从零开始一起学习SLAM | 不推公式，如何真正理解对极约束?

自从小白向师兄学习了李群李代数和相机成像模型的基本原理后，感觉书上的内容没那么难了，公式推导也能推得动了，感觉进步神速，不过最近小白在学习对极几何，貌似又遇到了麻烦。。。

小白：师兄，对极几何这块你觉得重要吗?
师兄：当然重要啦，这个是多视角立体视觉的核心啊

小白：那师兄一定得帮帮我讲清楚啊，最近在看书上这部分内容，感觉很难理解呢!
师兄：哪里不理解？书上公式推导的挺详细了都

小白：这么说吧，公式推导我也能大概看懂，但总觉得不知道为啥这么推导，这样推导的物理意义是什么?
师兄：哦哦，明白啦，就是不能转化为直观的理解方式吧

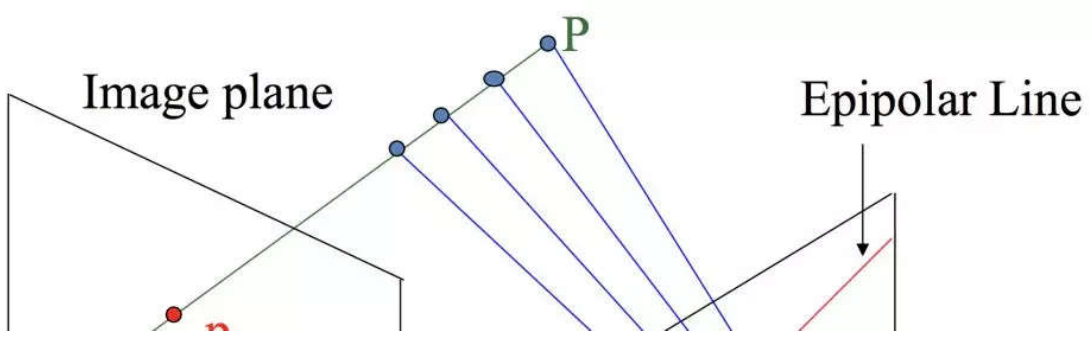
小白：是的，只能被动接受推导结果，但不能理解背后的原理，这种感觉好差。。
师兄：嗯，那我想想，怎么给你讲。。。说实话，你这个问题挺有意义的

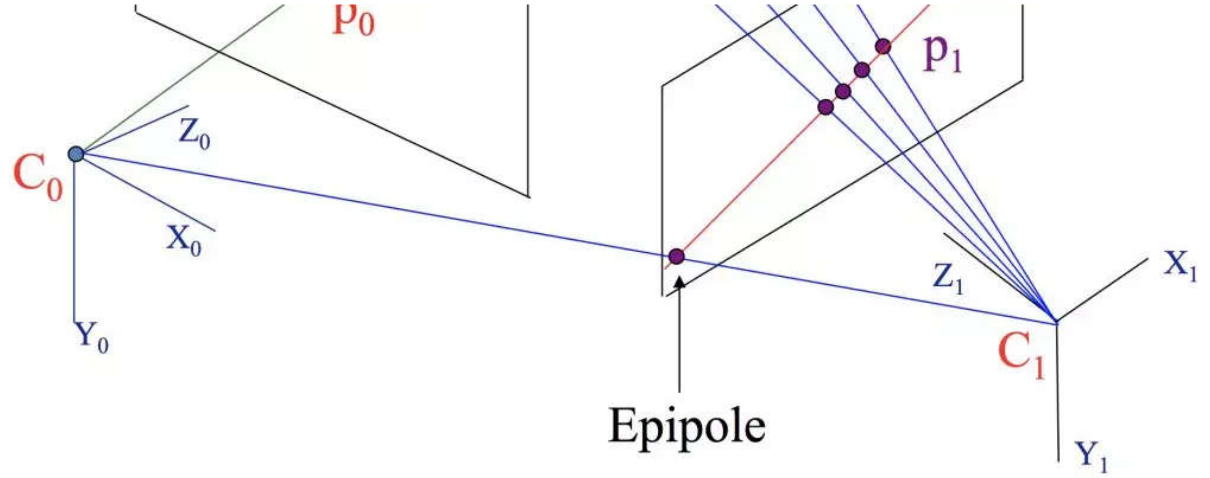
小白：太好啦！开讲吧师兄，小板凳我都搬好啦，瓜子花生都准备好啦

对极几何基本概念

师兄：好。那我就从几何意义的角度来推导一下对极几何中的对极约束吧。先看下面这个图，很熟悉吧，对极约束中很常见的图。它表示的是一个运动的相机在两个不同位置的成像，其中：

左右两个平行四边形分别是相机在不同位置的成像平面
C0, C1分别是两个位置中相机的光心，也就是针孔相机模型中的针孔
P是空间中的一个三维点，p0, p1分别是P点在不同成像平面上对应的像素点



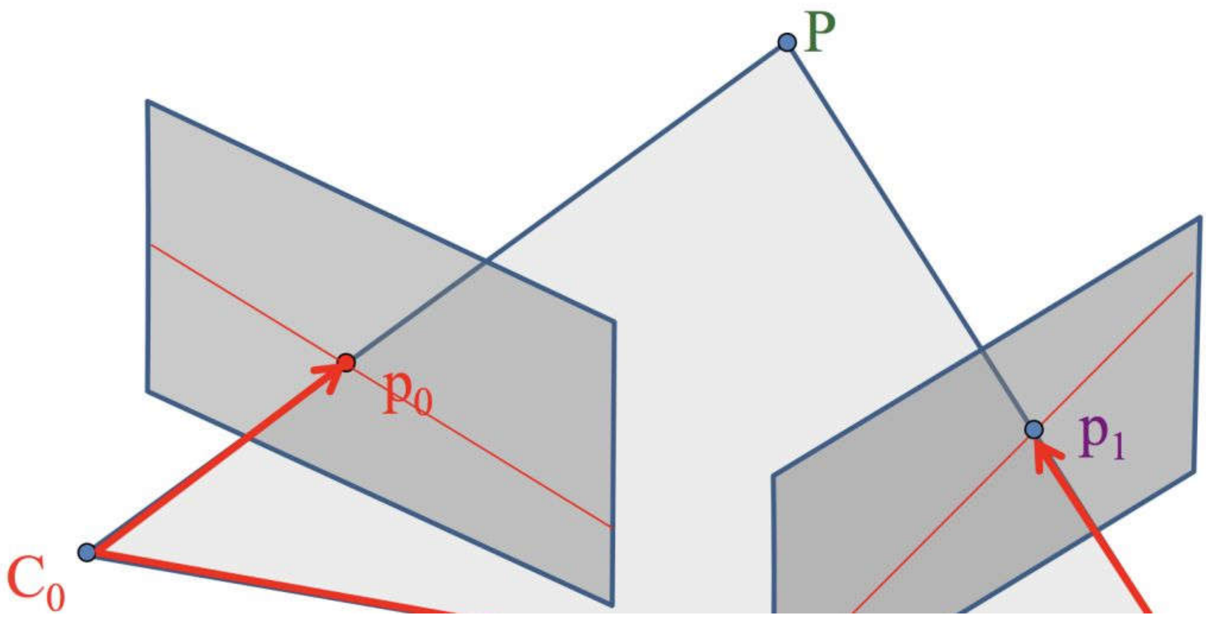


小白：嗯，这个图见到很多次了，不过一直理解的不透彻
师兄：你看上面左侧的图，如果将点P沿着C0-p0所在的直线移动，你会发现P在左边相机的成像一直不变，都是p0，这时候P在右边相机的成像点p1是一直在变化的

小白：对，好像是沿着右边那条红色的线滑动
师兄：嗯，你看C0-C1-P-p0-p1他们都是在同一个平面上的，你可以想象C0-C1-P组成的平面是一个三角尺，它所在的平面称之为极平面（epipolar plane），它像一把锋利的刀，切割了左右两个成像平面

小白：哇塞，这样感觉直观多了
师兄：嗯，其中和成像平面相交的直线称之为极线（epipolar line），两个光心C0, C1和成像平面的交点叫做极点（epipole）。

小白：师兄，好多新的术语啊，都要记吗？
师兄：不用死记，知道是哪个就行了。我们重点来说说极平面，你看下面这个图，C0-C1-P-p0-p1他们是不是都是在极平面上？



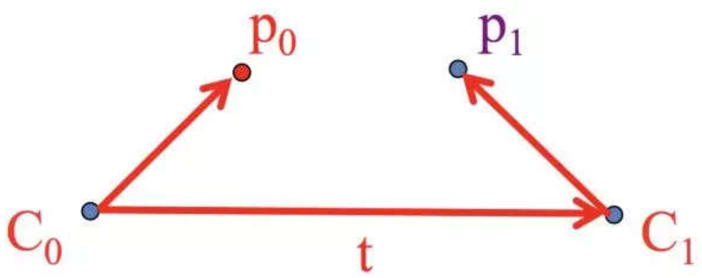
小白：嗯，是的，它们都是共面的。

不推公式，如何理解对极约束？

师兄：还记得我们在《从零开始一起学习SLAM | 为什么要用齐次坐标？》里讲的叉乘的定义吗？两个向量的叉乘结果是一个同时垂直于这两个向量的向量。
小白：记得呢，叉乘只在三维空间中有定义，比如两个向量 a和b 的叉乘写作 a x b，它是与向量 a, b都垂直的向量，其方向通过右手定则决定。

师兄：对，除了叉乘，还有点乘，a点乘b的定义是
a * b = ||a||* ||b|| *cos(θ)
因此如果两个互相垂直的向量点乘，cos(θ) = 0，点乘结果也为0。
小白：师兄，这些我都记得呢！可是怎么突然说这个呢，和对极几何有什么关系吗？

师兄：当然有关系！刚刚你说了点乘和叉乘的特点，现在我们把极平面中C0-C1-p0-p1单拎出来，看下面的图



$$\overrightarrow{\mathbf{C}_0\mathbf{p}_0} \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{C}_0\mathbf{C}_1} \times \overrightarrow{\mathbf{C}_1\mathbf{p}_1}\right) = 0$$

我们能够得到下面的 结论1：

$$\overrightarrow{\mathbf{C}_0\mathbf{p}_0} \cdot \left(\overrightarrow{\mathbf{C}_0\mathbf{C}_1} \times \overrightarrow{\mathbf{C}_1\mathbf{p}_1}\right) = 0$$

你自己说说为什么这个等式成立？
小白：我看看哈，额，根据叉乘的定义

$$\left(\overrightarrow{\mathbf{C}_0\mathbf{C}_1} \times \overrightarrow{\mathbf{C}_1\mathbf{p}_1}\right)$$

的结果是一个同时垂直于它们的向量，也就是说垂直于C0-C1-p0-p1组成的极平面，因此这个叉乘的结果再点乘

$$\overrightarrow{\mathbf{C}_0\mathbf{p}_0}$$

结果就是0了。是吧，师兄？
师兄：完全正确，用到的都是我们前面刚刚讲过的基础知识~
小白：可是，师兄，叉乘不是仅在三维空间中有定义吗？我们这里的p0, p1都是图像上的二维点啊

师兄：这个问题问的好！确实如你所说，p0, p1都是图像上的二维点，不过，这里我们会把它变成三维的方向向量来考虑
小白：啥是方向向量啊？

师兄：就是我们只考虑它的方向，而不考虑它的起点或终点的向量。我们假设一个归一化的图像平面，该平面上焦距f =1 ，因此我们可以定义在以C0为原点的坐标系下

$$\mathbf{p}_0 = {}^{C_0}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

而在以C1为原点的坐标系下

$$\mathbf{p}_1 = {}^{C_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

小白：这样定义可以吗？
师兄：可以的，事实上，你在C0-C1-p0-p1组成的极平面上，保证

$$\overrightarrow{\mathbf{C}_0\mathbf{p}_0}$$

的方向不变，在极平面上随便移动，结论1中等式都成立。同样的道理，在极平面上，保证

$$\overrightarrow{\mathbf{C}_1\mathbf{p}_1}$$

方向不变，在极平面上随便移动，结论1中等式仍然都成立。
小白：确实是这样，师兄，下一步怎么办？好像p0, p1不在同一个参考坐标系里？

师兄：是的，前面说过，p0在以C0为原点的参考坐标系，p1在以C1为原点的参考坐标系，所以我们还是需要转换坐标系。这里我们把所有点的坐标都转换到以C0为原点的坐标系。前面说过这些向量都是方向向量和向量起始位置无关，所以这里坐标系变换只考虑旋转就可以。我们记 R 为从C1坐标系到C0坐标系的旋转矩阵
小白：那么 Rp1 就是p1 在以C0为原点的C0坐标系了
师兄：对的，现在再看看**结论1**：

师兄：对的~现在再看看**结论1**：

$$\overrightarrow{\mathbf{C}_0\mathbf{p}_0}\cdot\left(\overrightarrow{\mathbf{C}_0\mathbf{C}_1}\times\overrightarrow{\mathbf{C}_1\mathbf{p}_1}\right)=0$$

最左边向量C0-p0就可以用p0表示，向量C0-C1就是光心C1相对于C0的平移，我们记为t， 向量C1-p1根据前面的讨论，可以用 Rp1 来表示，那么结论1可以表示为以下的结论2：

$$\mathbf{p}_0\cdot\left(\mathbf{t}\times\mathbf{R}\mathbf{p}_1\right)=0$$

这个式子是根据对极几何得到的，我们称之为对极约束。

小白：哇塞，师兄，原来对极约束也可以这样得到啊！我现在能完全理解啦！

如 何 得 到 极 线 方 程 ?

师兄：对，这就是对极约束最直观的解释，一般把中间的部分拿出来，像下面这样，记为本质矩阵或本征矩阵（Essential Matrix）。

$$E=t^{\wedge}R$$

然后我们就得到了如下的结论3：

$$\mathbf{p}_0^T\,\mathbf{E}\,\mathbf{p}_1=0$$

小白：厉害了师兄，这下彻底明白啦，不过之前提到的极线什么的好像也没说怎么求啊?

师兄：其实根据上面结论3就可以求出极线方程啦！

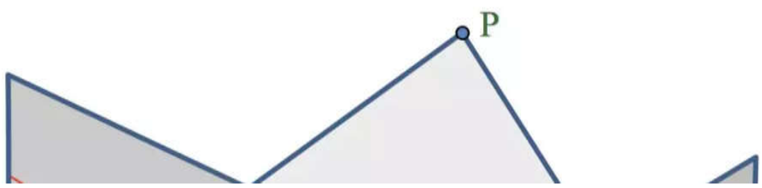
小白：啊，怎么求极线方程?

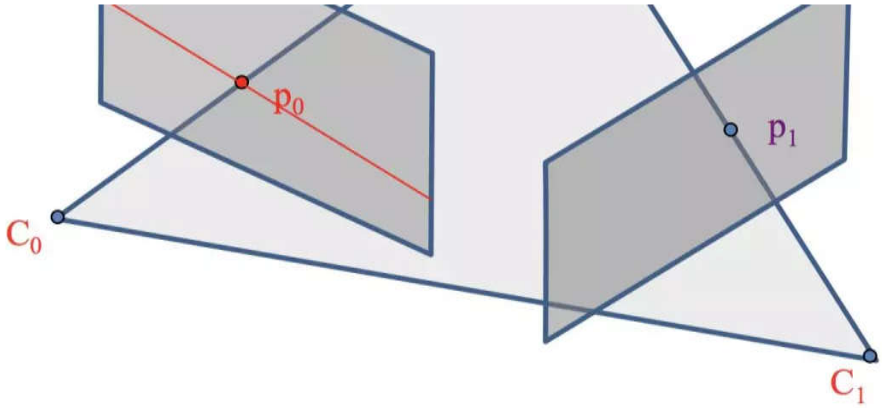
师兄：还记得我们在《从零开始一起学习SLAM | 为什么要用齐次坐标？》里讲过的点p在直线l上的充分必要条件就是 直线l 的系数与p的齐次坐标p'的内积为0

$$l^T*p'=0$$

小白：记得呢！那节课的习题我都认真做了，所以印象深刻！

师兄：不错！那结论3我们就可以把E*p1看做是直线的方程，p0看做是直线上的点，也就是说E*p1就是以C0为原点坐标系中的极线了。如下图中红色线条所示，就是极线啦，它的方程是E*p1。





小白：原来如此，看来以前的基础很重要啊！哪里都能用上。谢谢师兄，今天没有推导公式，我竟然能够得到极线约束的式子，太神奇了，而且印象很深刻！

师兄：嗯，相信以后你肯定不会忘记啦！
小白：师兄，我们去吃大餐庆祝一下吧！
师兄：走起~

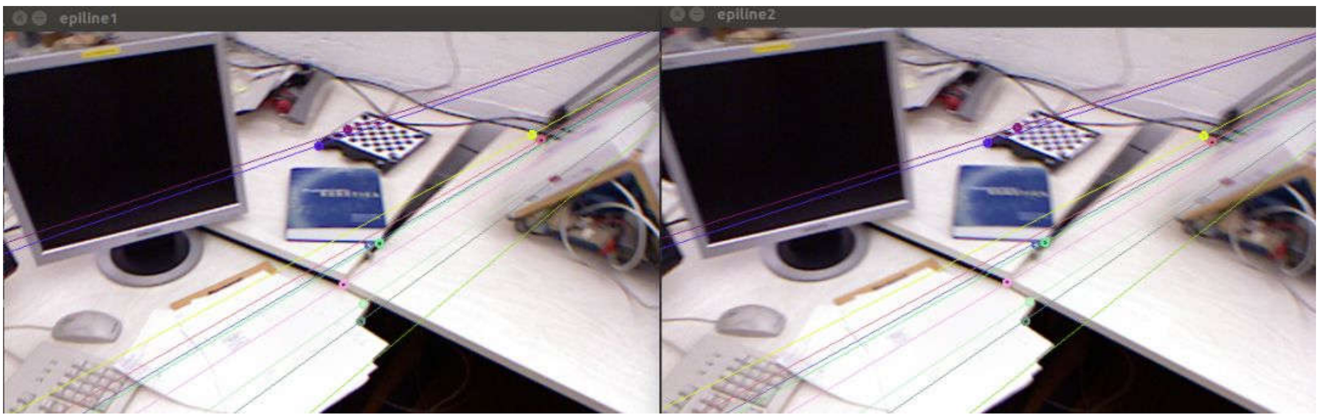
师兄：等下，今天的作业还没留呢！
小白：（我晕，师兄记性真好。。）

作 业

作业1：
证明：对三维列向量下面等式恒成立。其中等式左边 X 表示叉乘，等式右边上三角符号表示反对称矩阵。

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a}^{\wedge}\vec{b}$$

作业2：
题目：现有一个运动着的相机拍摄的连续两张图片，其中特征点匹配部分已经完成。请根据两帧图像对应的匹配点计算基础矩阵，并利用该矩阵绘制出前10个特征点对应的极线。
参考结果是这样的：




计算机视觉life