

# 进阶课程②④ | Apollo 规划技术详解——Motion Planning Environment

知  
识  
点

敲黑板，本文需要学习的知识点有

曲线光滑度 多项式

控制点 最短路径

smoothing spline 曲率

自动驾驶汽车核心技术包括**环境感知**、**行为决策**、**运动规划与控制**等方面。其中，行为决策系统、运动规划与控制系统作为无人驾驶汽车的“大脑”，决定了其在不同交通驾驶场景中行驶的合理性与安全性。

以下，ENJOY

在自动驾驶中，我们将环境抽象成 SL 坐标系，在此坐标系下的曲线光滑度是有要求的。首先，曲线本身要平滑。其次，其曲率也要满足平滑的特性。因此需要对轨迹线进行平滑处理。那么能不能先生成一条线，然后再进行平滑，能不能对 Curvature 进行一个后期的平滑？不可以。因为 XY 坐标本身与 Curvature 是有联系的，不能单独平滑曲率，也不能单独平滑 X 或者 Y，今天的课程将为大家介绍平滑的方法。

## 多项式

首先，可以在轨迹上以等距离的方式随机选择一些点，然后用高阶多项插值的方式来近似表示轨迹，对多项式进行优化。但是高阶多项式不能用于平滑，因为高阶的多项式抖动太大，没有办法控制幅度，这就是常说的龙格现象，如下图所示。

3

## Interpolation

Select a sequence of approximately equally spaced control points from centerline and interpolating through high order polynomials;



Runge's phenomenon

High order polynomial interpolation is not smooth since errors bound diverges with the order increasing!

▲ 龙格现象

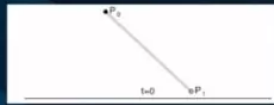
# Bezier Spline

**Bezier Spline 曲线**是由一系列控制点定义的，例如  $P_0$  到  $P_n$ ，其中  $n$  代表曲线的阶数。如下图所示，分别给出 1 阶、2 阶、3 阶 Bezier Spline 曲线的表示形式。通过对它们做平滑，得到平滑的曲线，例如二阶平滑保证曲线的曲率平滑。但是这种方法的缺点是，除了起始点和终点，其它控制点不能保证会被得到的曲线经过。

4

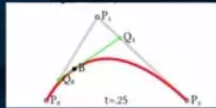
## Bezier Spline

A Bezier curve is defined by a set of control points  $P_0$  through  $P_n$ , where  $n$  is called its order ( $n = 1$  for linear, 2 for quadratic, etc.).



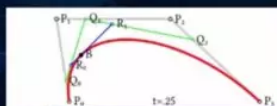
First Order Bezier

$$B(t) = P_0 + t(P_1 - P_0) = (1-t)P_0 + tP_1, 0 \leq t \leq 1$$



Second Order Bezier

$$B(t) = (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)t P_1 + t^2 P_2, 0 \leq t \leq 1.$$



Third order Bezier

$$B(t) = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t)t^2 P_2 + t^3 P_3, 0 \leq t \leq 1.$$

### ▲ n 阶 Bezier Spline 曲线表达形式

生成一条光滑的曲线，涉及到两方面，一方面是**目标**，另一方面是**工具**。怎么定义平滑呢？最简单的方法就是最短路径，但是路径最短还不能保证平滑性，因此会对其不同阶导数进行 Minimize 求解，保证导数空间的连续，这就是 Smoothing Spline 最初的思想。那么，问题的目标就明确了，定义一个函数，能够最小化它的类似三阶导平滑性。

7

## Back to 1 dimensional smoothness definitions

$$f_1^*(x) = \arg \min_{f \in \Omega} \int_a^b \sqrt{(1 + |f'(x)|^2)} dx$$

$$f_{1'}^*(x) = \arg \min_{f \in \Omega} \int_a^b |f'(x)|^2 dx$$

$$f_2^*(x) = \arg \min_{f \in \Omega} \int_a^b (f''(x))^2 dx$$

$$f_3^*(x) = \arg \min_{f \in \Omega} \int_a^b (f'''(x))^2 dx$$

- Shortest length curve
- Similar to shortest length
- Approximately "shortest" length in

### ▲ 一维平滑度定义

**Smoothing Spline** 具有一些特殊的性质，在给定边界的条件下，它是一个多项式，可以找到最优解。但是它的 Boundary Constraint 只考虑了起点和终点，如果中间有障碍物就不是最优解。这种

情况下可以使用 Piecewise Polynomial (分段多项式) 来处理。

# Spline 2D

一个 Piecewise Polynomial 是一维的函数，描述二维曲线是不够的，这时候就有一个 Spline 2D，假设我们把曲线分成 N 截，每节曲线段它的 X 坐标是一个 Polynomial，Y 坐标也是一个 Polynomial。如下图所示，用 5 阶多项式来表示 X 和 Y，称之为 **Quintic Spline (五次样条)**，每一节都是这样的函数。这种表示有一个很好的特性，就是目标函数具有旋转不变性。怎么让曲线足够平滑？我们让它在 X 坐标上的变化率，也就是三阶导的平方是最小的，Y 上的变化率三阶导也是最小的，**代价函数**就是这两个变化率的和。代价函数的求解就是一个二次规划问题，我把这种 Loss Function 定义成这种形式是因为平方的积分能够给计算带来便利。

10

Spline 2D

1.1 Segment routing path

Segment routing path into n segments. each segment trajectory is defined by two polynomials:

$$x = f_i(t) = a_{i0} + a_{i1} * t + a_{i2} * t^2 + a_{i3} * t^3 + a_{i4} * t^4 + a_{i5} * t^5$$
$$y = g_i(t) = b_{i0} + b_{i1} * t + b_{i2} * t^2 + b_{i3} * t^3 + b_{i4} * t^4 + b_{i5} * t^5$$

1.2 Define objective function of optimization for each segment

$$cost = \sum_{i=1}^n \left( \int_0^{t_i} (f_i'''(t))^2 dt + \int_0^{t_i} (g_i'''(t))^2 dt \right)$$

1.3 Convert the cost function to QP formulation

QP formulation:

$$\frac{1}{2} \cdot x^T \cdot H \cdot x + f^T \cdot x$$

$s.t. LB \leq x \leq UB$  $A_{eq}x = b_{eq}$  $Ax \leq b$

## ▲ 二维样条

前面说的是用一节一节的线段来保证曲线是光滑的，在线段内部用一个二维的 Polynomial 表示，在内部是 N 阶可导的，但是如何保证节点处是平滑的呢？这个叫做**端点约束条件**，需要保证 X 和 Y 方向的倒数是相等的，一般要求到三阶导都是相等的，包括它的 X，Y 点的值也完全相等，此时就能保证三阶导连续。

# Spiral Path

还有一种方式叫做**螺旋曲线**，它通过一个极坐标形式定义，比如说沿着一条曲线，如果一个点  $S$  的曲率是知道的，假设它的位置在  $(0, 0)$  的位置，可以唯一定义出一条经过  $S$  的曲线，也就是 Spiral Path。那么可以让 Spiral Path 满足起点、终点约束条件生成一条螺旋曲线。

12

## Spiral Path (Cubic)

Suppose variable  $s$  represents the  $s$  coordinate along the line

$$\kappa(s) = a(p) + b(p)s + c(p)s^2 + d(p)s^3 \quad (3.21)$$

where the parameters are constrained to be equal to the path curvature at equally spaced points along the path:

$$\kappa(0) = p_0 \quad (3.22)$$

$$\kappa\left(\frac{s_G}{3}\right) = p_1 \quad (3.23)$$

$$\kappa\left(\frac{2s_G}{3}\right) = p_2 \quad (3.24)$$

$$\kappa(s_G) = p_3, \quad (3.25)$$

▲螺旋曲线

# Spline 2D 与 Spiral Path 区别

Spiral Path 和 Spline 2D 有什么区别呢？任何的曲线在足够密的时候都可以用 **Piecewise Spiral path** 或者是 **Piecewise Polynomial** 表示。但是它们的出发点不一样，Polynomial 计算很快很简单，Spline 2D 是一个凸空间里面生成一个 Spline 曲线。Spiral Path 是从 Configuration Space 出发。理论上来讲，螺旋曲线生成的线是要比 Spline 更好处理，对一些极端情况处理更好。

