第三章 Poisson 过程（Poisson 信号流）

九、更新过程

（1） 概念及基本性质

定义：设$\{X_k, k\ge 1\}$是独立同分布，取值非负的随机变量，分布函数为$F(x)$，且$F(0)<1$。令$S_0=0, S_1=X_1, S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$，对$\forall t\ge 0$，记：

$$N(t)=\sup\{n: S_n\le t\}$$

则称$\{N(t), t\ge 0\}$为更新过程。

更新过程是一计数过程，并有：

$$\{N(t)\ge n\}=\{S_n\le t\}$$

$$\{N(t)=n\}=\{S_n\le t<S_{n+1}\}=\{S_n\le t\}-\{S_{n+1}\le t\}$$

记：$F_n(s)$为S_n的分布函数，由$S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$，易知：

$$F_1(x)=F(x)$$

$$F_n(x)=\int_0^x F_{n-1}(x-u)dF(u)\quad (n\ge 2)$$

证明：由全概率公式有：

$$\begin{aligned}F_n(x)&=P\{S_n\le x\}=P\{S_{n-1}+X_n\le x\}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}P\{S_{n-1}\le x-u | X_n=u\}f_{X_n}(u)du\\&=\int_0^{\infty}P\{S_{n-1}\le x-u\}dF(u)\\&=\int_0^{x}P\{S_{n-1}\le x-u\}dF(u)\\&=\int_0^{x}F_{n-1}(x-u)dF(u)=(F_{n-1}*f)(x)=(f*F_{n-1})(x)\end{aligned}$$

即$F_n(x)$是$F(x)$的n重卷积，记作：$F_n=F_{n-1}*F$。

另外，记：

$$m(t) = E\{N(t)\}$$

称 $m(t)$ 为更新函数。关于更新函数，有以下重要的定理。

定理：对于 $\forall t \ge 0$，有：

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

证明：根据以上的关系式，计算得：

$$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} nP\{N(t) = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} nP\{N(t) = n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} P\{N(t) = n\} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty} P\{N(t) = n\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P\{N(t) \ge k\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{N(t) \ge n\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n \le t\}$$

即有：

$$m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$$

推论：若对 $\forall t \ge 0$，$F(t) < 1$，则有：

$$m(t) \le F(t)(1 - F(t))^{-1}$$

下面是重要的更新方程。

定理：$\forall t \ge 0$，$m(t)$ 满足下列更新方程：

$$m(t) = F(t) + \int_0^t m(t-u)dF(u)$$

证明：由 $m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)$，得：

$$m(t) = F(t) + \sum_{n=2}^{\infty} F_n(t)$$

将 $F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-u)dF(u) \quad (n \ge 2)$ 代入上式，即有所要的结果。

令：

$$\tilde{m}(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}\,dm(t)$$

$$\tilde{F}(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}\,dF(t)$$

则有：

$$\tilde{m}(s)=\frac{\tilde{F}(s)}{1-\tilde{F}(s)},\quad \tilde{F}(s)=\frac{\tilde{m}(s)}{1+\tilde{m}(s)}$$

证明：记：$\lambda(t)=\dfrac{dm(t)}{dt}$（称为更新强度函数），由 $m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)$，可得：

$$\lambda(t)=\frac{dm(t)}{dt}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{dF_n(t)}{dt}=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)$$

两边取 **Laplace** 变换，有：

$$\int_0^{\infty}\lambda(t)e^{-st}dt=\tilde{m}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-st}dF_n(t)$$

由 $\tilde{F}(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}dF(t)$ 及 $F_n=F_{n-1}*F$，根据卷积的 **Laplace** 变换的性质，有：

$$\int_0^{\infty}e^{-st}dF_n(t)=[\tilde{F}(s)]^n$$

因此，我们有：

$$\tilde{m}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-st}dF_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}[\tilde{F}(s)]^n=\frac{\tilde{F}(s)}{1-\tilde{F}(s)}$$

（2）　极限性质

令：$\mu=E\{X_n\}$，由 $F(0^+)<1$，可知 $\mu>0$，下面给出几个极限定理。

定理：$P\left\{\lim_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{n}=\mu\right\}=1$

推论：$P\left\{\lim_{n\to\infty}S_n=\infty\right\}=1$

推论：$\forall t\geq 0$，有：

$$m(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F_n(t)<\infty$$

记：$N(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}N(t)$，则有：

定理：$P\{N(\infty)=\infty\}=1$。

定理：$P\left\{\lim\limits_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}\right\}=1$

证明：由于：

$$S_{N(t)}\le t<S_{N(t)+1}\quad\Rightarrow\quad\frac{S_{N(t)}}{N(t)}\le\frac{t}{N(t)}<\frac{S_{N(t)+1}}{N(t)+1}\cdot\frac{N(t)+1}{N(t)}$$

由以上的定理，两边取极限，我们可以得到：

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=\frac{1}{\mu}\right\}=1$$

由此定理，我们称 $\frac{1}{\mu}$ 为更新过程的速率。

定理：（基本更新定理）若 $\mu=E\{X_n\}<\infty$，则有：$\lim\limits_{t\to\infty}\frac{m(t)}{t}=\frac{1}{\mu}$。

（3） 例子

例 **1**：设某更新过程 $N(t)$ 的时间间隔 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 是独立同分布，非负取值的随机变量，且有：

$$P\{X_n=i\}=p(1-p)^{i-1}\quad i\ge1$$

试求 $P\{N(t)=n\}$。

解：由于

$$\{N(t)=n\}=\{S_n\le t<S_{n+1}\}=\{S_n\le t\}-\{S_{n+1}\le t\}$$

因此

$$P\{N(t)=n\}=P\{S_n\le t\}-P\{S_{n+1}\le t\}$$

根据题意，此更新过程的时间间隔 X_n 服从几何分布，因此有

$$P\{S_n=k\}=\begin{cases}C_{k-1}^{n-1}p^n(1-p)^{k-n}, & k\ge n\\ 0, & k<n\end{cases}$$

最后得到

$$P\{N(t)=n\}=\sum_{k=n}^{[t]}C_{k-1}^{n-1}p^n(1-p)^{k-n}-\sum_{k=n+1}^{[t]}C_{k-1}^{n}p^{n+1}(1-p)^{k-n-1}$$

例 2：某更新过程的更新强度为：

$$\lambda(t)=\begin{cases}\lambda\,, & t\ge 0,\lambda>0\\ 0\,, & t<0\end{cases}$$

求该更新过程$\{N(t),t\ge 0\}$的时间间隔X_n的概率密度。

十、过滤的 Poisson 过程

定义：设有一 **Poisson** 分布的冲激脉冲串经过一线性时不变滤波器，则滤波器输出是一随机过程$\{\xi(t),t\ge 0\}$，即

$$\xi(t)=\sum_{i=1}^{N(T)}h(t-S_i)\qquad\text{（*）}$$

其中$h(t)$是滤波器的冲激响应，S_i是第i个冲激脉冲出现的时刻，$N(T)$是$[0,T]$内进入滤波器输入端冲激脉冲的个数，它服从 **Poisson** 分布，即：

$$P\{N(T)=k\}=\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}\ ,\quad k=0,1,2,\cdots$$

λ是单位时间内的平均脉冲数。我们称由（*）代表的随机过程为过滤的 **Poisson** 过程。

设$Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$是独立同分布的随机变量，并且$Y_1\sim U(0,T)$，由上节课的内容我们知道，在$N(T)=k$的条件下，$S_1,S_2,\cdots,S_k$的分布与$Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$的顺序统计量$Y_{(1)},Y_{(2)},\cdots,Y_{(k)}$的分布是一样的。

给定关于过滤的 **Poisson** 过程的一些基本假设：（**a**）T比$h(t)$的脉冲持续时间τ_a大得多，即$T>>\tau_a$；（**b**）$h(t)$是具有因果性的滤波器响应，即$t<S_i$时，$h(t-S_i)=0$；（**c**）被研究的时刻t大于$h(t)$的脉冲持续时间τ_a，即$t>\tau_a$。

下面研究过滤的 **Poisson** 过程的一些统计特性。

（1）$\xi(t)$ 的均值

$$
\begin{aligned}
E\{\xi(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\} E\{\xi(t) \mid N(T)=k\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\} E\left\{\sum_{i=1}^{k} h(t-S_i)\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\} \left\{\sum_{i=1}^{k} E\left[h(t-S_i)\right]\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\} \left\{\sum_{i=1}^{k} E\left[h(t-Y_i)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

下面求 $E[h(t-Y_i)]$：利用过滤的 Poisson 过程的基本假设，有：

$$
E[h(t-Y_i)] = \frac{1}{T}\int_0^T h(t-x)dx = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} h(y)dy = \frac{1}{T}\int_0^T h(y)dy
$$

因此，我们有：

$$
\begin{aligned}
E\{\xi(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\} \left\{\sum_{i=1}^{k} E\left[h(t-Y_i)\right]\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P\{N(T)=k\} \frac{k}{T}\int_0^T h(y)dy \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T h(y)dy \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{(\lambda T)^k}{k!} e^{-\lambda T} \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T h(y)dy \cdot \lambda T \\
&= \lambda \int_0^T h(y)dy
\end{aligned}
$$

（2）$\xi(t)$ 的相关函数 $R_{\xi\xi}(t,t+\tau)$

$$
\begin{aligned}
R_{\xi\xi}(t,t+\tau) &= E\{\xi(t)\xi(t+\tau)\} \\
&= E\left\{\sum_{i=1}^{N(T)} h(t-S_i) \sum_{j=1}^{N(T)} h(t+\tau-S_j)\right\} \\
&= E\left\{\sum_{i=1}^{N(T)}\sum_{j=1}^{N(T)} h(t-S_i) h(t+\tau-S_j)\right\}
\end{aligned}
$$

其中 $t<T, t+\tau<T$。

利用条件数学期望，我们有：

$$R_{\xi\xi}(t,t+\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{P\{N(T)=k\}\cdot E_{S_iS_j}\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}h(t-S_i)h(t+\tau-S_j)\right]\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left\{P\{N(T)=k\}\cdot\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k}E_{S_iS_j}\left[h(t-S_i)h(t+\tau-S_j)\right]\right\}$$

上面的等式中，当 $i=j$ 时，一共有 k 项，有：

$$\begin{aligned}&E_{S_iS_i}\left[h(t-S_i)h(t+\tau-S_i)\right]=\\&=\frac{1}{T}\int_0^T h(t-x)h(t+\tau-x)dx\\&=\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}h(y)h(y+\tau)dy=\frac{1}{T}\int_0^T h(y)h(y+\tau)dy\end{aligned}$$

当 $i\neq j$ 时，一共有 k^2-k 项，利用独立性和假设条件，每项为：

$$\begin{aligned}&E_{S_iS_j}\left[h(t-S_i)h(t+\tau-S_j)\right]=\frac{1}{T}\int_0^T h(t-x)dx\cdot\frac{1}{T}\int_0^T h(t+\tau-x)dx\\&=\frac{1}{T^2}\left[\int_0^T h(y)dy\right]^2\end{aligned}$$

因此，我们有：

$$\begin{aligned}R_{\xi\xi}(t,t+\tau)&=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}\frac{k}{T}\int_0^T h(y)h(y+\tau)dy+\\&\quad+\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}\frac{k^2-k}{T^2}\left[\int_0^T h(y)dy\right]^2\\&=\frac{E\{N(T)\}}{T}\int_0^T h(y)h(y+\tau)dy+\frac{E\{[N(T)]^2-N(T)\}}{T^2}\left[\int_0^T h(y)dy\right]^2\\&=\lambda\int_0^T h(y)h(y+\tau)dy+\lambda^2\left[\int_0^T h(y)dy\right]^2\end{aligned}$$

其中我们利用了：

$$E\{N(T)\}=\lambda T\text{，}\ E\{[N(T)]^2-N(T)\}=\lambda T+(\lambda T)^2-\lambda T=(\lambda T)^2$$

同时我们得到：

$$C_{\xi\xi}(t,t+\tau)=\lambda\int_0^T h(y)h(y+\tau)dy=C_{\xi\xi}(\tau)$$

（3）$\xi(t)$ 的特征函数

$$\Phi_{\xi(t)}(v)=E\left\{e^{jv\xi(t)}\right\}=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}E\left\{e^{jv\xi(t)}\,\middle|\,N(T)=k\right\}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}E\left\{\exp\left[jv\sum_{i=1}^{k}h(t-S_i)\right]\right\}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}E\left\{\exp\left[jv\sum_{i=1}^{k}h(t-Y_{(i)})\right]\right\}$$

而：

$$E\left\{\exp\left[jv\sum_{i=1}^{k}h(t-Y_{(i)})\right]\right\}=E\left\{\exp\left[jv\sum_{i=1}^{k}h(t-Y_i)\right]\right\}$$
$$=\prod_{i=1}^{k}E\left\{\exp\left[jvh(t-Y_i)\right]\right\}=\left[\frac{1}{T}\int_0^T\exp\left[jvh(t-x)\right]dx\right]^k$$
$$=\left[\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\exp\left[jvh(y)\right]dy\right]^k$$

代入计算，有：

$$\Phi_{\xi(t)}(v)=\sum_{k=0}^{\infty}P\{N(T)=k\}\cdot\left\{\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\exp\left[jvh(y)\right]dy\right\}^k$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda T)^k}{k!}e^{-\lambda T}\cdot\left\{\frac{1}{T}\int_{t-T}^{t}\exp\left[jvh(y)\right]dy\right\}^k$$
$$=e^{-\lambda T}\exp\left\{\lambda\int_{t-T}^{t}\exp\left[jvh(y)\right]dy\right\}=\exp\left\{\lambda\int_{t-T}^{t}\left[\exp(jvh(y))-1\right]dy\right\}$$

由于$h(t)$具有因果性，其持续时间$\tau_a<<T$，同时认为$t>\tau_a$，因此，在$(t-T,0)$和(t,T)内，有$h(t)=0$。因此我们得到：

$$\Phi_{\xi(t)}(v)=\exp\left\{\lambda\int_0^T\left[\exp(jvh(y))-1\right]dy\right\}\qquad (**)$$

注意：在给定的假设条件下，随机过程$\xi(t)$的特征函数与t无关，也就是说$\xi(t)$的一维概率密度与时间t无关，这样的随机过程称为一级严平稳过程，同理可以证明，任取$n\in N,\ 0<t_1<t_2<\cdots<t_n$　$\xi(t_1),\xi(t_2),\cdots,\xi(t_n)$的联合概率密度仅与时间差$t_2-t_1,t_3-t_2,\cdots,t_n-t_{n-1}$有关，具有这样性质的随机过程称为严平稳过程，过滤的 **Poisson** 过程就是严平稳过程。

另外，利用（**）式，我们有：

$$\frac{d\Phi_{\xi(t)}}{dv}\Big|_{v=0} = j\lambda\int_0^T h(y)dy$$

由特征函数与随机变量数字特征的关系，我们有：

$$E\{\xi(t)\} = \lambda\int_0^T h(y)dy$$

$$D\{\xi(t)\} = Var\{\xi(t)\} = \lambda\int_0^T [h(y)]^2 dy$$

这些结果与（1）、（2）中所获得的结果是一致的。

（4） 当 $\lambda \to \infty$ 时，特征函数的极限形式

我们记：

$$\alpha = \int_0^T h(y)dy\,,\quad \beta^2 = \int_0^T [h(y)]^2 dy$$

则有：

$$E\{\xi(t)\} = \lambda\alpha\,,\quad Var\{\xi(t)\} = \lambda\beta^2$$

作随机变量标准化变换，令：

$$\eta(t) = \frac{\xi(t) - \lambda\alpha}{\sqrt{\lambda}\beta}$$

则有：

$$E\{\eta(t)\} = 0\,,\quad Var\{\eta(t)\} = 1$$

下面求随机过程 $\{\eta(t), t \ge 0\}$ 的特征函数。

$$\begin{aligned}
\Phi_{\eta(t)}(v) &= E\left\{e^{jv\eta(t)}\right\} \\
&= E\left\{\exp\left[jv\cdot\frac{\xi(t)-\lambda\alpha}{\sqrt{\lambda}\beta}\right]\right\} \\
&= \exp\left\{-jv\cdot\frac{\sqrt{\lambda}\alpha}{\beta}\right\}\cdot E\left\{\exp\left[j\cdot\frac{v}{\sqrt{\lambda}\beta}\cdot\xi(t)\right]\right\} \\
&= \exp\left\{-jv\cdot\frac{\sqrt{\lambda}\alpha}{\beta}\right\}\cdot\exp\left\{\lambda\int_0^T\left[\exp\left(j\frac{v}{\sqrt{\lambda}\beta}h(y)\right)-1\right]dy\right\}
\end{aligned}$$

以上用到了特征函数的性质。两边求对数，我们有：

$$\ln\Phi_{\eta(t)}(v)=-jv\cdot\frac{\sqrt{\lambda}\alpha}{\beta}+\lambda\int_0^T\left[\exp\left(j\frac{v}{\sqrt{\lambda}\beta}h(y)\right)-1\right]dy$$

$$=-jv\cdot\frac{\sqrt{\lambda}\alpha}{\beta}+\lambda\int_0^T\left[\frac{jv}{\sqrt{\lambda}\beta}h(y)-\frac{v^2}{2\lambda\beta^2}h^2(y)-\frac{jv^3}{6\lambda^{3/2}\beta^3}h^3(y)+\cdots\right]dy$$

$$=-\frac{jv\sqrt{\lambda}\alpha}{\beta}+\frac{jv\sqrt{\lambda}}{\beta}\int_0^T h(y)dy-\frac{v^2}{2\beta^2}\int_0^T[h(y)]^2dy-$$

$$-\frac{jv^3}{6\sqrt{\lambda}\beta^3}\int_0^T[h(y)]^3dy+\cdots$$

$$=-\frac{v^2}{2}-\frac{jv^3}{6\sqrt{\lambda}\beta^3}\int_0^T[h(y)]^3dy+o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

上式中令$\lambda\to\infty$，我们得到：

$$\lim_{\lambda\to\infty}\ln\Phi_{\eta(t)}(v)=-\frac{v^2}{2}\quad\Rightarrow\quad\lim_{\lambda\to\infty}\Phi_{\eta(t)}(v)=\exp\left\{-\frac{v^2}{2}\right\}$$

由特征函数与分布函数唯一确定性，我们知道当$\lambda\to\infty$时，$\eta(t)$是服从标准正态分布的随机变量。因此可知$\xi(t)$也是服从正态分布的随机变量。即单位时间内出现的平均脉冲数无限增大时，$\xi(t)$的极限分布是正态分布，这符合中心极限定理。