

# 基于动力学的时间最优轨迹规划

- 摘要
- 1. 简介
- 2. 最优控制问题的公式和解
  - 2.1. 问题的构造
  - 2.2. 时间最优问题的解

## 摘要

在给定路径和已知执行器扭矩限制的情况下，解决了最小时间机械手控制问题。找到了最优开环转矩，并给出了用传统线性反馈控制系统实现这些转矩的方法。该算法允许力矩有界，可以是关节角和角速度的任意函数。此方法对指定的末端执行器的任何路径和方向都有效。该算法适用于具有刚性连杆、已知运动动力学方程和在路径上给定位置确定的关节角的任意机械手。

## 1. 简介

对于许多工业应用来说，目前的机器人操作臂太慢，无法在经济上证明它们的使用是合理的。它们的速度和生产能力受到驱动器的限制。增加驱动器的尺寸和功率不是最好的解决方案；这在很大程度上是弄巧成拙的，因为执行器自己的惯量增加了，同时较大的执行器增加了成本和功率消耗。一个更成功的方法是将执行一项给定任务所需的时间最小化，并服从执行机构施加的约束。本文的主题是在给定机械臂路径的情况下应用最小时间的控制问题。



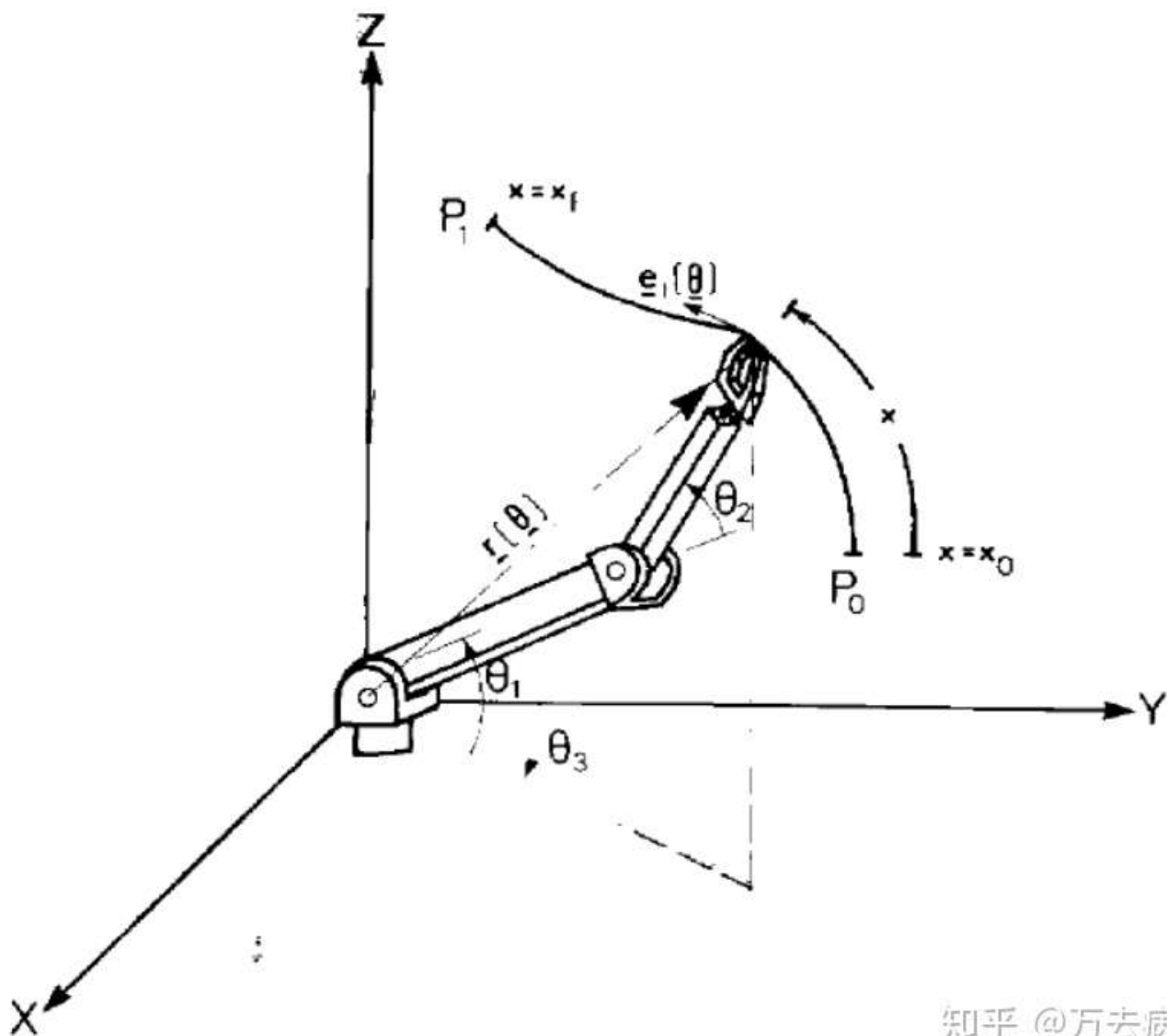
首先在第二节中阐述了一个三自由度肘式机械臂的控制问题。在推导出数学最优控制问题后，以构造切换曲线的算法的形式给出了求解方法。虽然第2节讨论了该算法的动机，但证明该算法确实给出最优控制的完整数学证明被推迟到附录部分。在第2节的结尾，给出了一个三维空间曲线路径的例子。第3节说明了如何将末端执行器的动力学和姿态包括在问题中。事实上，任意数量的自由度都可以被处理，只要所有的关节角度可以在路径的每一个点上由机械臂的反解所决定。在这种情况下，第2节中的算法仍然适用。同时，在第三节中指出，虽然最优控制问题中的状态变量最容易被认为是沿着路径的距离，但本文的结果适用于几乎任何路径的参数化。

## 2. 最优控制问题的公式和解

### 2.1. 问题的构造

为了说明最小时间控制算法，我们首先考虑相对简单的三自由度机械臂末端的情况如图1所示，机械臂需要沿着指定的路径从  $P_0$  运动到  $P_1$ ，在起始和结束都是静止状态。





知乎 @万去病

这种情况不包括末端执行器相对于第二连杆的运动。在这种情况下，末端执行器的动力学被假定对机械手的动力学影响可以忽略不计，就像在许多工业机器人系统中一样。该系统的运动方程可以用拉格朗日方程(见Bobrow 1982)导出，其形式如下

$$\mathbf{M}(\theta)\ddot{\theta} + \mathbf{h}(\theta, \dot{\theta}) = \mathbf{T} \quad (1)$$

向量  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)^T$  和  $\mathbf{T} = (T_1, T_2, T_3)^T$  分别是关节角度和施加的执行器扭矩。扭矩  $T_i$  作用在第  $\theta_i$  个轴上， $T_2$  作用在连杆1和连杆2之间。质量矩阵  $\mathbf{M}$  和向量  $\mathbf{h}$  在Bobrow(1982)中给出了详细的定义。

最优控制问题如下:给定机械手的运动方程(Eq. 1)、末端必须通过的路径(图1)和执行机构的力矩约束形式



$$T_{i_{min}}(\theta, \dot{\theta}) \leq T_i \leq T_{i_{max}}(\theta, \dot{\theta}) \quad (2)$$

求出在最小时间内驱动机械手从初始位置  $P_0$  到最终位置  $P_0$  的力矩  $T(t)$ 。

在我们的求解过程中，将时间最优控制问题转化为一个等价的数学最优控制问题，其中单个控制变量为沿着路径的末端加速度；即  $\ddot{x} = \frac{d^2 x}{dt^2}$ ，这里  $x$  是沿着路径从起始点开始测量的弧长。对于变换后的问题，我们必须确定在路径上的每个位置和速度处，与执行器力矩对应的线性加速度  $\ddot{x}$  的约束。这就要求关节角度被计算作为弧长  $x$  的函数以及角速度作为  $x, \dot{x}$  的函数，角加速度作为  $x, \dot{x}, \ddot{x}$  的函数。因此我们有

$$\theta = \theta(x) \quad (3A)$$

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}(x, \dot{x}) \quad (3B)$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}(x, \dot{x}, \ddot{x}) \quad (3C)$$

随着末端的路径被指定，函数  $\theta(x)$  最终被隐式地决定。我们强调  $\theta$  不必写成  $x$  的显式函数，对于  $x$  的每一个值数值地计算  $\theta$  是足够的。

类似地，不需要方程3(B)和3(C)的显示表达式，同样可以数值的计算  $\dot{\theta}$  和  $\ddot{\theta}$ 。

为了获得方程3(B)和3(C)，我们注意到末端的位置向量  $r$  可以被认为是关节角的函数或者沿着路径的距离的函数。因此我们可以写

$$r = r(\theta) = \tilde{r}(x) \quad (4)$$

将方程(4)对时间求微分有

$$[r_\theta]\dot{\theta} = \tilde{r}_x \dot{x} \quad (5)$$

这里  $[r_\theta]$  是位置向量分量相对于关节角偏导数的雅可比矩阵， $\tilde{r}_x$  是与路径相切的单位向量。那么，当机械手不在奇异点时，雅可比矩阵是可逆的，我们可以通过求解方程(5)来求方程(3B)的表达式：



$$\dot{\theta}(x, \dot{x}) = [r_{\theta}]^{-1} \tilde{r}_x \dot{x} \quad (6)$$

我们应当注意到，在实际情况中，机械手的奇异轨迹是避免的。

对于方程(3C)来说，将方程(5)对时间求导有

$$[r_{\theta}] \ddot{\theta} + [\dot{r}_{\theta}] \dot{\theta} = \tilde{r}_x \ddot{x} + \tilde{r}_{xx} \dot{x}^2 \quad (7)$$

这里  $[\dot{r}_{\theta}]$  是雅可比矩阵对时间的导数而  $\tilde{r}_{xx}$  是  $\tilde{r}$  相对于  $x$  的二阶导数。

注意方程(7)右边的第一项是末端沿路径的切向加速度，第二项为法向加速度。仍然假设机械手不处于奇异构型，我们可以通过求解方程(7)来求方程(3C)的表达式：

$$\ddot{\theta} = [r_{\theta}]^{-1} (\tilde{r}_x \ddot{x} + \tilde{r}_{xx} \dot{x}^2 - [\dot{r}_{\theta}] \dot{\theta}) \quad (8)$$

现在我们可以推导出执行器在路径上任意弧长  $x$  和速度  $\dot{x}$  下，所能产生的最大加速度和最大减速度的表达式。将式(8)代入式(1)得

$$\ddot{x} c_1(x) + c_2(x, \dot{x}) = \mathbf{T} \quad (9)$$

这里

$$c_1(x) = \mathbf{M}(\theta) [r_{\theta}]^{-1} \tilde{r}_x \quad (10)$$

并且

$$c_2(x, \dot{x}) = \mathbf{M}(\theta) [r_{\theta}]^{-1} (\tilde{r}_{xx} \dot{x}^2 - [\dot{r}_{\theta}] \dot{\theta}) + \mathbf{h}(\theta, \dot{\theta}) \quad (11)$$

给定弧长  $x$ ，末端速度  $\dot{x}$ ，切向加速度  $\ddot{x}$ ，式(9)给出了三个执行器力矩的唯一值

$$T_i = c_{1i}(x) \ddot{x} + c_{2i}(x, \dot{x}), \quad i = 1, 2, 3 \quad (12)$$



由于式(12)，式(2)上的力矩约束推导出了如下的加速度约束：

$$T_{imin} - c_{2i}(x, \dot{x}) \leq c_{1i}(x)\ddot{x} \leq T_{imax} - c_{2i}(x, \dot{x}) \quad i = 1, 2, 3 \quad (13)$$

因为对于任意的弧长  $x$ ，末端速度  $\dot{x}$ ， $\theta(x)$  及  $\dot{\theta}(x, \dot{x})$ ，都可以由反向运动学及方程(6)计算。那么，如果  $c_{1i}(x)$  不等于零，方程(13)就可以写成

$$f_i(x, \dot{x}) \leq \ddot{x} \leq g_i(x, \dot{x}) \quad (14)$$

这里


$$f_i(x, \dot{x}) = \begin{cases} (T_{imin} - c_{2i})/c_{1i}, & c_{1i} > 0, \\ (T_{imax} - c_{2i})/c_{1i}, & c_{1i} < 0, \end{cases} \quad (15)$$

以及

$$g_i(x, \dot{x}) = \begin{cases} (T_{imax} - c_{2i})/c_{1i}, & c_{1i} > 0, \\ (T_{imin} - c_{2i})/c_{1i}, & c_{1i} < 0, \end{cases} \quad (16)$$

当  $c_{1i}(x) \neq 0$  时，方程(14)-(16)给出了在不违反式中第  $i$  个约束（在方程(2)中）的情况下，执行器能够使得末端在路径上的末端加速度范围。要使末端保持在路径上， $\ddot{x}$  必须位于区间  $[f_i(x, \dot{x}), g_i(x, \dot{x})]$  的交集之中。有可能，通常当速度过大时，区间  $[f_i(x, \dot{x}), g_i(x, \dot{x})]$  可能不相交，在这种情况下，机械手末端将立即离开路径。另一方面，如果  $c_{1i} \neq 0$  对于所有  $i$  都成立，并且这三个区间有非空的交集，则末端保持在路径上的充要条件是方程(14)对所有的  $i$  都成立。

尽管方程(13)中的约束条件必须对于所有的  $i$  都成立，但是如果  $c_{1i}(x) = 0$  对于某些  $i$  成立，则  $\ddot{x}$  的选择对方程(13)是否对那个  $i$  成立不会产生影响。在这种情况下， $\ddot{x}$  必须选择为满足剩下的两个约束条件。只要机械手不处于奇异构型，则将至少有一个非零的  $c_{1i}(x)$ 。这是从方程(10)的右边得出的，因为质量矩阵总是正定的，并且是单位向量。

对于任何给定的  $x$  和  $\dot{x}$ ，**容许加速度**是任何切向加速度，在这个加速度下，执行器可以将末端保持在规定的路径上而不违反约束。前面面的讨论表明，

果存在任何容许加速度，则容许加速度的范围为

$$f(x, \dot{x}) \leq \ddot{x} \leq g(x, \dot{x}) \tag{17}$$

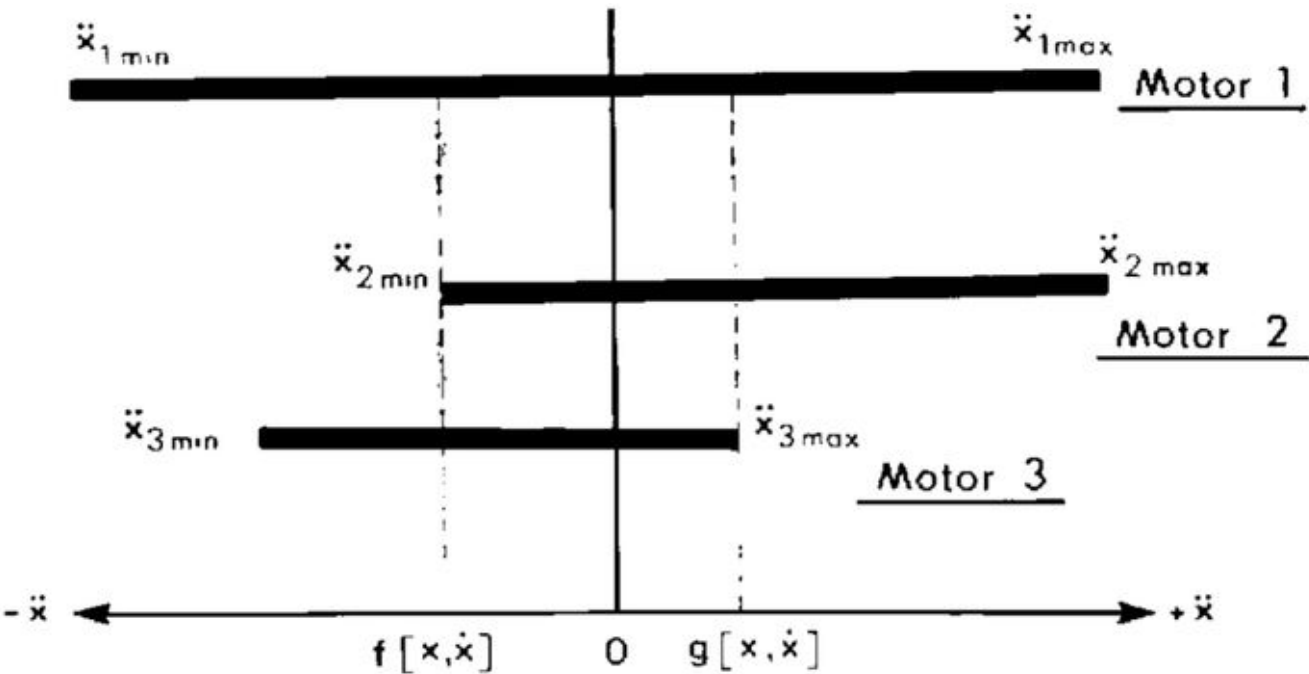
这里

$$f(x, \dot{x}) = \max_i f_i(x, \dot{x}) \tag{18}$$

以及

$$g(x, \dot{x}) = \min_i g_i(x, \dot{x}) \tag{19}$$

对于那些  $c_{1i}(x) \neq 0$  的轴分别取最大值和最小值。如图（2）所示。注意如果两个区间  $[f_i(x, \dot{x}), g_i(x, \dot{x})]$  不相交，则  $f(x, \dot{x}) > g(x, \dot{x})$ 。要保持  $f(x, \dot{x}) \leq g(x, \dot{x})$ ，这样容许加速度才会存在，这是在求解时间最优问题的关键思想。



$\ddot{x}$  acceleration along the path 知乎 @万去病

我们现在有了时间最优控制问题的数学上的描述：



给定起始位置  $x(0)$  和起始速度  $\dot{x}(0)$ , 最小化最终的时间  $t_f$  使得  $x(t_f) = x_f$  且  $\dot{x}(t_f) = \dot{x}_f$ , 并且在每个时间  $t$  处服从方程 (17)

尽管我们已经将机械手的控制问题进行了转换, 使得切向加速度成为数学时间最优问题的控制变量, 但我们没有忽略力矩, 这是物理上的控制变量。回想一下方程 (12) 依据弧长  $x$ , 末端速度  $\dot{x}$ , 切向加速度  $\ddot{x}$  给出的执行器力矩/力的方程式。

## 2.2. 时间最优问题的解

时间最优解的基本思想是选择加速度  $\ddot{x}$ , 使得路径上每个点的速度  $\dot{x}$  尽可能的大, 同时又不违反条件  $f(x, \dot{x}) \leq g(x, \dot{x})$ 。这是由恒等式提出的

$$t_f = \int_{x_0}^{x_f} (dx) / \dot{x} \quad (20)$$

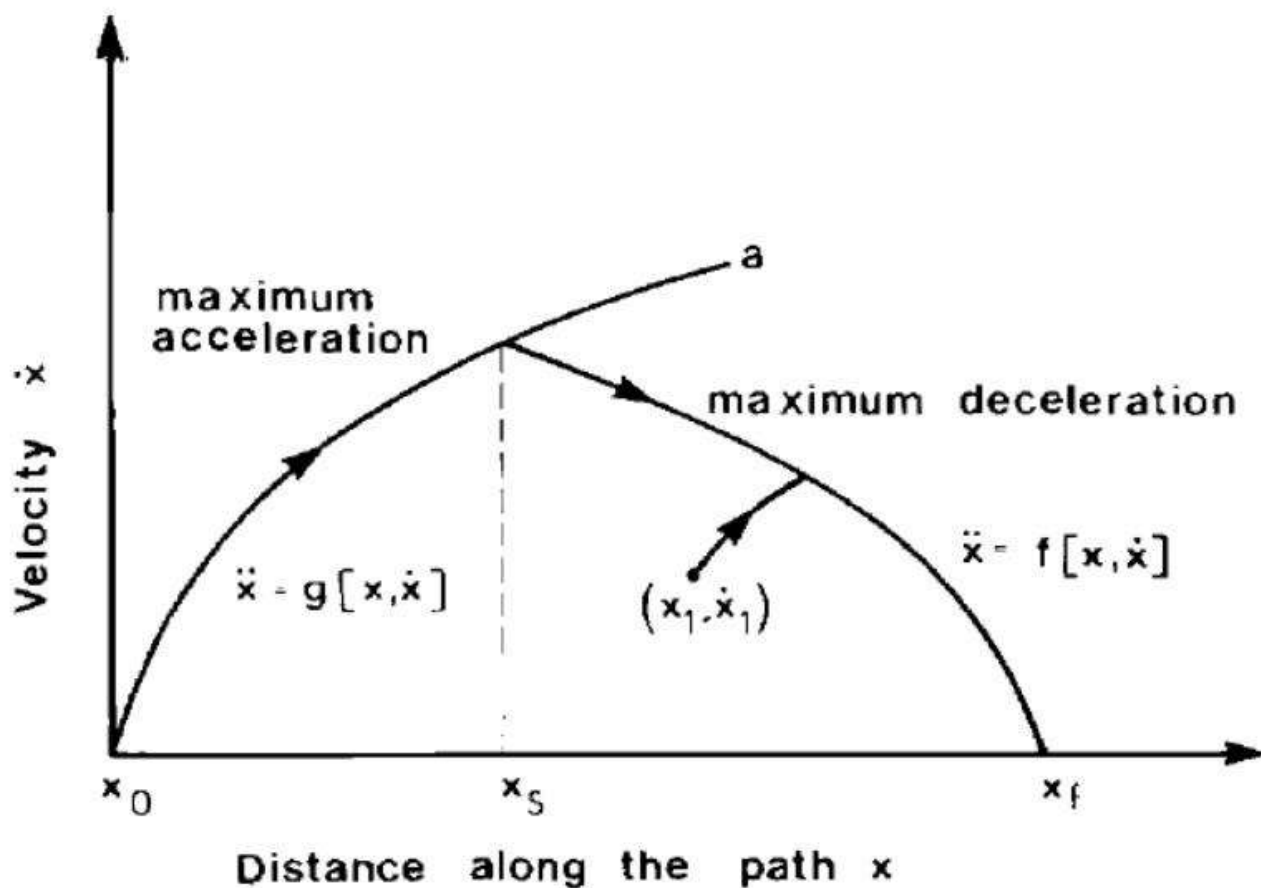
在附录中证明了, 为了使  $t_f$  最小,  $\ddot{x}$  总是取其最大或最小的可能指, 即  $\ddot{x} = g(x, \dot{x})$  或者  $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ 。因此, 找到最优控制律就等于找到  $x$  在最大加速度和最大减速度之间切换的时间或者位置。

### 2.2.1. 单个切换点的问题

求切换位置的最佳方法是在  $x - \dot{x}$  相平面上构造切换曲线。我们将给出一个构造多切换点的算法, 但首先最好先考虑一个切换点的情形。一个典型的具有一个切换点的最小时间轨迹如图3所示。机械手末端从初始位置  $x_0$  开始以  $\ddot{x} = g(x, \dot{x})$  的加速度加速。当运行至切换点  $x_s$  时加速度切换成  $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$  并且以该加速度进行减速直到最终静止在终点位置  $x_f$ 。







知乎 @万去病

为了找到  $x_s$ ，我们从点  $x = x_0, \dot{x} = 0$  开始到某个点  $a$  在时间上向前求解方程  $\ddot{x} = g(x, \dot{x})$  如图3所示。然后，我们从  $x = x_f, \dot{x} = 0$  开始反向时间求解方程  $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ ，直到这两个轨迹相交于  $x_s$ 。我们从  $x = x_f, \dot{x} = 0$  开始反向时间求解方程  $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$  得到的相平面轨迹就是这种情况下的切换曲线。如果机械手末端以某个初速度  $\dot{x}_1$  从位置  $x_1$  开始，如图所示，最优控制策略是使用最大加速度  $\ddot{x} = g(x, \dot{x})$  直到相平面轨迹与切换曲线相交然后切换到最大减速度  $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$ 。

## 2.2.2. 多点切换问题

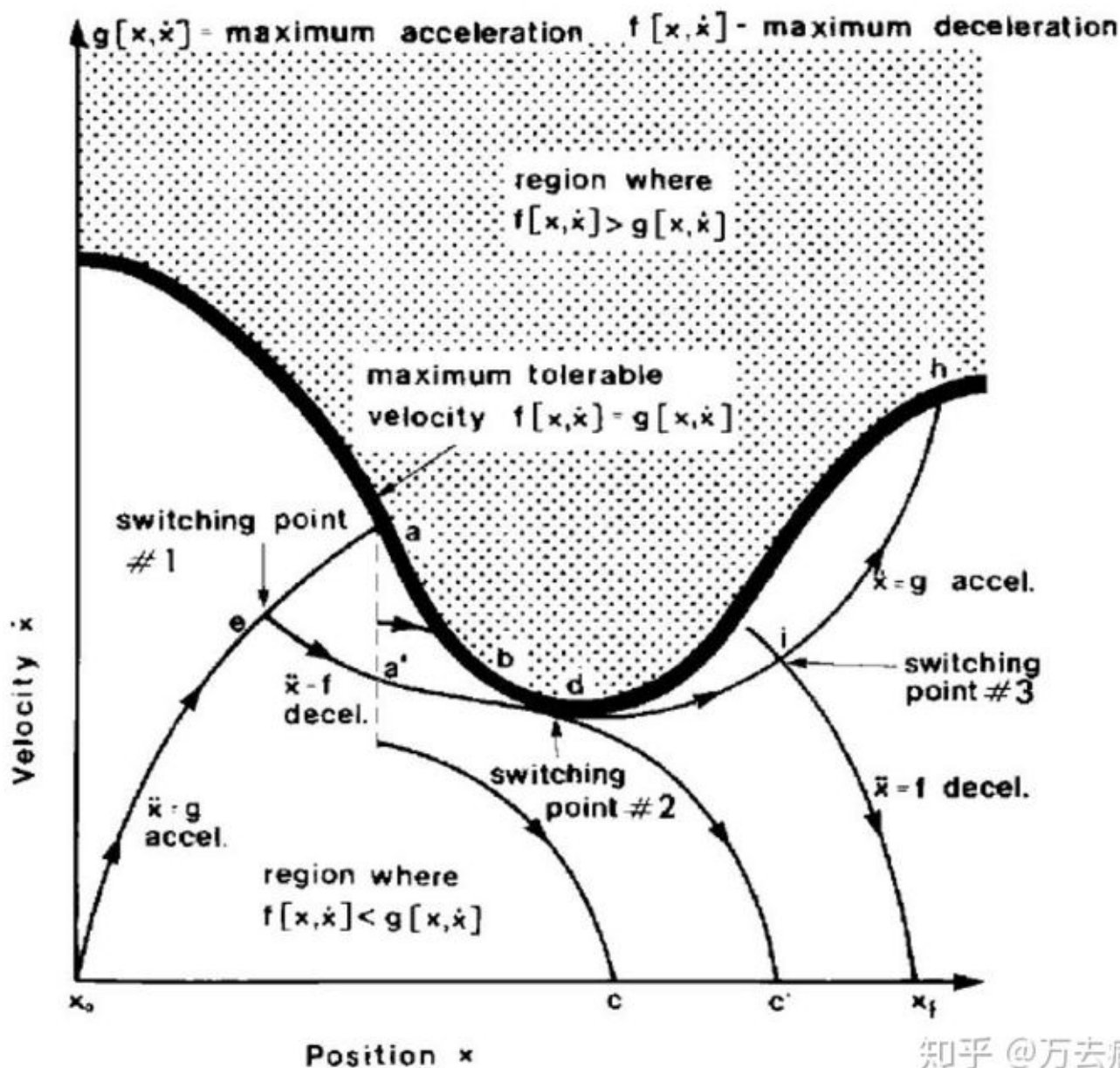
当从点  $x = x_0, \dot{x} = 0$  出发的最大加速度曲线与从  $x = x_f$  回溯的最大减速度曲线（在速度还不是足够大而违反条件  $f(x, \dot{x}) \leq g(x, \dot{x})$  之前）并不相交时，最小时间问题开始变得相当复杂。在这种情形下，在最终切换到使得末端在  $x_f$  处静止的减速度曲线之前，最优控制策略需要更早的在加速和减速之间进行切换。

换，以避免速度的增加，从而避免产生大的惯性力，在该惯性力下，执行器将不能再将末端保持在指定的路径上。

寻找多切换点是最短时间问题中最困难的部分。尝试了几种方法，包括将切换时间作为参数的共轭梯度优化算法，以及由控制上的状态依赖约束的最大值原理所产生的两点边值问题的数值解（Leitmann 1966）。在这两种方法中，数值算法即使在最简单的情形下也不会收敛到一个解。我们最终开发了一种非标准的方法，它实际上更直接，并在许多例子中取得了成功。该方法给出了一种构造切换曲线的简单数值算法。

该方法的动机是注意到，对于路径上的大多数点，存在一个末端速度，在此速度之上，不存在容许力矩的组合保持机械手在路径上。对于一个给定的路径，则我们在相平面上有一个最大速度曲线，如图4所示。在该曲线以下，我们有  $f(x, \dot{x}) \leq g(x, \dot{x})$ ，所以  $\ddot{x}$  可以被选择满足方程（17）。在曲线之上，我们有  $f(x, \dot{x}) > g(x, \dot{x})$ ，这样就不存在容许的  $\ddot{x}$ 。这个曲线满足  $f(x, \dot{x}) = g(x, \dot{x})$ ，它是算法的关键。





知乎 @万去病

我们在这里构建我们最容易理解的构建切换曲线的算法版本。在附录中我们证明了由这条切换曲线所决定的控制策略是最优的。其思想是相平面轨迹越高，通过时间越短，如方程（20）所示。为了使得通过时间最小，总是选择尽可能大的加速度或尽可能大的减速度。选择  $\ddot{x} = g(x, \dot{x})$  和  $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$  之间的切换点，使得相平面轨迹刚好接触最大速度曲线。切换曲线由以下六个步骤组成，参考图4。

1. 从初始状态对方程  $\ddot{x} = g(x, \dot{x})$  进行积分，直到在某个点  $a$  到达最大速度曲线。
2. 从点  $a$  开始，沿着垂直的虚线下降到某个较低的速度然后对方程  $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$



进行前向时间积分。下面两种情形之一会发生：要么是轨迹在  $b$  点与最大速度曲线相交；要么是轨迹在  $c$  点与  $x$  轴相交。我们的目的是通过迭代找到  $a'$  点，使得从  $a'$  点出发的减速 ( $\ddot{x} = f$ ) 轨迹刚好与最大速度曲线在  $d$  点接触然后继续向下与  $x$  轴相交于  $c'$  点。若  $c' \geq x_f$ ，则只存在一个切换点。

3. 从  $a'$  开始反向时间对方程  $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$  进行积分直到与从  $x_0$  到  $a$  的加速度曲线交于某  $g$  个点  $e$ 。
4. 从  $d$  点开始对方程  $\ddot{x} = g(x, \dot{x})$  进行前向时间积分直到要么通过  $x_f$  要么轨迹再次与最大速度曲线相交，比如在点  $h$ 。在附录中证明了在不立即违反  $f(x, \dot{x}) \leq g(x, \dot{x})$  的情形下恢复最大加速度 ( $\ddot{x} = g$ ) 是可能的。
5. 从最终位置对方程  $\ddot{x} = f(x, \dot{x})$  进行反向时间求积分直到与从  $d$  到  $h$  的轨迹交汇于点  $i$ 。
6. 如果从  $x_f$  回溯的减速轨迹与与从  $d$  到  $h$  的轨迹不相交，那么就有超过三个的交换点。在这种情况下， $d$  到  $h$  之间的切换点由步骤2和步骤3中确定的  $e$  点所确定并且算法将继续直到到达  $x_f$ 。

曲线  $x_0 e d i x_f$  就是切换曲线。对于位于该切换曲线下方的任意初始条件 ( $x(0), \dot{x}(0)$ )，最优控制策略是使用最大加速度，直到到达切换曲线然后切换到减速状态并沿着切换曲线到  $x_f$ 。

通过解一阶方程  $d\dot{x}/dx = g/\dot{x}$  以及  $d\dot{x}/dx = g/\dot{x}$  代替  $\ddot{x} = g$  以及  $\ddot{x} = f$ ，可以节省一些计算时间。而且，这些一阶方程对于附录中更严格的算法表述更方便。

最后，注意到初始速度和最终速度实际上不需要一定为零。可以简单地让图4中的  $x$  轴与  $\dot{x}$  轴相交于  $\dot{x} = \dot{x}_f$ ，指定的最终速度沿着路径，我们可以跟上面一样构建切换曲线。因此该方法可以直接应用到，例如，一个对象要在最短时间内从一个移动传送带移动到另一个移动传送带的问题。

