第三章 Poisson 过程（Poisson 信号流）习题解答

1、设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一强度为 λ 的齐次泊松过程，而 $X(t) = N(t)/2 - 1$，$t \geq 0$。对 $s > 0$，试求：

（1）计算 $E\{N(t)N(t+s)\}$ 及 $E\{N(s+t) \mid N(s)\}$ 的分布律；

（2）证明过程 $X(t)$，$t \geq 0$ 是马氏过程并写出转移概率 $p(s,i;t,j)$，其中 $s \leq t$。

解：（1）由泊松过程状态空间可知 $X(t)$ 的状态空间为：

$$S = \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1, 3/2, 2, \cdots\} = \{(k-2)/2 : k = 0,1,2,\cdots\}$$

$$E\{N(t)N(t+s)\} = \lambda^2 t(t+s) + \lambda \min\{t, t+s\} = \lambda^2 t(t+s) + \lambda t$$

由于

$$\begin{aligned} E\{N(s+t) \mid N(s) = n\} &= \sum_{k=n}^{+\infty} kP\{N(s+t) = k \mid N(s) = n\} \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} k \frac{P\{N(s+t) = k, N(s) = n\}}{P\{N(s) = n\}} = \sum_{k=n}^{+\infty} kP\{N(t) = k-n\} \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} k \frac{(\lambda t)^{k-n}}{(k-n)!} e^{-\lambda t} = \sum_{m=0}^{+\infty} (m+n) \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t} = n + \lambda t \end{aligned}$$

因此

$$E\{N(s+t) \mid N(s)\} = N(s) + \lambda t$$

其分布列为：

$$P\{E\{N(s+t) \mid N(s)\} = n + \lambda t\} = P\{N(s) = n\} = \frac{(\lambda s)^n}{n!} e^{-\lambda s}$$

（2）由泊松过程的独立增量性可知过程 $X(t)$ 也是独立增量的，又因为 $X(0) = -1$，因此可知过程 $X(t)$ 是一马氏过程，其转移概率为：

$$\begin{aligned} p(s,i;t,j) &= \frac{P\{X(s) = i, X(t) = j\}}{P\{X(s) = i\}} = \frac{P\{N(s) = 2(i+1), N(t) = 2(j+1)\}}{P\{N(s) = 2(i+1)\}} \\ &= \frac{P\{N(s) = 2(i+1)\}P\{N(t-s) = 2(j-i)\}}{P\{N(s) = 2(i+1)\}} = \frac{[\lambda(t-s)]^{2(j-i)}}{[2(j-i)]!} e^{-\lambda(t-s)}; (j \geq i, t \geq s) \end{aligned}$$

$$p(s,i;t,j) = 0;\ (j < i, t \geq s)$$

附：泊松过程相关函数的计算：

设 $0 < t_1 \leq t_2$，我们有：

$$E\{N(t_1)N(t_2)\} = \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} m(m+n)P\{N(t_1) = m, N(t_2) = m+n\}$$

由于当$0<t_1\le t_2$时，

$$P\{N(t_1)=m,\,N(t_2)=m+n\}=\frac{\lambda^{m+n}t_1^m(t_2-t_1)^n}{m!n!}e^{-\lambda t_2},\quad m,n=0,1,2,\cdots$$

因此，我们有：

$$\begin{aligned}
E\{N(t_1)N(t_2)\}&=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}m(m+n)P\{N(t_1)=m,\,N(t_2)=m+n\}\\
&=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}m(m+n)\frac{\lambda^{m+n}t_1^m(t_2-t_1)^n}{m!n!}e^{-\lambda t_2}\\
&=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{m^2\lambda^{m+n}t_1^m(t_2-t_1)^n}{m!n!}e^{-\lambda t_2}+\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{mn\lambda^{m+n}t_1^m(t_2-t_1)^n}{m!n!}e^{-\lambda t_2}\\
&=\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{m\lambda^{m+n}t_1^m(t_2-t_1)^n}{(m-1)!n!}e^{-\lambda t_2}+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{m+n}t_1^m(t_2-t_1)^n}{(m-1)!(n-1)!}e^{-\lambda t_2}\\
&=\sum_{m=2}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{m+n}t_1^m(t_2-t_1)^n}{(m-2)!n!}e^{-\lambda t_2}+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{m+n}t_1^m(t_2-t_1)^n}{(m-1)!n!}e^{-\lambda t_2}+\\
&\quad+\sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{m+n}t_1^m(t_2-t_1)^n}{(m-1)!(n-1)!}e^{-\lambda t_2}\\
&=\lambda^2t_1^2e^{-\lambda t_2}\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{m-2}t_1^{m-2}}{(m-2)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n(t_2-t_1)^n}{n!}+\lambda t_1e^{-\lambda t_2}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{m-1}t_1^{m-1}}{(m-1)!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^n(t_2-t_1)^n}{n!}\\
&\quad+\lambda^2t_1(t_2-t_1)e^{-\lambda t_2}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{m-1}t_1^{m-1}}{(m-1)!}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{n-1}(t_2-t_1)^{n-1}}{(n-1)!}\\
&=\lambda^2t_1^2e^{-\lambda t_2}e^{\lambda t_1}e^{\lambda(t_2-t_1)}+\lambda t_1e^{-\lambda t_2}e^{\lambda t_1}e^{\lambda(t_2-t_1)}+\lambda^2t_1(t_2-t_1)e^{-\lambda t_2}e^{\lambda t_1}e^{\lambda(t_2-t_1)}\\
&=\lambda^2t_1t_2+\lambda t_1
\end{aligned}$$

同理我们有：

当$0<t_2\le t_1$时

$$E\{N(t_1)N(t_2)\}=\lambda^2t_1t_2+\lambda t_2$$

因此，有：

$$R_N(t_1,t_2)=E\{N(t_1)N(t_2)\}=\lambda^2t_1t_2+\lambda\min\{t_1,t_2\}$$

2、 设$\{X(t);t\ge0\}$与$\{Y(t);t\ge0\}$是相互独立，参数分别为λ_1与λ_2的 Poisson 过程。定义随机过程$Z(t)=X(t)-Y(t),t\ge0$，且令：$p_n(t)=P\{Z(t)=n\}$。

（1）试求随机过程$\{Z(t);t\ge0\}$的均值函数$E\{Z(t)\}$和二阶矩$E\{Z^2(t)\}$；

（2）试证明：$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}p_n(t)u^n=\exp\{-(\lambda_1+\lambda_2)t\}\cdot\exp\{\lambda_1ut+\lambda_2u^{-1}t\}$。

解：（1）根据泊松过程的均值函数和相关函数，显然有：

$$E\{Z(t)\}=E\{X(t)-Y(t)\}=E\{X(t)\}-E\{Y(t)\}=(\lambda_1-\lambda_2)t$$

$$\begin{aligned}E\{Z^2(t)\}&=E\{X^2(t)\}-2E\{X(t)Y(t)\}+E\{Y^2(t)\}\\&=\lambda_1 t+\lambda_1^2t^2-2\lambda_1\lambda_2t^2+\lambda_2t+\lambda_2^2t^2\\&=(\lambda_1+\lambda_2)t+(\lambda_1-\lambda_2)^2t^2\end{aligned}$$

（2）由母函数的定义及 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 独立性，我们有

$$\begin{aligned}\Phi_{Z(t)}(u)&=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}p_n(t)u^n=\Phi_{X(t)-Y(t)}(u)=\Phi_{X(t)+(-Y(t))}(u)=\Phi_{X(t)}(u)\Phi_{-Y(t)}(u)\\&=\exp\{-(\lambda_1+\lambda_2)t\}\cdot\exp\{\lambda_1ut+\lambda_2u^{-1}t\}\end{aligned}$$

3、设 $\{N_1(t);t\ge 0\}$ 和 $\{N_2(t);t\ge 0\}$ 是相互独立的 Poisson 过程,其参数分别为 λ_1 和 λ_2 .若 $N_0(t)=N_1(t)-N_2(t)$，问:

（1）$\{N_0(t);t\ge 0\}$ 是否为 Poisson 过程，请说明理由；

（2）$\{N_0(t);t\ge 0\}$ 是否为平稳过程，请说明理由。

解：（1）由于 $N_0(t)$ 的状态空间为 $S=\{\cdots,-1,0,1,\cdots\}$，因此 $N_0(t)$ 不是计数过程，更不是泊松过程。

（2）由于

$$E\{N_0(t)\}=E\{N_1(t)-N_2(t)\}=\lambda(t_1-t_2)$$

不是常数，因此 $N_0(t)$ 不是平稳过程。

4、设 $Y(t)=X(-1)^{N(t)},t\ge 0$，其中 $\{N(t);t\ge 0\}$ 为强度为 $\lambda>0$ 的 Poisson 过程，随机变量 X 与此 Poisson 过程独立，且有如下分布：

$$P\{X=-a\}=P\{X=a\}=1/4,\ \ P\{X=0\}=1/2,\quad a>0$$

试求随机过程 $Y(t),t\ge 0$ 的均值函数和相关函数。

解：由于 $E\{X\}=0$，由独立性可知 $E\{Y(t)\}=0$，

$$\begin{aligned}R_Y(t_1,t_2)&=E\left\{X^2\cdot(-1)^{N(t_1)+N(t_2)}\right\}=E\left\{X^2\right\}E\left\{(-1)^{N(t_1)+N(t_2)}\right\}\\&=\frac{a^2}{2}E\left\{(-1)^{2N(t_1)+N(t_2)-N(t_1)}\right\}=\frac{a^2}{2}E\left\{(-1)^{N(t_2)-N(t_1)}\right\}\\&=\frac{a^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}E\left\{(-1)^{N(t_2)-N(t_1)}\middle|N(t_2)-N(t_1)=n\right\}P\{N(t_2)-N(t_1)=n\}\\&=\frac{a^2}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{[\lambda(t_2-t_1)]^n}{n!}e^{-\lambda(t_2-t_1)}=\frac{a^2}{2}e^{-2\lambda(t_2-t_1)}=\frac{a^2}{2}e^{-2\lambda\tau},\quad \tau=t_2-t_1\end{aligned}$$

故$\{Y(t)\}$是平稳过程。

5、设$\{N(t),t\geq 0\}$是一强度为λ的泊松过程，$S_0=0$，S_n为第n个事件发生的时刻，求：

（1）(S_2,S_5)的联合概率密度函数；

（2）$E\{S_1\,|\,N(t)\geq 1\}$；

（3）(S_1,S_2)在$N(t)=1$条件下的条件概率密度函数。

解：（1）令：$0<t_2<t_5$，取充分小的$h>0$，使得：

$$t_2-\frac{h}{2}<t_2<t_2+\frac{h}{2}<t_5-\frac{h}{2}<t_5<t_5+\frac{h}{2}$$

由

$$\begin{aligned}&\left\{t_2-\frac{h}{2}<S_2\leq t_2+\frac{h}{2},t_5-\frac{h}{2}<S_5\leq t_5+\frac{h}{2}\right\}=\\&\qquad\left\{N\left(t_2-\frac{h}{2}\right)=1,\,N\left(t_2+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_2-\frac{h}{2}\right)=1,\right.\\&\qquad\left.N\left(t_5-\frac{h}{2}\right)-N\left(t_2+\frac{h}{2}\right)=2,N\left(t_5+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_5-\frac{h}{2}\right)=1\right\}\bigcup H_n\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}H_n=&\left\{N\left(t_2-\frac{h}{2}\right)=1,\,N\left(t_2+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_2-\frac{h}{2}\right)=1,\right.\\&\left.N\left(t_5-\frac{h}{2}\right)-N\left(t_2+\frac{h}{2}\right)=2,N\left(t_5+\frac{h}{2}\right)-N\left(t_5-\frac{h}{2}\right)\geq 2\right\}\end{aligned}$$

因此有

$$\begin{aligned}&P\left\{t_2-\frac{h}{2}<S_2\leq t_2+\frac{h}{2},t_5-\frac{h}{2}<S_5\leq t_5+\frac{h}{2}\right\}=\\&\quad=\lambda\left(t_2-\frac{h}{2}\right)e^{-\lambda\left(t_2-\frac{h}{2}\right)}\cdot(\lambda h)e^{-\lambda h}\cdot\frac{1}{2}[\lambda(t_5-t_2-h)]^2e^{-\lambda(t_5-t_2-h)}\cdot(\lambda h)e^{-\lambda h}+o(h^2)\end{aligned}$$

由此可得(S_2,S_5)的联合概率密度函数为

$$\begin{aligned}g(t_2,t_5)&=\lim_{h\to 0}\frac{P\left\{t_2-\frac{h}{2}<S_2\leq t_2+\frac{h}{2},t_5-\frac{h}{2}<S_5\leq t_5+\frac{h}{2}\right\}}{h^2}\\&=\frac{\lambda^5}{2}t_2(t_5-t_2)^2e^{-\lambda t_5},\quad 0<t_2<t_5\end{aligned}$$

（2）由于$\{N(t)\geq 1\}=\{S_1\leq t\}$，由泊松过程与指数分布的关系可知，在$\{S_1\leq t\}$条件下，$S_1$的分布密度函数为

$$f(x)=\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda t}},\quad 0\le x\le t\ \text{（截尾的指数分布）}$$

因此有：

$$E\{S_1\,|\,N(t)\ge 1\}=E\{S_1\,|\,S_1\le t\}=\int_0^t x\cdot\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda t}}dx=\frac{1}{\lambda}+\frac{1-te^{-\lambda t}}{1-e^{-\lambda t}}$$

（3）由于 $\{N(t)=1\}=\{S_1\le t<S_2\}$，令：$0<t_1\le t<t_2$，取充分小的 $h_1,h_2>0$，使得：$t_1-h_1<t_1\le t<t_2-h_2<t_2$，由

$$\begin{aligned}&\{t_1-h_1<S_1\le t_1,t_2-h_2<S_2\le t_2\}=\\&=\{N(t_1-h_1)=0,\ N(t_1)-N(t_1-h_1)=1,\\&N(t_2-h_2)-N(t_1)=0,N(t_2)-N(t_2-h_2)=1\}\cup H_n\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}H_n=\{&N(t_1-h_1)=0,\ N(t_1)-N(t_1-h_1)=1,\\&N(t_2-h_2)-N(t_1)=0,N(t_2)-N(t_2-h_2)\ge 2\}\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&P\{t_1-h_1<S_1\le t_1,t_2-h_2<S_2\le t_2\}=\\&=e^{-\lambda(t_1-h_1)}\cdot(\lambda h_1)\cdot e^{-\lambda h_1}\cdot e^{-\lambda(t_2-h_2-t_1)}\cdot(\lambda h_2)\cdot e^{-\lambda h_2}+o(h_1h_2)\end{aligned}$$

由此可得在 $N(t)=1$ 的条件下 (S_1,S_2) 的联合概率密度函数为

$$\begin{aligned}&g(t_1,t_2|N(t)=1)=\\&=\lim_{h_1,h_2\to 0}\frac{P\{t_1-h_1<S_1\le t_1,t_2-h_2<S_2\le t_2\}}{h_1h_2P\{N(t)=1\}}=\frac{\lambda}{t}e^{-\lambda(t_2-t)},\quad 0<t_1\le t<t_2\end{aligned}$$

6、设 $\{N(t),t\ge 0\}$ 是一强度为 λ 的泊松过程，设 T 为第一个事件出现的时间，$N(T/a)$ 为第一个事件后，在 T/a 时间间隔内出现的事件数，其中 a 为正常数。试计算：

（1） $E\{TN(T/a)\}$；

（2） $E\{[TN(T/a)]^2\}$。

解：（1）由于 T 为第一个事件出现的时间，因此 T 服从参数为 λ 的指数分布，由全概率公式及 $E\{N(t)\}=\lambda t$，有

$$E\{TN(T/a)\}=\int_0^{+\infty}E\{TN(T/a)\,|\,T=t\}f_T(t)dt=\int_0^{+\infty}E\{tN(t/a)\}\lambda e^{-\lambda t}dt$$

$$=\lambda\int_0^{+\infty}tE\{N(t/a)\}e^{-\lambda t}dt=\lambda\int_0^{+\infty}t\lambda\frac{t}{a}e^{-\lambda t}dt=\frac{\lambda^2}{a}\int_0^{+\infty}t^2e^{-\lambda t}dt=\frac{2}{a\lambda}$$

（2）由 $E\{N^2(t)\}=\lambda t+(\lambda t)^2$ 及全概率公式，有

$$E\left\{[TN(T/a)]^2\right\}=\int_0^{+\infty} E\{[TN(T/a)]^2 \mid T=t\} f_T(t)dt=\int_0^{+\infty} E\{[tN(t/a)]^2\}\lambda e^{-\lambda t}dt$$
$$=\lambda\int_0^{+\infty} t^2E\{[N(t/a)]^2\}e^{-\lambda t}dt=\lambda\int_0^{+\infty} t^2\left[\frac{\lambda t}{a}+\frac{\lambda^2 t^2}{a^2}\right]\cdot e^{-\lambda t}dt$$
$$=\frac{\lambda^2}{a}\int_0^{+\infty} t^3\cdot e^{-\lambda t}dt+\frac{\lambda^3}{a^2}\int_0^{+\infty} t^4\cdot e^{-\lambda t}dt=\frac{6a+24}{a^2\lambda^2}$$

7、某商场为调查客源情况，考察男女顾客到达商场的人数。假设$[0,t)$时间内男女顾客到达商场的人数分别独立地服从参数为λ和μ的泊松过程。问：

（1）$[0,t)$时间内到达商场的总人数应该服从什么分布？

（2）在已知$[0,t)$时间内商场到达n位顾客的条件下，其中有k位是女顾客的概率为何？平均有多少位女顾客？

解：（1）以$N_1(t),N_2(t)$分别表示$[0,t)$时间内到达的女顾客和男顾客数，对于任意的$k\in N_0$，有

$$\{N_1(t)+N(t)=k\}=\bigcup_{i=0}^{k}\{N_1(t)=i,\,N_2(t)=k-i\}$$

由$N_1(t),N_2(t)$的独立性，有

$$P\{N_1(t)+N(t)=k\}=\sum_{i=0}^{k}P\{N_1(t)=i\}P\{N_2(t)=k-i\}$$
$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{(\mu t)^i(\lambda t)^{k-i}}{i!(k-i)!}e^{-(\mu+\lambda)t}=\frac{1}{k!}\left[\sum_{i=0}^{k}C_k^i(\mu t)^i(\lambda t)^{k-i}\right]e^{-(\mu+\lambda)t}=\frac{[(\mu+\lambda)t]^k}{k!}e^{-(\mu+\lambda)t}$$

因此$[0,t)$时间内到达商场的总人数应该服从什么参数为$(\mu+\lambda)t$的泊松分布。

（2）对于$0\le k\le n$，有

$$P\{N_1(t)=k \mid N_1(t)+N_2(t)=n\}=\frac{P\{N_1(t)=k,\,N_1(t)+N_2(t)=n\}}{P\{N_1(t)+N_2(t)=n\}}$$

由$N_1(t),N_2(t)$的独立性及（1）的结果，有

$$P\{N_1(t)=k,\,N_1(t)+N_2(t)=n\}=P\{N_1(t)=k,N_2(t)=n-k\}$$
$$=P\{N_1(t)=k\}P\{N_2(t)=n-k\}=\frac{(\mu t)^k}{k!}\frac{(\lambda t)^{n-k}}{(n-k!)}e^{-(\mu+\lambda)t}$$
$$P\{N_1(t)+N(t)=n\}=\frac{[(\mu+\lambda)t]^n}{n!}e^{-(\mu+\lambda)t}$$

因此有：

$$P\{N_1(t)=k \mid N_1(t)+N_2(t)=n\}=\frac{(\mu t)^k}{k!}\frac{(\lambda t)^{n-k}}{(n-k!)}\cdot\frac{n!}{[(\mu+\lambda)t]^n}=$$

$$=C_n^k\left(\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)^k\left(\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right)^{n-k}\sim B\left(n,\frac{\mu}{\mu+\lambda}\right)$$

$$E\{N_1(t) \mid N_1(t)+N_2(t)=n\}=\frac{n\mu}{(\mu+\lambda)}$$

8、 设在时间区间$(0,t]$到达某商店的顾客数$N(t),t\ge 0$是强度为$\lambda>0$的齐次泊松过程，$N(0)=0$，且每个顾客购买商品的概率$p>0$，没有买商品的概率为$q=1-p$，分别以$X(t)$和$Y(t)$表示$(0,t]$所有购买商品的顾客数和所有没有购买商品的顾客数，$t\ge 0$。证明$X(t)$和$Y(t)$分别是服从参数为λp和λq的泊松过程，并且是相互独立的。进一步求$X(t)$和$Y(t)$的均值函数$m(t)$和相关函数$R(s,t)$。

解：由于$N(t)=X(t)+Y(t)$，$N(t)$服从强度为λ的泊松过程，由全概率公式有：

$$P\{X(t)=n,Y(t)=m\}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X(t)=n,Y(t)=m \mid N(t)=k\}P\{N(t)=k\}$$

因为$k\ne n+m$时，$P\{X(t)=n,Y(t)=m \mid N(t)=k\}=0$，故：

$$\begin{aligned}P\{X(t)=n,Y(t)=m\}&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X(t)=n,Y(t)=m \mid N(t)=k\}P\{N(t)=k\}\\&=P\{X(t)=n,Y(t)=m \mid N(t)=n+m\}P\{N(t)=n+m\}\\&=C_{n+m}^n p^n q^m\frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!}e^{-\lambda t}=\frac{(\lambda pt)^n}{n!}e^{-\lambda pt}\cdot\frac{(\lambda qt)^m}{m!}e^{-\lambda qt}\end{aligned}$$

另外：

$$\begin{aligned}P\{X(t)=n\}&=\sum_{m=0}^{\infty}P\{X(t)=n,Y(t)=m\}\\&=\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{(\lambda pt)^n}{n!}e^{-\lambda pt}\cdot\frac{(\lambda qt)^m}{m!}e^{-\lambda qt}\right]=\frac{(\lambda pt)^n}{n!}e^{-\lambda pt}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{Y(t)=m\}&=\sum_{n=0}^{\infty}P\{X(t)=n,Y(t)=m\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(\lambda pt)^n}{n!}e^{-\lambda pt}\cdot\frac{(\lambda qt)^m}{m!}e^{-\lambda qt}\right]=\frac{(\lambda qt)^m}{m!}e^{-\lambda qt}\end{aligned}$$

因此，有：

$$P\{X(t)=n,Y(t)=m\}=P\{X(t)=n\}\cdot P\{Y(t)=m\}$$

由于对任意的n,m和t上面的式子都成立，所以$X(t)$和$Y(t)$分别是服从参数为λp和λq的

泊松过程，且相互独立。最后，由泊松过程的性质，我们有：

$$m_X(t)=E\{X(t)\}=\lambda pt,\quad t\ge 0,\quad m_Y(t)=E\{Y(t)\}=\lambda qt,\quad t\ge 0$$

$$R_X(s,t)=E\{X(s)X(t)\}=(\lambda p)^2 st+(\lambda p)\min\{s,t\},\quad s,t\ge 0$$

$$R_Y(s,t)=E\{Y(s)Y(t)\}=(\lambda q)^2 st+(\lambda q)\min\{s,t\},\quad s,t\ge 0$$

9、在某公共汽车起点站，有甲、乙两路公交车。设乘客到达甲、乙两路公交车的人数分别为参数 λ_1、λ_2 的齐次 Poisson 过程，且它们是相互独立的。假设 $t=0$ 时，两路公交车同时开始接受乘客上车。

（1）如果甲车在时刻 t 发车，计算在 $[0,t]$ 内到达甲车的乘客等待开车时间总和的期望值；

（2）如果当甲路车上有 n 个乘客时，甲路车发车；当乙路车上有 m 个乘客时，乙路车发车。求甲路车比乙路车发车早的概率。（写出表达式即可）

解：（1）设甲车第 i 个乘客到达车站的时刻为 S_i，则 $[0,t]$ 内到达车站的乘客等待时间总和为：

$$S(t)=\sum_{i=1}^{N_1(t)}(t-S_i)$$

因为：

$$E\{S(t)\mid N_1(t)=n\}=E\{\sum_{i=1}^{N_1(t)}(t-S_i)\mid N_1(t)=n\}=$$

$$=E\{\sum_{i=1}^{n}(t-S_i)\mid N_1(t)=n\}=nt-E\{\sum_{i=1}^{n}S_i\mid N_1(t)=n\}$$

$$=nt-\frac{nt}{2}=\frac{nt}{2}$$

故：

$$E\{S(t)\}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(P\{N_1(t)=n\}E\{\sum_{i=1}^{N_1(t)}(t-S_i)\mid N_1(t)=n\}\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P\{N_1(t)=n\}\cdot\frac{nt}{2}=\frac{t}{2}E\{N_1(t)\}=\frac{\lambda_1}{2}t^2$$

（2）设甲车第 n 个乘客到达车站的时刻为 S_n，乙车第 m 个乘客到达车站的时刻为 S_m，由于甲车乘客到达的人数与乙车乘客到达的人数相互独立，根据题意，所要求的概率为：

$$P\{S_n<S_m\}=\int_0^{+\infty}dt_2\int_0^{t_2}\frac{(\lambda_1 t_1)^{n-1}}{(n-1)!}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1}\cdot\frac{(\lambda_2 t_2)^{m-1}}{(m-1)!}\lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2}dt_1$$

10、　设$\{X_n, n\geq 1\}$独立同分布，X_n的概率密度函数为$f(x)=\lambda^2 xe^{-\lambda x}, x\geq 0$，试求相应的更新函数$m(t)$。

解：由拉普拉斯变换，$L\{f(x)\}=L\{\lambda^2 xe^{-\lambda x}\}=\dfrac{\lambda^2}{(s+\lambda)^2}$，由更新函数导数的拉普拉斯变换与$X_n$密度函数的拉普拉斯变换的关系，有

$$L\{\frac{dm(t)}{dt}\}=\frac{\frac{\lambda^2}{(s+\lambda)^2}}{1-\frac{\lambda^2}{(s+\lambda)^2}}=\frac{\lambda^2}{(s+\lambda)^2-\lambda^2}=\frac{\lambda^2}{s(s+2\lambda)}$$

因此

$$\frac{dm(t)}{dt}=L^{-1}\{\frac{\lambda^2}{s(s+2\lambda)}\}=\frac{\lambda}{2}(1-e^{-2\lambda t})$$

求积分，可得

$$m(t)=\frac{\lambda t}{2}+\frac{1}{4}(e^{-2\lambda t}-1)$$

11、　设更新过程$N(t), t\geq 0$的时间间隔$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$服从参数为$\mu$的泊松分布，试求：

（1）$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$的分布；

（2）计算$P\{N(t)=n\}$。

解：（1）由更新过程可知，$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$独立同分布，由母函数的知识，泊松分布的母函数为：若$X\sim Po(\mu)$，则$g_X(s)=e^{\mu(s-1)}$。

因此，$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$的母函数为：$g_{S_n}(s)=e^{n\mu(s-1)}$，所以

$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$的分布为参数为$n\mu$的泊松分布，即

$$P\{S_n=k\}=\frac{(n\mu)^k}{k!}e^{-n\mu},\quad k\geq 0$$

（2）由$\{N(t)=n\}=\{S_n\leq t<S_{n+1}\}=\{S_n\leq t\}-\{S_{n+1}\leq t\}$，有

$$P\{N(t)=n\}=\sum_{k=0}^{[t]}\frac{(n\mu)^k}{k!}e^{-n\mu}-\sum_{k=0}^{[t]}\frac{[(n+1)\mu]^k}{k!}e^{-(n+1)\mu}$$