随机过程课程作业-Week12

作者：48-丁力-202328015926048
日期：今天

目录

泊松过程

1. 设 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一强度为 λ 的齐次泊松过程, 而 $X(t) = N(t)/2 - 1, t \geq 0$。对 $s > 0$,试求:

(1) 计算 $E\{N(t)N(t+s)\}$ 及 $E\{N(s+t) \mid N(s)\}$ 的分布律;
(2) 证明过程 $X(t), t \geq 0$ 是马氏过程并写出转移概率 $p(s,i;t,j)$, 其中 $s \leq t$ 。

- (1)

由于$N(t)$是齐次泊松过程，那么可以得到$X(t)$的状态空间为：

$$S = \{\frac{k-2}{2}\}, k = 0,1,2,3..$$

现在让我们来计算第一个的期望：

$$\begin{aligned}
E\{N(t)N(t+s)\} =& E\{N(t)(N(t+s) - N(t) + N(t))\} \\
=& E\{N(t)^2\} + E\{N(t)(N(t+s) - N(t))\} \\
=& D(N(t)) + (E\{N(t)\})^2 + E\{N(t)(N(t+s) - N(t))\} \\
& \text{由于}[0,t]\text{与}[t,t+s]\text{的泊松过程是独立的，所以有} \\
=& \lambda t + (\lambda t)^2 + E\{N(t)\}\lambda(s) \\
=& \lambda t + (\lambda t)^2 + \lambda t \lambda s \\
=& \lambda^2 t(t+s) + \lambda t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E\{N(s+t) \mid N(s) = n\} &= E\{(N(s+t) - N(s) + N(s) \mid N(s) = n\} \\
&= E\{(N(s+t) - N(s) \mid N(s) = n\} + E\{(N(s) \mid N(s) = n\} \\
&\text{由上可知，前一项的条件概率是不相关的} \\
&= E\{(N(s+t) - N(s)\} + n \\
&\lambda t + n \\
&\lambda t + N(s)
\end{aligned}$$

那么，其分布列为：

$$P\{E\{N(s+t) \mid N(s)\} = n + \lambda t\} = P\{N(s) = n\} = \frac{(\lambda s)^n}{n!} e^{-\lambda s}$$

(2)

由泊松过程的独立增量性可知过程 $X(t)$ 也是独立增量的，又因为 $X(0)=-1$，因此可知过程 $X(t)$ 是一马氏过程，其转移概率为：

$$
\begin{aligned}
p(s,i;t,j) &= \frac{P(X(t)=j,X(s)=i)}{P(X(t)=j)} \\
&= \frac{P(N(t)=2(j+1),N(s)=2(i+1))}{P(N(t)=2(j+1))} \\
&= \frac{P(N(t)=2(j+1))P(N(t-s)=2(j-i))}{P(N(t)=2(j+1))} \\
&= \frac{(\lambda(t-s)^{2(j-i)}}{2(j-i)!}e^{-\lambda(t-s)}
\end{aligned}
$$

2. 设 $\{X(t);t\geq 0\}$ 与 $\{Y(t);t\geq 0\}$ 是相互独立，参数分别为 λ_1 与 λ_2 的 Poisson 过程。定义随机过程 $Z(t)=X(t)-Y(t),t\geq 0$，且令: $p_n(t)=P\{Z(t)=n\}$。

(1) 试求随机过程 $\{Z(t);t\geq 0\}$ 的均值函数 $E\{Z(t)\}$ 和二阶矩 $E\left\{Z^2(t)\right\}$；
(2)试证明: $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}p_n(t)u^n=\exp\{-(\lambda_1+\lambda_2)t\}\cdot\exp\left\{\lambda_1 ut+\lambda_2 u^{-1}t\right\}$。

(1)

$$
\begin{aligned}
E\{Z(t)\} &= E(X(t)-Y(t)) \\
&\quad \text{由于}X(t)\text{和}Y(t)\text{相互独立} \\
&= E(X(t))-E(Y(t)) \\
&= (\lambda_1-\lambda_2)t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E\left\{Z^2(t)\right\} &= E\left\{(X(t)^2-2X(t)Y(t)+Y(t)^2)\right\} \\
&= E(X(t)^2)-2E(X(t)Y(t))+E(Y(t)^2) \\
&\text{由于}X(t)\text{与}Y(t)\text{相互独立，}E(X(t)Y(t))=E(X(t))E(Y(t)) \\
&= (E(X(t))^2+D(X(t)))+(E(Y(t))^2+D(Y(t)))-2\lambda_1\lambda_2 t^2 \\
&= (\lambda_1 t)^2+\lambda_1 t+(\lambda_2 t)^2+\lambda_2 t-2\lambda_1\lambda_2 t^2 \\
&= (\lambda_1-\lambda_2)^2 t^2+(\lambda_1+\lambda_2)t
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
\Phi_{Z(t)}(u) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty}p_n(t)u^n=\Phi_{X(t)-Y(t)}(u)=\Phi_{X(t)+(-Y(t))}(u)=\Phi_{X(t)}(u)\Phi_{-Y(t)}(u) \\
&= \exp\{-(\lambda_1+\lambda_2)t\}\cdot\exp\left\{\lambda_1 ut+\lambda_2 u^{-1}t\right\}
\end{aligned}
$$

3. 设 $\{N_1(t);t\geq 0\}$ 和 $\{N_2(t);t\geq 0\}$ 是相互独立的 Poisson 过程，其参数分别为 λ_1 和 λ_2. 若 $N_0(t)=N_1(t)-N_2(t)$，问:

(1) $\{N_0(t);t\geq 0\}$ 是否为 Poisson 过程，请说明理由；
(2) $\{N_0(t);t\geq 0\}$ 是否为平稳过程，请说明理由。

(1):

有题可以得到其状态空间为：

$$
S=\{0,\pm 1,\pm 2.\pm 3,\ldots,\pm k\}
$$

所以其不为计数过程，所以其不为Poisson过程。

(2):

首先，我们求解其期望：

$$
\begin{aligned}
E(N_0(t)) &= E(N_1(t) - N_2(t)) \\
&= (\lambda_1 - \lambda_2)t
\end{aligned}
$$

其期望不为常数，所以其不为平稳过程。