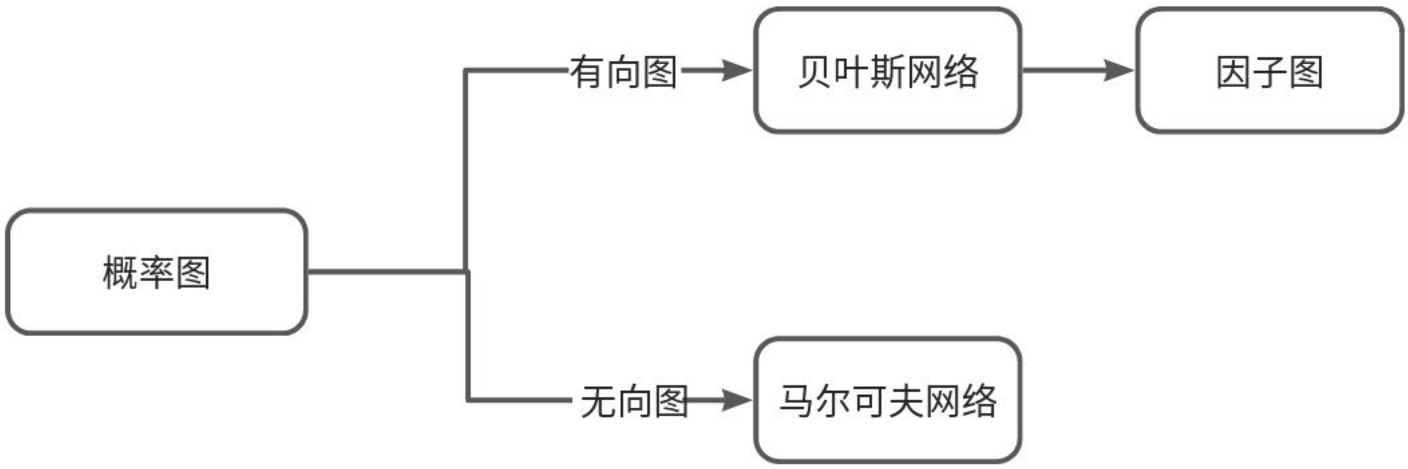
因子图介绍及应用

1.从概率图到因子图

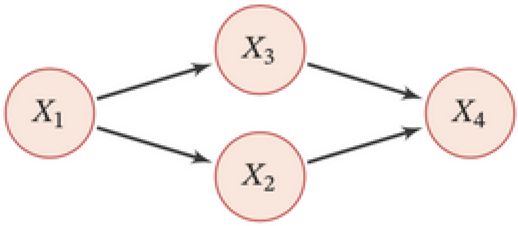


概率图

概念：概率图模型是用图来表示变量概率依赖关系的理论，结合概率论与图论的知识，利用图来表示与模型有关的变量的联合概率分布。在概率图模型中，注意变量有条件独立性。
为什么要有条件独立性：
对于一个 K 维的随机变量，其联合概率为高维空间中的分布，一般难以直接建模，如，对于离散随机变量 $\mathbf{X}=[X_1,X_2,...,X_k]$ ，每个离散变量有m个取值，没有独立假设的条件下，需要 m^K-1 个参数才能表示其概率分布（概率和为1所以减1）。这对实际应用是不可接受的，当随机变量直接有条件独立，则随机变量可以表示为条件概率的乘积：

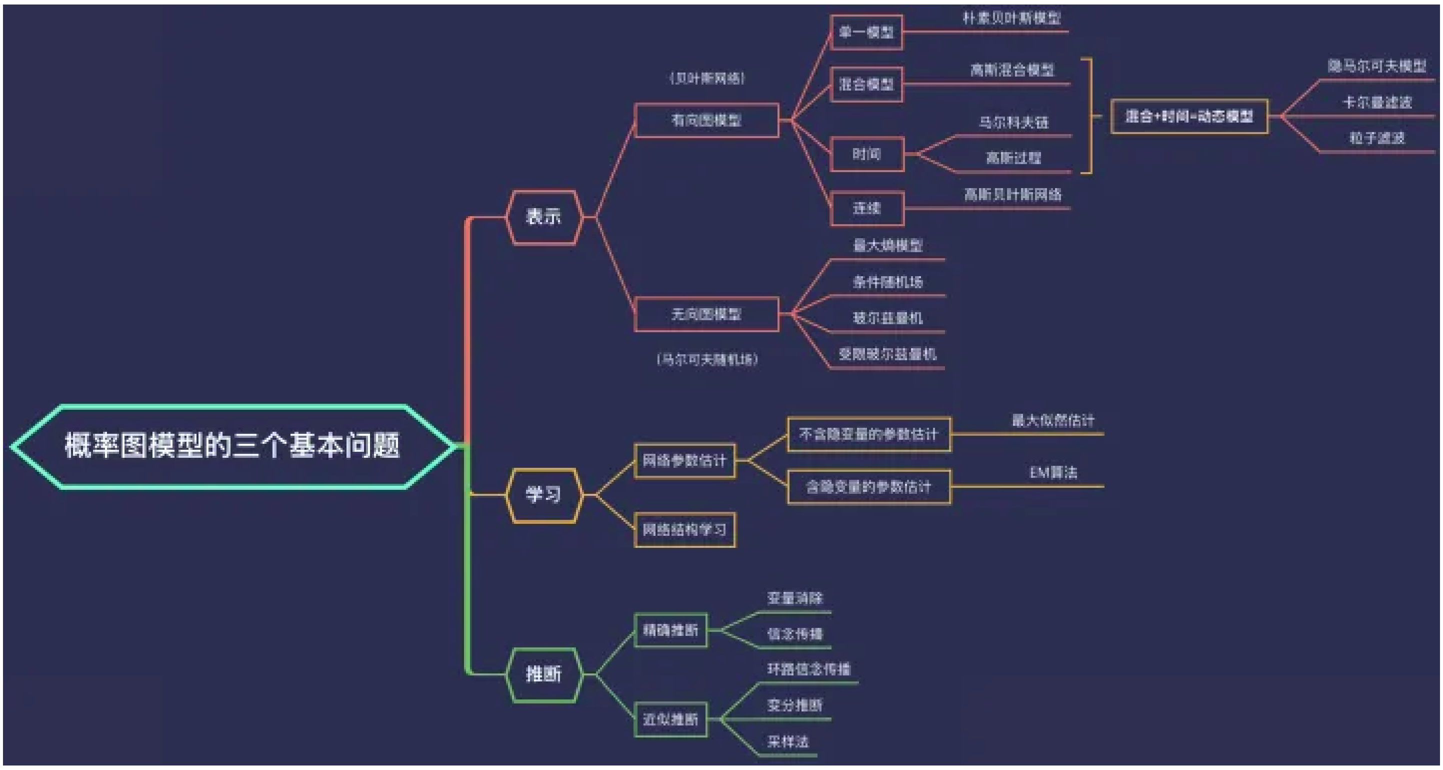
$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= P(\mathbf{X}=\mathbf{x}) \\ &= p\left(x_1\right) p\left(x_2 \mid x_1\right) \cdots p\left(x_k \mid x_1, x_2, \ldots, x_{K-1}\right) \\ &= \prod_{k=1}^K p\left(x_k \mid x_1, \ldots, x_{k-1}\right) \end{aligned}$$

概率图就可以直观的描述随机变量间条件独立性的关，如对于式子：
$p(\mathbf{x})=p(x_1)p(x_2|x_1)p(x_3|x_1)p(x_4|x_2,x_3)$
可以表示为如下的概率图。



概率图模型的三个基本问题：

- 表示问题：对于一个概率模型，如何通过图结构来描述变量之间的依赖关系。
- 学习问题：图模型的学习包括图结构的学习和参数的学习。
- 推断问题：在已知部分变量时，计算其他变量的条件概率分布。



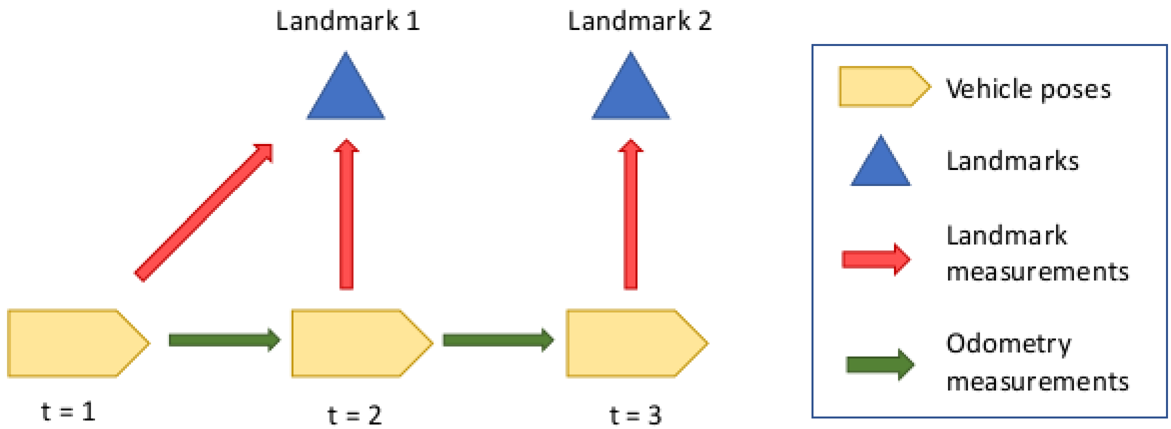
贝叶斯网络

贝叶斯网络是概率图模型中的有向图，其网络拓朴结构是一个有向无环图(DAG)，在贝叶斯网络中，节点表示随机变量，边表示依赖关系，在贝叶斯网络中为单向依赖。在SLAM中，这里随机变量既可以是观测量，也可以是状态量。一个贝叶斯网络在所有变量 Θ 上的联合概率密度函数 $p(\Theta)$ 被定义为与每个节点相关联得到条件概率密度的乘积：

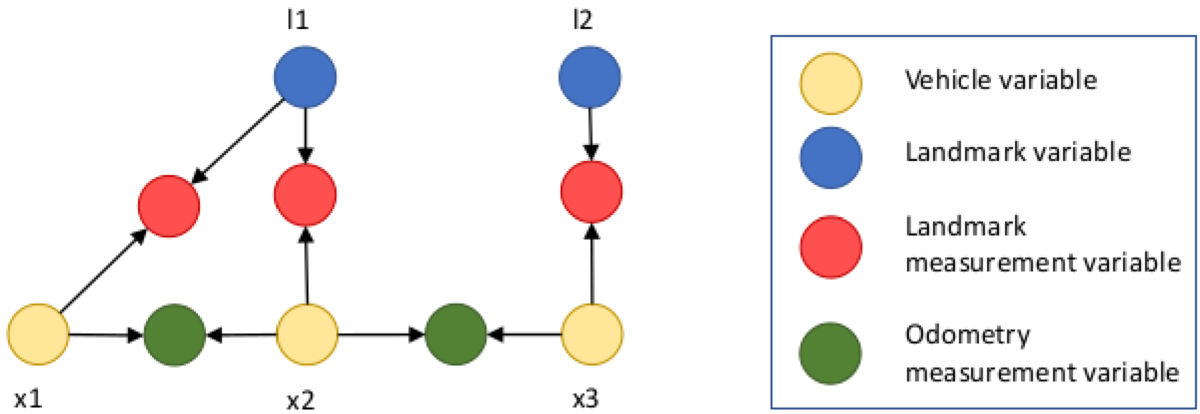
$$p(\Theta) = \prod_j p(\theta_j|\pi_j)$$

其中 π_j 为 θ_j 的父节点， $p(\theta_j|\pi_j)$ 表示了条件概率密度

贝叶斯网络实例



转化为贝叶斯网络



其联合概率密度可以表示为：
联合概率： $P(X,Z)=P(Z|X)P(X)$
条件概率：率 $P(Z|X)=\prod_i P_i(Z_i|X_i)$ 观测量由系统状态决定
$P(z_{11},z_{12},z_{13},z_{21},z_{22}|x_1,x_2,x_3,l_1,l_2)=$
$P(z_{11}|x_2,l_1)P(z_{12}|x_1,l_1)P(z_{13}|x_3,l_2)P(z_{21}|x_1,x_2)P(z_{22}|x_2.x_3)$

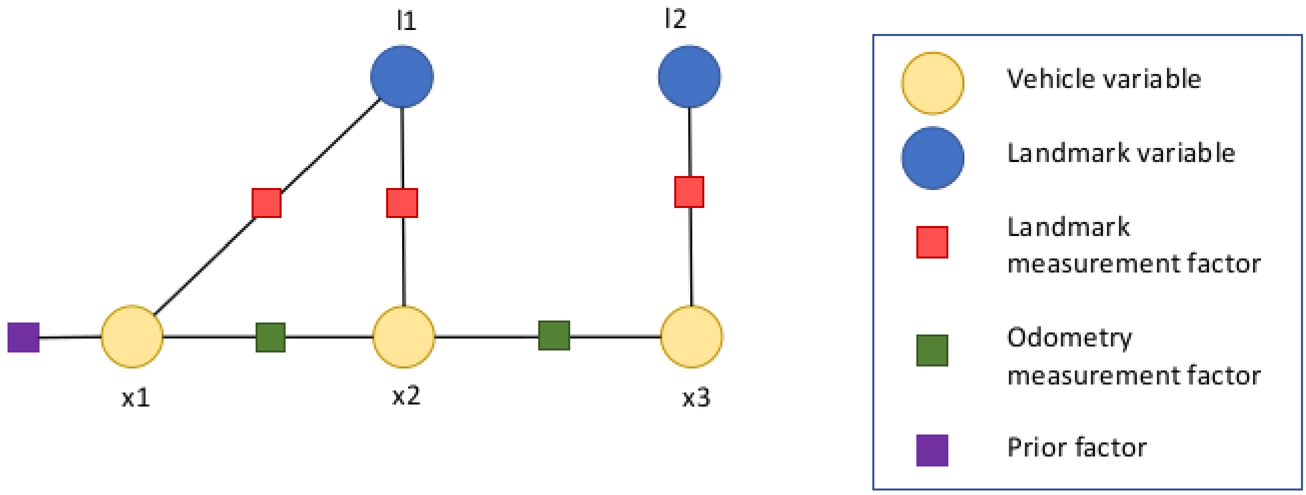
因子图

贝叶斯网络是生成模型，即已知状态，推测观测，而SLAM问题是已知观测，估计状态。贝叶斯网络更适合建模，而因子图更适合推断。
贝叶斯定理：
$$P(X|Z)=\frac{P(Z|X)P(X)}{P(Z)}\propto P(Z|X)P(X)$$
对于SLAM问题，已知观测 Z 求解状态变量 X 。通过贝叶斯定理，可以将该问题进行转化，变成似然函数与状态先验的乘积。在这里，由于观测量不是变量且且只是归一化因子，所以忽略，此时该估计问题正比与似然函数乘先验，该估计问题转化为最大后验估计，同时为了强调似然估计是关于 X 的函数，改变其符号。
$$X^*=\arg\max_X P(X|Z)=\arg\max_X P(Z|X)P(X)$$

$$X^* = \arg\max_X \phi(X) = \arg\max_X \prod_i \phi_i(x_i)$$

$$\phi(X_i) = \psi(X_i, Z_i) \propto P_i(Z_i|X_i)$$

将每个条件概率的乘积进行分解，每一项被称为因子，所有因子乘起来就构成了因子图。



与贝叶斯网络不同的是，在因子图中，观测量不会被显示的表示出来，而是用因子去表示每一个后验概率密度 $p(X|Z)$，下图每个方形节点表示一个因子，因子节点只与观测函数中出现的状态变量节点相连。状态变量用圆圈表示，是要推理的量，方块表示传感器观测，也就是因子，先验因子用来固定系统的解，防止其解不唯一。

$$\phi(X) \doteq \phi(x_1, l_1)\phi(x_2, l_1)\phi(x_3, l_2)\phi(x_1, x_2)\phi(x_2, x_3)\phi(x_1)$$

$$X^* = \arg\max_X \phi(X) = \arg\max_X \prod_i \phi_i(X_i)$$

因子的定义

在因子图中，每个因子一般定义为指数函数误差函数,也就是高斯函数,表示基于状态推测的观测和实际观测之间的误差，表示如下：

$$\phi_i(X_i) = \exp(-\frac{1}{2}||f_i(X_i)||^2_{\Sigma_i})$$

$$||f_i(X_i)||^2_{\Sigma_i} = f_i(X_i)^T \Sigma^{-1} f_i(X_i)$$

在求解时取负对数，构建最小二乘问题，即将因子图推理转变成了非线性最小二乘问题的求解。

$$\begin{aligned} X^* &= \arg\max_X \prod_i \phi_i(X_i) = \arg\max_X \log\left(\prod_i \phi_i(X_i)\right) \\ &= \arg\min_X \prod_i -\log(\phi_i(X_i)) = \arg\min_X \sum_i \|f_i(X_i)\|^2_{\Sigma_i} \end{aligned}$$

简单因子举例：

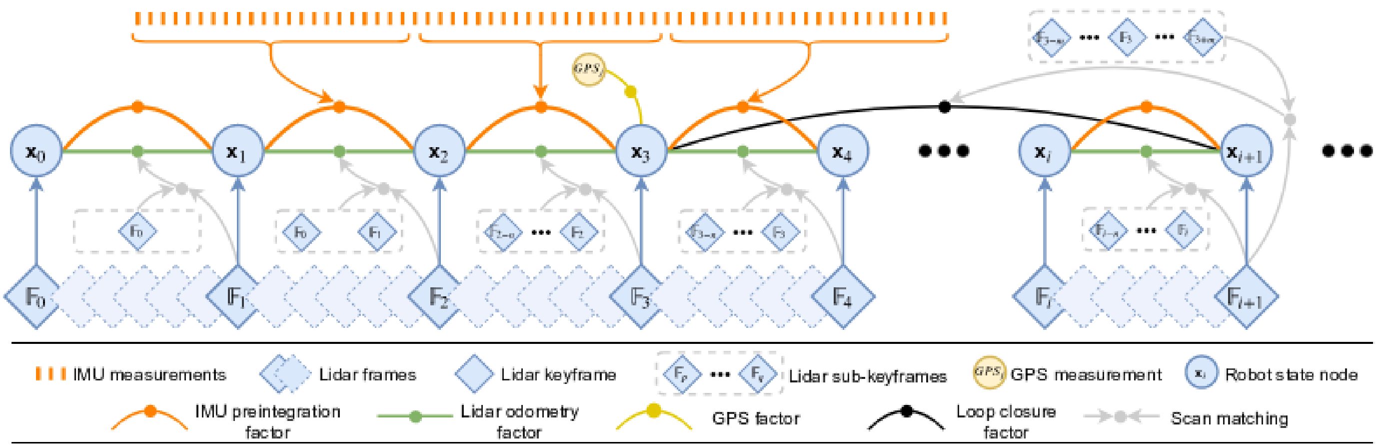
- GTSAM中的evaluateError表达： $E(q) = h(q) - m$
- 先验因子： $f_{prior}(x_i) = x_i - z$

- 里程计因子： $f_{odom}(x_i, x_{i+z}) = (x_{i+1} - x_i) - z$
- landmark因子： $f_{landmark} = h_{projection}(x_i, l_j) - z$
- 方位角测量因子： $f(x_i, l_i, z_i) = atan2(l_y - x_y, l_x - x_x) - z_i$

2.因子图的应用

LIO-SAM

https://github.com/TixiaoShan/LIO-SAM

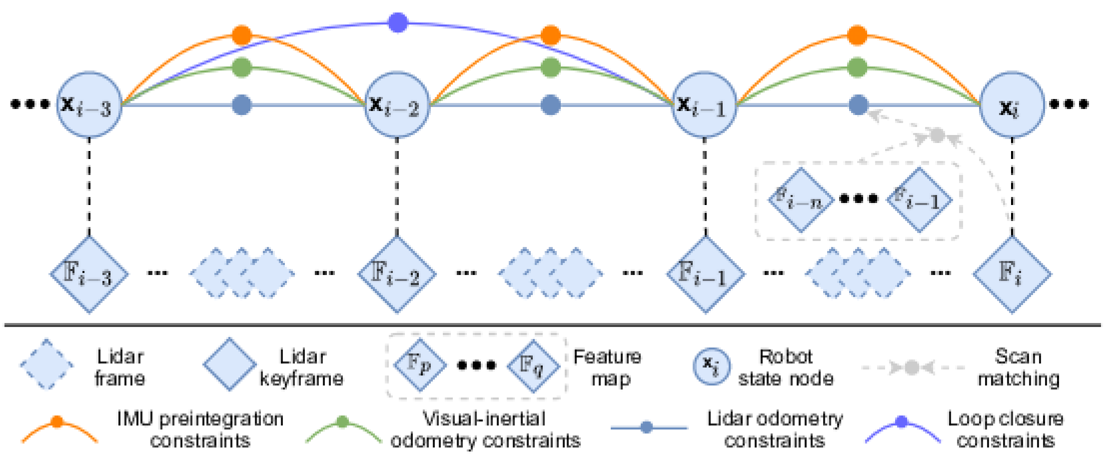


因子：

- IMU预积分因子
- 雷达里程计因子：采用关键帧构成，关键帧选取为机器人位姿变化超过阈值(1m和10°)。
- GPS因子
- 回环因子

LVI-SAM

https://github.com/TixiaoShan/LVI-SAM

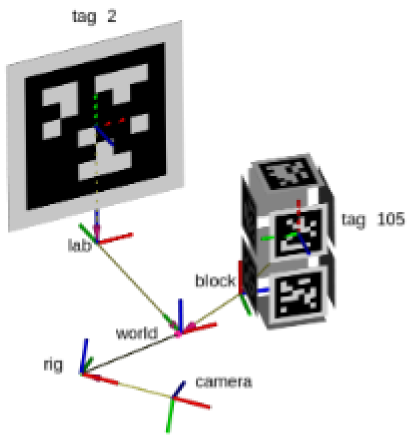


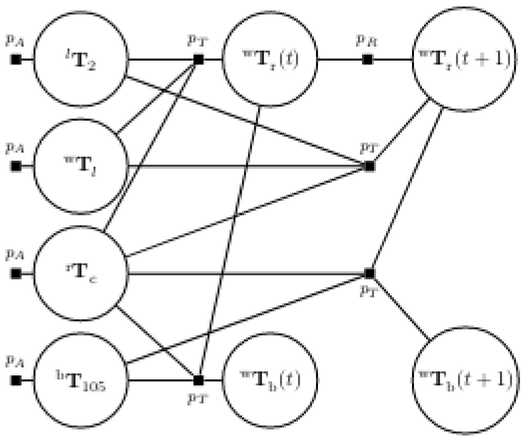
因子：

- imu预积分因子
- 视觉里程计因子
- 雷达里程计因子
- 回环因子：闭环检测的约束候选帧首先由VIS提供，然后通过雷达匹配进一步优化。

TagSLAM

https://berndpfrommer.github.io/tagslam_web/





$$\Theta^* = \arg\max_{\Theta} P(\Theta|\mathcal{Z})$$

变量：

${}^{l}T_2$ tag2 to lab

${}^{w}T_l$ world to lab

${}^{r}T_c$ camera to rigid

${}^{b}T_{105}$ tag 105 to block

${}^{w}T_{r}(t)$ rigid to world

因子：

- 先验因子 p_A （一元因子）：

$$p_A\left(\mathbf{T} \mid \mathbf{T}_0, \Sigma\right)=g\left(\mathbf{T} ; \mathbf{T}_0, \Sigma\right)$$

${}^{l}T_{2}$ tag2 to lab

${}^{w}T_{l}$ world to lab

${}^{r}T_{c}$ camera to rigid

${}^{b}T_{105}$ tag 105 to block

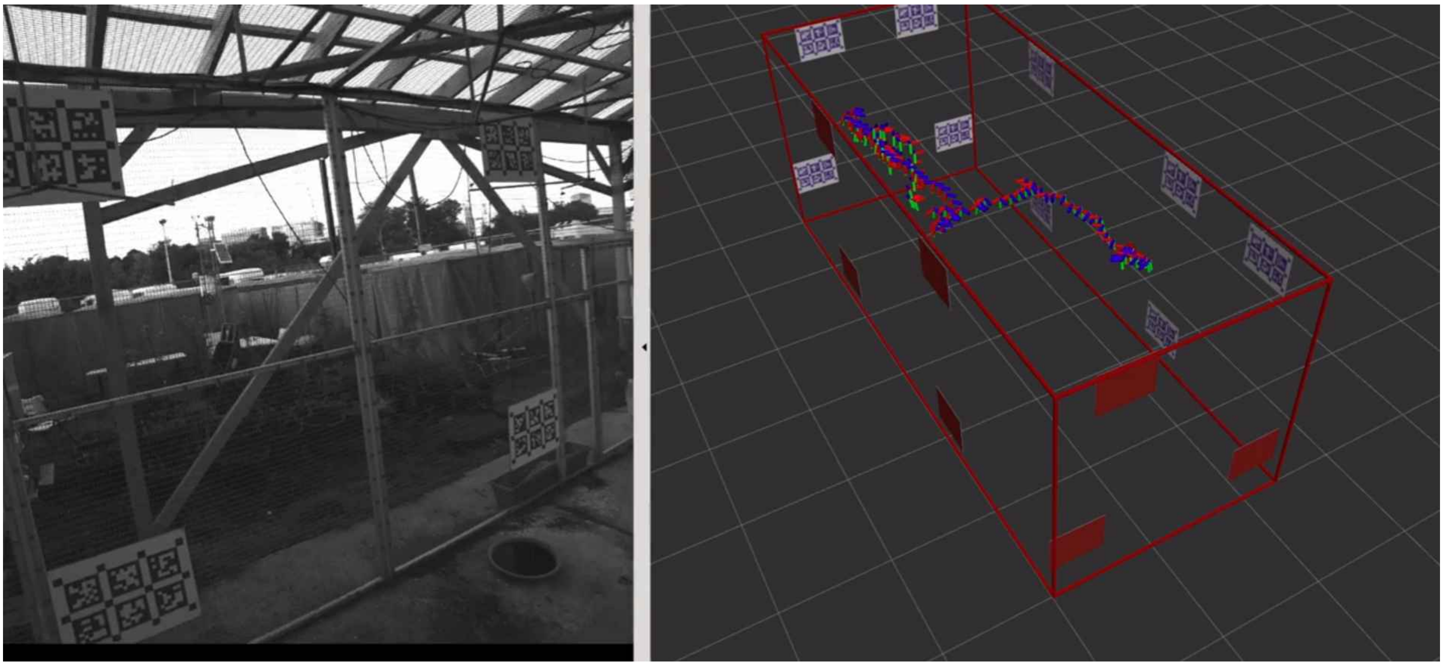
- Tag映射因子 p_T：

$$p_T\left({}^{\mathrm{w}}\mathbf{T}_{\text{body}}, {}^{\text{rig}}\mathbf{T}_{\text{cam}}, {}^{\text{body}}\mathbf{T}_{\text{tag}}, {}^{\mathrm{w}}\mathbf{T}_{\text{rig}} \mid \left\{\mathbf{u}_c\right\}, \sigma_p\right)= \prod_{c=1 \ldots 4} g\left(\Pi\left({}^{\text{cam}}\mathbf{T}_{\text{rig}}\, {}^{\text{rig}}\mathbf{T}_{\mathrm{w}}\, {}^{\mathrm{w}}\mathbf{T}_{\text{body}}\, {}^{\text{body}}\mathbf{T}_{\text{tag}}\, \mathbf{s}_c\right) ; \mathbf{u}_c, \sigma_p\right) .$$

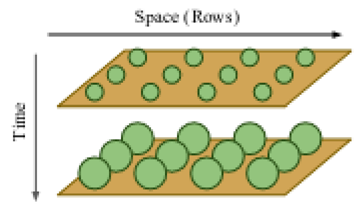
$s_c \in \{s_1, s_2, s_3 . s_4\}$ 表示Tag的四个角点，将Tag 的四个角点从相机系通过上述公式转到相机系再转到像素坐标系和观测构成误差。

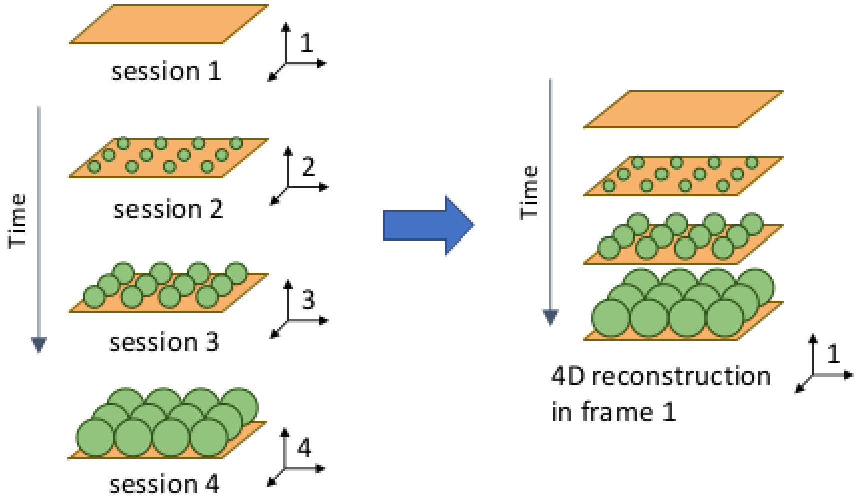
- 相对位姿因子 p_R：

$$p_R\left(\mathbf{T}_A, \mathbf{T}_B \mid \Delta \mathbf{T}, \Sigma\right)=g\left(\mathbf{T}_B^{-1} \mathbf{T}_A ; \Delta \mathbf{T}, \Sigma\right)$$



4D Crop Monitoring: Spatio-Temporal Reconstruction for Agriculture





在三维重建中引入时间构成四维重建

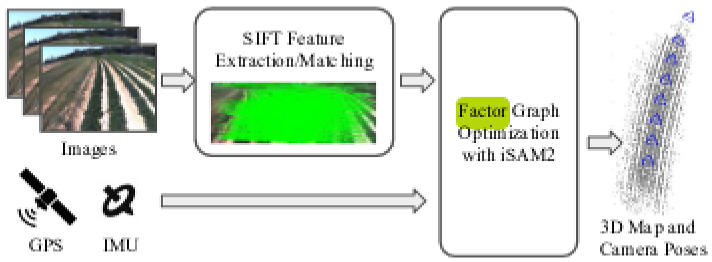
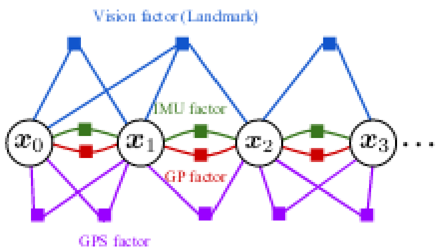


Fig. 3: Overview of multi-sensor SLAM system.

传统三维重建使用GTSAM做后端优化



三维重建因子图

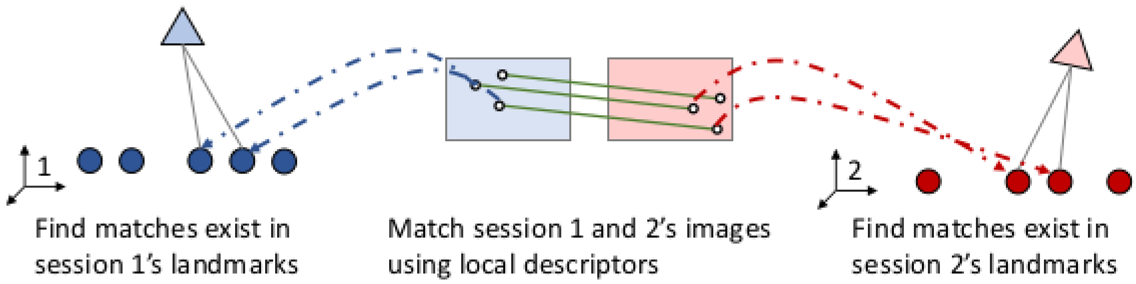
因子：

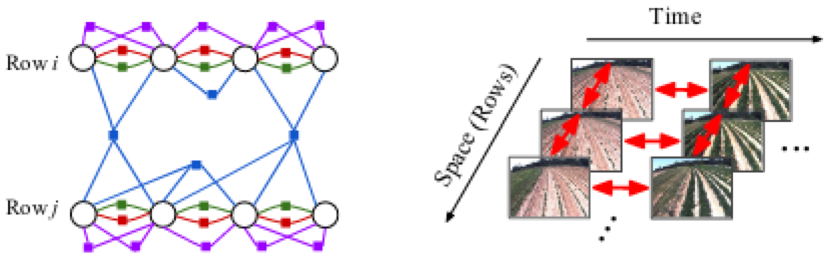
- structure vision 因子:一种低内存的视觉位姿约束因子，可以在不优化路标点的情况下计算位姿约束

Eliminating conditionally independent sets in factor graphs: A unifying perspective based on smart factors(Carlone et al 2014)

- imu预积分因子
- GPS因子：插值构成相对位姿约束
- GP因子：由于图像和GPS没有时间对齐，所以将SLAM建模成高斯过程(GP)

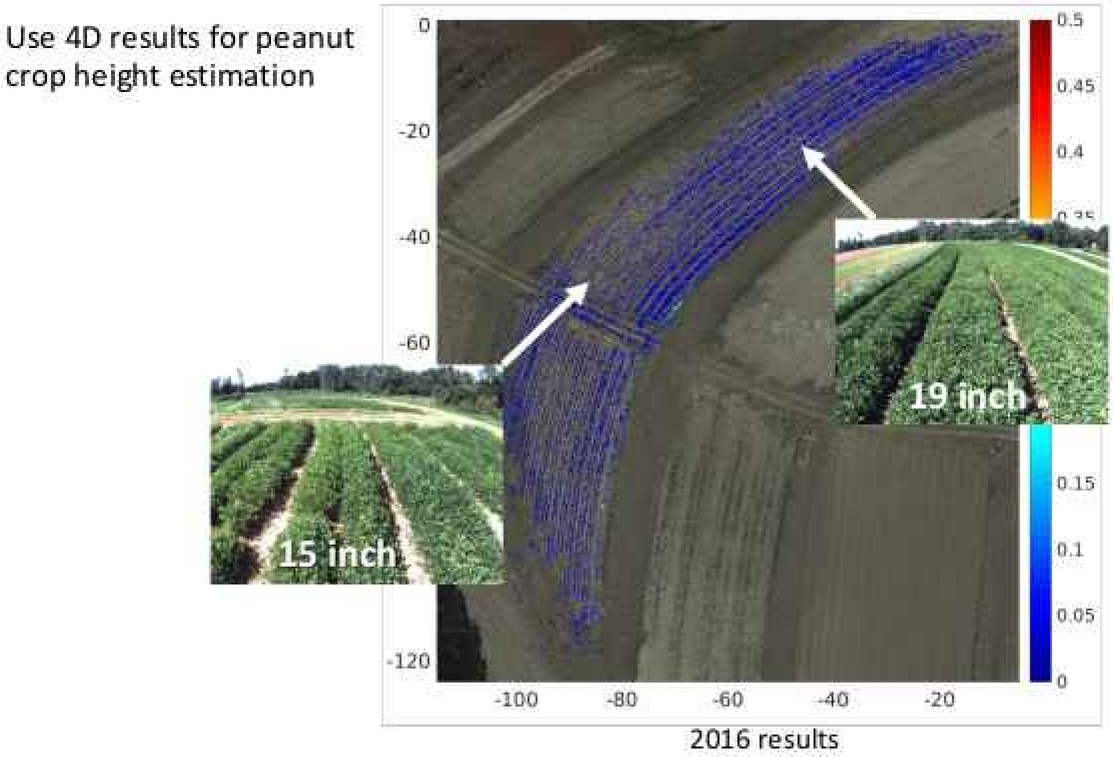
Full STEAM ahead: Exactly sparse gaussian process regression for batch continuous-time trajectory estimation on SE (3)(S. Anderson et al 2015)





四维重建因子图

- 公共路标点因子：通过图像特征匹配检测公共路标点，以此将两个不同时间三维匹配联立起来构成四维重建



Motion Planning as Probabilistic Inference using Gaussian Processes and Factor Graphs

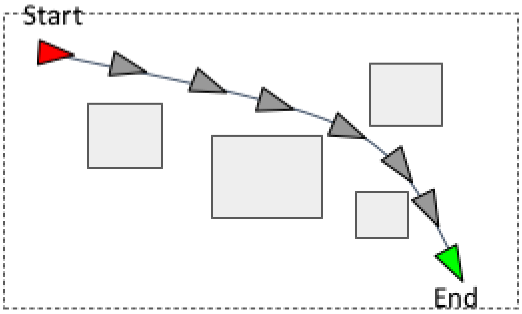
$$\boldsymbol{\theta}^* = \underset{\boldsymbol{\theta}}{\operatorname{argmax}}\, P(\boldsymbol{\theta}) P(\mathbf{c} = 0 | \boldsymbol{\theta})$$

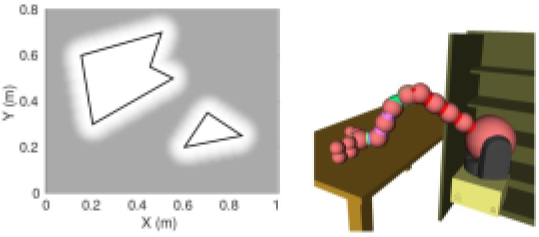
Prior distribution: enforce smoothness

Collision-free likelihood: enforce feasibility

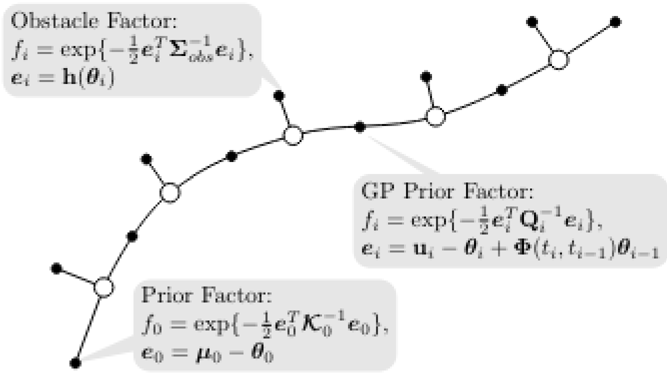
问题定义：

通过求解最大概率实现运动规划，先验表示运动规划的最优性(速度最快，最平滑)，似然函数表示可行性(无碰撞)，尽可能无碰撞。

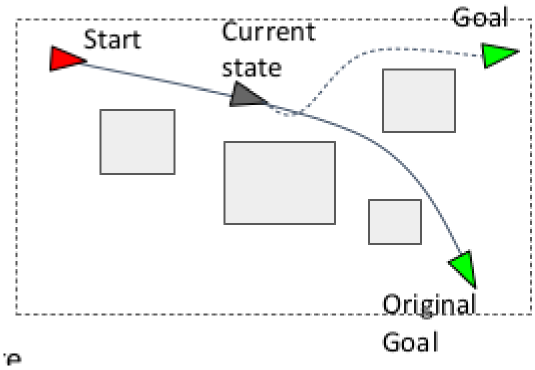


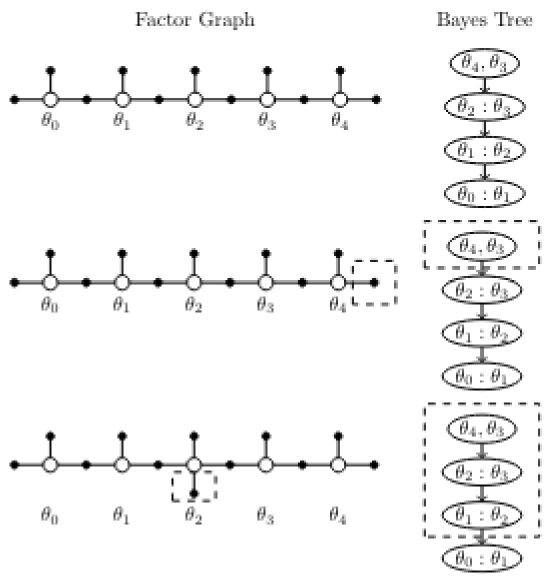


将似然概率在二维平面形成概率图，用以表示无碰撞概率。对于机械臂可以将其采样成球体，求其无碰撞的联合概率就可以。



先验用加速度最低来进行定义，使用定速高过程斯先验。





使用增量推理可以加快重规划。