

知  
识  
点

敲黑板，本文需要学习的知识点有

正定矩阵    车辆运动学模型

对角矩阵    半正定矩阵

期望    最优控制

**LQR（线性二次调解器）理论**是现代控制理论中发展最早也最为成熟的一种状态空间设计法。特别可贵的是，LQR可得到状态线性反馈的最优控制规律，易于构成闭环最优控制。

LQR 最优设计是指设计出的状态反馈控制器  $K$  要使二次型目标函数  $J$  取最小值，而  $K$  由权矩阵  $Q$  与  $R$  唯一决定，故此  $Q$ 、 $R$  的选择尤为重要。

**MPC（模型预测控制）**是一种先进的过程控制方法，在满足一定约束条件的前提下，被用来实现过程控制，它的实现依赖于过程的动态模型（通常为线性模型）。

在控制时域（一段有限时间）内，它主要针对当前时刻进行优化，但也考虑未来时刻，求取当前时刻的最优控制解，然后反复优化，从而实现整个时域的优化求解。

本文由社区开发者——吕伊鹏撰写，对MPC与LQR进行了较为详细的比较，希望这篇文给感兴趣的同学带来更多帮助。



Apollo中用到了PID、MPC和LQR三种控制器，其中，MPC和LQR控制器在状态方程的形式、状态变量的形式、目标函数的形式等有诸多相似之处，因此结合自己目前了解到的信息，将两者进行一定的比较。

MPC(Model Predictive Control，模型预测控制)和LQR(Linear–Quadratic Regulator，线性二次调解器) 在状态方程、控制实现等方面，有很多相似之处，但也有很多不同之处，如工作时

域、最优解等，基于各自的理论基础，从研究对象、状态方程、目标函数、求解方法等方面，对MPC和LQR做简要对比分析。

#### 本文主要参考内容：

- 【1】龚建伟,姜岩,徐威.无人驾驶车辆模型预测控制[M].北京理工大学出版社, 2014.
- 【2】Model predictive control-Wikipedia.
- 【3】Linear-quadratic regulator-Wikipedia.
- 【4】Inverted Pendulum: State-Space Methods for Controller Design.
- 【5】王金城. 现代控制理论[M]. 化学工业出版社, 2007。

## 研究对象

apollo 开发者社区

**LQR的研究对象**是现代控制理论中以**状态空间方程形式给出的线性系统**。**MPC的研究对象**可以是**线性系统**，也可以是**非线性系统**，只不过为了某些需求，如时效性，计算的便捷，操控性等，一般会将非线性系统转换为线性系统进行计算。非线性系统的线性化可参考上一篇文章。

Apollo中，LQR和MPC控制器都选用的单车动力学模型作为研究对象，单车动力学模型为非线性系统，但LQR和MPC控制器的目的是为了求最优控制解，在具体的优化求解时，均通过线性化方法将状态方程转化为线性方程进行求解，所以，可以说Apollo中LQR和MPC控制器的研究对象均为线性系统。

## 状态方程

apollo 开发者社区

LQR的状态方程多以微分方程的形式给出，如：

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

是一个连续线性系统，在计算过程中需要转换为如公式3的离散线性系统。

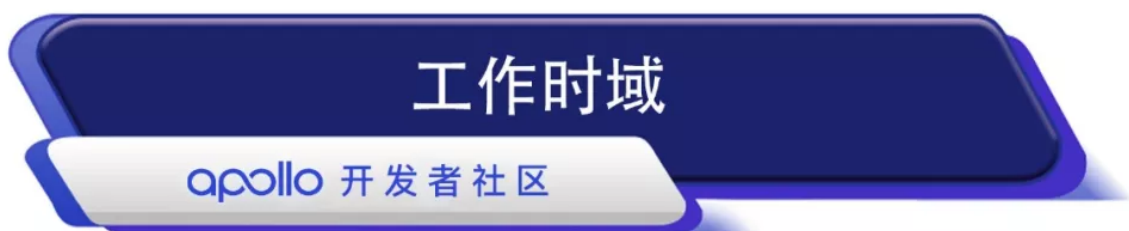
MPC的状态方程可以为线性系统，可以为非线性系统，非线性系统形如下：

$$\dot{\xi} = f(\xi, u) \quad (2)$$

线性系统如公式3所示：

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad (3)$$

但LQR和MPC在计算求解时基本都是基于离散线性方程计算的。公式1可以很方便的转化为公式3的形式。



按照维基百科的说法：

The main differences between MPC and LQR are that LQR optimizes in a fixed time window (horizon) whereas MPC optimizes in a receding time window, and that a new solution is computed often whereas LQR uses the single (optimal) solution for the whole time horizon.

LQR在一个固定的时域上求解，且一个时域内只有一个最优解，而MPC在一个逐渐消减的时域内 (in a receding time window) 求解最优解，且最优解经常更新。

可以结合MPC的滚动优化，以及图1进行理解：

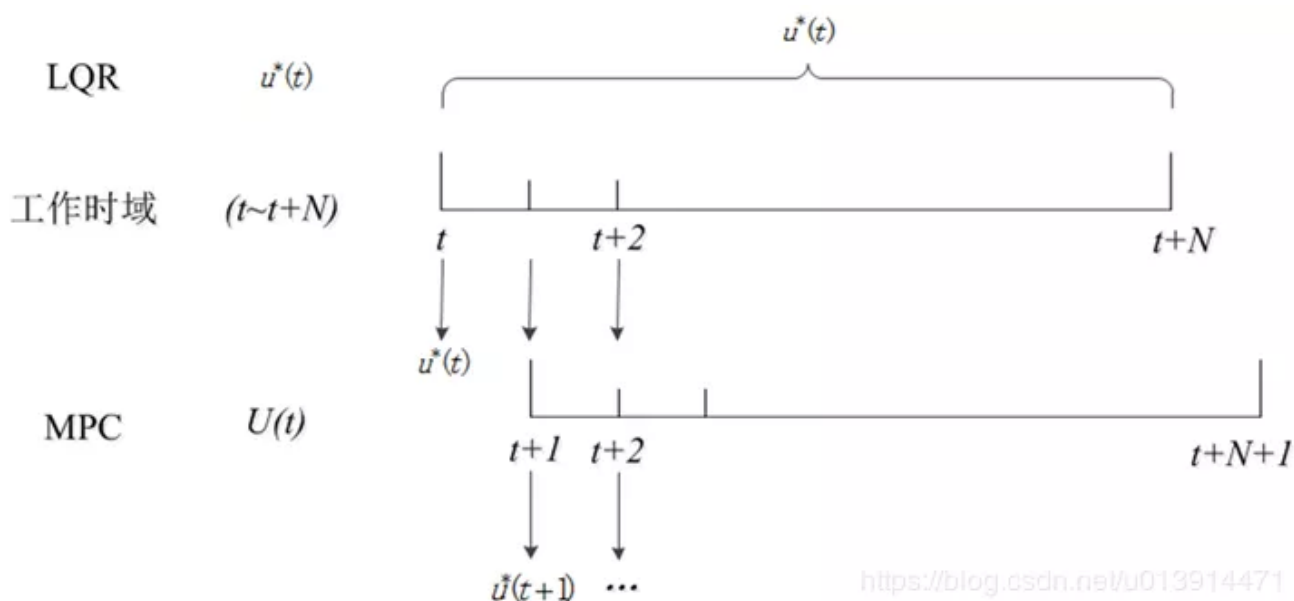


图1 MPC和LQR的工作时段

针对同一工作时段 $[t, t+N]$ ，LQR在该时段中，有唯一最优控制解 $u^*(t)$ ，而MPC仅在 $t$ 时刻有最优解 $u^*(t)$ ，但它会计算出一个控制序列 $U(t)$ ，并仅将序列的第一个值 $u^*(t)$ 作为控制量输出给控制系统，然后在下一采样时间结合车辆当前状况求取下一个最优控制解 $u^*(t+1)$ ，这就是MPC所谓的**滚动优化**。

这么做的目的是为了**使控制效果在一定时间内可期**，并且能根据控制效果尽早调整控制变量，使实际状态更切合期望状态。

此外，LQR的工作时段可以拓展到无限大，即可以求取无限时段的最优控制解。而MPC只针对有限时段。

## 目标函数

apollo 开发者社区

优化求解问题一般离不开目标函数的设计。

LQR的目标函数的一般形式为：

$$J = \frac{1}{2} x^T(t_f) Q_0(t) x(t_f) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} [x^T Q x + u^T R u] dt \quad (4)$$

其中， $x(t_f)$ 为**终端状态**， $Q_0(t)$ 为**正定的终端加权矩阵**， $x$ 为**状态变量**，多为各种误差， $u$ 为**控制变量**， $Q$ 为**半正定的状态加权矩阵**， $R$ 为**正定的控制加权矩阵**，实际应用中， $Q$ 、 $R$ 多为**对角矩阵**。

MPC的目标函数的一般形式为：

$$J = x(t+N) Q_0 x(t+N) + \sum_{i=1}^N (x(t+i|t)^T Q x(t+i|t) + u(t+i-1)^T R u(t+i-1)) \quad (5)$$

其中， $x$ ， $u$ ， $Q_0$ ， $Q$ ， $R$  的定义同上。

从形式上可以看出，LQR的目标函数为积分形式，MPC的目标函数为求和形式，但其实都是对代价的累计。

两者第一部分均为终端代价函数，当系统对终端状态要求极严的情况下才添加，一般情况下可省略。

$x^T Q x$  项代表**跟踪代价**，表示跟踪过程中误差的大小， $u^T R u$  项代表**控制代价**，表示对控制的约束或要求等。

## 求解方法

apollo 开发者社区

正如工作时域所述，针对同一工作时域，LQR有**唯一最优控制解**，也就是在该控制周期内，LQR只进行一次计算。

而MPC滚动优化的思想，使其给出该时域内的一组控制序列对应不同的采样时刻（采样周期和控制周期不一定相同），但是只将**该序列的第一个值输出给被控系统**，作为**该时刻的最优控制解**。

因此，对于工作时域 $[t, t+N]$ ，LQR只有唯一解，对于线性MPC，本质是凸优化问题，只有唯一解；但非线性MPC，可能会有N个local optimal。

最优控制解的求取多基于目标函数进行，取线性约束下的目标函数的极值为最优控制解。对于系统为线性，目标函数为状态变量和控制变量的二次型函数的线性二次性问题，最优解具有统一的解析表达式。

Apollo中的MPC将优化问题转化为二次规划问题，利用二次规划求解器进行求解。横向控制中用的是LQR调节器，它通过假设控制量 $u(t)$ 不受约束，利用变分法求解。

此外，LQR对整个时域进行优化求解，且求解过程中假设控制量不受约束，但是实际情况下，控制量是有约束的。

而MPC通常在比整个时域更小的时间窗口中解决优化问题，因此可能获得次优解，且对线性不作任何假设，它能够处理硬约束以及非线性系统偏离其线性化工作点的迁移，这两者都是MPC的优点。