Л. Н. ФЕОФАНОВА
И. А. ТАРАСОВА
О. А. АВДЕЮК
А. А. ЕРМАКОВА

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Л. Н. Феофанова, И. А. Тарасова
О. А. Авдеюк, А. А. Ермакова

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Рекомендовано УМО вузов России по образованию в области финансов, учета и мировой экономики в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по направлению «Экономика»

Волгоград
2012

УДК 519.85(075)

Р е ц е н з е н т ы :

д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры
«Математическое моделирование экономических процессов»
Финансового университета при Правительстве РФ
М. С. Красс;

директор Волгоградского филиала
Московского финансово-юридического университета
д-р пед. наук, профессор
О. И. Коломок;

д-р техн. наук, профессор кафедры «Математический анализ»
Волгоградского государственного социально-педагогического университета
Б. А. Жуков;

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета

Феофанова, Л. Н.

Методы оптимальных решений : учеб. пособие / Л. Н. Феофанова, И. А. Тарасова, О. А. Авдеюк, А. А. Ермакова ; ВолгГТУ. – Волгоград, 2012. – 104 с.

ISBN 978–5–9948–1027–9

В пособии содержатся теоретические материалы по данному разделу прикладной математики, примеры решений задач и варианты индивидуальных заданий. Написано с учетом опыта преподавания предметов «Прикладная математика» и «Математические модели и методы в экономике» на кафедрах ПМ и ИСЭ в ВолгГТУ.

Предназначено для студентов всех форм обучения и специальностей, изучающих курс «Методы оптимальных решении».

Ил. 29. Табл. 14. Библиограф.: 9 назв.

ISBN 978–5–9948–1027–9

ВВЕДЕНИЕ

Процессы принятия решений лежат в основе любой целенаправленной деятельности. В экономике они предшествуют созданию производственных и хозяйственных организаций, обеспечивают их оптимальное функционирование и взаимодействие. В научных исследованиях – позволяют выделить важнейшие научные проблемы, найти способы их изучения, предопределяют развитие экспериментальной базы и теоретического аппарата. При создании новой техники – составляют важный этап в проектировании машин, устройств, приборов, комплексов, зданий, в разработке технологии их построения и эксплуатации; в социальной сфере – используются для организации функционирования и развития социальных процессов, их координации с хозяйственными и экономическими процессами. Оптимальные (эффективные) решения позволяют достигать цели при минимальных затратах трудовых, материальных и сырьевых ресурсов.

В связи с этим профессиональное образование будущего инженера, руководителя современного производства, научного исследователя предполагает наличие серьезных теоретических знаний и практических умений в области принятия оптимальных решений.

Предлагаемое учебное пособие содержит основные теоретические сведения, подробно разобраны решения типовых задач, приведены примеры решения оптимизационных задач в программных пакетах MS Excel и Lingo, а также 30 вариантов заданий по каждой теме для итогового контроля знаний студентов.

Учебное пособие, в первую очередь, адресовано студентам вузов, обучающихся по федеральным стандартам третьего поколения и изучающих новый предмет «Методы оптимальных решений» (направление 080100.62 «Экономика»).

В связи с большим количеством подробно разобранных примеров решения задач пособие будет востребовано для самостоятельной работы студентов всех форм обучения, а в особенности – заочной и дистанционной.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ МЕТОДОВ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ И ЭТАПЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Методы оптимальных решений является одним из разделов исследования операций – прикладного направления кибернетики, используемого для решения практических организационных задач. Задачи математического программирования находят применение в различных областях человеческой деятельности, где необходим выбор одного из возможных образов действий (программ действий).

Значительное число задач, возникающих в обществе, связано с управляемыми явлениями, т. е. с явлениями, регулируемыми на основе сознательно принимаемых решений. При ограниченном объеме информации, который был доступен на ранних этапах развития общества, принималось оптимальное решение на основании интуиции и опыта, а затем, с возрастанием объема информации об изучаемом явлении, – с помощью ряда прямых расчетов. Так происходило, например, создание календарных планов работы промышленных предприятий.

Совершенно иная картина возникает, например, на современном промышленном предприятии с многосерийным и многономенклатурным производством, когда объем входной информации столь велик, что его обработка с целью принятия определенного решения невозможна без применения современных электронных вычислительных машин. Еще большие трудности возникают в связи с задачей о принятии наилучшего решения.

Под *принятием решений* в курсе «*Методы оптимальных решений*» понимают сложный процесс, в котором можно выделить следующие основные этапы:

1-й этап. Построение качественной модели рассматриваемой проблемы, т. е. выделение факторов, которые представляются наиболее важными, и установление закономерностей, которым они подчиняются. Обычно этот этап выходит за пределы математики.

2-й этап. Построение математической модели рассматриваемой проблемы, т. е. запись в математических терминах качественной модели. Таким образом, математическая модель – это записанная в математических символах абстракция реального явления, так конструируемая, чтобы ее анализ дал возможность проникнуть в сущность явления. Математическая модель устанавливает соотношения между совокупностью переменных – параметрами управления явлением. Этот этап включает также построение целевой функции переменных, т. е. такой числовой характеристики, большему (или меньшему) значению которой соответствует лучшая ситуация с точки зрения принимаемого решения.

Итак, в результате этих двух этапов формируется соответствующая математическая задача. Причем, второй этап уже требует привлечения математических знаний.

3-й этап. Исследование влияния переменных на значение целевой функции. Этот этап предусматривает владение математическим аппаратом для решения математических задач, возникающих на втором этапе процесса принятия решения.

Широкий класс задач управления составляют такие экстремальные задачи, в математических моделях которых условия на переменные задаются равенствами и неравенствами. Теория и методы решения этих задач как раз и составляют содержание математического программирования. На третьем этапе, пользуясь математическим аппаратом, находят решение соответствующих экстремальных задач. Обратим внимание на то, что задачи математического программирования, связанные с решением практических вопросов, как правило, имеют большое число переменных и ограничений. Объем вычислительных работ для нахождения соответствующих решений столь велик, что весь процесс не мыслится без применения современных электронных вычислительных машин (ЭВМ), а значит, требует либо создания программ для ЭВМ, реализующих те или иные алгоритмы, либо использования уже имеющихся стандартных программ.

4-й этап. Сопоставление результатов вычислений, полученных на 3-м этапе, с моделируемым объектом, т. е. экспертная проверка результатов (критерий практики). Таким образом, на этом этапе устанавливается степень адекватности модели и моделируемого объекта в пределах точности исходной информации. Здесь возможны два случая:

1-й случай. Если результаты сопоставления неудовлетворительны (обычная ситуация на начальной стадии процесса моделирования), то переходят ко второму циклу процесса. При этом уточняется входная информация о моделируемом объекте и, в случае необходимости, уточняется постановка задачи (1-й этап); уточняется или строится заново математическая модель (2-й этап); решается соответствующая математическая задача (3-й этап) и, наконец, снова проводится сопоставление (4-й этап).

2-й случай. Если результаты сопоставления удовлетворительны, то модель принимается. Когда речь идет о неоднократном использовании на практике результатов вычислений, возникает задача подготовки модели к эксплуатации. Предположим, например, что целью моделирования является создание календарных планов производственной деятельности предприятия. Тогда эксплуатация модели включает в себя сбор и обработку информации, ввод обработанной информации в ЭВМ, расчеты на основе разработанных программ календарных планов и, наконец, выдачу результатов вычислений (в удобном для пользователей виде) для их использования в сфере производственной деятельности.

В математическом программировании можно выделить *два направления*.

К *первому*, уже вполне сложившемуся направлению – собственно *математическому программированию* – относятся детерминированные задачи, предполагающие, что вся исходная информация является полностью определенной.

Ко *второму* направлению – так называемому *стохастическому программированию* – относятся задачи, в которых исходная информация содержит элементы неопределенности, либо когда некоторые параметры задачи носят случайный характер с известными вероятностными характеристиками. Так, планирование производственной деятельности зачастую производится в условиях неполной информации о реальной ситуации, в которой будет выполняться план. Или, скажем, когда экстремальная задача моделирует работу автоматических устройств, которая сопровождается случайными помехами. Заметим, что одна из главных трудностей стохастического программирования состоит в самой постановке задач, главным образом из-за сложности анализа исходной информации.

Традиционно в математическом программировании выделяют следующие основные разделы:

Линейное программирование – целевая функция линейна, а множество, на котором ищется экстремум целевой функции, задается системой линейных равенств и неравенств.

Нелинейное программирование – когда целевая функция и система ограничения нелинейны.

Динамическое программирование – это метод оптимизации, приспособленный к операциям, в которых процесс принятия решений может быть разбит на этапы (шаги).

Целью математического программирования является создание, где это возможно, аналитических методов определения решения, а при отсутствии таких методов – создание эффективных вычислительных способов получения приближенного решения.

Глава 2

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1. Симплексный метод

Пусть требуется найти max Z,

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j , \qquad (1)$$

при условиях:

$$\begin{cases} x_1 + a_{1m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{1n} x_n = b_1, \\ x_2 + a_{2m+1} x_{m+1} + \ldots + a_{2n} x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m + a_{mm+1} x_{m+1} + \ldots + a_{mn} x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1 \ldots n),$$

где a_{ij}, c_j b_i – постоянные числа ($b_i > 0$, $m < n$).

Введя векторы:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{A}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{m+1} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1m+1} \\ \mathbf{a}_{2m+1} \\ \ldots \\ \mathbf{a}_{mm+1} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{2n} \\ \ldots \\ \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix}, A_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \ldots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix},$$

можно записать систему (2) в векторной форме :

$$x_1 \mathbf{A}_1 + x_2 \mathbf{A}_2 + \ldots + x_m \mathbf{A}_m + x_{m+1} \mathbf{A}_{m+1} + \ldots + x_n \mathbf{A}_n = \mathbf{A}_0. \qquad (3)$$

Нетрудно заметить. что справедливо равенство:

$$b_1\mathbf{A}_1 + b_2\mathbf{A}_2 + \ldots + b_m\mathbf{A}_m = \mathbf{A}_0,$$

а это означает, что $X_0 = (b_1, b_2, \ldots, b_m, 0, \ldots, 0)$ является решением системы (2) или начальным опорным планом задачи. Этот план определяется системой базисных векторов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, ..., $\mathbf{A}_m$ m-мерного пространства. Каждый вектор $\mathbf{A}_j$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этого базиса:

$$\mathbf{A}_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \mathbf{A}_i \quad (j = 0 \ldots n).$$

Положим $Z_j = \mathbf{C}_б \mathbf{A}_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}$, где $\mathbf{C}_б = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ – ценовой вектор базиса и $\Delta_j = Z_j - c_j$ (x_{ij} – компоненты вектора $\mathbf{A}_j$ в данном базисе).

Оптимальность опорного плана и последующие шаги решения задачи определяются следующими теоремами:

Т е о р е м а 1. Опорный план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ задачи линейного программирования (1)–(2) является оптимальным, если $\Delta_j \geq 0$ для всех j ($j = 1, \ldots, n$).

Т е о р е м а 2. Если для некоторого $j = k$ $\Delta_j < 0$ и среди чисел a_{ik} ($i = 1, \ldots, m$) нет положительных чисел, то целевая функция задачи не ограничена на множестве ее планов.

Т е о р е м а 3. Если опорный план X задачи не вырожден и $\Delta_k < 0$, но среди чисел a_{ik} есть положительные (не все $a_{ik} \leq 0$), то существует опорный план X_1 такой, что $Z(X_1) > Z(X)$.

Исходные данные и процесс вычисления (переход к новому опорному плану) удобно записывать в табл. 1.

Таблица 1

i	базис	$\mathbf{C}_б$	$\mathbf{A}_0$	c_1	c_2	…	c_k	…	c_n
				$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	…	$\mathbf{A}_k$	…	$\mathbf{A}_n$
1	$\mathbf{E}_1$	$\mathbf{C}_{10}$	$\mathbf{b}_{10}$	$\mathbf{a}_{11}$	$\mathbf{a}_{12}$	…	$\mathbf{a}_{1k}$	…	$\mathbf{a}_{1n}$
2	$\mathbf{E}_2$	$\mathbf{C}_{20}$	$\mathbf{b}_{20}$	$\mathbf{a}_{21}$	$\mathbf{a}_{22}$	…	$\mathbf{a}_{2k}$	…	$\mathbf{a}_{2n}$
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
m	$\mathbf{E}_m$	$\mathbf{C}_{m0}$	$\mathbf{b}_{m0}$	$\mathbf{a}_{m1}$	$\mathbf{a}_{m2}$	…	$\mathbf{a}_{mk}$	…	$\mathbf{a}_{mn}$
$m + 1$			Z_0	Δ_1	Δ_2	…	Δ_k	…	Δ_n

Базисный вектор $\mathbf{E}_i$ (i = 1, ..., m) совпадает с $\mathbf{A}_s$, если $\mathbf{a}_{is}$ = 1, а все остальные компоненты равны нулю. Соответствующий коэффициент c_s при x_s целевой функции записан в $\boldsymbol{C}_б$. Значения $\Delta_j = Z_j - c_j = \mathbf{A}_j\mathbf{C}_б - c_j$ (j = 0, ..., n) записаны в (m + 1)-й строке. В столбце $\mathbf{A}_0$ записаны свободные члены b_i системы (8) в порядке, соответствующем каждому базисному вектору. Компоненты вектора $\mathbf{A}_0$ и составляют опорный план ($b_i > 0$); в (m + 1)-й строке этого столбца получаем значение целевой функции $Z_0 = \mathbf{C}_б\mathbf{A}_0$ при этом плане.

Приведем алгоритм решения задачи симплекс-методом.

1. Находят опорный план $X_0 = (b_1, b_2, ..., b_m, 0, ..., 0)$.

2. Составляют симплекс-таблицу типа 1.

3. Выясняют, имеется ли хотя бы одно $\Delta_j < 0$. Если нет таких чисел, то найденный опорный план будет оптимальным. В противном случае устанавливают либо неразрешимость задачи (все компоненты вектора $\mathbf{A}_j$ неположительны), либо переходят к новому опорному плану.

4. В новый план включают вектор $\mathbf{A}_s$, для которого $\min\limits_j (\Delta_j \Theta_0)$,

$\Delta_j < 0$, а $\Theta_0 = b_k / \mathrm{a}_{ks} = \min\limits_i (b_i / \mathrm{a}_{is})$, $\mathrm{a}_{is} > 0$. Элемент a_{ks} является разрешающим, который и определяет базисный вектор $\mathbf{E}_k$, подлежащий замене вектором $\mathbf{A}_s$.

5. В новом базисе таблица пересчитывается так:

а) все элементы k-й строки, начиная со столбца $\mathbf{A}_0$, делятся на a_{ks};

б) все элементы столбца $\mathbf{A}_s$ заменяются нулями, кроме a_{ks} =1. Координаты остальных базисных векторов остаются неизменными;

в) любой элемент a^*_{ij} ($j \neq s$) определяется по формуле:

$$\mathrm{a}^*_{ij} = \frac{1}{\mathrm{a}_{ks}}(\mathrm{a}_{ks}\,\mathrm{a}_{ij} - \mathrm{a}_{kj}\,\mathrm{a}_{is}) = \mathrm{a}_{ij} - \frac{\mathrm{a}_{kj}\mathrm{a}_{is}}{\mathrm{a}_{ks}} \qquad (4)$$

– правило прямоугольника;

г) (m + 1)-я строка вычисляется аналогично:

$$\Delta^*_j = \frac{1}{\mathrm{a}_{ks}}(\mathrm{a}_{ks}\,\Delta_j - \mathrm{a}_{kj}\,\Delta_s) = \Delta_j - \frac{\mathrm{a}_{kj}}{\mathrm{a}_{ks}}\Delta_s .$$

6. Если все $\Delta^*_j \geq 0$, то полученный план оптимальный (составляется из компонент $\mathbf{A}_0$) и $Z_{\max} = \Delta^*_0$. В противном случае возвращаемся к п.4 алгоритма. После конечного числа итераций получим оптимальный план или докажем отсутствие такого плана.

Задача 1.1. *Решить симплекс-методом задачу: для изготовления различных изделий A, B, C предприятие использует три вида сырья. Нормы расхода сырья на производство одного изделия каждого вида, цена одного изделия A, B и C, а также общее количество сырья каждого вида, которое может быть использовано предприятием, приведены в табл. 2. Изделия A, B и C могут производиться в любых соотношениях (сбыт обеспечен), но производство ограничено выделенным предприятию сырьем каждого вида. Составить план производства изделий, при котором общая стоимость всей произведенной предприятием продукции является максимальной.*

Таблица 2

Вид сырья	Нормы затрат сырья на одно изделие, кг			Общее количество сырья, кг
	A	*B*	*C*	
1	18	15	12	360
2	6	4	8	192
3	5	3	3	180
Цена одного изделия, руб.	9	10	16	

Решение. В векторной форме будем иметь

$$x_1\mathbf{A}_1 + x_2\mathbf{A}_2 + x_3\mathbf{A}_3 + x_4\mathbf{A}_4 + x_5\mathbf{A}_5 + x_6\mathbf{A}_6 = \mathbf{A}_0,$$

где $\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix}18\\6\\5\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix}15\\4\\3\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix}12\\8\\3\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,

$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix}360\\192\\180\end{pmatrix}$.

Среди векторов $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_5$, $\mathbf{A}_6$ – единичные, их принимаем за базисные и, положив $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, получаем начальный опорный план:

$$X_0=(0, 0, 0 ,360, 192, 180).$$

Составляем симплексную таблицу для 1-й итерации и вычисляем $Z_0 = \mathbf{C}_б\mathbf{A}_0 = 0$, $\Delta_1 = Z_1 - c_1 = 0–9 = –9$, $\Delta_2 = Z_2 - c_2 = –10$, $\Delta_3 = Z_3 - c_3 = –16$ и для векторов базиса $\Delta_4 = \Delta_5 = \Delta_6 = 0$. Как видно, основные переменные x_1, x_2, x_3 равны нулю, т. е. производство не начато, прибыль $Z_0 = 0$, и потому план X_0 не является оптимальным. Находим в каждом из столбцов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$

$$\Theta_j = \min_i \frac{b_i}{a_{ij}} \quad (j = 1, 2, 3)$$

$$\Theta_1=\min_i\left(\frac{360}{18}, \frac{192}{6}, \frac{180}{5}\right)=20=\frac{b_1}{a_{11}} \quad \text{и} \quad \Theta_1\Delta_1=-20\cdot 9=-180,$$

$$\Theta_2=\min_i\left(\frac{360}{15}, \frac{192}{4}, \frac{180}{3}\right)=24=\frac{b_1}{a_{12}} \quad \text{и} \quad \Theta_2\Delta_2=-24\cdot 10=-240,$$

$$\Theta_3=\min_i\left(\frac{360}{12}, \frac{192}{8}, \frac{180}{3}\right)=24=\frac{b_2}{a_{23}} \quad \text{и} \quad \Theta_3\Delta_3=-24\cdot 16=-384.$$

Очевидно $\min_j (\Theta_j\Delta_j) = \Theta_3\Delta_3 = -384$.

Поэтому вектор $\mathbf{A}_3$ подлежит включению в базис вместо $\mathbf{A}_5$ ($\Theta_3 = b_2/a_{23}$, разрешающий элемент a_{23}).

Составляем новую таблицу в базисе векторов $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_6$. Для удобства поместим все итерации последовательно в одну табл. 3.

Приведем некоторые этапы заполнения таблицы 2-й итерации.

Все элементы строки $\mathbf{A}_5$, начиная со столбца $\mathbf{A}_0$ (вектор $\mathbf{A}_5$ подлежит исключению из базиса), делим на $a_{23} = 8$. Записываем в соответствующих столбцах базисные векторы $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_6$ ($\Delta_5 = \Delta_3 = \Delta_6 = 0$). Вычисляем элементы столбцов $\mathbf{A}_j$ по формулам (4). Например:

$$b_1^* = \frac{1}{8}(360\cdot 8 - 192\cdot 12) = 72, \; b_3^* = \frac{1}{8}(180\cdot 8 - 192\cdot 3) = 108,$$

$$Z_0^* = \frac{1}{8}(0\cdot 8 + 16\cdot 192) = 384 \text{ и т. д.}$$

Таблица 3

i	Базис	$C_б$	A_0	9	10	16	0	0	0
				$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{A}_3$	$\mathbf{A}_4$	$\mathbf{A}_5$	$\mathbf{A}_6$
1	$\mathbf{A}_4$	0	360	18	15	12	1	0	0
2	$\mathbf{A}_5$	0	192	6	4	**8**	0	1	0
3	$\mathbf{A}_6$	0	180	5	3	3	0	0	1
$m+1$			0	–9	–10	–16	0	0	0
1	$\mathbf{A}_4$	0	72	9	**9**	0	1	–3/2	0
2	$\mathbf{A}_3$	16	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3	$\mathbf{A}_6$	0	108	11/4	3/2	0	0	–3/8	1
$m+1$			384	3	–2	0	0	2	0
1	$\mathbf{A}_2$	10	8	1	1	0	1/9	–1/6	0
2	$\mathbf{A}_3$	16	20	1/4	0	1	–1/18	5/24	0
3	$\mathbf{A}_6$	0	96	5/4	0	0	–1/6	–1/8	1
$m+1$			400	5	0	0	2/9	5/3	0

В $(m + 1)$-й строке $\Delta_2 = –2<0$, следовательно план не является оптимальным. Вектор $\mathbf{A}_2$ подлежит включению в базис вместо $\mathbf{A}_4$, так как $\min\left(\frac{72}{9}, \frac{24}{1/2}, \frac{108}{3/2}\right) = \frac{72}{9} = 8$, a_{12}^* – разрешающий элемент.

После 3-й итерации получаем все $\Delta_j \geq 0$ и опорный план $X = (0, 8, 20, 0, 0, 96)$ будет оптимальным, а $Z_{max} = 400$.

Итак, оптимальный план включает изготовление восьми изделий типа B и двадцати изделий C. При этом полностью используется сырье первых двух видов и остается не использованным 96 кг сырья третьего вида, а прибыль от производимой продукции составит 400 руб.

2. Графический метод

<u>Задача 2.1</u>. *На велосипедном заводе выпускают гоночные и дорожные велосипеды. Производство устроено так, что вместо двух дорожных велосипедов завод может выпустить один гоночный, причем гоночный велосипед приносит в 1,5 раза больше прибыли. Завод может произвести 700 дорожных велосипедов в день, однако склад может принять не более 500 велосипедов в день. Сколько*

нужно выпускать в день гоночных и сколько дорожных велосипедов, для того чтобы завод получал максимальную прибыль?

Решение. Обозначим через x_1 число гоночных, а через x_2 – число дорожных велосипедов, выпускаемых заводом ежедневно. Поскольку x_1 гоночных велосипедов по производству эквивалентны $2x_1$ дорожных велосипедов, то общее число «условных» велосипедов равно $2x_1 + x_2$. Оно не может быть более 700. Получаем ограничение: $2x_1 + x_2 \le 700$.

Возможности склада обусловливают второе ограничение: $x_1 + x_2 \le 500$.

Очевидно, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Прибыль пропорциональна величине $z = 1,5x_1 + x_2$.

Получаем задачу ЛП стандартной формы:

$$z = 1,5x_1 + x_2 (\to \max)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 700, \\ x_1 + x_2 \le 500, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решаем ее графически.

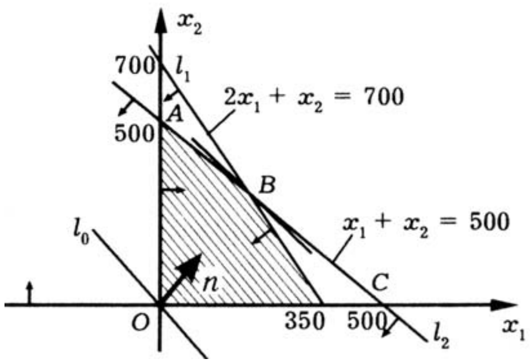


Рис. 1

Нормальный вектор целевой функции $\boldsymbol{n} = (1,5;\ 1)$ изображен на чертеже в увеличенном масштабе. Нам важна не его длина, а его направление. Точкой максимума будет точка B – точка пересечения прямых l_1 и l_2. Ее координаты определяем из системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 700, \\ x_1 + x_2 = 500. \end{cases}$$

$$x_1 = 200,\ x_2 = 300.$$

Итак, завод должен выпускать 200 гоночных и 300 дорожных велосипедов в день. При этом прибыль завода будет максимальна.

Решая задачу линейного программирования графическим способом, мы можем встретиться со следующими случаями:

На рис. 2, *а* изображен случай, когда целевая функция имеет единственную точку максимума – точку *A* и единственную точку минимума – точку *O*. В случае «*б*» максимума у целевой функции нет, так как она может неограниченно возрастать. Точек минимума в случае «*б*» бесконечно много. Все точки отрезка *CK* будут точками минимума. В случае «*в*» целевая функция имеет единственную точку максимума и не имеет минимума (не ограничена снизу). В случае «*г*» область допустимых планов пустая. Решений нет.

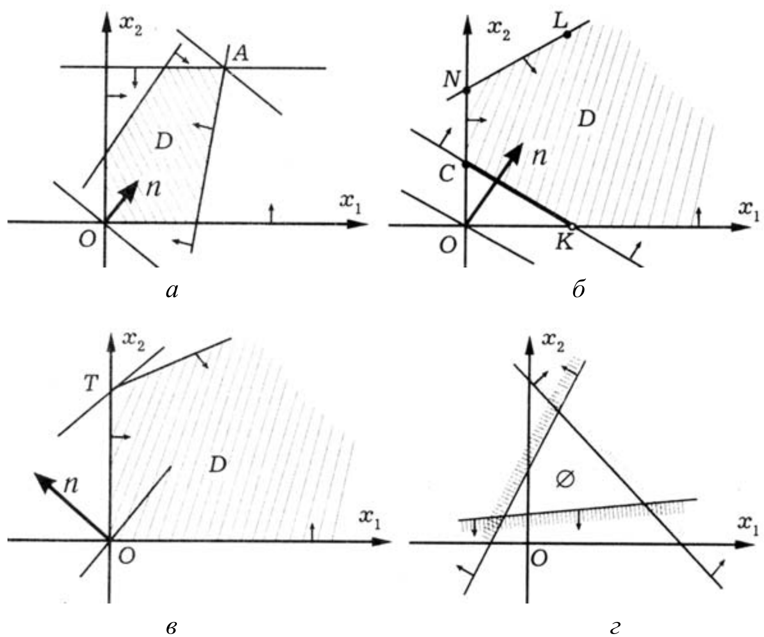


Рис. 2

3. Транспортная задача

3.1. Методы определения опорных планов

Транспортная задача в общем виде состоит в определении оптимального плана перевозок некоторого однородного груза из m пунктов отправления $A_1, A_2, ..., A_m$ в n пунктов назначения $B_1, B_2, ..., B_n$. В качестве критерия оптимальности можно взять минимальную стоимость перевозок всего груза, либо минимальное время его доставки.

Рассмотрим задачу с первым критерием, обозначив через c_{ij} тарифы перевозок единицы груза из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения, через a_i – запасы груза в пункте A_i, через b_j – потребности в грузе пункта B_j, x_{ij} – количество единиц груза, перевозимого из i-го пункта в j-й пункт.

Тогда математическая постановка задачи состоит в определении минимума целевой функции:

$$Z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\ x_{ij}\ , \tag{5}$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\ = a_i\ \ (j = 1, ..., n), \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\ = b_j\ \ (i = 1, .., m), \tag{7}$$

$$x_{ij} \geq 0\ (i = 1, .., m;\ \ j = 1, ... n). \tag{8}$$

Всякое неотрицательное решение систем уравнений (6)–(7), определяемое матрицей $X = (x_{ij})$, называют **опорным планом** ТЗ, а план $X^* = \left(x_{ij}^*\right)$, при котором функция Z (5) принимает минимальное значение – называется **оптимальным планом** ТЗ.

Все данные, а затем и опорный план, удобно занести в распределительную таблицу.

Если общее количество груза в пунктах отправления и общая потребность в нем в пунктах назначения совпадают, т. е.

$$\sum_{i=1}^{m}a_i\ = \sum_{j=1}^{n}b_j\ , \tag{9}$$

то модель ТЗ называется **закрытой**. В противном случае модель ТЗ называется **открытой**. Для разрешимости задачи равенство (9) является необходимым и достаточным условием.

Если опорный план содержит ровно $m + n – 1$ положительных компонент, то он называется **невырожденным**, а если меньше – **вырожденным**.

Нахождение опорных планов ТЗ можно осуществить одним из трех методов: северо-западного угла, минимальной стоимости и аппроксимации Фогеля.

Метод **северо-западного угла** состоит в следующем. Заполняют клетку A_1B_1 (левый верхний угол), поставив в него $\min(a_1,\ b_1)$ (табл. 4). Если $x_{11} = a_1$, то 1-я строка выпадает из рассмотрения и заполняют клетку A_2B_1, чтобы удовлетворить потребности пункта B_1, и затем переходят к заполнению клетки A_2B_2. Перемещаясь так по диагонали, доходят до последней клетки A_mB_n. При этом все грузы в A_i будут исчерпаны, и потребности пунктов B_j удовлетворены.

Если заполненных клеток окажется ровно $m + n – 1$, то получен опорный план. Если же их меньше – ставят в недостающее число клеток число «0» .

<u>Задача 3.1.1.</u> *Методом северо-западного угла составить опорный план перевозок груза из трех пунктов отправления с запасами 30, 48, 24 т в четыре пункта назначения с потребностями 18, 27, 42, 15 т. Тарифы перевозок c_{ij} (в ден. ед.) из A_i (i=1, 2, 3) в B_j (j = = 1, ..., 4) приведены в матрице*

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 7 & 11 & 5 \\ 11 & 8 & 13 & 7 \\ 6 & 10 & 12 & 9 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение.</u> Составим распределительную таблицу (табл. 4), в которой последовательно, начиная с верхнего левого угла (клетка A_1B_1) и двигаясь по диагонали таблицы, заполним клетки до A_3B_4.

Получили 6 заполненных клеток, данный план является опорным ($n + m – 1 = 4 + 3 – 1 = 6$). Вычислим общую сумму затрат на перевозки груза по этому плану: $Z_1 = 18·13 + 12·7 + 15·8 + 33·13 + + 9·12 + 15·9 = 1110$.

План не учитывал тарифов перевозок и, наверное, не будет оптимальным.

Таблица 4

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	18	12			30
A_2		15	33		48
A_3			9	15	24
Потребности	18	27	42	15	102

Метод **минимальной стоимости** предполагает заполнение на каждом шаге клеток с минимальным тарифом, что даст, очевидно, меньшие суммарные затраты на перевозку груза.

Задача 3.1.2. *Найти опорный план по методу минимальной стоимости для задачи 3.1.1.*

Решение. Первой заполняется клетка A_1B_4 (min c_{ij} = 5), затем A_3B_1(c_{31} = 6) и т. д. План содержит шесть компонент x_{ij} > 0 и является опорным. При этом $Z_2 = 924 < Z_1$. Вопрос об оптимальности полученного плана остается нерешенным.

Таблица 5

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	Запасы
A_1	^{13}	15 − ^{7}	+ ^{11}	15 ^{5}	30
A_2	^{11}	12 + ^{8}	36 − ^{13}	^{7}	48
A_3	18 ^{6}	^{10}	6 ^{12}	^{9}	24
Потребности	18	27	42	15	102

Метод аппроксимации Фогеля состоит в следующем:

1) на каждой итерации находят разности между двумя наименьшими тарифами во всех строках и столбцах, записывая их в дополнительные столбец и строку таблицы;

2) находят max Δc_{ij} и заполняют клетку с минимальной стоимостью в строке (столбце), которой соответствует данная разность.

Процесс продолжается до тех пор, пока все грузы не будут развезены по потребителям. Данный метод в ряде задач приводит к оптимальному плану.

Задача 3.1.3. Решить методом Фогеля задачу 3.1.1.

Решение. На первом шаге заполняем клетку A_3B_1 (max Δc = 5 и min c_{ij} = 6), исключаем 1-й столбец, отметив в дополнительной строке буквой «B» факт выполнения заказа пункта B_1. Находим новые разности минимальных тарифов по строкам (в столбцах они не изменились) и max Δc = 2 в 1-й строке и в 4-м столбце. Заполняем клетку A_1B_4 и исключаем 4-й столбец и т. д. В конце остается последовательно заполнить клетки 3-го столбца остатками запасов в A_1, A_3, A_2. Составленный опорный план дает значение $Z_3 = 909 < Z_2$.

Таблица 6

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	Δc
A_1	^{13}	^{7}	15 ^{11}	15 ^{5}	30	2, 2, 4, B
A_2	^{11}	27 ^{8}	21 ^{13}	^{7}	48	1, 1, 5, B
A_3	18 ^{6}	^{10}	6 ^{12}	^{9}	24	3, 1, 2, B
b_j	18	27	42	15	102	
Δc	5, B	1, 2, B	1, 1, 1, B	2, B		

3.2. Нахождение оптимального плана транспортной задачи

Пусть одним из рассмотренных методов найден опорный план, содержащий $n + m - 1$ занятых клеток (в некоторых из них могут стоять нули). Поставим в соответствие каждому пункту отправления A_i некоторое число u_i ($i = 1, ..., m$) и каждому пункту назначения B_j – число v_j ($j = 1, ..., n$). Эти числа назовем **потенциалами**, соответственно, пунктов отправления и пунктов назначения.

Вопрос об оптимальности опорного плана решает следующая теорема:

Теорема 4. Если для некоторого плана $X^* = (x_{ij})$, ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, ..., n$) транспортной задачи выполняются условия:

1). $u_i + v_j = c_{ij}$ для $x_{ij} > 0$ (для занятых клеток), (10)

2). $u_i + v_j \le c_{ij}$ для $x_{ij} = 0$ (для свободных клеток), (11)

то план X^* является **оптимальным.**

Отметим, что система (10) ($n + m - 1$) уравнений содержит ($m + n$) неизвестных u_i, v_j, и потому, приравнивая одно из них, например u_1, нулю, однозначно определим остальные неизвестные.

Для «улучшения» опорного плана (при невыполнении условия (11)) выбирают свободную клетку с max ($u_i + v_j - c_{ij}$) и строят для нее цикл пересчета (сдвига).

Циклом называют замкнутую ломаную линию, все вершины которой лежат в занятых клетках, кроме одной, расположенной в свободной клетке, подлежащей заполнению, а звенья параллельны строкам и столбцам, причем в каждой строке (столбце) лежит не более 2-х вершин. Всем вершинам поочередно приписывают знаки «+» и «–», начиная со свободной клетки.

Далее, в свободную клетку помещают груз величиной λ, равной минимальному значению из всех чисел в отрицательных клетках цикла. Во все положительные клетки прибавляется λ, из отрицательных – вычитается λ (сдвиг по циклу). Нетрудно подсчитать, насколько изменится (уменьшится) стоимость перевозок при новом плане: $\Delta Z = \lambda\left[\sum\limits_{+} c_{ij} - \sum\limits_{-} c_{ij}\right]$, где $\sum\limits_{+} c_{ij}$ – сумма тарифов в положительных вершинах, $\sum\limits_{-} c_{ij}$ – в отрицательных вершинах цикла.

Новый опорный план снова проверяют на оптимальность с помощью системы уравнений потенциалов.

Задача 3.2.1. *Проверить оптимальность опорного плана транспортной задачи, полученного в табл. 5 (методом минимальной стоимости).*

Решение. Составляем систему уравнений потенциалов:

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 7, \\ u_1 + v_4 = 5, \\ u_2 + v_2 = 8, \\ u_2 + v_3 = 13, \\ u_3 + v_1 = 6, \\ u_3 + v_3 = 12. \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Полагая} & u_1 = 0, & \text{найдем:} & v_1 = 6 \\ \text{и} & u_2 = 1, & & v_2 = 7, \\ & u_3 = 0, & & v_3 = 12, \\ & & & v_4 = 5. \end{matrix}$$

Проверив свободные клетки, находим, что лишь в клетке A_1B_3 будет $u_1 + v_3 = 12 > 11 = c_{13}$.

Для заполнения этой клетки строим цикл пересчета (табл. 5). Сдвиг по циклу на 15 ед. (min (15,36) = 15) дает новый опорный план:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 & 15 \\ 0 & 27 & 21 & 0 \\ 18 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$

при этом будет $\Delta Z_2 = 15[(11+8)–(7+13)] = –15$ и $Z_3 = Z_2 + \Delta Z_2 = 909$.

Новый опорный план вновь проверим на оптимальность, составим для него систему потенциалов систему потенциалов, найдем их, убедимся, что для всех свободных клеток выполняется условие (11). Следовательно, план

$$X_3 = X_{\text{опт.}} \quad \text{И} \quad Z_{\min} = 909.$$

Глава 3

НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

В практических приложениях встречается большое число задач, в которых либо целевая функция, либо система ограничений (либо та и другая) содержит выражения, нелинейные относительно переменных. Такие задачи являются более общими и называются задачами нелинейного программирования. Так как общие методы решения этих? задач выходят за рамки данного пособия, в настоящей главе излагаются только элементарные понятия и соответствующие им методы решения.

1. Общая задача нелинейного программирования

Общая задача нелинейного программирования может быть записана следующим образом: *найти наибольшее (наименьшее) значение* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ *при условии*

$$\begin{cases} g_1(x_1,x_2,...,x_n) \ge b_1, \\ g_2(x_1,x_2,...,x_n) \ge b_2, \\ .... \\ g_m(x_1,x_2,...,x_n) \ge b_m, \\ x_j \ge 0, (i=1,2,...,n) \end{cases}$$

Очевидно, что если f и g_i – линейные функции, то получаем модель задачи линейного программирования.

Процесс составления математической модели задачи нелинейного программирования принципиально не отличается от составления модели задачи линейного программирования. Убедимся в этом на примере.

Задача 1.1. *На* ***m*** *предприятиях выпускается некоторый продукт. Себестоимость единицы этого продукта на каждом из указанных предприятий есть* $c_i = a_i + d_i x_i$ *(i = 1, 2, ..., m), где* a_i *– доля себестоимости, не зависящая от объема выпуска продукции,* x_i *– план выпуска продукта на i-м предприятии.*

Предприятия должны обеспечить ***n*** *потребителей с потребностями* b_j *(j = 1, 2, ..., n), стоимость перевозки из i-го предприятия к j-му потребителю равна* c_{ij}*.*

Требуется определить такой план распределения выпуска продукта предприятиями и план перевозок его потребителям, чтобы суммарная себестоимость выпуска и стоимость перевозки была минимальной.

Решение. Составим математическую модель задачи. Пусть x_{ij} – план перевозок от i-го предприятия к j-му потребителю.

Для удобства запишем данные и искомые величины задачи в виде таблицы:

Таблица 7

Предприятия \ Потребители	1	2	. . .	n	План выпуска изделий
1	x_{11}	x_{12}	. . .	x_{1n}	x_1
2	x_{21}	x_{22}	. . .	x_{2n}	x_2
. . .			. . .		
m	x_{m1}	x_{m2}	. . .	x_{mn}	x_m
Потребности заказчиков	b_1	b_2	. . .	b_n	

Система ограничения задачи:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} = x_1 \\ x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} = x_2 \\ .... \\ x_{m1} + x_{m2} + ... + x_{mn} = x_m \\ x_{11} + x_{21} + ... + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + ... + x_{m2} = b_2 \\ .... \\ x_{1n} + x_{1n} + ... + x_{mn} = b_n \\ b_1 + b_2 + ... + b_n \le x_1 + x_2 + ... + x_m \\ x_i \ge 0 \quad (i = 1,2,...,m) \\ x_{ij} \ge 0, \quad \begin{pmatrix} i = 1,2,...,m \\ j = 1,2,...,n \end{pmatrix}. \end{cases} \qquad (1)$$

Целевая функция f запишется так:

$$f = (c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_mx_m) + (c_{11}x_{11} + \ldots + c_{1n} + x_{1n}) + \ldots$$

$$\ldots + (c_{m1}x_{m1} \ldots + c_{mn}x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} c_ix_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}.$$

Вместо c_i подставим значения, данные в условии задачи:

$$f = \sum_{i=1}^{m} a_ix_i + \sum_{i=1}^{m} b_ix_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij}. \qquad (2)$$

Надо найти минимальное значение функции (2) на множестве допустимых решений (1).

Из составленной математической модели задачи видно, что целевая, функция является многочленом второй степени, а система ограничений линейная.

Задача 1.2. *На производство некоторого продукта расходуется два вида ресурсов. Определите оптимальное распределение величин затрачиваемых ресурсов, если цена ресурса первого вида 3 рубля, второго – 4 рубля, а всего выделено на производство 12 рублей. Известно, что из количества x_1 первого ресурса и x_2 второго ресурса можно получить $2x_1^{0,5} \cdot x_2^{0,5}$ единиц продукта.*

Решение. Вообще, функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, выражающая зависимость между количеством вырабатываемого продукта и величиной расходуемых на него ресурсов, называется производственной функцией. Простейшая производственная функция Кола-Дугласа для продукта, получаемого из двух различных ресурсов имеет вид:

$$y = cx_1^{\alpha} \cdot x_2^{1-\alpha},$$

где c и α – постоянные величины, причем $0 < \alpha < 1$.

Функция y выведена, в предположении, что существует только два ресурса: x_1 – труд, x_2 – капитал, где α указывает на соответствующую долю использования каждого из этих ресурсов; ***c*** – некоторый постоянный коэффициент; y – это. количество совокупного продукта, которое при определенных технологических условиях может быть получено из данных продуктов. Функция y простейшая производственная функция, так как рассматривает зависимость между двумя ресурсами. и одним продуктом. Эта функция является чрезвычайно важной в политэкономических исследованиях.

Математическая модель задачи. Пусть x_i – количество ресурсов вида I, x_2 – количество ресурсов вида II. Система ограничений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Целевая функция: $$y = 2\sqrt{x_1x_2}. \qquad (4)$$

Требуется найти наибольшее значение функции (4) на множестве решений системы (2).

В этой задаче система ограничений линейная, а целевая функция не является линейной.

Рассмотренные задачи 1.1 и 1.2 относятся к задачам нелинейного программирования. Остановимся на некоторых особенностях решения таких задач. Для решения задач нелинейного программирования существенно важно знать: 1) выпукло или не выпукло множество допустимых решений задачи; 2) является ли целевая функция выпуклой или вогнутой или она не относится ни к тому, ни к другому классу.

Напомним необходимые определения. Говорят, что множество *выпукло,* если оно вместе с любыми своими точками A и B содержит и все точки отрезка AB. На рис. 3 представлены примеры выпуклых множеств точек плоскости. Примерами выпуклых множеств в пространстве могут служить сфера, пирамида, призма и т. д.

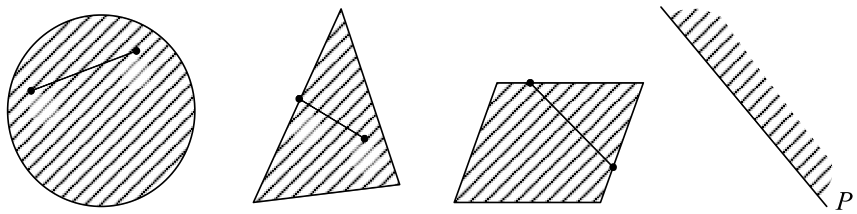


Рис. 3

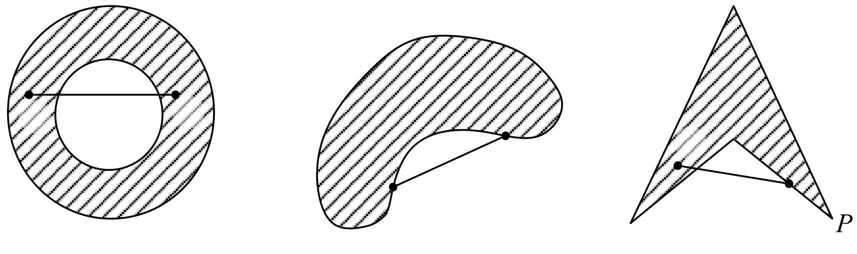


Рис. 4

На рис. 4 изображены примеры невыпуклых множеств. В невыпуклом множестве можно указать хотя бы две точки, такие, что не все точки отрезка *AB* принадлежат рассматриваемому множеству. Как пример невыпуклого множества в пространстве можно указать тор.

Функцию $y = f(x)$ одной переменной будем называть *выпуклой*, если отрезок, соединяющий две любые точки ее графика, принадлежит графику или расположен выше его (рис. 5). *Функция вогнута,* если отрезок, соединяющий две любые точки графика, принадлежит ему или расположен ниже его (рис. 6).

Аналогично можно сформулировать определения понятий вогнутой и выпуклой функций нескольких переменных. Мы говорим, что гиперповерхность $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ выпуклая, если отрезок, соединяющий две ее любые точки, лежит на поверхности или выше ее. Гиперповерхность $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ вогнута, если отрезок, соединяющий две ее любые точки, лежит на поверхности или ниже ее.

Вспомним еще ряд определений, которые нам потребуются в дальнейшем. Пусть дана функция $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, определенная на замкнутом множестве Φ. Элементами множества Φ являются точки $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Поэтому функцию $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ можно записать так: $z = f(x)$.

Говорят, что функция $z = f(x)$, определенная на некотором замкнутом множестве *X,* достигает в точке $x_0 \in X$ *локального максимума (локального минимума),* если найдется такое число $\xi > 0$, что для всех *x,* удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \xi$, выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$.

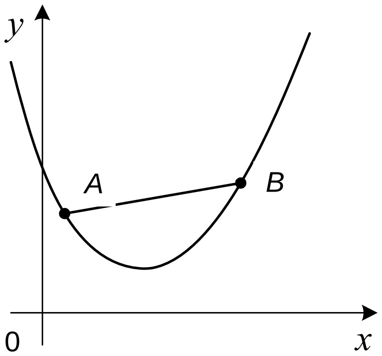


Рис. 5

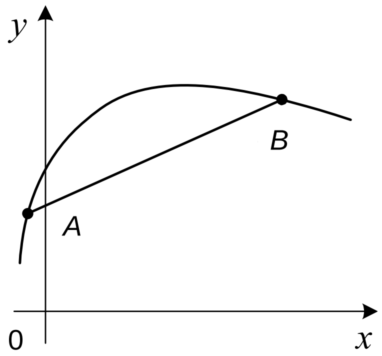


Рис. 6

Точка x_0, в которой функция достигает локального максимума (минимума), называется *точкой локального максимума (минимума).* Рассмотрим пример. На рис. 7 изображен график некоторой функции одной переменной, определенной на [1; 10] (заметим, что эта функция не является ни выпуклой, ни вогнутой). Функция имеет на [1; 10] три точки локального минимума ($x_1 = 3$, $x_2 = 6$, $x_3 = 9$) и две точки локального максимума ($x_4 = 5$, $x_5 = 8$).

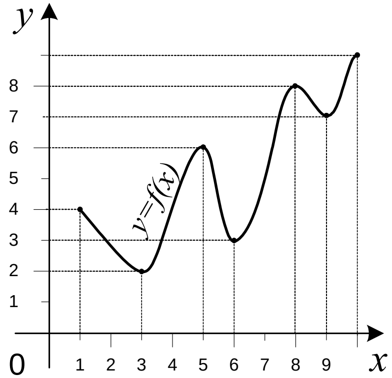


Рис. 7

Пусть функция $z = f(x)$ определена на замкнутом множестве *X*. Если $x_0 \in X$ и $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$ для любой точки $x \in X$, то говорят, что в точке x_0 функция достигает абсолютного максимума (абсолютного минимума). Вместо термина «абсолютный» часто используют термин «глобальный». Иными словами, глобальный максимум функции есть ее наибольшее значение в области определения, а глобальный минимум – наименьшее значение. Глобальный максимум и глобальный минимум называют глобальными экстремумами функции. На рис. 7 представлен график функции, глобальный минимум которой равен 2 и совпадает с наименьшим из локальных минимумов. Глобальный же максимум, равный 9, достигается функцией в точке $x_6 = 10$ и не совпадает с наибольшим из локальных максимумов.

2. Геометрическая интерпретация. Графический метод решения

Рассмотрим задачу нелинейного программирования, содержащую две переменные:

$$f(x_1, x_2) \to \max(\min) \qquad (5)$$

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2) \le b_i, i = \overline{1, m_1}; \\ g_i(x_1, x_2) \le b_i, i = \overline{m_1 + 1, m_2}; \\ g_i(x_1, x_2) = b_i, i = \overline{m_2 + 1, m} \end{cases} \qquad (6)$$

Система ограничений (6) определяет в n-мерном пространстве некоторую область, которая является областью допустимых решений задачи.

Решить задачу нелинейного программирования графически – это значит найти точку области допустимых решений (6), через которую проходит линия $f(x_1, x_2) = C$ наивысшего (наинизшего) уровня.

Указанная точка может находиться как на границе, так и внутри области допустимых решений (6), в отличие от задач линейного программирования.

Так же, как и для линейных задач, задачи нелинейного программирования удобно решать графически, когда функция и ограничения содержат две переменные.

Алгоритм решения ЗНП графическим методом:

Шаг 1. На плоскости x_1Ox_2 строят область допустимых решений, определенную ограничениями (6). Если она пуста, т.е. ограничения несовместны, то задача (5) не имеет решения. В противном случае переходят к шагу 2.

Шаг 2. Строят линию уровня функции $f(x_x, x_2) = C$, где C – некоторая константа. Переход к шагу 3.

Шаг 3. Определяют направление возрастания (при максимизации), убывания (при минимизации) функции f.

Шаг 4. Находят точку области допустимых решений, через которую проходит линия уровня $f(x_1, x_2) = C$ с наибольшим (при максимизации), наименьшим (при минимизации) значением C или устанавливают неограниченность функции на области допустимых решений.

Шаг 5. Определяют значения x_1, x_2 для точки, найденной на шаге 4, и величину функции $f(x_1, x_2)$ в этой точке.

2.1. Задачи с линейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений

Задача 2.1.1. *На множестве решений системы неравенств*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 36, \\ x \ge 0, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

найти глобальные экстремумы функции $z = 2x + y$.

Решение. На рис. 8 множество допустимых решений заштриховано. Это множество выпукло. Линиями уровня функции $z = 2x + y$ являются параллельные прямые с угловым коэффициентом $K = -2$. Очевидно, что глобальный минимум достигается в точке O (0; 0), а глобальный максимум – в точке A касания прямой уровня и окружности $x^2 + y^2 = 36$. Найдем координаты точки A. Для этого достаточно составить уравнение прямой и решить систему, состоящую из уравнения прямой и уравнения окружности. Заметим, что прямая перпендикулярна линии уровня, а, следовательно, ее угловой коэффициент K_l равен ½ ($K_1K = -1$). Прямая l проходит через точку O и имеет угловой коэффициент $K_1 = \frac{1}{2}$. Поэтому ее уравнение таково: $y = \frac{1}{2}x$. Решая систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ y = \frac{1}{2}x, \end{cases} \quad \text{получаем: } x = \frac{12 \cdot \sqrt{5}}{5}, \ y = \frac{6 \cdot \sqrt{5}}{5}.$$

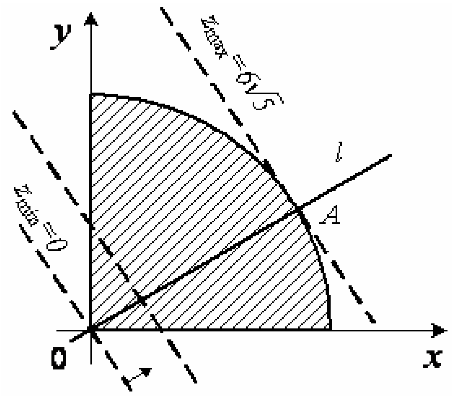


Рис. 8

Итак, глобальный минимум, равный 0, достигается в точке $O(0;0)$, а глобальный максимум, равный $6\sqrt{5}$, – в точке $A(2{,}4 \cdot \sqrt{5}; 1{,}2\sqrt{5})$. Локальных экстремумов, отличных от глобальных, функция не достигает.

Задача 2.1.2. *Найти глобальные экстремумы функции $z = x - y - 5$ на множестве решений системы неравенств*

$$\begin{cases} (x-1)y \le 1 \\ x + y \ge 3{,}5 \\ 0 \le x \le 5 \\ 0 \le y \le 5. \end{cases}$$

Решение. Множество допустимых решений состоит их двух отдельных частей, каждая из которых выпукла (рис. 9). Вычислим значение целевой функции $z = x - y - 5$ в точках A, B, C, D, K, N, M, L, предварительно найдя их координаты:

$A(5;0)$, $B(5;\frac{1}{4})$, $C(3;\frac{1}{2})$, $D(3{,}5;0)$, $K(1\frac{1}{2};2)$, $L(0;3{,}5)$, $N(1\frac{1}{5};5)$, $M(0;5)$.

$$Z_B = -\frac{1}{4},\ \ Z_C = -2{,}5,\ \ Z_D = -1{,}5,\ \ Z_K = -5{,}5,\ \ Z_L = -8{,}5,\ \ Z_N = -8{,}8,$$

$$Z_A = 0,\quad Z_M = -10.$$

Итак, глобальный максимум достигается в точке (5;0) и равен 0, а глобальный минимум – в точке (0;5) и равен –10.

Нетрудно видеть, что в точке C функция достигает локального минимума, равного –2,5, который отличен от глобального (значение целевой функции в точке C меньше, чем значение ее в соседних вершинах B и D). Аналогично, в точке K достигается локальный максимум, отличный от глобального.

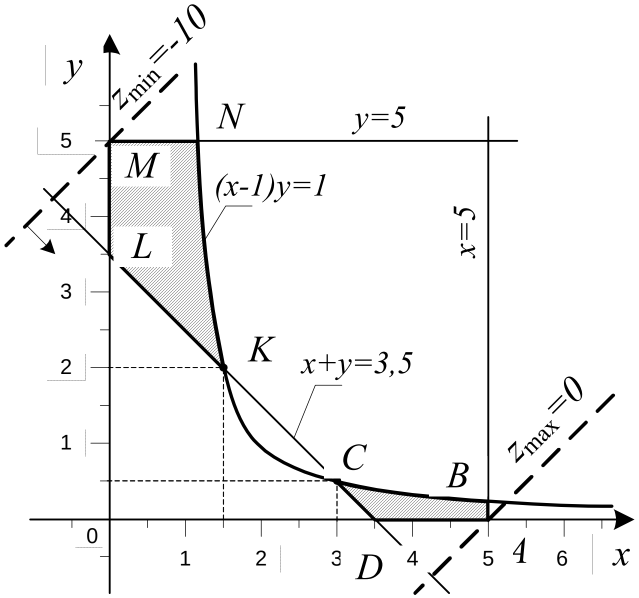


Рис. 9

Задача 2.1.3. *Дана целевая функция* $z = x_1 + x_2\,(\max;\ \min)$ *и нелинейная система ограничений*

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 24, \\ (x_1 - 2)(x_2 + 1) \ge 4, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

найти минимум и максимум функции.

Решение. Изобразим на плоскости $X_1 0 X_2$ $(X0Y)$ множество решений системы ограничений. Построим линию, соответствующую уравнению $(x_1 - 2)(x_2 + 1) = 4$. Запишем это уравнение в виде:

$$x_2 = -1 + \frac{4}{x_1 - 2}.$$

Графиком этой функции является гипербола, уравнения ее асимптот: $x_1 = 2;\ x_2 = -1$.

Второму неравенству системы удовлетворяют все точки, которые расположены не ниже построенной ветви гиперболы. Первому неравенству системы ограничений $(4x_1 + 3x_2 \le 24)$ удовлетворяют все точки, которые расположены под прямой $4x_1 + 3x_2 \le 24$ или на этой прямой. Таким образом, множеством решений системы ограничений является множество точек, заштрихованное на рис. 10.

Линиями уровня является прямые $x_1 + x_2 = z_0 (z_0 - \text{const})$. Нормалью к этим прямым является вектор $\mathbf{n} = (1;\ 1)$.

Если передвигать линии уровня в направлении нормали, то значение z_0 будет увеличиваться, а если передвигать эти линии в противоположном направлении, то z_0 будет уменьшаться.

1) наибольшее значение функции цели будет достигаться в точке A, являющейся точкой пересечения прямой и гиперболы. Найдем координаты точки A:

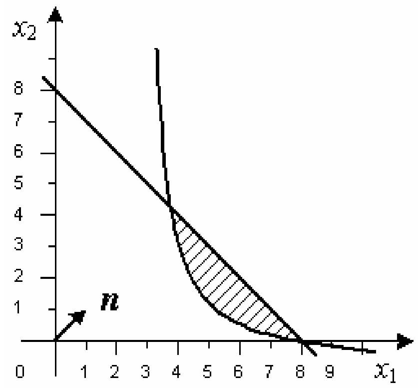


Рис. 10

$$\begin{cases}(x_1-2)(x_2+1)=4,\\ 4x_1+3x_2=24.\end{cases}$$

Выразим из первого уравнения x_2 и подставим его во второе уравнение:

$$\begin{cases}x_2=\dfrac{6-x_1}{x_1-2},\\ 4x_1+3\dfrac{6-x_1}{x_1-2}=24.\end{cases}$$

Отсюда, получаем систему:

$$\begin{cases}x_2=\dfrac{6-x_1}{x_1-2}\\ 4x_1^2-35x_1+66=0.\end{cases}$$

Решением этой системы являются две пары чисел: $\left(x_1=\dfrac{11}{4};\ x_2=\dfrac{13}{3}\right)$ и $\left(x_1=6;\ x_2=0\right)$. Координаты точки $A\left(\dfrac{11}{4};\dfrac{13}{3}\right)$, при этом $z_{\max}=\dfrac{11}{4}+\dfrac{13}{3}=\dfrac{85}{12}$.

2) минимальное значение функции цели будет достигаться в точке B, в которой линии уровня $x_1+x_2=z_0$ совпадает с касательной к гиперболе.

Запишем линию уровня в виде: $x_2=-x_1+z_0$, отсюда следует, что угловой коэффициент касательной к гиперболе в точке B равен –1. Значит, производная в точке касания равна –1:

$$x_2'=\left(\frac{6-x_1}{x_1-1}\right)=-1.$$

Отсюда, имеем:

$$\frac{4}{(x_1-2)^2}=1;\ (x_1-2)^2=4;$$

$$x_1=4 \quad \text{или} \quad x_1=0.$$

Значение $x_1=0$ принадлежит другой ветви параболы и, поэтому, является посторонним решением.

Координаты точки $B(4;\ 1)$, при этом $z_{\min}=4+1=5$.

<u>Задача 2.1.4</u>. *Дана линейная целевая функция* $z=x_1+3x_2$ *и нелинейная система ограничений*

$$\begin{cases}(x_1-5)^2+(x_2-3)^2\ge 9,\\ (x_1-5)^2+(x_2-3)^2\le 36,\\ x_1+x_2\ge 8\\ x_1\ge 0; x_2\ge 0.\end{cases}$$

Найти глобальные экстремумы.

<u>Решение.</u> Изобразим на плоскости $X_1 0 X_2$ $(X0Y)$ область допустимых решений системы ограничения задачи. Множеством решений первых двух неравенств:

$$(x_1-5)^2+(x_2-3)^2\ge 9,$$
$$(x_1-5)^2+(x_2-3)^2\le 36.$$

является область (кольцо), заключенная между двумя окружностями и с общими центром в точке $C(5;\ 3)$ и радиусом $R_1=3$ и $R_2=6$. Множеством решений неравенства $x_1+x_2\ge 8$ является плоскость, расположенная над прямой $x_1+x_2=8$. Область допустимых решений системы ограничений на рис. 11 выделена штриховкой. Линии уровня функции цели – прямые $x_1+3x_2=z_0(z_0-\text{const})$. Нормаль к этим прямым – есть вектор $\mathbf{n}$ = (1; 3). Перемещаем линию уровня в направлении нормали до тех пор, пока она не станет касательной к верхней окружности.

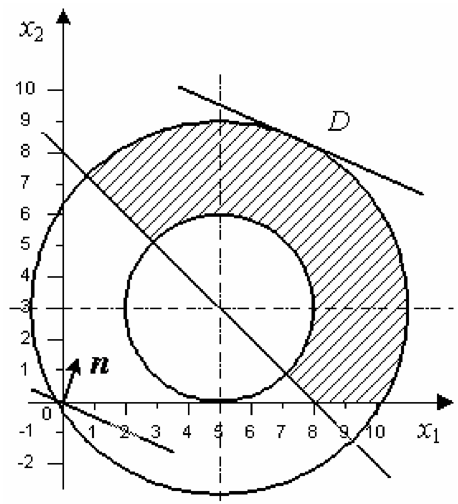


Рис. 11

Обозначим точку касания буквой D; в этой точке значение Z будет максимальным. Угловой коэффициент касательной K равен коэффициенту прямой $x_1 + 3x_2 = z_0$ значит, $k = -\frac{1}{3}$.

С другой стороны, угловой коэффициент касательной для окружности $(x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 = 36$ найдем, дифференцируя это уравнение по переменной x_1: $2(x_1 - 5) + 2(x_2 - 3) \cdot x_2' = 0$.

Отсюда, $x_2' = \frac{x_1 - 5}{x_2 - 3}$.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} -\frac{x_1 - 5}{x_2 - 3} = -\frac{1}{3}, \\ (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2 = 36; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3x_1 - 12, \\ (x_1 - 5)^2 + (3x_1 - 15)^2 = 36; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = 3x_1 - 12, \\ 5x_1^2 - 50x_1 + 107 = 0. \end{cases}$$

Одно решение этой системы $x_1 = \frac{25 - 3\sqrt{10}}{5}$; $x_2 = \frac{15 - 9\sqrt{10}}{5}$ является посторонним, потому, что x_2 не удовлетворяет условию неотрицательности.

Другое решение $x_1 = \frac{25 + 3\sqrt{10}}{5} \approx 6{,}9$; $x_2 = \frac{15 + 9\sqrt{10}}{5} \approx 8{,}7$ дает координаты точки D.

При этом $z_{\max} = x_1 + 3x_2 = \frac{70 + 30\sqrt{10}}{5} = 14 + 6\sqrt{10}$.

Для определения минимального значения функции цели будем перемещать линию уровня в направлении, противоположном вектору нормали **n**, до тех пор, пока у нее не окажется одна общая точка с областью допустимых решений. Такой точкой является точка $E = (8; 0)$. Значит, $Z_{\min} = 8$, если $x_1 = 8$; $x_2 = 0$.

2.2. Задачи с линейной системой ограничений, но линейной целевой функцией

Множество допустимых решений таких задач всегда выпукло, так как линейные ограничения образуют выпуклый многоугольник в n-мерном пространстве. Однако в отличие от линейного программирования при нелинейной целевой функции оптимальное решение не обязательно находится в вершине этого многогранника.

<u>Задача 2.2.1.</u> *Определить наибольшее значение функции* $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *при условии* $\begin{cases} 3x + 4y - 24 \le 0 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0. \end{cases}$

<u>Решение</u>. Множество допустимых решений заштриховано на рис. 12. Если целевой функции придавать фиксированные значения c,

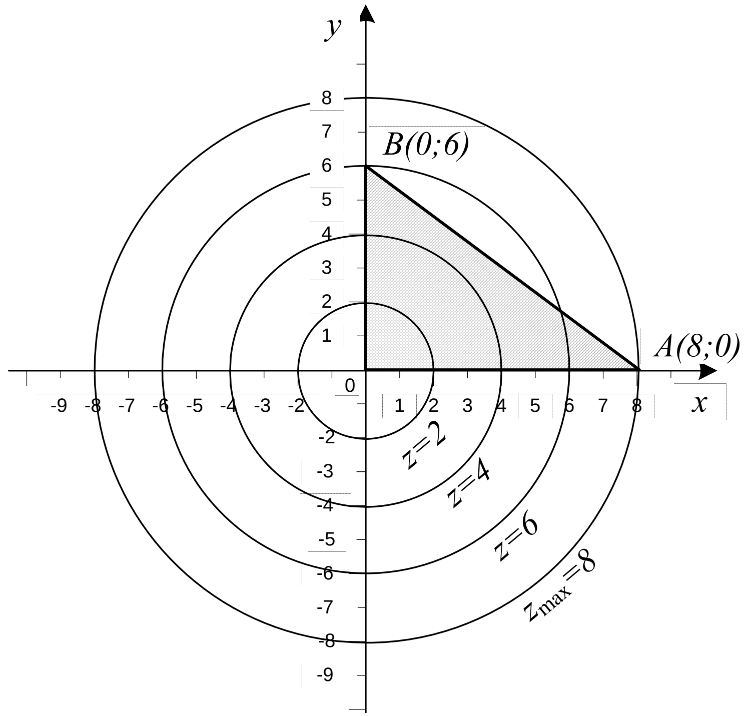


Рис. 12

то будем получать окружности с центром в начале координат и радиусом c^2. Пусть c = 1, 2, … Начертим ряд окружностей (линии уровня целевой функции). Из рис. 12 видно, что функция $z=\sqrt{x^2+y^2}$ достигает наибольшего значения, равного 8, в точке A(8; 0): $z_{\max}=8$.

Задача 2.2.2. *Найти глобальные экстремумы функции* $z=(x-2)^2+(y-3)^2$ *на множестве решений системы* $\begin{cases} x+2y\le 12 \\ x+y\le 9 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0. \end{cases}$

Решение. Построим многоугольник допустимых планов и несколько линий уровня (рис. 13). Линии уровня $z=c$ представляют собой окружности с центром в точке A(2;3) и радиусом $r=\sqrt{c}$. Из рис. 13 видно, что $z_{\min}=0$ достигается в точке A(2;3), а $z_{\max}$ – в точке B(9;0). Таким образом, получаем, что $z_{\min}=0$, $z_{\max}=(9-2)^2+(0-3)^2=58$.

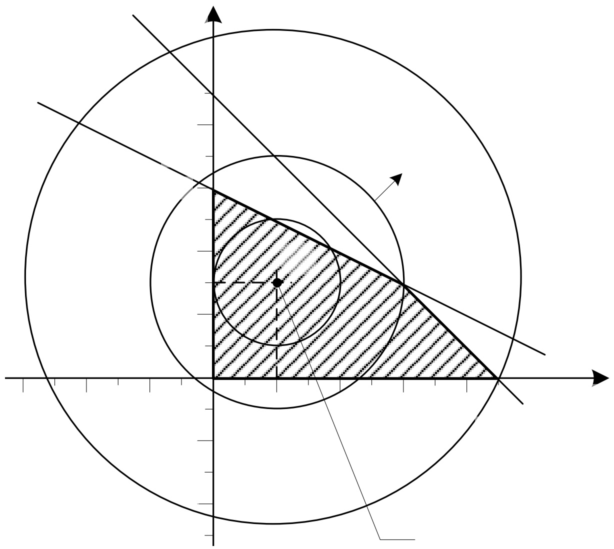


Рис. 13

Задача 2.2.3. *Найти глобальные экстремумы функции* $z=(x-7)(y-1)$ *на множестве решений системы* $\begin{cases} x+2y\le 12 \\ x+y\le 9 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0. \end{cases}$

Решение. Многоугольник допустимых планов мы уже строили при решении задачи 2.2.2, а линиями уровня являются равносторонние гиперболы, асимптотами которых служат прямые x = 7, y = 1 (рис. 14). С ростом значений z гиперболы удаляются от точки пересечения асимптот. Наибольшее значение z соответствует гиперболе (нижней ветви), проходящей через точку O(0; 0), а наименьшее – гиперболе, вырождающейся в точку K(7; 1). Таким образом, получаем $z_{\max}=7$ в точке O(0; 0), $z_{\min}=0$ – в точке K(7; 1).

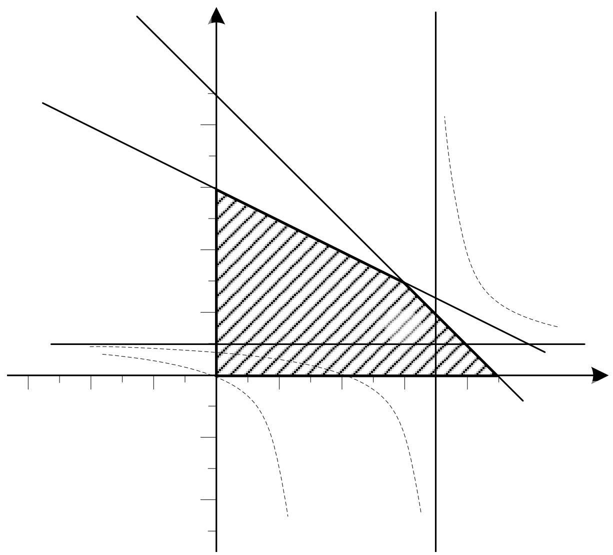


Рис. 14

Задача 2.2.4. *Графическим методом найти максимум и минимум целевой функции, если математическая модель задачи имеет вид:*

$$z = (x_1+1)^2 + (x_2+2)^2 \quad (\max, \quad \min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \ge 6 \\ 3x_1 - 2x_2 \le 18 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0$; $x_2 \ge 0$

Решение. Найдем и изобразим на плоскости x_1Ox_2 множество решений системы ограничений (рис. 15). Область допустимых решений состоит из внутренних точек многоугольника *ABCDE*. Линии уровня представляют собой окружности с центром в точке $O_1(-1; -2)$. Глобальным максимум находится в точке *B*, как самой удаленной от точки O_1. Глобальный минимум находится в точке *F*, в которой окружность касается прямо проходящей через *ED*. Точка *B* является точкой пересечения прямых (II) и (III), для определения координат этой точки решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 18 \\ -x_1 + 2x_2 = 8. \end{cases}$$

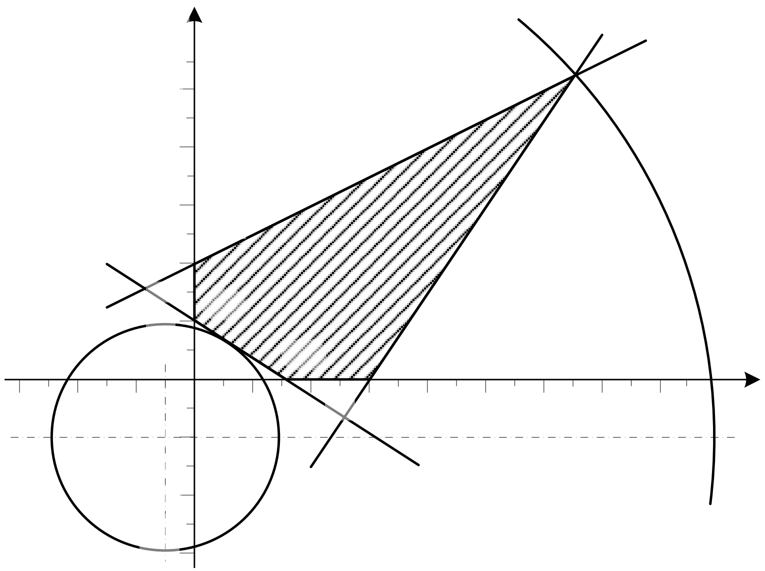


Рис. 15

Получим значения $x_1 = 13$; $x_2 = 10,5$. При этом

$$z_{\max} = 14^2 + 12,5^2 = 352,25.$$

Для определения координат точки *F* в начале получим уравнение прямой, проходящей через точки *E*(0; 2) и *D*(3; 0)

$$\frac{x_1 - 0}{3 - 0} = \frac{x_2 - 2}{0 - 2}.$$

Отсюда, получим уравнение прямой *ED*: $x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + 2.$

Угловой коэффициент этой прямой $k_1 = -\frac{2}{3}.$

Найдем теперь уравнение прямой, проходящей через точку $O_1(-1; 2)$ перпендикулярно к прямой *ED*. Угловой коэффициент этой прямой k_2 определим их условия перпендикулярности прямых: $k_1 \cdot k_2 = -1$. Значит, $k_2 = \frac{3}{2}$. Уравнение прямой O_1F запишем в виде: $x_2 + 2 = \frac{3}{2}(x_1 + 1).$

Отсюда, получим уравнение прямой O_1F: $x_2 = \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}.$

Для определения координат точки *F* решим систему:

$$\begin{cases} x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + 2 \\ x_2 = \frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Получим, $x_1 = \frac{15}{13}$; $x_2 = \frac{16}{13}.$

Тогда, $z_{\min} = \left(\frac{15}{13} + 1\right)^2 + \left(\frac{16}{13} + 2\right)^2 = \frac{2548}{169}$

К рассматриваемому типу нелинейных задач относятся и задачи с дробно-линейной целевой функцией. *Дробно-линейной функцией называется функция вида*

$$z = \frac{a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n}{b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_nx_n}.$$

Задача 2.2.5. *Предприятие выпускает однородный продукт и располагает при этом четырьмя технологическими способами. При работе по этим способам в единицу времени получается соответственно продукция* q_1, q_2, q_3, q_4, *при этом производственные расходы в единицу времени составляют* p_1, p_2, p_3, p_4 *некоторых единиц. Составить математическую модель данной задачи. Найти такой план выпуска продукции, при котором себестоимость будет наименьшей и по каждому из способов предприятие должно работать не более* t_1, t_2, t_3, t_4 *часов соответственно.*

Решение. Пусть x_1 единиц времени предприятие работает по первой технологии, x_2 – по второй, x_3 – по третьей, x_4 – по четвертой. Тогда общий выпуск продукции составит $q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + q_4x_4$, а общий расход будет равен $p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4$.

Отношение общего расхода к общему объему выпускаемой продукции называется себестоимостью продукции:

$$z = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4}{q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + q_4x_4}.$$

Итак, на множестве решений системы ограничений

$$0 \le x_1 \le t_1,$$
$$0 \le x_2 \le t_2,$$
$$0 \le x_3 \le t_3,$$
$$0 \le x_4 \le t_4$$

Надо найти наименьшее значение целевой функции

$$z = \frac{p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4}{q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3 + q_4x_4}.$$

Задачу с дробно-линейной целевой функцией путем замены переменных можно свести к задаче линейного программирования, а затем решить симплексным методом. Как это делается, мы узнаем дальше, а сначала познакомимся с геометрическим смыслом и графическим способом решения задач дробно-линейного программирования.

Рассмотрим на плоскости x_1Ox_2 целевую функцию:

$$z = \frac{p_1x_1 + p_2x_2}{q_1x_1 + q_2x_2}$$

Выразим x_2:

$$zq_1x_1 + zq_2x_2 = p_1x_1 + p_2x_2$$
$$(zq_2 - p_2)x_2 = (p_1 - zq_1)x_1,$$
$$x_2 = \frac{(p_1 - zq_1)}{zq_2 - p_2} \cdot x_1 \text{ или } x_2 = \kappa x_1, \text{ где } \kappa = \frac{p_1 - zq_1}{zq_2 - p_2}.$$

Уравнение $x_2 = \kappa x_1$ задает прямую, проходящую через начало координат. При некотором фиксированном значении z угловой коэффициент κ прямой тоже фиксирован, и прямая займет определенное положение. При изменении значений z прямая $x_2 = \kappa \cdot x_1$ будет поворачиваться в начале координат (рис. 16).

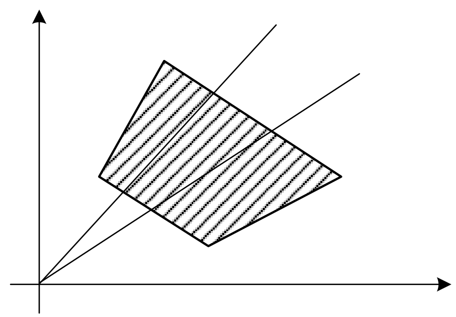


Рис. 16

Установим, как будет вести себя угловой коэффициент κ при монотонном возрастании z. Для этого возьмем производную от κ до z:

$$\frac{d\kappa}{dz} = \frac{-q_1(zq_2 - p_2) - (p_1 - zq_1)q_2}{(zq_2 - p_2)^2} =$$

$$= \frac{-zq_1q_2 + p_2q_1 - p_1q_2 + zq_1q_2}{(zq_2 - p_2)^2} = \frac{p_2q_1 - p_1q_2}{(zq_2 - p_2)^2}.$$

Знаменатель производной всегда положителен, а числитель от z не зависим. Следовательно, производная имеет постоянный знак, и при увеличении z угловой коэффициент будет только возрастать или только убывать, а прямая будет вращаться в одну сторону. Обратно, при вращении прямой в одном направлении функция z будет так же или только возрастать, или только убывать. Установив направление вращения для возрастания z, находим нужную вершину многоугольника допустимых планов поворотов прямой вокруг начала координат. При этом возможны следующие различные случаи:

1. Многоугольник допустимых планов ограничен, глобальный максимум и глобальный минимум есть (рис. 17).

2. Множество допустимых планов ограничений не ограничено, но глобальные экстремумы функцией достигаются (рис. 18).

3. Множество допустимых планов не ограничено и один из глобальных экстремумов не достигается (рис. 19).

4. Множество не ограничено, оба экстремума асимптотические (рис. 20).

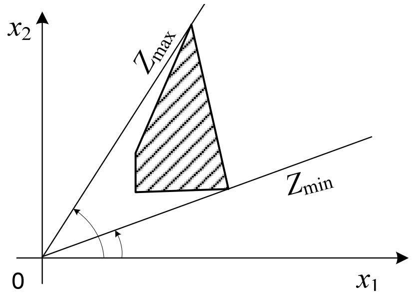


Рис. 17

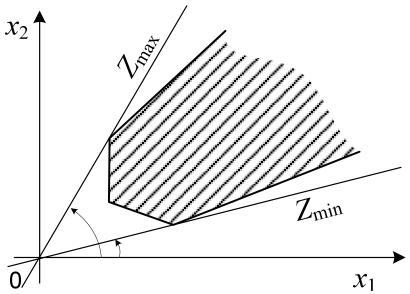


Рис. 18

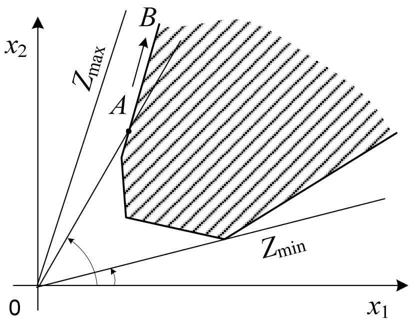


Рис. 19

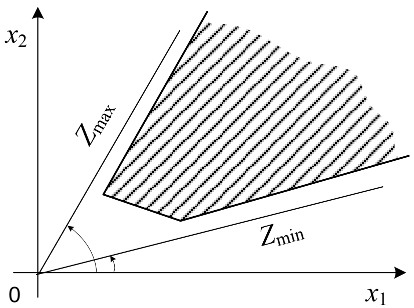


Рис. 20

Задача 2.2.6. *Найти глобальный максимум и минимум целевой функции* $z = \dfrac{3x_1 - x_2}{x_1 + x_2}$ *при*

ограничениях $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 5 \\ -x_1 + 3x_2 \leq 7 \\ 3x_1 - x_2 \leq 11 \\ x_1 \geq 0 \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$

Решение. Строим на чертеже множество допустимых планов (рис. 21). Так как оптимум находится вращением разрешающей прямой вокруг начала координат, то сразу можно сказать, что экстремальными точками будут вершины A и B.

Воспользуемся приведенными выше рассуждениями. Выразим из выражения для целевой функции

$$x_2 : x_2 = \frac{3-z}{z+1} \cdot x_1.$$

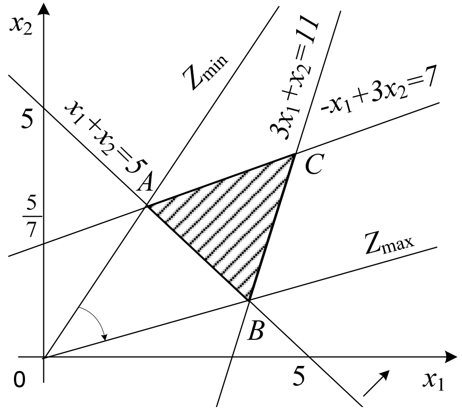


Рис. 21

Теперь найдем угловой коэффициент разрешающей прямой: $\kappa = \dfrac{3-z}{z+1}$; ищем производную: $\dfrac{d\kappa}{dz} = \dfrac{-4}{(z+1)^2}$.

Так как производная при любом z отрицательна, то функция $\kappa = \dfrac{3-z}{z+1}$ убывает. Это соответствует вращению прямой по часовой стрелке.

Следовательно, z_{max} будет в точке A, а z_{min} в точке B. Их координаты несложно найти как пересечение известных прямых, решив системы соответствующих уравнений.

Задача 2.2.7. *Найти глобальные экстремумы (максимум и минимум), если математическая модель задачи имеет вид:*

$$z = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + x_2} (\max,\ \min),$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \ge -13, \\ x_1 + x_2 \ge 6, \\ 4x_1 - x_2 \le 19, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Решение. Найдем область определения допустимых значений для переменных x_1; x_2 определим на плоскости $x_1 0 x_2$ множество решений системы ограничений (рис. 22).

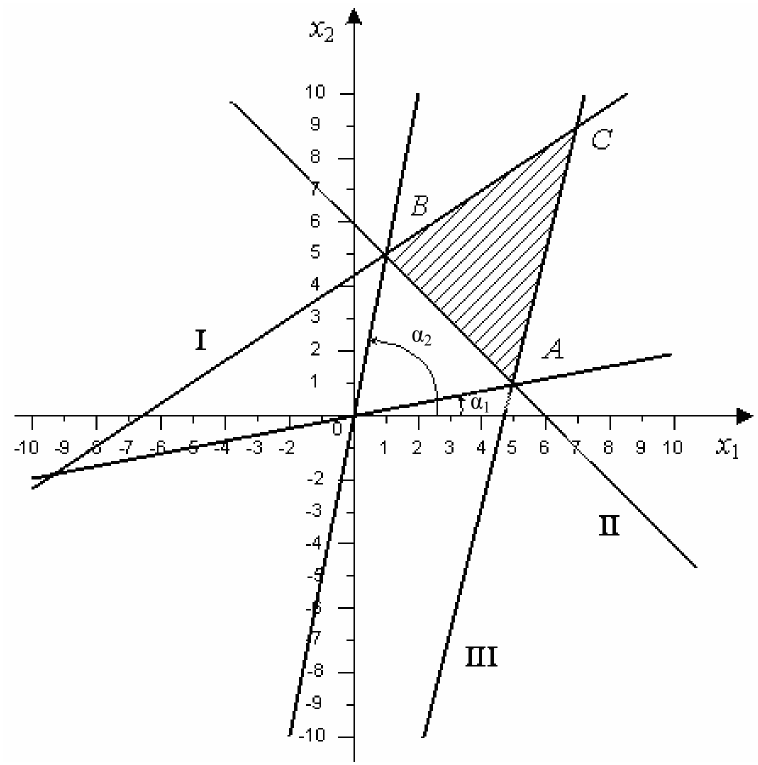


Рис. 22

Областью допустимых значений (множеством решения системы неравенств) является множество точек, расположенных внутри треугольника *ABC*. Выразим x_2 из выражения для целевой функции

$$z = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + x_2},$$

$$z \cdot (x_1 + x_2) = 2x_1 - x_2,$$

$$zx_1 + zx_2 = 2x_1 - x_2,$$

$$x_2 \cdot (z+1) = (2-z) \cdot x_1,$$

$$x_2 = \frac{2-z}{z+1} \cdot x_1$$

Данному соотношению удовлетворяют точки, принадлежащие прямой $x_2 = k \cdot x_1$ с угловым коэффициентом $k = \frac{2-z}{z+1}$.

Значит, линиями уровня функции цели являются прямые, проходящие через начало координат с угловым коэффициентом $k = \frac{2-z}{z+1}$.

Определим предельные значения угловых коэффициентов для семейства прямых, являющихся линиями уровня и имеющими общие точки с множеством допустимых значений. Пусть угол α_1 равен углу между осью OX_1 и радиус-вектором *OA*, а угол α_2 равен углу между осью OX_2 и радиус-вектором *OB*, тогда должно выполняться условия $\operatorname{tg}\alpha_1 \le k \le \operatorname{tg}\alpha_2$.

Найдем координаты точки *A*, для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 6, \\ 4x_1 - x_2 = 19. \end{cases}$$

Получим $x_1 = 5$; $x_2 = 1$. значит, $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{5}$.

Найдем координаты точки *B*, для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -13 \\ x_1 + x_2 = 6. \end{cases}$$

Получим, $x_1 = 1$; $x_2 = 5$. Значит, $\operatorname{tg}\alpha_2 = 5$.

Таким образом, имеем неравенства $\frac{1}{5} \le k \le 5$, $\frac{1}{5} \le \frac{2-z}{z+1} \le 5$

Решим систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{5} \le \frac{2-z}{z+1} \\ \frac{2-z}{z+1} \le 5; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{6z-9}{z+1} \le 0 \\ \frac{6z+3}{z+1} \le 0. \end{cases}$$

Каждое из этих неравенств решаем методом интервалов. Общее решение системы неравенств: $-0{,}5 \le z \le 1{,}5$

Таким образом, $z_{\min} = -0{,}5$; это значение достигается в точке A(5; 1).

$z_{\max} = 1{,}5$; это значение достигается в точке B(1; 5).

2.3. Задачи с нелинейной целевой функцией и нелинейной системой ограничений

Задача 2.3.1. *На множестве решений системы ограничений*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \le 36 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{cases}$$

Найти глобальные экстремумы функции $z = (x-3)^2 + (y-2)^2$.

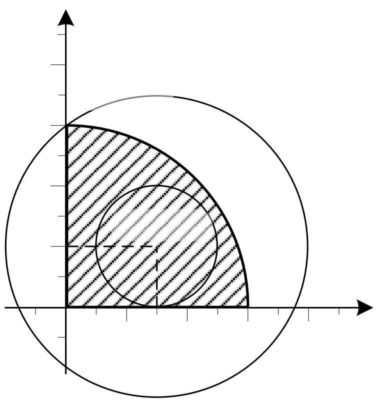


Рис. 23

Решение. Линиями уровня функции $z = (x-3)^2 + (y-2)^2$ являются окружности с центром в точке A(3;2) (рис. 23). Из рисунка видно, что глобальный минимум функции z достигает в точке A(3;2), а глобальный максимум – в точке B(0; 6).

$z_{min} = 0, \qquad z_{max} = 25.$

Задача 2.3.2. *Найти глобальные экстремумы функции* $z = x^2 + y^2$ *на множестве системы ограничений*

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y-3)^2 \ge 9 \\ (x-5)^2 + (y-3)^2 \le 36 \\ x + y \ge 8 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

Решение. На рис. 24 множество допустимых решений заштриховано. Как видно из рисунка, оно не является выпуклым. Очевидно, что наименьшее значение функция z достигает в точке B, а наибольшее – в точке K (точка касания окружности $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 36$ и линии уровня).

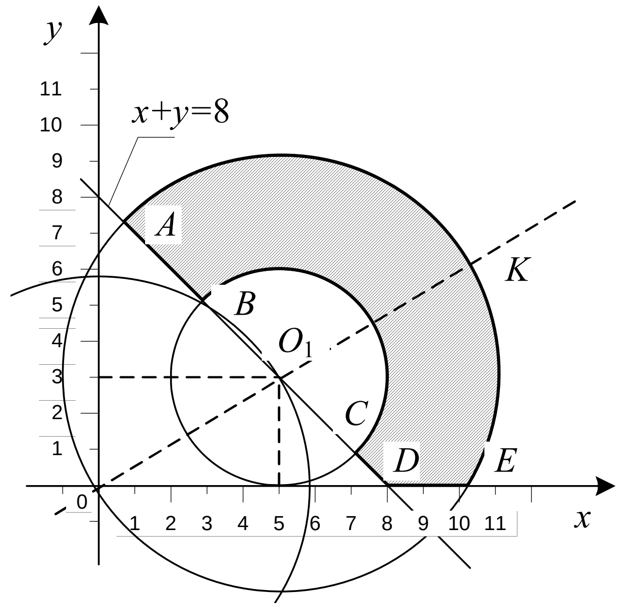


Рис. 24

Найдем координаты точек B и K. Точка B принадлежит прямой $x + 8 = y$ и окружности $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 9$. Поэтому ее координаты находим из системы:

$$\begin{cases}(x-5)^2+(y-3)^2=9\\ x+8=y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(3-y)^2+(y-3)^2=9\\ x=8-y\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2y^2-12y+9=0\\ x=8-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=3\sqrt{0.5}\\ x=5-3\sqrt{0.5}\end{cases} \text{ или } \begin{cases}y=3-3\sqrt{0.5}\\ x=5+3\sqrt{0.5}\end{cases},$$

$$B\,(5-3\sqrt{0.5};\ 3+3\sqrt{0.5}).$$

Точка K принадлежит линии центров OO_1 с уравнением $y=\frac{3}{5}x$ и окружности $(x-5)^2+(y-3)^2=36$. Приходим к системе:

$$\begin{cases}(x-5)^2+(y-3)^2=36\\ y=\frac{3}{5}x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}17x^2-170x-25=0\\ y=\frac{3}{5}x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=5+\frac{30}{\sqrt{34}}\\ y=3+\frac{18}{\sqrt{34}}\end{cases}$$

или $\begin{cases}x=5-\frac{30}{\sqrt{34}}\\ y=3-\frac{18}{\sqrt{34}}\end{cases}$; K $\left(5+\frac{30}{\sqrt{34}};\ 3+\frac{18}{\sqrt{34}}\right)$.

Следовательно, $z_{min}=43-12\sqrt{0.5}$; $z_{max}=40+12\sqrt{34}$. Заметим, что точка F является точкой локального максимума, так как значение функции z в ней больше, чем значения в соседних вершинах B и C. Аналогично, точка C является точкой локального минимума.

Разнообразные задачи позволяют нам увидеть ряд особенностей нелинейных задач, которые делают их более трудными для решения, чем линейные задачи.

Если система ограничений задачи линейная, а целевая функция нелинейная, то целевая функция может достигать оптимума не обязательно в граничной точке множества допустимых планов, а если она достигает экстремума в граничной точке, то эта точка не обязательно является крайней. Следовательно, не существует вычислительного метода для задач такого типа, который ограничивался бы только перебором вершин множества допустимых решений. Заметим также, что в некоторых задачах этого типа локальный оптимум не совпадает с глобальным.

В случае нелинейной системы ограничений утверждение о выпуклости области допустимых решений не сохраняется. Если множество допустимых решений не выпукло, то может существовать отличный от глобального локальный оптимум даже при линейной целевой функции.

Следует отметить, что в случае существования локальных оптимумов, отличных от глобальных, нет возможности использовать

метод симплексного типа, основанный на переходе от одной вершины к соседней, который оканчивался бы при достижении вершины, доставляющий локальный экстремум целевой функции по сравнению со всеми соседними вершинами.

Для задач нелинейного программирования, имеющих отличные от глобального локальные оптимумы, большинство вычислительных методов позволяет найти точку именно локального оптимума. В общем случае они не позволяют установить, совпадает ли она с точкой глобального оптимума. Тем не менее эти методы отыскания локального оптимума часто оказываются очень полезными на практике.

В теории нелинейного программирования особый интерес представляют выпуклые и вогнутые функции. Оказываются справедливыми следующие утверждения:

Пусть *f(x)* – выпуклая функция, заданная на замкнутом выпуклом множестве *X*. Тогда любой локальный минимум *f(x)* на *X* является глобальным минимумом на *f(x)* на *X*.

Если *f(x)* – вогнутая функция на замкнутом выпуклом множестве *X*, то любой локальный максимум *f(x)* на *X* является глобальным максимумом на *f(x)* на *X*.

Поясним сказанное на примере.

Задача 2.3.3. *Найти глобальный максимум функции* $z=2x_1-x_1^2+x_2$ *на множестве решений системы ограничений*

$$\begin{cases}x_2\le 3\\ 3x_1+2x_2\le 12\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0\end{cases}$$

Решение. Линиями уровня $z=2x_1-x_1^2+x_2$ являются параболы (рис. 25). Функцию z можно рассматривать как сумму двух вогнутых функций $f_1(x_1)=2x_1-x_1^2$ и $f_2(x_2)=x_2$. Поэтому z – вогнутая функция. Следовательно, локальный максимум функции z будет глобальным. $Z_{max}=4$ и достигается в точке $D(1;3)$.

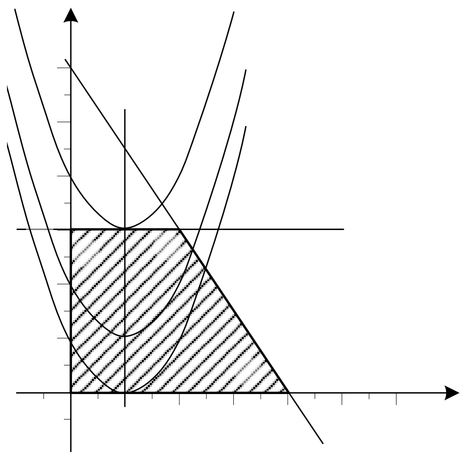


Рис. 25

3. Решение задач дробно-линейного программирования симплексным методом

Задача 3.1. *Найти максимальное значение функции* $z=\frac{2x_1-x_2}{x_1+2x_2+1}$ *на множестве решений системы ограничений*

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=2\\ 2x_1+x_2+x_4=6\\ x_i\ge 0, i=1,2,3,4.\end{cases}$$

Решение. Введем обозначение:

$$x_1+2x_2+1=\frac{1}{y_0}, y_0>0. \qquad (7)$$

Тогда $z = 2x_1y_0 - x_2y_0$.

Обозначим $x_1y_0=y_1, x_2y_0=y_2, x_3y_0=y_3, x_4y_0=y_4$.

Целевая функция запишется так: $z = 2y_1 - y_2$.

Преобразуем систему ограничений. Умножив обе части всех ограничений на y_0:

$$\begin{cases} x_1y_0-2x_2y_0+x_3y_0=2y_0\\ 2x_1y_0+x_2y_0+x_4y_0=6y_0\\ x_i\ge 0, i=1,2,3,4, y_0>0\end{cases} \qquad (8)$$

Включим в систему ограничений (8) ограничение (7) и перейдем к переменным y_0, y_1, y_2, y_3, y_4:

$$\begin{cases} -2y_0+y_1-2y_2+y_3=0\\ -6y_0+2y_1+y_2+y_4=0\\ y_0+y_1+2y_2 \quad =1\\ y_0>0, y_1\ge 0, y_2\ge 0,\\ y_3\ge 0, y_4\ge 0.\end{cases} \qquad (9)$$

Нетрудно убедиться в том, что мы получили задачу линейного программирования: найти максимальное значение $z = 2y_1 - y_2$ на множестве решений системы (9).

Эту задачу линейного программирования решаем симплексным методом, обозначив $z_1=-z$ и учитывая, что $z_{max}=-\min(z)$.

Имеем: $z_{max}=\frac{4}{3}$ *при* $y_0=\frac{1}{3}$; $y_2=y_3=0, y_1=\frac{2}{3}, y_4=\frac{2}{3}$.

Найдем соответствующие значения x_1, x_2, x_3, x_4:

$$x_1=\frac{y_1}{y_0}=2, x_2=\frac{y_2}{y_0}, x_3=\frac{y_3}{y_0}, x_4=\frac{y_4}{y_0}=2$$

Итак, $z_{max}=\frac{4}{3}$ достигается при решении (2; 0; 0; 2).

Таблица 8

Базисные переменные	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	Свободные члены
	–2	1	–2	1	0	0
z_1	–6	2	1	0	1	0
	1	1	2	0	0	1
	0	2	–1	0	0	0
y_3	0	3	2	1	0	2
y_4	0	8	13	0	1	6
y_0	1	1	2	0	0	1
y_1	0	2	–1	0	0	0
y_1	0	1	2/3	1/3	0	2/3
y_4	0	0	23/3	–8/3	1	2/3
y_0	1	0	4/3	–1/3	0	1/3
z_1	0	0	–7/3	–2/3	0	–4/3

Задача 3.2. *Найти максимальное значение целевой функции*

$$z=\frac{x_1-x_2+x_3}{2x_1+x_3+1}$$

на множестве решений системы ограничений:

$$\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=8\\ -x_1+2x_2-x_3=4\\ x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0.\end{cases}$$

Решение. Обозначим

$$2x_1+x_3+1=\frac{1}{y_0}, y_0>0,$$

$$y_1=x_1y_0, y_2=x_2y_0, y_3=x_3y_0.$$

Преобразуем целевую функцию:

$$z = x_1y_0 - x_2y_0 + x_3y_0 = y_1 - y_2 + y_3 \qquad (10)$$

Система ограничений примет вид:

$$\begin{cases} x_1y_0-x_2y_0+3x_3y_0 \quad =8y_0\\ -x_1y_0+2x_2y_0-x_3y_0 \quad =4y_0\\ 2x_1y_0+x_3y_0+y_0 \quad =1\\ y_0>0, x_1\ge 0, x_2\ge 0, x_3\ge 0;\end{cases} \qquad (11)$$

$$\begin{cases} -8y_0+y_1-y_2+3y_3=0\\ -4y_0-y_1+2y_2-y_3=0\\ y_0+2y_1+\quad y_3 \quad =1\\ y_0>0, y_1\ge 0, y_2\ge 0, y_3\ge 0.\end{cases}$$

Теперь найдем наибольшее значение целевой функции (10) на множестве решений системы (11):

Таблица 9

	y_0	y_1	y_2	y_3	Свободные члены
z_1	–8	1	–1	3	0
	–4	2	2	–1	0
	1	0	0	1	1
	0	1	1	1	0
z_1	–8	1	–1	3	0
	–12	0	1	2	0
	17	0	2	–5	1
	8	0	0	–2	0
z_1	–20	1	0	5	0
	–12	0	1	2	0
	41	0	0	–9	1
	8	0	0	–2	0
y_1	0	1	0	25/41	20/41
y_2	0	0	1	–26/41	12/41
y_0	1	0	0	–9/41	1/41
z_1	0	0	0	–10/41	–8/41

$z_{max} = \frac{8}{41}$ при $y_0 = \frac{1}{41}, y_1 = \frac{20}{41}, y_2 = \frac{12}{41}, y_3 = 0$ *или* $x_1 = 20,$ $x_2 = 12, x_3 = 0.$

Заметим, что если бы y_0 в оптимальном плане был бы равен 0, то $2x_1 + x_2 + 1$ при оптимальном базисном решении стремилось бы к бесконечности. Отсюда следует неограниченность множества решений системы ограничений. В этом случае глобальный максимум z (конечный или бесконечный) достигается в бесконечно удаленных точках.

4. Метод множителей Лагранжа

Пусть задана задача линейного программирования

$$L = f(M) = (x_1;\ x_2;\ \ldots,\ x_n) \to \max(\min)$$

при ограничениях: $g_i(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) = 0, i = \overline{1,1m}.$

Пусть функции $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ и $g(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ непрерывны вместе со своими частными производными. Так как ограничения заданы в виде уравнений, то для решения задачи воспользуемся методом отыскивания условного экстремума функции нескольких переменных, который сводится к исследованию на обычный экстремум функции Лагранжа.

$$L(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m) = f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k g_k(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),$$

где $\lambda_k\left(k = \overline{1m}\right)$ – множители Лагранжа.

Необходимое условие наличия условного экстремума выражаются системой $(n + m)$ уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(M)}{\partial x_i} = 0, \left(i = \overline{1m}\right), \\ g_k(M) = 0, \left(k = \overline{1m}\right), \end{cases} \qquad (12)$$

из которых могут быть найдены неизвестные $M_0\left(x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0\right)$ – точка, в которой возможен условный экстремум.

Достаточные условия наличия условного экстремума связана с изучением знака 2-го дифференциала функции Лагранжа:

$$d^2L\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0, dx_1, \ldots, dx_n\right)$$

для каждого набора значений $x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1^0, \ldots \lambda_m^0$, полученный из системы (12) при условии, что $dx_1, \ldots, dx_n$ удовлетворяет уравнениям:

$$\sum_{g=1}^{n} \frac{\partial g_k(M_0)}{\partial x_j} dx_j = 0, k = \overline{1,m}$$

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 \neq 0.$$

Функция $L = f(M)$ имеет условный максимум в точке M_0, если для всевозможных значений $dx_1,...,dx_n$, удовлетворяющих условиям (12), выполняется неравенство:

$$d^2L\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, ..., \lambda_m^0, dx_1, ..., dx_n\right) < 0$$

и условный минимум, если при этих условиях:

$$d^2L\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0, \lambda_1^0, ..., \lambda_m^0, dx_1, ..., dx_n\right) > 0$$

В случае двух переменных при одном ограничении $g(x;y) = 0$, то функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x;y;\lambda) = f(x;y) + \lambda g(x;y).$$

Система для нахождения стационарных (критических) точек состоит из трех уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 0, \frac{\partial L}{\partial y} = 0, g(x;y) = 0.$$

Если $M(x_0, y_0, \lambda_0)$ – любое из решений этой системы, вместо изучения знака второго дифференциала, можно исследовать знак определителя Δ.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & g'_x(M_0) & g'_y(M_0) \\ g'_x(M_0) & L''_{xx}(M_0) & L''_{xy}(M_0) \\ g'_y(M_0) & L''_{xy}(M_0) & L''_{yy}(M_0) \end{vmatrix}.$$

При этом:

1) если $\Delta < 0$, то функция $Z = f(x;y)$ имеет в точке M_0 условный максимум,

2) если $\Delta > 0$, то функция $Z = f(x;y)$ имеет в точке M_0 условный минимум.

Объясним идею метода на примере задачи нелинейного программирования, зависящей от двух переменных.

$$f(x_1, x_2) \to \max$$

$$g(x_1, x_2) = b$$

На плоскости $x_1 0 x_2$ уравнение $g(x_1, x_2) = b$ определяет график некоторой функции, представленный на рис. 26. На нем показаны

несколько линий уровня некоторой функции $f(x_1, x_2)$ и выбранное в качестве примера направление ее возрастания.

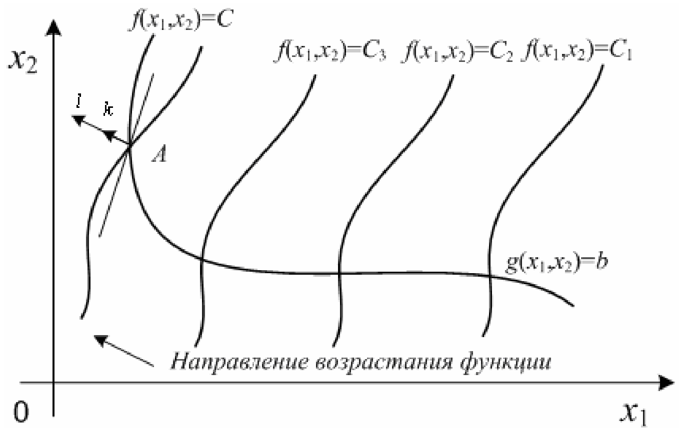


Рис. 26

В точке *A*, в которой функция *f* достигает максимального значения, совпадают касательные линии к графикам функций

$$f(x_1, x_2) = C \quad \text{и} \quad g(x_1, x_2) = b.$$

Следовательно, в точке *A* векторы-нормали к функциям $g(x_1, x_2) = b$ и $f(x_1, x_2) = C$ пропорциональны. Обозначим эти векторы соответственно через **k** и **l**. Получаем **l** = λ**k**, где λ – некоторый коэффициент пропорциональности. Координатами векторов **l** и **k** являются значения частных производных функций *f* и *g* соответственно в точке *A*.

$$\mathbf{l} = (\partial f/\partial x_1; \partial f/\partial x_2);$$

$$\mathbf{k} = (\partial g/\partial x_1; \partial g/\partial x_2).$$

Из условия пропорциональности в точке *A* имеем

$$\partial f/\partial x_1 = \lambda \cdot \partial g/\partial x_2;$$

$$\partial f/\partial x_2 = \lambda \cdot \partial g/\partial x_2.$$

Для определения значений x_1, x_2, в которых функция *f* достигает максимума, к этим уравнениям надо добавить условие принадлежности точки *A* графику функции $g(x_1, x_2) = b$.

Окончательно получаем систему уравнений, определяющую оптимальное решение поставленной задачи

$$\begin{cases} \partial f/\partial x_1 = \lambda \cdot \partial g/\partial x_1 \\ \partial f/\partial x_2 = \lambda \cdot \partial g/\partial x_2 \\ g(x_1, x_2) = b \end{cases}$$

Введем новую функцию

$$F(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda\,(b - g(x_1, x_2)).$$

Тогда последняя система перепишется в виде

$$\begin{cases} \partial F(x_1, x_2, \lambda)/\partial x_1 = \partial f(x_1,x_2)/\partial x_1 - \lambda \cdot \partial(x_1, x_2)/\partial x_1 = 0 \\ \partial F(x_1, x_2, \lambda)/\partial x_2 = \partial f(x_1, x_2)/\partial x_2 - \lambda \cdot \partial(x_1, x_2)/\partial x_2 = 0 \\ \partial F/\partial\lambda = b - g(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

Функцию F и называют функцией Лагранжа.

Задача 4.1. *Найти условный экстремум функции* $Z = x + 2y$ *при условии* $x^2 + y^2 = 5$ *методом Лагранжа.*

Решение.

Для нашей задачи составляем функцию Лагранжа:

$$L(x; y; \lambda) = x + 2y + \lambda\left(x^2 + y^2 = 5\right).$$

Находим частные производные: $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + \lambda x; \dfrac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda y.$

Система уравнений принимает вид:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ 1 + \lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2\lambda}, \\ y = -\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{1}{\lambda^2} = 5, \Rightarrow \lambda^2 = \dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1/2, \\ x_1 = -1, \\ y_1 = -2, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_2 = -1/2, \\ x_2 = 1, \\ y_2 = 2, \end{cases} \quad \begin{matrix} M_1(-1,\ -2); \\ M_2(1,\ 2). \end{matrix}$$

Далее находим вторые частные производные функции Лагранжа и составляем второй дифференциал d^2L:

$$L''_{xx} = 2\lambda;\ L''_{xy} = 0;\ L''_{yx} = 0;\ L''_{yy} = 2\lambda.$$

Следовательно $d^2L = 2\lambda\left(dx^2 + dy^2\right)$

При $\lambda_2 = 1/2$ $d^2L > 0$, следовательно, в точке $M_1(-1;\ -2)$ функция имеет условный минимум, равный: $Z_{\min}(M_1) = -5.$

При $\lambda_2 = -1/2$ $d^2L > 0$, следовательно, в точке $M_2(1;\ 2)$ функция имеет максимум, равный: $Z_{\max}(M_2) = 5$

Теперь определить тип экстремумов в стационарных точках другим способом (с помощью определителя Δ):

$$g(x; y) = x^2 + y^2 - 5 \Rightarrow g'_x = 2x;$$

$$g'_y = 2y;\ L''_{xx} = 2\lambda;\ L''_{xy} = 0;\ L''_{yx} = 0;\ L''_{yy} = 2\lambda.$$

При $\lambda = \dfrac{1}{2}$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20 > 0$$

следовательно, в точке $M_1(-1;\ -2)$ для $\lambda = 1/2$ функция $Z = x + 2y$ имеет условный минимум, равный $Z_{\min}(M_1) = -5;$

При $\lambda = -\dfrac{1}{2}$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -20 < 0$$

следовательно, в точке $M_2(1;\ 2)$ для $\lambda = -1/2$ функция имеет условный максимум, равный $Z_{\max}(M_2) = 5$.

<u>Задача 4.2</u>. *Применяя метод Лагранжа, найти точки условного экстремума функции $U = xy + yz$ при заданных ограничениях:*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y + z = 2. \end{cases}$$

x, y, z *– целочисленные координаты.*

<u>Решение.</u> Составляем функция Лагранжа:

$$L = xy + yz + \lambda_1\left(x^2 + y^2 - 2\right) + \lambda_2\left(y + z - 2\right).$$

Находим частные производные функции Лагранжа:

$$L'_x = y + 2\lambda_1 x;\quad L'_y = x + z + 2\lambda_1 y + \lambda_2;\quad L'_z = y + \lambda_2;\quad L'_{\lambda_1} = x^2 + y^2 - 2;$$

$$L'_{\lambda_2} = y + z - 2.$$

Для нахождения стационарных точек, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} y + 2\lambda_1 x = 0, \\ x + z + 2\lambda_1 y + \lambda_2 = 0, \\ y + \lambda_2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 2, \\ y + z = 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = -\lambda_2 & \text{из (3)} \\ x = \dfrac{\lambda_2}{2\lambda_1} & \text{из (1) и (3)} \\ & \text{из(5) и (1)} \\ z = 2 - y = 2 + \lambda_2 & \\ \dfrac{\lambda_2}{2\lambda_1} + 2 + \lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2 = 0 & \text{из(2)} \\ \dfrac{\lambda_2{}^2}{4\lambda_1{}^2} + \lambda_2{}^2 = 2 & \text{из(4)} \end{cases}$$

Можно показать, что из последних уравнений системы следует уравнение четвертой степени относительно λ_1:

$$16\lambda_1{}^4 - 32\lambda_1{}^3 + 8\lambda_1 - 1 = 0$$

Корни этого уравнения: $\lambda_1^{(1)} = -\dfrac{1}{2};\quad \lambda_1^{(2)} = \dfrac{1}{2};\quad \lambda_1^{(3)} = 2 - \sqrt{3};$ $\lambda_1^{(4)} = 2 + \sqrt{3}.$

а) при значении $\lambda_1^{(1)} = -\dfrac{1}{2}$, получим $\lambda_2 = -1;\ x = 1;\ y = 1;\ z = 1.$ Стационарная точка $M_1(1;\ 1;\ 1)$.

б) при значении $\lambda_1^{(2)} = \dfrac{1}{2}$, получим $\lambda_2 = -1;\ x = -1;\ y = 1;\ z = 1.$ Стационарная точка $M_1(-1;\ 1;\ 1)$.

в) значения $\lambda_1 = 2 \pm \sqrt{3}$ является посторонними корнями, им соответствуют стационарные точки с не целочисленными координатами (не соответствуют условию задачи).

Далее, находим вторые частные производные функции L и составляем второй дифференциал d^2L:

$$L''_{xx} = 2\lambda_1;\ L''_{xy} = 1;\ L''_{xz} = 0;\ L''_{yx} = 1;\ L''_{yy} = 2\lambda_1;\ L''_{yz} = 1;\ L''_{zx} = 0;\ L''_{zy} = 1;$$

$$L''_{zz} = 0.$$

Следовательно $d^2L = 2\lambda_1 dx^2 + 2dxdy + 2\lambda_1 dy^2 + 2dydz.$

Из условий связи следуют равенства:

$$\begin{cases} xdx + ydy = 0, \\ dy + dx = 0. \end{cases}$$

Исследуем знак d^2L для первой стационарной точки при $\lambda_1 = -0{,}5;\ \lambda_2 = -1;\ M_1(1;\ 1;\ 1)$:

$$\begin{cases} dx + dy = 0, \\ dy + dz = 0. \end{cases}$$

Откуда получаем:

$$dx = -dy;\quad dz = -dy \Rightarrow d^2L(M_1) = -dy^2 - 2dy^2 - dy^2 - 2dy^2 < 0$$

Значит, в точке $M_1(1;\ 1;\ 1)$ функция имеет условный максимум, равный $L_{\max}(M_1) = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2.$

Исследуем знак d^2L для второй стационарной точки при $\lambda_1{}' = 0{,}5;\ \lambda_2{}' = -1;\ M_2(-1;\ 1;\ 1)$:

$$\begin{cases} -dx + dy = 0, \\ dy + dz = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} dx = dy, \\ dz = -dy. \end{matrix}$$

поэтому $d^2L(M_2) = dy^2 + 2dy^2 + dy^2 - 2dy^2 = 2dy^2 > 0$.

Значит, в точке $M_2(-1;\ 1;\ 1)$ функция имеет условный минимум, равный $L_{\min}(M_2) = -1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0$.

5. Градиентный метод

Пусть мы имеем некоторую функцию $z = f(x_1;\ x_2)$ двух действительных переменных и некоторую точку $A(x_1^0;\ x_2^0)$, принадлежащую области определения X этой функции. Назовем градиентом функции f вектор

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1^0};\ \frac{\partial f}{\partial x_2^0}\right)$ (символ ∇f читается : «набла» f).

Градиент ∇f в точке A перпендикулярен касательной к линии уровня функции $z = f(x_1;\ x_2)$ в этой точке. Например, дана функция $z = x^2 + y^2$. Построим несколько ее линий уровня (рис. 27):

$\mathbf{r}_1 = \nabla f(A);\quad \mathbf{r}_2 = \nabla f(B)$.

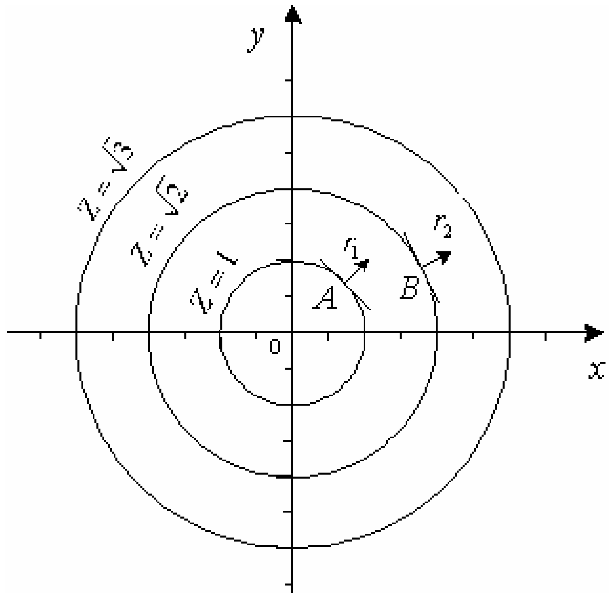


Рис. 27

Известно, что направление градиента ∇f служит направлением максимальной скорости роста функции.

На примере задачи с двумя переменными покажем геометрическую картину градиентного метода.

<u>Задача 5.1.</u> *Найти глобальный максимум функции $z = (x - 1)^2 + (y - 3)^3$ множестве решений системы неравенств.*

$$\begin{cases} x + 2y - 14 \le 0 \\ x + y \le 9 \\ 3x + y \le 21 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

<u>Решение.</u> Предположим, что мы начали с некоторого допустимого решения, определенного координатами точки K. Градиент $\nabla f(K)$ или $\mathbf{r}_1$ является вектором, перпендикулярным касательной к линии уровня в точке K. Мы двигаемся из точки K в направлении $\mathbf{r}_1$ до тех пор, пока не достигнем границы множества допустимых решений K_1. Дальше двигаться мы не можем в направлении $\mathbf{r}_2$($\mathbf{r}_2 = \nabla f_1 K_1$)), так как при этом мы выйдем из множества допустимых решений. Поэтому мы выбираем вектор $\mathbf{r}_3$, составляющий с вектором $\mathbf{r}_2$ наименьший угол по сравнению с любым другим вектором с началом в точке K_1 и лежащим в множестве допустимых решений. Таким образом, на следующем шаге мы двигаемся вдоль прямой $3x + y = 21$ (III). Это приводит нас в точку $A(7;\ 0)$. На этом процессе заканчивается. Геометрически это выражается тем, что $\mathbf{r}_4$ составляет тупой угол с любым вектором в множестве допустимых решений, выходящим из точки A.

Заметим, что в точке A функция достигает глобального максимума: $z_{\max} = 36$.

Предположим теперь, что решая эту же задачу, в качестве начального допустимого решения мы выберем точку N (рис. 28). В этом случае мы сначала по направлению d_1 достигаем точки N_1, а затем по направлению d_3 вдоль прямой $x + 2y - 14 = 0$ (I) попадаем в точку $D(0;\ 7)$. На этом процесс заканчивается: $z = (0;\ 7) = 16$. В точке B функция достигает лишь локального максимума.

Даже на одном примере видно, что результат решения зависит от того, с какой точки допустимо решения начинается процесс.

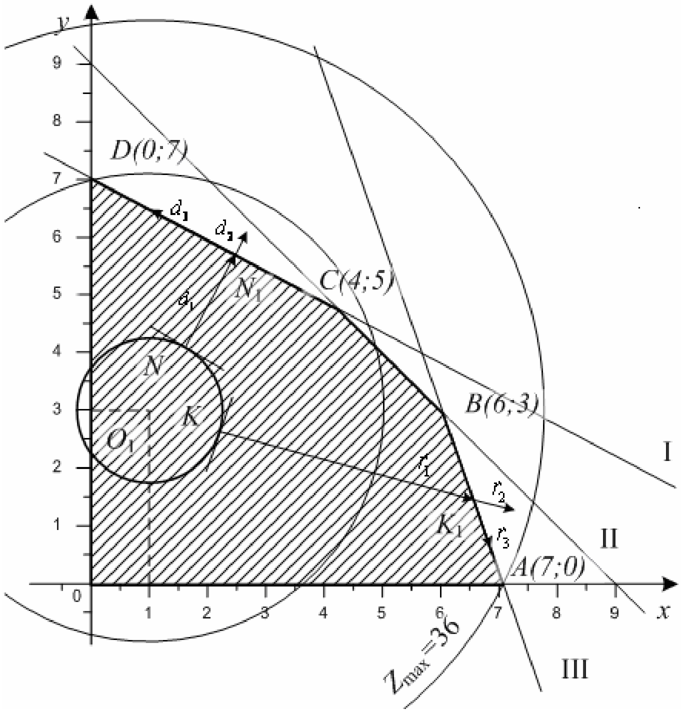


Рис. 28

Градиентные методы в лучшем случае обычно сходятся лишь к локальному минимуму. Впрочем, бывает и так, что даже такая сходимость отсутствует.

Только в том случае, когда задача обладает подходящими свойствами выпуклости или вогнутости, можно быть уверенными, что процесс сходится к глобальному экстремуму.

Рассмотрим далее идею метода обхода узлов пространственной сетки. Он заключается в том, что для каждой переменной устанавливаем определенный интервал изменения (шаг поиска). Заберем начальную точку с минимальными координатами и проверяем, входит ли эта точка в множество допустимых решений. После этого вычисляем в ней значение целевой функции. Увеличиваем одну из координат на заданный интервал, а остальные координаты оставляем без изменения. Таким образом, осуществляется передвижение вдоль одной оси на величину шага. Для новой точки тоже

проверяем ее принадлежность множеству Ω и вычисляем значение целевой функции. Опять увеличиваем на интервал ту же координату и испытываем полученную точку и т. д.

Дойдя до границы множества Ω, изменяем на величину шага другую координату, т. е. смещаемся в сторону, и снова от некоторой начальной точки двигаемся до границы области и т. д. (рис. 29). Здесь значениями переменных

$$x = x_0$$
$$x = x_0 + \Delta x$$
$$x = x_0 + 2\Delta x$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x = x_0 + n\,\Delta x$$

геометрически соответствуют параллельные гиперплоскости, отстоящие друг от друга на величину шага Δx. Число систем таких плоскостей равно числу переменных. В пересечении они образуют точки-узлы пространственной сетки.

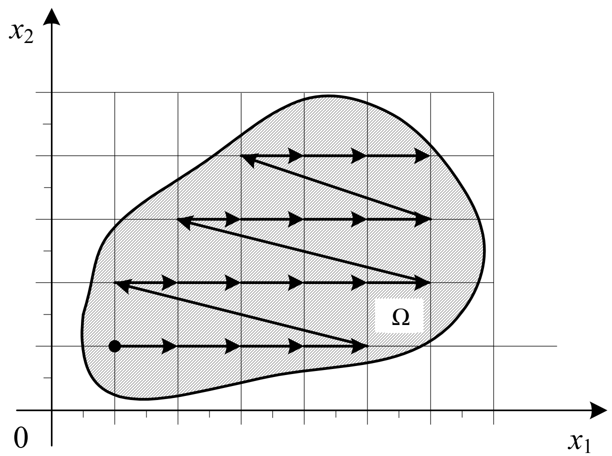


Рис. 29

В процессе поиска мы обходим поочередно узлы, принадлежащие многограннику допустимых планов, и вычисляем в каждом случае значение целевой функции. Наибольшее (наименьшее) из них указывает с точностью до шага оптимальную точку.

Этот метод, как нетрудно было уже заметить, связан с огромным объемом вычислительной работы. Он пригоден для решения задач с малым числом переменных и с обязательным применением электронных вычислительных машин.

6. Метод случайных испытаний

Пусть каким-либо способом выбрано n случайных чисел. Принимаем эти числа за значения переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$, проверяем допустимость такого решения и вычисляем для него значение целевой функции. Такой процесс повторяем многократно, фиксируя точку в этом случае, если целевая функция в ней достигает лучшего по сравнению с предыдущим значения(в смысле приближения к оптимуму).

Общее число случайных проб зависит от числа переменных, требуемой точности искомых величин и заданной вероятности получения оптимального решения. Все это определяется заранее. Поиск прекращается, когда число точек достигнет расчетного. Точку с наибольшим (наименьшим) значением целевой функции считаем оптимальной.

Метод случайных испытаний может быть реализован только на ЭВМ, причем интересно отметить, что случайные величины числа ЭВМ вырабатывает сама.

Глава 4

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТОВ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ

1. Пример решения транспортной задачи в среде MS Excel

Задача. *Пусть производство продукции осуществляется на 4-х предприятиях* A_1, A_2, A_3, A_4 *а затем развозится в 5 пунктов потребления этой продукции* B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. *На предприятиях* A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ *продукция находится соответственно в количествах* a_i *(условных единиц). В пункты* B_j $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ *требуется доставить* b_j *единиц продукции. Стоимость перевозки единицы груза (с учетом расстояний) из* A_i *в* B_j *определена матрицей* $C = (c_{ij})$.

Предприятия могут выпускать в день 235, 175, 185 и 175 единиц продукции. Пункты потребления готовы принимать ежедневно 125, 160, 60, 250 и 175 единиц продукции. Стоимость перевозки единицы продукции (в у. е.) с предприятий в пункты потребления приведена в табл. 10.

Таблица 10

Предприятия	Потребители					Объемы производства
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	3,2	3	2,35	4	3,65	235
A_2	3	2,85	2,5	3,9	3,55	175
A_3	3,75	2,5	2,4	3,5	3,4	185
A_4	4	2	2,1	4,1	3,4	175
Потребности	125	160	60	250	175	

Требуется минимизировать суммарные транспортные расходы по перевозке продукции.

Решение.

Необходимо выполнить следующее:

1. Установить, является ли модель транспортной задачи, заданная таблицей, сбалансированной.

2. Разработать математическую модель задачи.

3. Найти минимальную стоимость перевозок, используя надстройку «Поиск решения» в среде MS Excel.

Решение.

1. Выполним проверку сбалансированности математической модели задачи. Модель является сбалансированной, так как суммарный объем производимой продукции в день равен суммарному объему потребности в ней:

$$235 + 175 + 185 + 175 = 125 + 160 + 60 + 250 + 175$$

(При решении этой задачи не учитываются издержки, связанные со складированием и недопоставкой продукции).

2. Приступим к построению математической модели поставленной задачи. Неизвестными будем считать объемы перевозок.

Пусть x_{ij} – объем перевозок с *i-го* пункта поставки в *j-й* пункт потребления. Суммарные транспортные расходы – это функция $F=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}c_{ij}x_{ij}$, где c_{ij} – стоимость перевозки единицы продукции с *i-го* предприятия в *j-й* пункт потребления $(i=\overline{1,4};\ \ j=\overline{1,5})$.

Неизвестные в этой задаче должны удовлетворять следующим ограничениям:

• Объемы перевозок не могут быть отрицательными, т. е. $x_{ij}\geq 0$;

• Поскольку модель сбалансирована, то вся продукция должна быть вывезена с предприятий, а потребности всех пунктов потребления должны быть полностью удовлетворены, т. е. $\sum_{i=1}^{4}x_{ij}=b_j$ и $\sum_{j=1}^{5}x_{ij}=a_i$.

Итак, имеем следующую задачу ЛП:

найти минимум функции: $F=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5}c_{ij}x_{ij}\to\min$

при ограничениях: $\sum_{i=1}^{4}x_{ij}=b_j, j\in[1,5]$, $\sum_{j=1}^{5}x_{ij}=a_i, i\in[1,4]$

$x_{ij}\geq 0,\quad i\in[1,4],\quad j\in[1,5]$

3. Приступаем к решению задачи на компьютере.

3.1. Откроем новый рабочий лист Excel.

3.2. В ячейки **B3:F6** стоимость перевозок единицы груза.

3.3. В ячейках **B16:F16** укажем формулы для расчета суммарной потребности продукции для *j-го* пункта, в ячейках **G12:G15** – формулы суммарного объема производства *i-го* предприятия.

3.4. В ячейки **B18:F18** заносим значения потребности продукции соответствующего пункта потребления, в ячейки **H12:H15** заносим значения объема производства соответствующего предприятия.

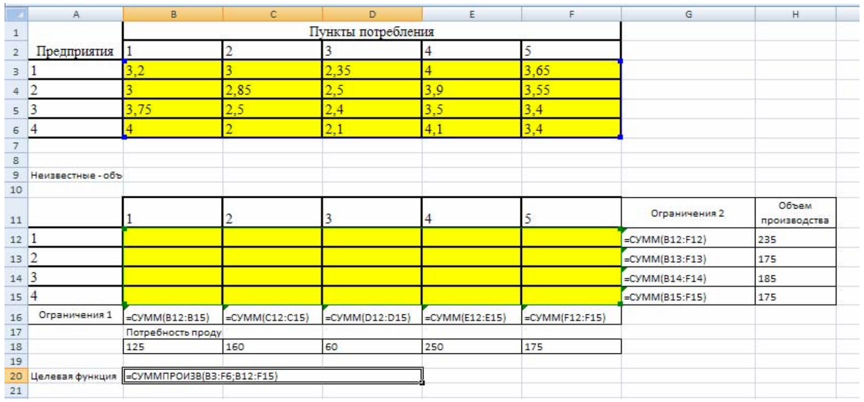
3.5. В ячейку **B20** занесем формулу целевой функции.

3.6. Выполним команду **Сервис → Поиск решения**. Откроется диалоговое окно **Поиск решения**.

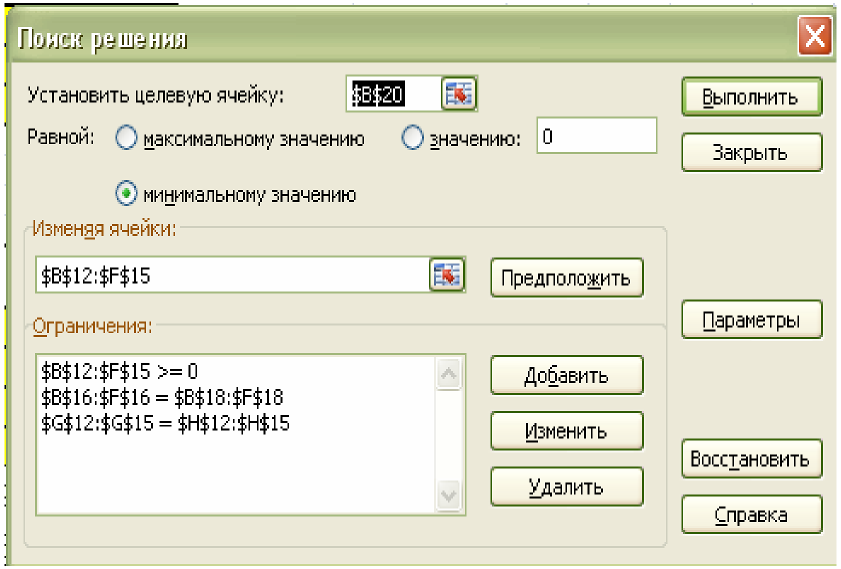
3.7. В поле **Установить целевую ячейку** указываем ячейку, содержащую оптимизируемое значение. Установим переключатель **Равный** в положение **минимальному значению**.

3.8. В поле **Изменяя ячейки** мышью зададим диапазон подбираемых параметров **$B$12:$F$15**.

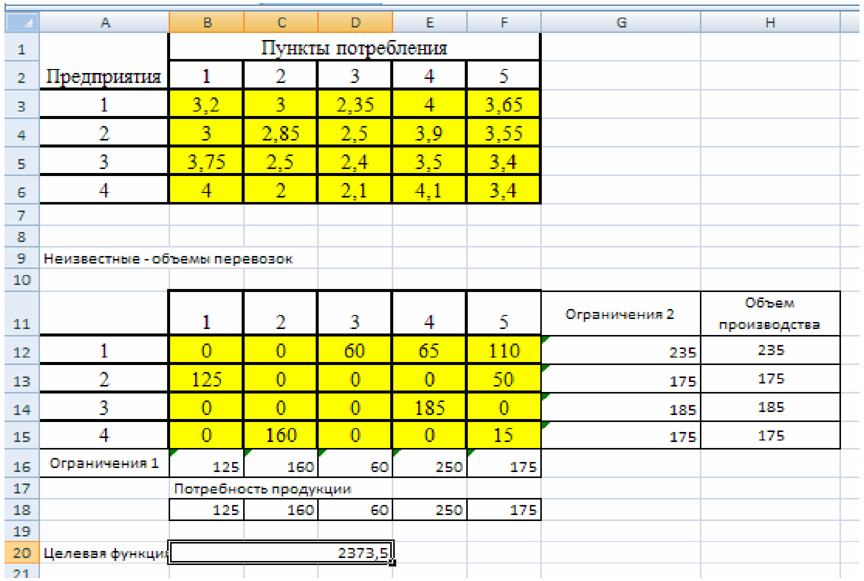
3.9. В поле **Ограничения** введем необходимые ограничения и нажмем на кнопку **Добавить**, затем **Выполнить**.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Пункты потребления						
2	Предприятия	1	2	3	4	5		
3	1	3,2	3	2,35	4	3,65		
4	2	3	2,85	2,5	3,9	3,55		
5	3	3,75	2,5	2,4	3,5	3,4		
6	4	4	2	2,1	4,1	3,4		
7								
8								
9	Неизвестные - объ							
10								
11		1	2	3	4	5	Ограничения 2	Объем производства
12	1						=СУММ(B12:F12)	235
13	2						=СУММ(B13:F13)	175
14	3						=СУММ(B14:F14)	185
15	4						=СУММ(B15:F15)	175
16	Ограничения 1	=СУММ(B12:B15)	=СУММ(C12:C15)	=СУММ(D12:D15)	=СУММ(E12:E15)	=СУММ(F12:F15)		
17		Потребность проду						
18		125	160	60	250	175		
19								
20	Целевая функция	=СУММПРОИЗВ(B3:F6;B12:F15)						
21								



В результате получится оптимальный набор переменных при данных ограничениях:



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Пункты потребления						
2	Предприятия	1	2	3	4	5		
3	1	3,2	3	2,35	4	3,65		
4	2	3	2,85	2,5	3,9	3,55		
5	3	3,75	2,5	2,4	3,5	3,4		
6	4	4	2	2,1	4,1	3,4		
7								
8								
9	Неизвестные - объемы перевозок							
10								
11		1	2	3	4	5	Ограничения 2	Объем производства
12	1	0	0	60	65	110	235	235
13	2	125	0	0	0	50	175	175
14	3	0	0	0	185	0	185	185
15	4	0	160	0	0	15	175	175
16	Ограничения 1	125	160	60	250	175		
17		Потребность продукции						
18		125	160	60	250	175		
19								
20	Целевая функция	2373,5						
21								

Оптимальность решения можно проверить, экспериментируя со значениями ячеек **$B$12:$F$15.**

2. Примеры решение задач линейного программирования в пакете Lingo

Пакет LINGO решает задачи линейного, нелинейного и целочисленного программирования. LINGO предоставляет большую гибкость в записи модели.

2.1. Изготовление продукции из нескольких компонент

Задача. *Изготовитель производит 6 продуктов из 6 материалов. На каждый продукт требуется различная комбинация исходных материалов в определенной пропорции.*

Известна прибыль, получаемая от продажи единицы каждого из продуктов.

Задано наличие (на складе) каждого из исходных материалов, которое не может быть превышено при изготовлении исходной продукции.

В табл. 11 приведены числовые данные задачи:

Таблица 11

Продукты		1	2	3	4	5	6	Запасы
Материалы	Сталь	1	4	–	4	2	–	800
	Дерево	4	5	3	–	1	–	1160
	Пластмасса	–	3	8	–	1	–	1760
	Резина	2	–	1	2	1	5	1050
	Стекло	2	4	2	2	2	4	1360
	Краска	1	4	1	4	3	4	1240
Прибыль на единицу продукции		30	45	24	26	24	30	

Необходимо максимизировать прибыль, которая может быть получена от продажи указанных продуктов, не превышая имеющихся запасов исходных материалов.

Решение.

Математическая формулировка задачи.

Если обозначить через Q_1, Q_2, ..., Q_6 соответственно количество продукции 1-го, 2-го и т. д. типов, то целевая функция, подлежащая оптимизации запишется как

$$30 \cdot Q_1 + 45 \cdot Q_2 + 24 \cdot Q_3 + 26 \cdot Q_4 + 24 \cdot Q_5 + 30 \cdot Q_6 \to \min$$

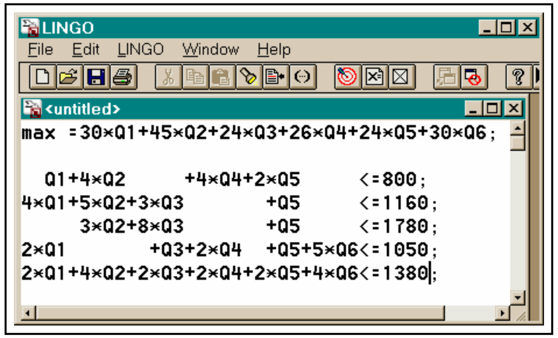
Ограничения определяются тем, что имеющиеся запасы исходных материалов не могут быть превышены. Известно, сколько расходуется каждого материала (например, стали) на каждый вид продукции, то общий расход стали будет равен $Q_1 + 4Q_2 + 4Q_4 + 2Q_2$. Следовательно, ограничение по стали будет иметь вид:

$$Q_1 + 4 \cdot Q_2 + 4 \cdot Q_4 + 4 \cdot Q_2 + 2 \cdot Q_5 \le 800$$

Аналогично для остальных материалов ограничения запишутся в виде:

$$\begin{array}{lllllll}
4 \cdot Q_1 & + 5 \cdot Q_2 & + 3 \cdot Q_3 & & + 1 \cdot Q_5 & & \le 1160 \\
 & 3 \cdot Q_2 & + 8 \cdot Q_3 & & + 1 \cdot Q_5 & & \le 1760 \\
2 \cdot Q_1 & & + 1 \cdot Q_3 & + 2 \cdot Q_4 & + 1 \cdot Q_5 & + 5 \cdot Q_6 & \le 1160 \\
2 \cdot Q_1 & + 4 \cdot Q_2 & + 2 \cdot Q_3 & + 2 \cdot Q_4 & + 2 \cdot Q_5 & + 4 \cdot Q_6 & \le 1360 \\
1 \cdot Q_1 & + 4 \cdot Q_2 & + 1 \cdot Q_3 & + 4 \cdot Q_4 & + 3 \cdot Q_5 & + 4 \cdot Q_6 & \le 1240
\end{array}$$

Для решения задачи на экране LINGO наберите следующий текст (фактически повторяющий вышеприведенную формальную постановку задачи):



И нажмите кнопку

Можно также воспользоваться командой меню:

LINGO/Solve.

2.2. Изготовление смеси

Рацион для животных фермы составляется как смесь нескольких питательных кормов G_1, G_2, G_3, G_4.

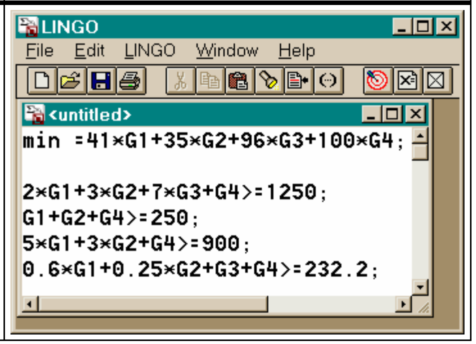
Каждый из этих кормов включает в себя необходимые для роста и здоровья животных вещества A, B, C, D. Состав каждого корма (сколько в нем находится веществ A, B, C, D) задан в таблице. Известна цена единицы каждого из кормов. Каждое из веществ должно присутствовать в рационе не менее некоторого количества, необходимого для нормального развития животных (Этот необходимый минимум приведен также в табл. 12). Необходимо минимизировать цену кормовой смеси.

Таблица 12

	Корм				Минимум вещества
	1	2	3	4	
Вещество *A*	2	3	7	1	1250
« *B*	1	1	0	1	2500
« *C*	5	3	0	1	900
« *D*	0,6	0,25	1	1	232,5
Цена за единицу корма	41	35	96	100	

Решение.

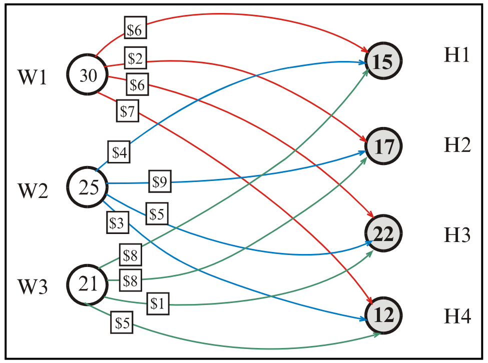
Таблица 13

<table>
<tr><th>Математическая постановка задачи</th><th>Запись задачи в LINGO</th></tr>
<tr><td>Целевая функция:
$41G_1 + 35G_2 + 96G_3 + 100G_4 \to \min$
Ограничения:
$2G_1 + 3G_2 + 7G_3 + G_4 \ge 1250$
$G_1 + G_2 + G_4 \ge 2500$
$5G_1 + 3G_2 + G_4 \ge 900$
$0{,}6G_1 + 0{,}25G_2 + G_3 + G_4 \ge 232{,}2$</td><td>
</td></tr>
</table>

2.3. Простая распределительная сеть (транспортная задача)

Простая распределительная сеть представляет собой сеть маршрутов, по которым передаются некоторые предметы потребления (вода, нефть, электроэнергия, грузы товаров и т. п.) от нескольких поставщиков (источников) в некоторые пункты назначения.

Средствами транспортировки (в зависимости от характера передаваемых товаров) могут являться трубопроводы, линии электропередачи, автомобильные или железнодорожные магистрали и т. п.



<u>Задача.</u> *Автотранспортное предприятие должно обеспечить перевозку товаров с 3-х складов (W_1, W_2, W_3) к 4-м магазинам (C_1, C_2, C_3, C_4).*

Известна цена перевозки единицы груза по каждому из маршрутов. Необходимо обеспечить перевозку грузов с минимальны-ми затратами.

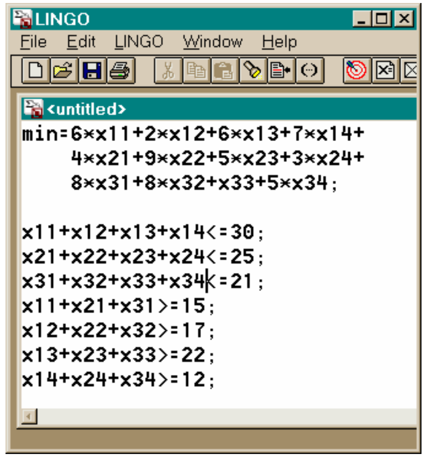
<u>*Ограничения*</u>:

а) количеств о вывозимых с каждого склада товаров не должно превышать величину запасов этого товара на складе,

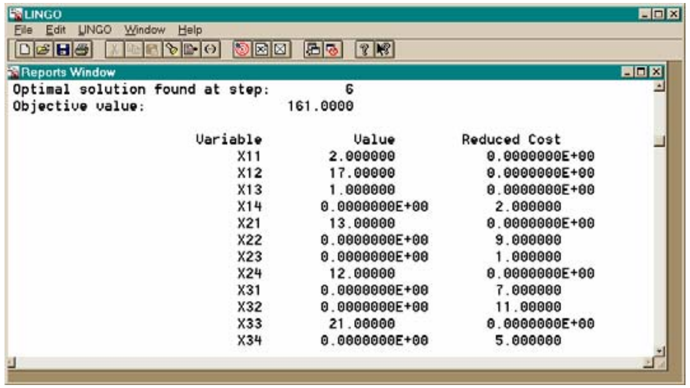
б) количество доставляемого товара к каждому магазину не должно быть меньше его потребностей.

<u>Решение</u> (см. табл. 14).

Таблица 14

<table>
<tr><th>Математическая формулировка задачи</th><th>Запись задачи в LINGO</th></tr>
<tr><td>Обозначим через x_{ij} количество товара, перевозимого с i-го склада к j-му потребителю (например, x_{24} будет соответствовать количеству товара, которое следует перевезти со 2-го склада в 4-й магазин)
Целевая функция:
$6x_{11}+2x_{12}+6x_{13}+7x_{14}$
$+4x_{21}+9x_{22}+5x_{23}+3x_{24}$
$+8x_{31}+8x_{32}+1x_{33}+5x_{34} \to \min$
Ограничения:
$x_{11}+x_{12}+x_{13} \le 30$
$x_{21}+x_{22}+x_{23} \le 25$
$x_{31}+x_{32}+x_{33} \le 21$
Нельзя превысить запасы на каждом складе
$x_{11}+x_{21}+x_{31} \ge 15$
$x_{12}+x_{22}+x_{32} \ge 17$
$x_{13}+x_{23}+x_{33} \ge 22$
$x_{14}+x_{24}+x_{34} \ge 12$
Суммарное количество товара, подвозимого к каждому магазину должно быть не меньше его потребностей</td><td>
</td></tr>
</table>

Решение задачи, которое получено в LINGO, выглядит так:



Глава 5

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1

Используя геометрическую интерпретацию, найти решение задачи линейного программирования.

№ варианта	Условия задачи ЛП	№ варианта	Условия задачи ЛП
1	$Z = 6x_1 + 7x_2(\max)$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 42, \\ x_1 + 2x_2 \le 22, \\ -2x_1 + x_2 \le 8, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$	2	$Z = x_1 + x_2(\max)$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14, \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15, \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 24, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$
3	$Z = 3x_1 + 2x_2(\min)$ $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 42, \\ x_1 + x_2 \ge 6, \\ -x_1 + 2x_2 \le 6, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$	4	$Z = x_1 + 2x_2(\max)$ $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 16, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$
5	$Z = -2x_1 + x_2(\min)$ $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \ge 6, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$	6	$Z = 2x_1 + x_2(\max)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - 3x_2 \le 6, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$
7	$Z = 2x_1 + x_2(\max)$ $\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 \le 5, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$	8	$Z = 10x_1 + 2x_2(\max)$ $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 2, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$

Окончание таблицы

№ варианта	Условия задачи ЛП	№ варианта	Условия задачи ЛП
9	$Z = x_1 + 2x_2(\max)$ $\begin{cases} x_1 + 2x \le 13, \\ 3x_1 - x_2 \le 11, \\ -x_1 + x_2 \le 2, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$	10	$Z = 3x_1 + 2x_2(\max)$ $\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 \le 38, \\ -2x_1 + 7x_2 \le 42, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \end{cases}$ $x_1, x_2 \ge 0$

Вариант 11.

В кондитерском цехе выпекают печенье двух сортов. В таблице указан расход продуктов для каждого сорта и количество имеющихся продуктов.

Сорт продукции	Расход продуктов, кг				
	Масло	Яйца	Сахар	Молоко	Стоимость 1 кг печенья, руб.
1 сорт	0,2	0,25	0,15	0,15	80
2 «	0,1	0,20	0,20	0,25	60
Запас продуктов, кг	100	150	100	150	

Какое количество печенья каждого сорта надо выпекать, чтобы его общая стоимость была наибольшей?

Вариант 12.

Ежедневный рацион кормления скота включает сено и концентраты. В таблице указаны содержание кормовых единиц, белка и кальция в 1 кг корма, себестоимость кормов и минимальная суточная потребность в питательных веществах. Составить наиболее дешевый рацион питания.

Виды кормов	Содержание в 1 кг кормов			Себестоимость 1 кг кормов, руб.
	Кормовых единиц	Белка, г	Кальция, г	
Сено	0,5	50	10	15
Концентраты	1,0	200	2	25
Минимальная суточная потребность	20	2000	100	

Вариант 13.

Для производства двух видов продукции на предприятии используются три вида сырья. В таблице даны запасы сырья, нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции и прибыль, получаемая от реализации единицы продукции.

Виды сырья	Норма расхода сырья на выпуск изделий, кг		Запасы сырья, кг
	$П_1$	$П_2$	
C_1	3	5	453
C_2	4	8	616
C_3	3	11	627
Прибыль от реализации ед. продукции, руб.	200	500	

Составить план выпуска продукции, обеспечивающий максимальную прибыль от реализации производственной продукции.

Вариант 14.

Для производства различных изделий *A* и *B* используются три вида сырья. Запасы сырья ограничены. В таблице указаны нормы расхода сырья на изготовление единицы продукции, запасы сырья и доход, получаемый от реализации одного изделия каждого вида.

Виды сырья	Норма расхода сырья на выпуск продукции, кг		Запасы сырья, кг
	A	*B*	
C_1	15	4	1095
C_2	11	5	865
C_3	9	10	1080
Прибыль от реализации ед. продукции, руб.	300	200	

План реализации не менее 18000 руб. Сколько изделий каждого типа надо производить, чтобы их общее количество было максимальным?

Вариант 15.

Для производства двух видов продукции на предприятии используется четыре группы оборудования в количествах, указанных в таблице.

Группа оборудования	Необходимое количество единиц оборудования на выпуск 1 комплекта продукции		Количество оборудования в группе
	1	*2*	
A	2	2	12
B	1	2	8
C	4	0	16
Д	0	4	12
Чистый доход на 1 штуку, тыс. руб.	2	3	

Организовать выпуск продукции так, чтобы чистый доход от производства продукции был максимальным.

Вариант 16.

Для изготовления двух различных изделий *A* и *B* используются три вида сырья. В таблице указаны нормы расхода сырья на производстве единицы изделия каждого вида, объем ресурсов, стоимость изделий.

Виды сырья	Норма расхода сырья на выпуск продукции, кг		Объем ресурсов, кг
	A	*B*	
1	8	6	1620
2	5	7	1400
3	7	3	1540
Стоимость единицы продукции, руб.	10	12	

Составить план производства, максимизирующий общую стоимость продукции.

Вариант 17.

При подкормке посевов нужно ввести на 1 га почвы химических веществ *А*, *В*, *С*, *Д* в количествах, не менее указанных в таблице. Совхоз закупает комбинированные удобрения двух видов. В таблице указаны содержание химических веществ и цена единицы каждого вида удобрения.

Химические вещества	Содержание химического вещества в удобрении		Норма расхода химических веществ на 1 га
	1	*2*	
А	2	1	60
В	2	4	120
С	–	4	40
Д	6	–	90
Цена единицы веса удобрения, руб.	50	60	

Составить план наиболее экономичной закупки удобрений.

Вариант 18.

Предприятие может работать по двум технологическим процессам, причем за единицу времени по первой технологии выпускает 260 изделий, по второй 300 изделий. В таблице указаны затраты каждого ресурса в единицу времени.

Ресурсы	Технологический процесс		Объем ресурсов
	1	*2*	
Сырье	15	12	1200
Электроэнергия	0,2	0,4	30
Накладные расходы	6	5	600
Зарплата	3	4	300

Найти программу максимального выпуска продукции из имеющихся ресурсов.

Вариант 19.

Предприятие организует цех по изготовлению шкафов и столов. В таблице указаны нормы затрат рабочего времени, древесины, стекла на изготовление одного шкафа и одного стола, а также объемы ресурсов и прибыль, получаемые предприятием от реализации единицы продукции.

Виды продукции	Нормы затрат			Прибыль на единицу продукции, руб.
	рабочее время, чел.-ч	древесина, $м^3$	стекло, $м^3$	
Стол	9,2	0,3	–	300
Шкаф	4,0	0,6	2,0	300
Ресурсы	520	24	80	

Найти план выпуска продукции, максимизирующий прибыль.

Вариант 20.

Предприятие располагает запасами сырья, рабочей силы, оборудованием для производства двух видов товара. Затраты ресурсов на единицу каждого вида товара, прибыль и запасы ресурсов даны в таблице.

Вид ресурсов	Вид товара		Объем ресурса
	1	*2*	
Сырье, кг	6	5	150
Рабочая сила, ч	2	4	60
Оборудование, станко-ч	4	16	200
Прибыль на единицу товара, руб.	100	300	

Составить план производства, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

Вариант 21.

Для производства двух видов изделий используется три вида ресурсов. Объем ресурсов ограничен. В таблице даны объемы ресурсов, нормы расхода каждого из ресурсов на одно изделие каждого вида и прибыль, получаемая от реализации одного изделия каждого вида.

Виды ресурсов	Объем ресурса	Нормы расхода на 1 изделие	
		1	*2*
Сталь, т	560	10	70
Цветные металлы, кг	510	20	50
Станки, станко-ч	3100	200	100
Прибыль, тыс. руб.		500	800

Определить план выпуска продукции, при которой будет достигнута наибольшая прибыль.

Вариант 22.

Фабрика производит ткань двух сортов. В таблице указаны нормы расхода ресурсов и объем ресурсов. Найти план выпуска ткани, максимизирующий ее стоимость.

Виды ресурсов	Объем ресурсов	Нормы расхода на 1 тыс. м. ткани по сортам	
		1	*2*
Станки, станко-ч	30 тыс.	20	10
Пряжа, кг	300 тыс.	120	180
Красители, кг	2 тыс.	1	0,5
Цена, руб.		120	100

Вариант 23.

Фарфоровый завод приступил к производству изделий из беложгущихся глин: чайницы «Невская» с рисунком «Сувенир олимпийцам» и декоративного блюда с рисунком «Москва – столица». Затраты времени на единицу изделия по каждому цеху приведены в таблице.

Цехи	Затраты времени на единицу изделия, ч		Фонд времени работы цехов, ч
	Чайница	Блюдо	
Цех формовки и обжига	1,5	2	600
Цех покрытия цветными глазурями	0,8	–	192
Цех ручной росписи	–	2	240

Найти количество выпускаемых изделий каждого наименования, при котором будет достигнут максимум выпускаемой продукции.

Вариант 24.

Определить оптимальные в стоимостном выражении объемы производств двух видов духов. В таблице указаны составляющие компоненты, их расходы на производство одного флакона, а также их стоимость и запасы сырья.

Составляющие	Расход компонентов на 1 флакон, г		Объемы ресурсов, кг
	«Летний сад»	«Белые ночи»	
Спиртовые вытяжки:			
свежая зелень	49,5	–	1485
жасмин	20	20	480
роза	20	–	320
ландыш	10	20	320
фиалка	–	50	600
Амбра	0,5	–	10
Масла цитрусовых	–	5	100
Альдегиды	–	5	200

Цена одного флакона духов «Летний сад» 300 руб., «Белые ночи» – 100 руб.

Вариант 25.

Кондитерская фабрика выпускает два вида продукции: пастилу и мармелад, расфасованные в коробки. Сколько нужно выпустить коробок пастилы и коробок мармелада, чтобы прибыль предприятия от реализации продукции была максимальной. В таблице указаны запасы продуктов и их расход на производство одной коробки продукции, а также цена 1 коробки.

Продукты	Запасы продуктов, кг	Расход продуктов на одну коробку изделия, в кг	
		1	*2*
Яблочное пюре	240	0,4	0,4
Сахар	160	0,2	0,4
Ароматические вещества	12	0	0,004
Яичный белок	160	0,4	0
Цена 1 коробки изделия, руб.		51	44

Вариант 26.

Для производства двух видов изделий *A* и *B* используется три типа оборудования. В таблице дано время изготовления единицы изделия, ресурсы времени использования каждого типа оборудования, прибыль от реализации единицы изделий каждого вида. Составить план производства, максимизирующий прибыль от реализации продукции.

Типы оборудования	Время изготовления изделия, ч		Ресурсы времени, ч
	A	*B*	
1	7	8	168
2	5	10	180
3	6	12	106
Прибыль, руб.	140	180	

Вариант 27.

Имеются два вида изделий, каждое из которых должно пройти обработку на четырех станках: *1*, *2*, *3*, *4*. В таблице заданы время обработки каждого изделия, ресурсы времени, прибыль от реализации одного изделия каждого вида.

Изделие	Время обработки изделий на станках, ч				Прибыль от реализации, руб.
	1	*2*	*3*	*4*	
A	2	4	3	1	600
B	0,25	2	1	4	400
Ресурсы времени, ч	45	100	300	50	

Сколько изделий каждого вида надо изготовить, чтобы прибыль предприятия от реализации этих изделий была наибольшей, если изделий *A* требуется в количестве не менее 22 штук?

Вариант 28.

Для изготовления двух видов тары (бочек и ящиков) употребляют два вида древесины. Расход древесины каждого вида на каждое изделие, объем ресурсов и прибыль на единицу изделия даны в таблице.

Изделия	Расход древесины по видам, м^3		Прибыль на единицу изделия, руб.
	1	*2*	
Бочки	0,15	0,2	1,5
Ящики	0,2	0,1	1,2
Объем ресурсов, м^3	60	40	

Определить, сколько ящиков и бочек должен изготовить завод, чтобы прибыль была максимальной.

Вариант 29.

На заводе скапливается ежемесячно около 14 тонн отходов металла, из которого можно изготовить большие и малые шайбы. Месячная потребность завода в больших шайбах 600 тыс. штук, в малых 1100 тыс. шт. (недостающее количество шайб закупается на специализированном предприятии). Оптовая цена больших шайб 119 руб., малых – 52 руб. за тыс. штук. Расход металла на тыс. больших шайб – 22 кг, за тысячу малых – 8 кг. Для их изготовления используется два пресса холодной штамповки. Производительность каждого за смену 9 тыс. шт. больших шайб или 11,5 тыс. шт. малых. Завод работает в две смены. В месяце 25 рабочих дней. Составить план производства шайб, минимизирующих стоимость шайб, закупаемых заводом.

Вариант 30.

В цехе производятся аппараты двух видов. Цены на аппараты соответственно 800 и 500 руб. План реализации – не менее 14000 руб. Расход цветного металла 320 и 250 г, фонд – 80 кг. Фонд рабочего времени 4400 часов. Для изготовления одного аппарата требуется соответственно 10 и 16 часов. Сколько аппаратов каждого типа надо выпустить, чтобы их общее количество было максимальным?

Задание 2
(Ресурсная задача)

Для изготовления изделий типа *A* и *B* используется сырье трех видов, запасы каждого из которых P_1, P_2, P_3. На производство одного изделия типа *A* требуется затратить a_1 кг сырья первого вида, a_2 кг сырья второго вида, a_3 кг сырья третьего вида. На одно изделие типа *B* расходуется соответственно b_1, b_2, b_3 кг сырья каждого вида. Прибыль от реализации единицы изделия *A* составляет α/ден. ед., а изделия *B* – β/ден. ед. Составить план производства изделий *A* и *B*, обеспечивающий максимальную прибыль от их реализации. Решить задачу симплекс-методом. Дать геометрическое истолкование задачи. Все данные приведены в табл. 7.

Таблица 7

№ варианта	Изделие типа *A*				Изделие типа *B*				Запасы сырья		
	Затраты сырья на 1 изделие			Цена 1 изделия	Затраты сырья на 1 изделие			Цена 1 изделия			
	a_1	a_2	a_3	α	b_1	b_2	b_3	β	P_1	P_2	P_3
1	16	8	5	4	4	7	9	6	784	552	567
2	12	10	3	6	3	5	6	2	684	690	558
3	4	3	3	6	3	4	5	5	440	393	450
4	11	8	5	5	3	3	3	3	800	500	420
5	15	11	9	3	4	5	10	2	1095	865	1080
6	8	7	4	2	3	6	9	3	864	864	945
7	4	3	2	2	3	4	6	4	480	444	546
8	6	5	3	3	3	10	12	9	714	910	948
9	9	6	3	3	4	7	8	2	801	807	768
10	3	4	3	2	5	8	11	3	453	616	627
11	3	3	2	4	2	3	5	5	273	300	380
12	2	4	3	4	6	2	3	6	486	396	351
13	3	4	2	4	9	2	2	3	648	352	208
14	2	6	3	2	10	3	5	5	900	702	540
15	1	4	3	6	5	2	5	5	350	364	420
16	1	4	3	5	4	3	4	10	352	484	440
17	2	3	4	8	8	4	3	7	384	240	264
18	4	1	4	6	1	2	3	3	220	140	260
19	2	7	6	6	4	3	1	2	480	580	450
20	2	3	3	7	1	6	7	5	438	747	812
21	2	3	2	3	3	6	8	8	428	672	672
22	8	6	3	6	2	3	2	2	840	870	560
23	5	4	3	6	3	3	4	6	750	630	700
24	6	4	3	6	2	3	4	3	600	520	600
25	9	7	4	3	5	8	16	2	1431	1224	1328
26	3	4	3	2	5	8	11	3	453	616	627
27	2	6	3	2	10	3	5	5	900	702	540
28	4	3	2	2	3	4	6	4	480	444	546
29	4	1	4	6	1	2	3	3	220	140	260
30	12	10	3	6	3	5	6	2	684	690	558

Задание 3
(Транспортная задача)

Имеются три пункта поставки однородного груза A_1, A_2, A_3 и пять пунктов потребления этого груза B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. На пунктах A_I (I = 1, 2, 3) груз находится соответственно в количествах a_1, a_2, a_3 условных единиц. В пункты B_J (J = 1, 2, 3, 4, 5) требуется доставить соответственно b_J единиц груза. Стоимость перевозки единицы груза (с учетом расстояний) из A_I в B_J определена матрицей $C = \{c_{ij}\}$. Решить задачу тремя методами (северо-западного угла, минимальной стоимости и методом Фогеля) и найти такой план закрепления потребителей и поставщиков, чтобы общие затраты на перевозки были минимальны.

1). $a_1 = 200, a_2 = 170, a_3 = 180,$

$b_1 = 100, b_2 = 70, b_3 = 180,$

$b_4 = 150, b_5 = 50$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 8 & 10 & 2 \\ 10 & 3 & 5 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

2). $a_1 = 120, a_2 = 250, a_3 = 150,$

$b_1 = 90, b_2 = 70, b_3 = 160,$

$b_4 = 130, b_5 = 70$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 7 & 7 & 3 \\ 9 & 6 & 8 & 4 & 7 \\ 11 & 5 & 7 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

3). $a_1 = 280, a_2 = 350, a_3 = 250,$

$b_1 = 130, b_2 = 100, b_3 = 300,$

$b_4 = 270, b_5 = 80$

$$C = \begin{pmatrix} 13 & 8 & 10 & 9 & 6 \\ 12 & 9 & 11 & 5 & 8 \\ 14 & 7 & 10 & 14 & 9 \end{pmatrix}$$

4). $a_1 = 250, a_2 = 270, a_3 = 150,$

$b_1 = 100, b_2 = 170, b_3 = 160,$

$b_4 = 170, b_5 = 70$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 & 16 \\ 8 & 9 & 15 & 4 & 18 \\ 10 & 11 & 13 & 7 & 20 \end{pmatrix}$$

5). $a_1 = 230, a_2 = 250, a_3 = 200,$

$b_1 = 100, b_2 = 180, b_3 = 160,$

$b_4 = 160, b_5 = 80$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 & 15 & 4 \\ 12 & 7 & 11 & 5 & 3 \\ 9 & 5 & 17 & 14 & 10 \end{pmatrix}$$

6). $a_1 = 100, a_2 = 140, a_3 = 150,$

$b_1 = 60, b_2 = 50, b_3 = 80,$

$b_4 = 160, b_5 = 40$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 7 & 5 & 8 \\ 9 & 8 & 3 & 1 & 7 \\ 9 & 6 & 5 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

7). $a_1 = 175, a_2 = 150, a_3 = 125,$

$b_1 = 105, b_2 = 75, b_3 = 50,$

$b_4 = 145, b_5 = 75$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 5 & 6 & 6 \\ 12 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 11 & 5 & 6 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

8). $a_1 = 200, a_2 = 250, a_3 = 160,$

$b_1 = 120, b_2 = 120, b_3 = 100,$

$b_4 = 210, b_5 = 60$

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 16 & 12 & 20 \\ 21 & 9 & 10 & 9 & 7 \\ 12 & 15 & 16 & 13 & 21 \end{pmatrix}$$

9). $a_1 = 390, a_2 = 450, a_3 = 400,$

$b_1 = 310, b_2 = 250, b_3 = 150,$

$b_4 = 440, b_5 = 90$

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 11 & 10 & 12 & 12 \\ 25 & 9 & 13 & 14 & 10 \\ 24 & 7 & 10 & 13 & 22 \end{pmatrix}$$

10). $a_1 = 300, a_2 = 360, a_3 = 400,$

$b_1 = 150, b_2 = 350, b_3 = 300,$

$b_4 = 150, b_5 = 110$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 15 & 7 & 20 & 3 \\ 8 & 6 & 9 & 3 & 2 \\ 10 & 7 & 11 & 15 & 20 \end{pmatrix}$$

11). $a_1 = 270, a_2 = 390, a_3 = 290,$

$b_1 = 150, b_2 = 100, b_3 = 250,$

$b_4 = 340, b_5 = 110$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 17 & 11 & 15 & 3 & 7 \\ 20 & 9 & 15 & 7 & 25 \end{pmatrix}$$

12). $a_1 = 380, a_2 = 450, a_3 = 420,$

$b_1 = 230, b_2 = 200, b_3 = 400,$

$b_4 = 270, b_5 = 150$

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 9 & 7 & 13 & 10 \\ 14 & 10 & 3 & 14 & 7 \\ 16 & 8 & 10 & 12 & 17 \end{pmatrix}$$

13). $a_1=150, a_2=230, a_3=250,$
$b_1=110, b_2=100, b_3=200,$
$b_4=140, b_5=80,$

$$C=\begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 7 & 5 \\ 7 & 9 & 3 & 7 & 4 \\ 8 & 7 & 5 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

14). $a_1=250, a_2=190, a_3=200,$
$b_1=180, b_2=100, b_3=130,$
$b_4=140, b_5=90$

$$C=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 9 & 5 & 6 \\ 2 & 9 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

15). $a_1=180, a_2=210, a_3=190,$
$b_1=100, b_2=150, b_3=130,$
$b_4=120, b_5=80$

$$C=\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

16). $a_1=310, a_2=250, a_3=240,$
$b_1=290, b_2=110, b_3=170,$
$b_4=130, b_5=100$

$$C=\begin{pmatrix} 7 & 9 & 5 & 6 & 3 \\ 4 & 6 & 8 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 9 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

17). $a_1=280, a_2=200, a_3=220,$
$b_1=110, b_2=100, b_3=220,$
$b_4=180, b_5=90$

$$C=\begin{pmatrix} 10 & 4 & 5 & 8 & 6 \\ 7 & 3 & 6 & 9 & 10 \\ 9 & 8 & 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

18). $a_1=170, a_2=230, a_3=180,$
$b_1=95, b_2=130, b_3=120,$
$b_4=155, b_5=80$

$$C=\begin{pmatrix} 10 & 9 & 3 & 7 & 5 \\ 9 & 7 & 5 & 12 & 13 \\ 8 & 5 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

19). $a_1=260, a_2=190, a_3=120,$
$b_1=100, b_2=120, b_3=200$
$b_4=80, b_5=70$

$$C=\begin{pmatrix} 11 & 3 & 7 & 8 & 4 \\ 10 & 4 & 11 & 13 & 12 \\ 9 & 6 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

20). $a_1=330, a_2=300, a_3=270,$
$b_1=120, b_2=200, b_3=310,$
$b_4=190, b_5=80$

$$C=\begin{pmatrix} 12 & 6 & 7 & 3 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 9 & 6 \\ 7 & 14 & 10 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

21). $a_1=280, a_2=170, a_3=260,$
$b_1=160, b_2=140, b_3=200,$
$b_4=100, b_5=110$

$$C=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 11 & 6 & 8 \\ 7 & 3 & 9 & 5 & 8 \\ 5 & 11 & 12 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

22). $a_1=300, a_2=260, a_3=230,$
$b_1=140, b_2=250, b_3=150,$
$b_4=160, b_5=90$

$$C=\begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 & 8 & 5 \\ 5 & 10 & 7 & 11 & 6 \\ 7 & 13 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

23). $a_1=200, a_2=150, a_3=50,$
$b_1=60, b_2=70, b_3=80,$
$b_4=90, b_5=100$

$$C=\begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 6 & 8 & 5 & 10 \\ 3 & 4 & 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

24). $a_1=200, a_2=130, a_3=250,$
$b_1=90, b_2=100, b_3=160,$
$b_4=150, b_5=80$

$$C=\begin{pmatrix} 9 & 11 & 8 & 7 & 5 \\ 13 & 3 & 5 & 10 & 6 \\ 6 & 7 & 10 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

25). $a_1=200, a_2=260, a_3=240,$
$b_1=120, b_2=180, b_3=210,$
$b_4=90, b_5=100,$

$$C=\begin{pmatrix} 6 & 10 & 7 & 5 & 4 \\ 10 & 9 & 5 & 8 & 3 \\ 8 & 13 & 11 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

26). $a_1=200, a_2=170, a_3=180,$
$b_1=100, b_2=70, b_3=180,$
$b_4=150, b_5=50$

$$C=\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 8 & 10 & 2 \\ 10 & 3 & 5 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

27). $a_1=250, a_2=190, a_3=200,$
$b_1=180, b_2=100,$
$b_3=130, b_4=140, b_5=90$

$$C=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 & 3 & 4 \\ 3 & 7 & 9 & 5 & 6 \\ 2 & 9 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

28). $a_1=200, a_2=250, a_3=160,$
$b_1=120, b_2=120, b_3=100,$
$b_4=210, b_5=60$

$$C=\begin{pmatrix} 10 & 15 & 16 & 12 & 20 \\ 21 & 9 & 10 & 9 & 7 \\ 12 & 15 & 16 & 13 & 21 \end{pmatrix}$$

29). $a_1 = 230,\ a_2 = 250,\ a_3 = 200,$
$b_1 = 100,\ b_2 = 180,$
$b_3 = 160,\ b_4 = 160,\ b_5 = 80$

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 & 15 & 4 \\ 12 & 7 & 11 & 5 & 3 \\ 9 & 5 & 17 & 14 & 10 \end{pmatrix}$$

30). $a_1 = 270,\ a_2 = 390,\ a_3 = 290,$
$b_1 = 150,\ b_2 = 100,\ b_3 = 250,$
$b_4 = 340,\ b_5 = 110$

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 6 & 5 & 6 \\ 17 & 11 & 15 & 3 & 7 \\ 20 & 9 & 15 & 7 & 25 \end{pmatrix}$$

Задание 4

Дана целевая функция и нелинейная система ограничений. Графическим методом найти глобальные экстремумы (максимум и минимум) задачи.

№ вар.	Задача	№ вар.	Задача
1	$z = 2x_1 + x_2 (\max, \min)$ $\begin{cases} (x_1-2)^2 + (x_2-1)^2 \ge 4, \\ (x_1-2)^2 + (x_2-1)^2 \le 9, \\ x_1 + x_2 \ge 3; \end{cases}$ $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$	2	$z = x_1 + x_2 (\max, \min)$ $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \ge 9, \\ (x_1-3)^2 + (x_2-3)^2 \le 4; \end{cases}$ $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$
3	$z = x_1 - x_2 (\max, \min)$ $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 9, \\ (x_1-3)^2 + (x_2-3)^2 \le 4; \end{cases}$ $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$	4	$z = x_1 - x_2 (\max, \min)$ $\begin{cases} (x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 \ge 1, \\ (x_1-3)^2 + (x_2-3)^2 \le 9; \end{cases}$ $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$
5	$z = x_1 + x_2 (\max, \min)$ $\begin{cases} x_1 x_2 \ge 1, \\ x_1^2 + x_2^2 \le 9; \end{cases}$ $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$	6	$z = x_1 - x_2 (\max, \min)$ $\begin{cases} (x_1-2) + (x_2+1) \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 6; \end{cases}$ $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

№ вар.	Задача	№ вар.	Задача
7	$z = 4x_1 + x_2 (\max, \min)$ $\begin{cases} (x_1-2)^2 + (x_2-1)^2 \ge 4, \\ (x_1-2)^2 + (x_2-1)^2 \le 9, \\ x_1 + x_2 \le 5; \end{cases}$ $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$	8	$z = 2x_1 - x_2 (\max, \min)$ $\begin{cases} (x_1-2)(x_2+1) \ge 4, \\ x_1 + x_2 \le 6; \end{cases}$ $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$
9	$z = x_1 - 2x_2 (\max, \min)$ $\begin{cases} x_1 x_2 \ge 1, \\ (x_1-4)(x_2-4) \ge \frac{11}{3}, \\ x_1 \le 4; \end{cases}$ $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$	10	$z = x_1 - 2x_2 (\max, \min)$ $\begin{cases} x_1 x_2 \le 1, \\ (x_1-4)(x_2-4) \ge \frac{11}{3} \\ x_1 \le 4; \end{cases}$ $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$
11	$z = 2x_1 + x_2 (\max, \min)$ $\begin{cases} (x_1-2)^2 + (x_2-1)^2 \ge 4, \\ (x_1-2)^2 + (x_2-1)^2 \le 9, \\ x_1 + x_2 \le 3; \end{cases}$ $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$	12	$z = x_1 - x_2 (\max, \min)$ $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \ge 9, \\ (x_1-3)^2 + (x_2-3)^2 \le 4; \end{cases}$ $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$
13	$z = x_1 + x_2 (\max, \min)$ $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 9, \\ (x_1-3)^2 + (x_2-3)^2 \le 4; \end{cases}$ $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$	14	$z = x_1 + x_2 (\max, \min)$ $\begin{cases} (x_1-2)^2 + (x_2-1)^2 \ge 1, \\ (x_1-3)^2 + \left(x_2-3\right)^2 \le 9; \end{cases}$ $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$
15	$z = x_1 + x_2 (\max, \min)$ $\begin{cases} x_1 x_2 \ge 1, \\ x_1^2 + x_2^2 \le 9; \end{cases}$ $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$	16	$z = x_1 + x_2 (\max, \min)$ $\begin{cases} (x_1-2)(x_2+1) \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 6; \end{cases}$ $x_1 \ge 0; x_2 \ge 0.$

17	$z=x_1-4x_2(\max,\min)$ $\begin{cases}(x_1-2)^2+(x_2-1)^2\ge 4,\\ (x_1-2)^2+(x_2-1)^2\le 9,\\ x_1+x_2\le 5;\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0.$	18	$z=x_1+2x_2(\max,\min)$ $\begin{cases}(x_1-2)(x_2+1)\ge 4,\\ x_1+x_2\le 6;\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0.$
19	$z=x_1+x_2(\max,\min)$ $\begin{cases}x_1x_2\ge 1,\\ (x_1-4)(x_2-4)\le \frac{11}{3},\\ x_1\le 4\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0.$	20	$z=x_1+x_2(\max,\min)$ $\begin{cases}x_1x_2\le 1,\\ (x_1-4)(x_2-4)\ge \frac{11}{3},\\ x_1\le 4\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0.$
21	$z=x_1-2x_2(\max,\min)$ $\begin{cases}x_1^2+x_2^2\le 16,\\ 3x_1-x_2\ge 0,\\ x_1-3x_2\le 0;\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0.$	22	$z=x_1+x_2(\max,\min)$ $\begin{cases}(x_1-1)^2+(x_2-1)^2\ge 9,\\ (x_1-4)^2+(x_2-4)^2\le 4;\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0.$
23	$z=x_1-x_2(\max,\min)$ $\begin{cases}(x_1-1)^2+(x_2-1)^2\le 9,\\ (x_1-4)^2+(x_2-4)^2\le 4;\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0.$	24	$z=x_1+x_2(\max,\min)$ $\begin{cases}(x_1-1)^2+(x_2-1)^2\ge 9,\\ (x_1-4)^2+(x_2-4)^2\le 4;\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0.$
25	$z=x_1+x_2(\max,\min)$ $\begin{cases}(x_1-1)(x_2-1)\ge 1\\ (x_1-1)^2+(x_2-1)^2\le 9\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	26	$z=x_1-x_2(\max,\min)$ $\begin{cases}(x_1-3)\cdot x_2\le 4\\ x_1+x_2\le 8\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$

27	$z=4x_1+x_2(\max,\min)$ $\begin{cases}(x_1-1)^2+x_2^2\ge 4\\ \left(x_1-1\right)^2+x_2^2\le 9\\ x_1+x_2\le 3\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	28	$z=2x_1-x_2(\max,\min)$ $\begin{cases}(x_1-1)(x_2+1)\ge 4\\ x_1+x_2\le 5\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$
29	$z=x_1-2x_2(\max,\min)$ $\begin{cases}(x_1-1)(x_2-1)\ge 1\\ (x_1-5)(x_2-5)\ge \frac{11}{3}\\ x_1\le 5\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	30	$z=x_1-3x_2(\max,\min)$ $\begin{cases}x_1^2+x_2^2\le 9\\ 2x_1-x_2\ge 0\\ x_1-2x_2\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$

Задание 5

Для задачи с нелинейной целевой функцией и линейной системой ограничений графическим методом найти максимум и минимум.

№ варианта	Задача	№ варианта	Задача
1	$z=\frac{x_1-2x_2}{x_1+x_2}(\max,\min)$ $\begin{cases}x_2+x_1\ge 6\\ 2x_2-x_1\le 6\\ x_2-2x_1+6\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	2	$z=\frac{x_1+x_2}{2x_1-x_2}(\max,\min)$ $\begin{cases}x_2+x_1\ge 4\\ 3x_2-2x_1\le 7\\ x_2-4x_1+11\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$

3	$z=\dfrac{2x_1-x_2}{x_1-x_2}(\max,\min)$ $\begin{cases}2x_2+3x_1\ge 11\\ x_2\le 4\\ x_2-3x_1+8\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	4	$z=\dfrac{2x_1}{x_1-3x_2}(\max,\min)$ $\begin{cases}x_2+x_1\ge 5\\ 3x_2+2x_1\le 13\\ x_2\ge 1\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$
5	$z=(x_1-4)^2+$ $+(x_2-2)^2(\max,\min)$ $\begin{cases}x_2+x_1-5\ge 0\\ 4x_2-x_1\le 15\\ x_2-4x_1+15\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	6	$z=\dfrac{x_1-2x_2}{x_1+x_2}(\max,\min)$ $\begin{cases}x_2+x_1-4\ge 0\\ 2x_2-x_1-5\le 0\\ x_2-2x_1+5\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$
7	$z=\dfrac{x_1+x_2}{2x_2-x_1}(\max,\min)$ $\begin{cases}x_2+x_1\ge 6\\ 3x_2-2x_1\le 8\\ x_2-4x_1+14\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	8	$z=\dfrac{2x_1-x_2}{x_1-x_2}(\max,\min)$ $\begin{cases}2x_2+3x_1-16\ge 0\\ x_2\le 5\\ x_2-3x_1+10\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$
9	$z=\dfrac{2x_2}{x_2-3x_1}(\max,\min)$ $\begin{cases}x_2+x_1-7\ge 0\\ 3x_2+2x_1\le 18\\ x_2\ge 2\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	10	$z=\dfrac{x_2+3x_1}{x_1+x_2}(\max,\min)$ $\begin{cases}x_2-x_1-2\le 0\\ 3x_2+2x_1-16\ge 0\\ 2x_2+3x_1\le 19\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$

11	$z=(x_1-1)^2+$ $+(x_2-1)^2(\max,\min)$ $\begin{cases}x_2+x_1\ge 6\\ 2x_2-x_1\le 6\\ x_2-2x_1+6\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	12	$z=(x_1+1)^2+$ $+(x_2-1)^2(\max,\min)$ $\begin{cases}x_2+x_1\ge 4\\ 3x_2-2x_1\le 7\\ x_2-4x_1+11\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$
13	$z=x_1^2+$ $+(x_2-1)^2(\max,\min)$ $\begin{cases}2x_2+3x_1\ge 1\\ x_2\le 4\\ x_2-3x_1+8\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	14	$z=(x_1-4)^2+$ $+(x_2-5)^2(\max,\min)$ $\begin{cases}x_2+x_1\ge 5\\ 3x_2+2x_1\le 13\\ x_2\ge 1\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$
15	$z=(x_1-2)^2+$ $+(x_2-3)^2(\max,\min)$ $\begin{cases}x_2\le x_1+2\\ 3x_2\ge -2x_1+11\\ 2x_2+3x_1\le 14\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	16	$z=(x_1-5)^2+$ $+(x_2-5)^2(\max,\min)$ $\begin{cases}x_2+x_1\ge 8\\ 2x_2-x_1\le 7\\ x_2-2x_1+7\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$
17	$z=(x_1-3)^2+$ $+(x_2-4)^2(\max,\min)$ $\begin{cases}x_2+x_1\ge 6\\ 3x_2-2x_1\le 8\\ x_2-4x_1+14\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	18	$z=(x_1+1)^2+$ $+(x_2+7)^2(\max,\min)$ $\begin{cases}2x_2+3x_1-16\ge 0\\ x_2\le 5\\ x_2-3x_1+10\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$

19	$z=(x_1-6)^2+$ $+(x_2-6)^2(\max,\min)$ $\begin{cases} x_2+x_1-7\ge 0\\ 3x_2+2x_1\le 18\\ x_2\ge 2\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	20	$z=(x_1-6)^2+$ $+(x_2-5)^2(\max,\min)$ $\begin{cases} x_2-x_1-2\le 0\\ 3x_2+2x_1-16\ge 0\\ 2x_2+3x_1-19\le 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$
21	$z=\dfrac{x_1-2x_2}{x_1+x_2}(\max,\min)$ $\begin{cases} x_2+x_1-4\ge 0\\ 2x_2-x_1-5\le 0\\ x_2-2x_1+5\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	22	$z=\dfrac{x_1+x_2}{2x_1-x_2}(\max,\min)$ $\begin{cases} x_2+x_1-5\ge 0\\ 4x_2-x_1\le 15\\ x_2-4x_1+15\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$
23	$z=\dfrac{2x_1-x_2}{x_1-x_2}(\max,\min)$ $\begin{cases} 2x_2+3x_1-14\ge 0\\ 3x_2+x_1\le 14\\ x_2-2x_1+7\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	24	$z=\dfrac{2x_1}{x_1-3x_2}(\max,\min)$ $\begin{cases} 4x_2+3x_1-19\ge 0\\ x_2-4\le 0\\ x_2-3x_1+14\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$
25	$z=\dfrac{x_1+3x_2}{x_1+x_2}(\max,\min)$ $\begin{cases} 2x_2\le 3x_1\\ x_2+4x_1\ge 11\\ 3x_2+x_1\le 22\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	26	$z=(x_1-2)^2+$ $+(x_2-3)^2(\max,\min)$ $\begin{cases} x_2+x_1-4\ge 0\\ 2x_2-x_1-5\le 0\\ x_2-2x_1+5\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$

27	$z=(x_1-4)^2+$ $+(x_2-2)^2(\max,\min)$ $\begin{cases} x_2+x_1-5\ge 0\\ 4x_2-x_1\le 15\\ x_2-4x_1+15\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	28	$z=(x_1-3)^2+$ $+(x_2-2)^2(\max,\min)$ $\begin{cases} 2x_2+3x_1-14\ge 0\\ 3x_2+x_1\le 14\\ x_2-2x_1+7\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$
29	$z=(x_1+1)^2+$ $+(x_2-4)^2(\max,\min)$ $\begin{cases} 4x_2+3x_1-19\ge 0\\ x_2-4\le 0\\ x_2-3x_1+14\ge 0\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$	30	$z=(x_1+1)^2+$ $+x_2^2(\max,\min)$ $\begin{cases} 2x_2\le 3x_1\\ x_2+4x_1\ge 11\\ 3x_2+x_1\le 22\end{cases}$ $x_1\ge 0; x_2\ge 0$

Задание 6

Найти точки условного экстремума функции U при заданных ограничениях методом Лагранжа.

№ ва-- рианта	Задача
1	$U=x^2+y^2-xy+x+y-4$, при $x+y+3=0$.
2	$U=2xz-yz$, при $\begin{cases} y+2z=3,\\ x+y=2.\end{cases}$
3	$U=2x+y$, при $x^2+y^2=1$.
4	$U=xy+yz$, при $\begin{cases} x+y=2,\\ y+z=2.\end{cases}$

5	$U=2xy$, при $2x-3y-4=0$.
6	$U=xy+yz$, при $\begin{cases} x-y=2, \\ y+z=4. \end{cases}$
7	$U=2x+y-2z$, при $x^2-y^2+z^2=36$.
8	$U=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$, при $x+y=2$.
9	$U=4x^3+y^2-z^2+9xy$, при $\begin{cases} y+z=6, \\ x+y=2. \end{cases}$
10	$U=6-4x-3y$, при $x^2+y^2=1$.
11	$U=4y^3+x^2-z^2+9xy$, при $\{x+y=2,$
12	$U=2x+y$, при $x^2+y^2=1$.
13	$U=4y^3+z^2-x^2+9yz$, при $\begin{cases} x+z=6, \\ x+z=2. \end{cases}$
14	$U=4x+9y-25$, при $4x^2+36y^2=9$.
15	$U=4y^3+x^2-z^2+9xy$, при $\begin{cases} 2x+y+z=8, \\ 3x+y+2z=14. \end{cases}$
16	$U=\frac{x}{2}+\frac{y}{3}$, при $x^2+y^2=1$.
17	$U=4z^3+y^2-x^2+9yz$, при $\begin{cases} 2x+3y+z=14, \\ x+y=6. \end{cases}$
18	$U=3x^2-8xy+7y^2$, при $x^2+y^2-1=0$.
19	$U=4x^3+y^2-z^2+9xy$, при $\begin{cases} 2x+y-z=-2, \\ x+2y+z=8. \end{cases}$
20	$U=x^2+12xy+2y^2$, при $4x^2+y^2-25=0$.
21	$U=4y^3+x^2-z^2+9xy$, при $\begin{cases} 2x+y+z=8, \\ z-y=4. \end{cases}$
22	$U=2x-y+z$, при $x^2+y^2+z^2=1$.
23	$U=4z^3+y^2-x^2+9yz$, при $\begin{cases} 2x+3y+z=14, \\ x-y-2z=2. \end{cases}$
24	$U=x^2+y^2$, при $3x+2y-11=0$
25	$U=4y^3+z^2-x^2+9yz$, при $\begin{cases} x+y+2z=8, \\ x-y=4. \end{cases}$
26	$U=-xy^2$, при $x+2y-1=0$
27	$U=4x^3+y^2-z^2+9yz$, при $\begin{cases} x+2y+z=8, \\ x+3y+2z=14. \end{cases}$
28	$U=xy^2z^2$, при $x+2y+3z=12\ (x\rangle 0, y\rangle 0, z\rangle 0)$.
29	$U=4y^3+z^2-z^2+9yz$, при $\begin{cases} 2x+y+3z=14, \\ x+z=6. \end{cases}$
30	$U=\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{2}}-2\sqrt{2}$, при $x^2+y^2=1$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Учебное пособие написано с целью учебно-методического обеспечения новой учебной дисциплины «Методы оптимальных решений» (ФГОС третьего поколения) для студентов, обучающихся по направлению 080100.62 «Экономика», однако, оно может использоваться и для обучения студентов всех направлений и всех форм обучения, изучающих основы методов оптимизации.

В учебном пособии рассмотрены основы теории оптимизации, которая является базой для теории принятия оптимальных решений. А именно, в принятии решений заключается основная роль трудовой деятельности специалиста с высшим образованием независимо от профиля. Кроме того в настоящее время мы имеем дело с повсеместным внедрением быстродействующих ЭВМ, которые оказывают существенную поддержку при принятии решений. Потому умение грамотно формализовать задачу и решить ее при помощи современных вычислительных средств является одной из базовых компетенций будущего специалиста. Основной язык формализации – язык математики. Именно математическое представление задач является основой рассматриваемого пособия. В учебном пособии на конкретных примерах показано как от математической формулировки перейти к программной реализации решения тех или иных задач.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Кремер, Н. Ш.* Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики: учеб.-справоч. пособие / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин ; под. ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М.: Высшее образование, 2007.

2. *Красс, М. С.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: учебник / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. – 6-е изд., перер. и испр. – М.: Дело - АНЦ, 2008.

3. *Партыка, Т. Л.* Математические методы: учебник / Т. Л. Партыка, И. И. Попов. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: ФОРУМ: ИНФРА. – М, 2007.

4. *Кобелев, Н. Б.* Практика применения экономико-математических методов и моделей / Н. Б. Кобелев. – М., 2000.

5. *Борзунова, Т. Л.* Математическое моделирование: учеб. пособие / Т. Л. Борзунова, М. П. Барыкин, Е. А. Данилов, О. Ю. Соловьева. – ВолгГТУ. – Волгоград, 2008.

6. Методы оптимизации. Применение математических методов в экономике / В. М. Монахов, Э. С. Беляева, Н. Я. Краснер. – М.: Просвещение, 1978.

7. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование / Под ред. А. В. Кузнецова. – Минск : Вышэйшая школа, 1995.

8. Таха Хэмди А. Введение в исследование операций / А. Таха Хэмди. – М., 2001.

9. Solver Suite. Lindo, Lingo, What’s Best. Help - LINDO SYSTEMS INC., 2002.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Людмила Николаевна **Феофанова**
Ирина Александровна **Тарасова**
Оксана Алексеевна **Авдеюк**
Анастасия Александровна **Ермакова**

МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Учебное пособие

Редактор *Л. И. Громова*
Компьютерная верстка *Е. В. Макаровой*

Темплан 2012 г. (заказные издания). Поз. № 31з.
Подписано в печать 17.10.2012. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,05. Уч.-изд. л. 5,93.
Тираж 100 экз. Заказ

Волгоградский государственный технический университет.
400005, г. Волгоград, просп. им. В. И. Ленина, 28, корп. 1.

Отпечатано в типографии ИУНЛ ВолгГТУ.
400005, г. Волгоград, просп. им. В. И. Ленина, 28, корп. 7.