligned}$$

因此此过程是齐次马氏过程。

(2) 一步转移概率为

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{n}, & j = i \\ \frac{1}{n}, & i < j \leq n \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(3) 设  $T_n$  为仪器记录到最大值  $n$  的首达时间，则可以理解为起初在  $n$  状态的首次返回时间，则：

$$P\{T_n = k\} = f_{nn}^{(k)} = \frac{1}{n} \frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}},$$

因此记录到最大值  $n$  的期望为

$$E\{T_n\} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{1}{n} \frac{(n-1)^{k-1}}{n^{k-1}} = n$$

由此可知， $n$  状态是正常返态。

例 3 随机游动：

(1) 一维情形：状态空间为  $S = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ ，都是相通的，因此构成

一个类，任意取一个状态  $i \in S$ ，则有： $p_{ii}^{(2n-1)} = 0$ ， $p_{ii}^{(2n)} = C_{2n}^n p^n q^n$ ，

考虑母函数：

$$\begin{aligned}
 P_{ii}(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!} p^n q^n s^{2n} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n} (-1)^n}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-1}{2}\right) (pqs^2)^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2n-1}{2}\right) (-4pqs^2)^n \\
 &= (1 - 4pqs^2)^{-\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

从而有：

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \lim_{s \rightarrow 1-0} P_{ii}(s) = (1 - 4pqs^2)^{-\frac{1}{2}} = \begin{cases} \infty, & p = 1/2 \\ \text{有限}, & p \neq 1/2 \end{cases}$$

由此可知，当  $p = 1/2$  时，所有状态为常返状态，当  $p \neq 1/2$  时，状态为非常返状态，即马氏链是非常返的。

进一步研究当  $p = 1/2$  时，一维随机游动的各个状态是属于零常返还是属于正常返。由上面的结论，我们有：

$$P_{ii}(s) = (1 - 4pqs^2)^{-\frac{1}{2}} = (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}}$$

且有：

$$P_{ii}(s) = 1 + F_{ii}(s)P_{ii}(s)$$

其中：  $F_{ii}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} s^n$ ，由此我们有：

$$F_{ii}(s) = 1 - (1 - s^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{A})$$

因此有：

$$\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} = F'_{ii}(1) = \lim_{s \rightarrow 1-} \frac{s}{\sqrt{1 - s^2}} = \infty$$

所以，当  $p = 1/2$  时，一维随机游动的所有状态都是零常返的。

注意：将 (A) 式在原点泰勒展开，可以求得首达概率  $f_{ii}^{(n)}$ ，即：

$$f_{ii}^{(2)} = \frac{1}{2}, \quad f_{ii}^{(2k)} = \frac{C_{2k}^k}{2^{2k} (2k-1)} \quad (k \geq 2), \quad f_{ii}^{(2k-1)} = 0 \quad (k \geq 1)$$

(2) 二维情形：计算质点经过  $2n$  步后仍然回到原位置的概率  $p_{ii}^{(2n)}$ 。此时，质

点必须与横坐标平行地向右移  $k$  步, 向左移  $k$  步, 向上移  $l$  步, 向下移  $l$  步, 并且  $k + l = n$ , 因此有:

$$p_{ii}^{(2n)} = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=0}^n \frac{(2n)!}{[k!(n-k)!]^2} = \frac{1}{4^{2n}} C_{2n}^n \sum_{k=0}^n (C_n^k)^2 = \frac{1}{4^{2n}} (C_{2n}^n)^2 \approx \frac{1}{\pi n}$$

由于  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ , 因此, 平面上的对称随机游动也是常返的。

(3) 三维情形: 可以证明, 空间上的对称随机游动是非常返的 (Polya 定理)。

**A drunk man will find his way home, but a drunk bird may get lost forever.**

例 4: 将小白鼠放在如下的迷宫中, 假定小白鼠在其中作随机地移动, 即当它处于某一格子中, 而此格子又有  $k$  条路径通入别的格子, 则小白鼠以  $1/k$  的概率选择任一条路径。如设小白鼠每次移动一个格子, 并用  $X_n$  表示经  $n$  次移动后它所在的格子号码数, 试:

- (1) 说明  $\{X_n; n \geq 1\}$  构成一个齐次有限马氏链;
- (2) 写出它的转移概率;
- (3) 分解它的状态空间。

解: 由题意可知其状态空间为  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,

(1) 由马氏链的定义可知, 下一时刻小白鼠所处各个状态的概率只与当时小白鼠所处的状态有关, 因此  $\{X_n; n \geq 1\}$  构成一个齐次有限马氏链;

(2) 一步转移概率矩阵为:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) 画出状态转移图, 状态空间的分解为两个闭集:

$$S_1 = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$S_2 = \{4, 5, 7, 8, 9\}$$

