

A micro Lie theory for state estimation in robotics

Abstract

Lie theory 是一个古老的数学抽象对象，可以追溯到十九世纪，当时数学家 Sophus Lie 奠定了连续变换群理论的基础

多年后，它的影响已经扩散到科学技术的各个领域

在机器人学中，至少在估计领域，我们最近正在经历一个对 Lie theory 的重要的使用趋势，特别是在导航的运动估计领域

然而，对于绝大多数机器人专家来说，Lie theory 是高度抽象的结构，因此很难理解和使用

在机器人学的估计问题中通常没有必要使用全部的 Lie theory 理论，因此筛选其中材料的工作是有必要做的

本文将概述李群理论中最基本的原则

旨在传达清晰和有用的思想，从而留下一个重要的 corpus of the Lie theory

虽然 micro，但是这里包含的材料都是已经被证明过在机器人的现代估计算法中，尤其是 SLAM 和 VO 领域中及其有用的

除了这个 micro Lie theory，我们还提供了一个包括几个应用示例的章节

还有大量的机器人学中主要用到的 Lie groups 的公式的引证，包括大多数雅可比矩阵和轻松使用它们的方法

我们还展示了一个新的 C++ 模板库，它实现了本文描述的所有功能

I. INTRODUCTION

过去的几年里，机器人社区受日益增长的对于解决方案的精度、一致性和稳定性的需求的激励，做出了巨大的努力来公式化估计问题 properly

事实上，对于观测和状态，以及与其相关的函数何不确定性，的适当建模对于解决方案的精度、一致性和稳定性来说至关重要

这引出了所谓 "流形" 的设计，which in this context are no less than 状态表示涉及的 Lie groups 的平滑拓扑表面

依靠 Lie theory 我们可以构建一个精密的积分 corpus 用于方便地处理不确定性，微分和积分

Typically，这些工作专注于三维旋转群 $SO(3)$ 和三维刚体运动群 $SE(3)$ 这些 well known 的流形

刚接触李群时要尽量用不同的视角去看待它们

Topological 视角，见 Fig. 1，涉及了流形的形状，并传达了关于流形与正切空间以及指数映射的关系的强烈直觉

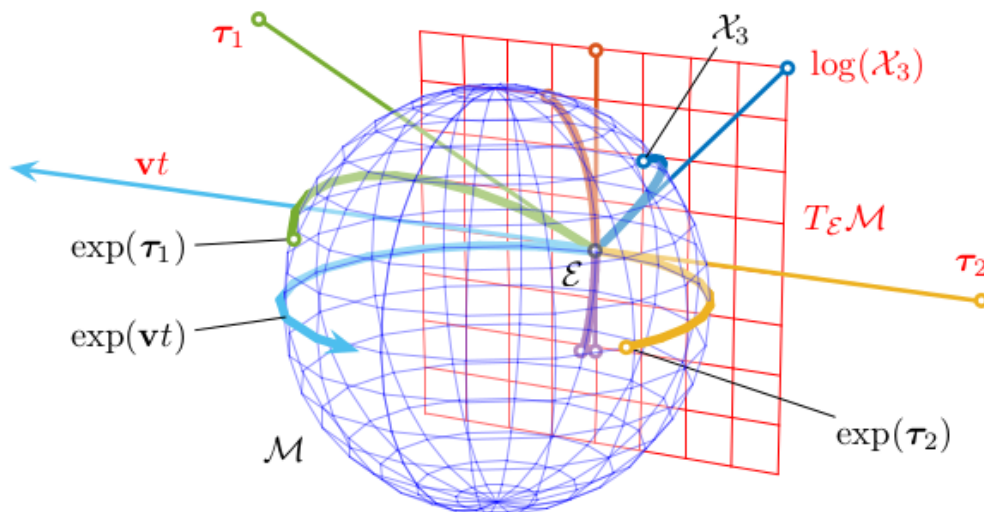


Fig. 1

李群和李代数之间关系的表示

李代数 $T_\epsilon \mathcal{M}$ (红色的平面) 是在单位元 ϵ 处与李群的流形 \mathcal{M} (这里表示为一个蓝色球体) 的正切空间

通过指数映射, 每一条通过 Lie algebra 原点的 straight path $\mathbf{v}t$ 都会在流形上 (沿各自的 geodesic) produces a path $\exp(\mathbf{v}t)$

Conversely, 群的每个元素在李代数上都有一个对应元素

这种关系是如此深刻以至于 (几乎) 所有群中的操作 (which is curved and nonlinear) 在李代数中 (which is a linear vector space) 都有一个确切的对应

虽然 \mathbb{R}^3 中的球体不是一个李群 (我们只是用它作为一个可以画在纸上的表示), 但是 \mathbb{R}^4 中的球体是

并且 \mathbb{R}^4 中的球体描述了单位四元数的群——见 Fig. 4 和 EX. 5

Algebraic 视角涉及群操作以及它们的具体实现, 使得可以利用代数的性质开发封闭形式的公式或简化这些公式

Geometrical 视角在机器人学中格外有用, 将群元素和位置, 速度, 方向以及/或其他对物体和参考系的 modifications 关联起来

原始帧可以用群的单位元单位化 (The origin frame may be identified with the group's identity)

流形上的任意其他点代表某个 'local' frame

借助这些类比, 很多 Lie theory 的数学抽象变得更接近向量空间、几何、运动学和其它更经典领域中的直观概念

II. A MICRO LIE THEORY

A. The Lie group

李群在一个 unique body: G 中包含了群的概念和光滑流形的概念

一个李群 G 是一个光滑流形, 其元素满足群公理

在将这两个概念结合在一起之前我们先简要介绍一下它们

On one hand, 一个可微或光滑流形是一个在局部可近似认为是线性空间的拓扑空间

读者应该可以想象流形的概念 (见 Fig. 2) :

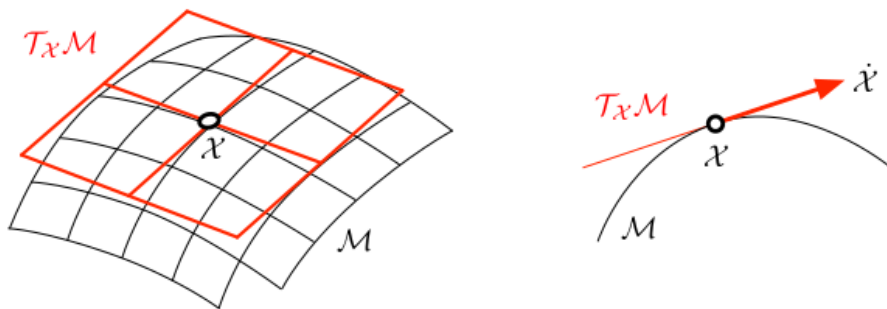


Fig. 2

在 \mathcal{X} 处相切的一个流形 \mathcal{M} 和向量空间 $T_{\mathcal{X}}\mathcal{M}$ (此处 $\cong \mathbb{R}^2$)

和一个方便观察的侧剖视图

速度 $\dot{\mathcal{X}} = \partial \mathcal{X} / \partial t$ 不属于流形 \mathcal{M} ，而是属于正切平面 $T_{\mathcal{X}}\mathcal{M}$

流形就像一个弯曲、光滑的，没有边缘或尖峰的（超）平面，嵌入在一个更高维空间中

在机器人学中，我们说我们的状态向量 evolves on this surface

就是说，这个流形描述了施加在这个状态上的约束，或者说由施加在这个状态上的约束定义

例如，由单位范数约束的向量定义了一个半径为 1 的球面流形

流形的光滑意味着在每一个点上存在一个惟一的切空间

这个空间是一个线性或向量空间，我们可以在上面进行微积分

On the other hand, 一个 group (\mathcal{G}, \circ) 由一个集合 \mathcal{G} 和一个复合操作 \circ 组成

for elements $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \in \mathcal{G}$ 满足以下公理：

$$\text{对 } \circ \text{ 封闭: } \mathcal{X} \circ \mathcal{Y} \in \mathcal{G} \quad (1)$$

$$\text{幺元 } \varepsilon: \varepsilon \circ \mathcal{X} = \mathcal{X} \circ \varepsilon = \mathcal{X} \quad (2)$$

$$\text{可逆 } \mathcal{X}^{-1}: \mathcal{X}^{-1} \circ \mathcal{X} = \mathcal{X} \circ \mathcal{X}^{-1} = \varepsilon \quad (3)$$

$$\text{结合率: } (\mathcal{X} \circ \mathcal{Y}) \circ \mathcal{Z} = \mathcal{X} \circ (\mathcal{Y} \circ \mathcal{Z}) \quad (4)$$

在一个李群中，流形在每个点上看起来都是相同的（例如在球面上，见 Exs.1 和 Exs.2）

因此任意点的正切空间都很相似

Example 1: 单位复数群 S^1

第一个也是最容易可视化的李群的例子，就是复数乘法下的单位复数群（Fig. 3）

单位复数的形式为 $z = \cos\theta + i \sin\theta$

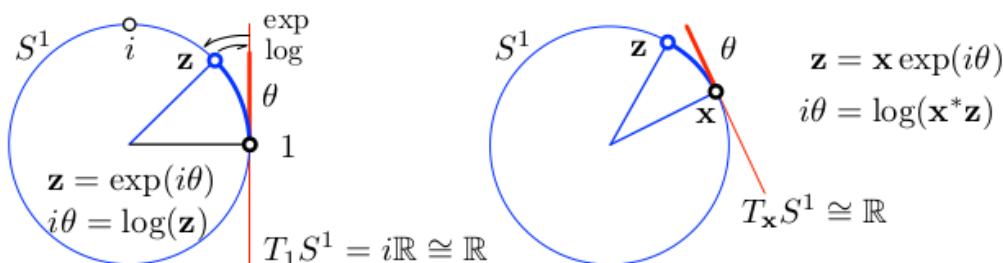


Fig. 3

S^1 流形是一个复数平面（where 单位复数 $z * z = 1$ live） \mathbb{C} 上的单位圆（蓝色）

李代数 $\mathfrak{s}^1 = T_{\varepsilon} S^1$ 为虚数 $i\mathbb{R}$ 的线（红色），且任意正切空间 $T S^1$ 都与线 \mathbb{R} 同构

切向量（红色线段）包裹在流形上形成了环的弧（蓝色圆弧）

指数映射和对数映射将 \mathbb{R} 上的元素和 S^1 上的元素来回映射

单位复数之间的增量在正切空间中通过 composition and the exponential map 表示

(我们会为此定义特殊操作符 \oplus, \ominus)

- *Action*

向量 $\mathbf{x} = x + iy$ 通过复数乘法 $\mathbf{x}' = \mathbf{z} \mathbf{x}$ 在平面上旋转一个角度 θ

- *Group facts*

单位复数相乘还是一个单位复数，幺元为 1，逆为共轭 \mathbf{z}^*

- *Manifold facts*

单位范数约束定义了复数平面中的单位圆（可以被视作一维 sphere，因此名为 S^1 ）

这是一个二维空间中的 1 自由度曲线，单位自由度在这个圆上 evolve with time

群（圆）在局部近似线性空间（不是全局）

Example 2: 单位四元数群 S^3

第二个李群的例子也相对容易可视化，就是四元数乘法下的单位四元数群（Fig. 4）

单位四元数的形式为 $\mathbf{q} = \cos(\theta/2) + \mathbf{u}\sin(\theta/2)$ ，其中 $\mathbf{u} = iu_x + ju_y + ku_z$

一个单位转轴和一个转角

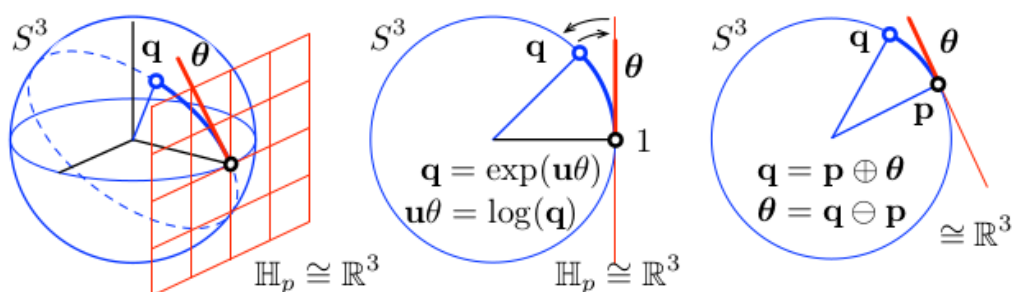


Fig. 4

S^3 流形是一个四维四元数空间（where 单位四元数 $\mathbf{q}^* \mathbf{q} = 1$ live） \mathbb{H} 中的单位三维 sphere（蓝色）

李代数是纯虚四元数空间 $ix + jy + kz \in \mathbb{H}_p$ ，与超平面 \mathbb{R}^3 （红色网格）同构，其他任意正切平面 TS^3 都与 \mathbb{R}^3 同构

切向量（红色线段）沿大弧线或测地线（虚线）包裹流形

中图和右图展示了这条测地线的侧剖视图（注意它和 Fig. 3 中的 S^1 有多相似）

指数映射和对数映射将 \mathbb{H}_p 上的元素和 S^3 上的元素来回映射

正切空间中四元数之间的增量通过操作 \oplus, \ominus 表示（见文字部分）

- *Action*

向量 $\mathbf{x} = ix + jy + kz$ 通过双四元数乘 $\mathbf{x}' = \mathbf{q} \mathbf{x} \mathbf{q}^*$ 在一个三维空间中绕单位轴 \mathbf{u} 旋转角度 θ

- *Group facts*

单位四元数相乘还是一个单位四元数

幺元为 1

逆为共轭四元数 \mathbf{q}^*

- *Manifold facts*

单位圆约束定义了 3-sphere S^3 ，一个四维空间中的球形三维表面或流形

单位四元数在这个流形上 evolve with time

群（球面）局部近似线性（正切超平面 $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4$ ）

群结构强制流形上元素的组合仍保持在流形上（封闭），每个元素在流形上都有一个逆，这些元素中有一个特殊的幺元，因此切线空间中也有一个特殊的就是幺元处的切线空间，我们称之为李群的李代数。李群结合了光滑流形的局部性质（使我们能够做微积分运算）和群的全局性值（enabling nonlinear composition of distant objects）

本文中为了简单起见，也由于在机器人领域中常见，我们会经常用流形指代李群

B. The group actions

Importantly, 李群可以转换其他集合的元素，从而实现旋转、平移、缩放或这些转换的组合
这些转换在机器人技术中被广泛应用

给定一个李群 \mathcal{M} 和一个集合 \mathcal{V} ，我们将 $\mathcal{X} \cdot v$ 记作 $\mathcal{X} \in \mathcal{M}$ 对 $v \in \mathcal{V}$ 的 action，

$$\cdot : \mathcal{M} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}; (\mathcal{X}, v) \mapsto \mathcal{X} \cdot v \quad (5)$$

对于 \cdot 来说，to be a group action，它必须满足公理，

$$\text{幺元 :} \quad \varepsilon \cdot v = v \quad (6)$$

$$\text{兼容 :} \quad (\mathcal{X} \cdot \mathcal{Y}) \cdot v = \mathcal{X} \cdot (\mathcal{Y} \cdot v) \quad (7)$$

常见的例子有旋转矩阵群 $SO(n)$ ，单位四元数群和刚体运动群 $SE(n)$
它们各自对向量的 actions 满足

$$\begin{aligned} SO(n) : \text{rotation matrix} & \quad \mathbf{R} \cdot \mathbf{x} \triangleq \mathbf{R}\mathbf{x} \\ SE(n) : \text{Euclidean matrix} & \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{x} \triangleq \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{t} \\ S^1 : \text{unit complex} & \quad \mathbf{z} \cdot \mathbf{x} \triangleq \mathbf{z}\mathbf{x} \\ S^3 : \text{unit quaternion} & \quad \mathbf{q} \cdot \mathbf{x} \triangleq \mathbf{q} \times \mathbf{q}^* \end{aligned}$$

更详细的说明见 Table I

Table I

2D 和 3D 中适用的典型李群，包括平凡的 \mathbb{R}^3
更全面的说明见附录

Lie group \mathcal{M}, \circ	size	dim	$\mathcal{X} \in \mathcal{M}$	Constraint	$\tau \in \mathfrak{m}$	$\tau \in \mathbb{R}^m$	$\text{Exp}(\tau)$	Comp.	Action
n -D vector	$\mathbb{R}^n, +$	n	$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$	$\mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$	$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$	$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$	$\mathbf{v} = \exp(\mathbf{v})$	$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$	$\mathbf{v} + \mathbf{x}$
circle	S^1, \cdot	2	$\mathbf{z} \in \mathbb{C}$	$\mathbf{z}^* \mathbf{z} = 1$	$i\theta \in i\mathbb{R}$	$\theta \in \mathbb{R}$	$\mathbf{z} = \exp(i\theta)$	$\mathbf{z}_1 \mathbf{z}_2$	$\mathbf{z} \mathbf{x}$
Rotation	$SO(2), \cdot$	4	\mathbf{R}	$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$	$[\theta]_{\times} \in \mathfrak{so}(2)$	$\theta \in \mathbb{R}$	$\mathbf{R} = \exp([\theta]_{\times})$	$\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$	$\mathbf{R} \mathbf{x}$
Rigid motion	$SE(2), \cdot$	9	$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$	$\begin{bmatrix} [\theta]_{\times} & \rho \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{se}(2)$	$\begin{bmatrix} \rho \\ \theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$	$\exp\left(\begin{bmatrix} [\theta]_{\times} & \rho \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$	$\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$	$\mathbf{R} \mathbf{x} + \mathbf{t}$
3-sphere	S^3, \cdot	4	$\mathbf{q} \in \mathbb{H}$	$\mathbf{q}^* \mathbf{q} = 1$	$\theta/2 \in \mathbb{H}_p$	$\theta \in \mathbb{R}^3$	$\mathbf{q} = \exp(\mathbf{u}\theta/2)$	$\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2$	$\mathbf{q} \mathbf{x} \mathbf{q}^*$
Rotation	$SO(3), \cdot$	9	\mathbf{R}	$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$	$[\theta]_{\times} \in \mathfrak{so}(3)$	$\theta \in \mathbb{R}^3$	$\mathbf{R} = \exp([\theta]_{\times})$	$\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2$	$\mathbf{R} \mathbf{x}$
Rigid motion	$SE(3), \cdot$	16	$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$	$\begin{bmatrix} [\theta]_{\times} & \rho \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{se}(3)$	$\begin{bmatrix} \rho \\ \theta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$	$\exp\left(\begin{bmatrix} [\theta]_{\times} & \rho \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$	$\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$	$\mathbf{R} \mathbf{x} + \mathbf{t}$

(1) 式可看作群作用在自身的一个 action $\circ : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$

另一个有趣的 action 是 adjoint action，我们在 F 部分会见到

C. The tangent spaces and the Lie algebra

给定一个在李群流形 \mathcal{M} 上移动的点 $\mathcal{X}(t)$ ，它的速度 $\dot{\mathcal{X}} = \partial \mathcal{X} / \partial t$ 属于在 \mathcal{X} 处和 \mathcal{M} 相切的空间
(Fig. 2)，我们记为 $T_{\mathcal{X}} \mathcal{M}$

流形的光滑，即没有边缘或尖峰，意味着在每个点上都存在惟一的正切空间
在每一处这样的正切空间的结构都相同

1. 李代数 \mathfrak{m}

在幺元处的正切空间 $T_{\varepsilon} \mathcal{M}$ 被称作 \mathcal{M} 的李代数，记作 \mathfrak{m} ，

$$\text{李代数 : } \mathfrak{m} \triangleq T_{\varepsilon} \mathcal{M} \quad (8)$$

每个李群都有对应的李代数，我们通过以下事实（见 Fig.1 和 Fig.6）将李群和它的李代数关联起来：

- 李代数 \mathfrak{m} 是一个向量空间 (李代数中向量空间被赋予一个非结合乘法被称作李括号，本文不会使用这个概念)

- 因此它的元素可以由 \mathbb{R}^m 中的向量唯一确定，其中维度 m 为 \mathcal{M} 的自由度
- 指数映射 $\exp: \mathfrak{m} \rightarrow \mathcal{M}$ 正好将李代数中的元素转换为李群中的元素
对数映射相反
 - \mathcal{X} 处正切空间中的向量可通过线性变换被转换到么元 ε 处的正切空间中
该转换被称作 adjoint

李代数可以在一个切点处通过为 $T_{\mathcal{X}}\mathcal{M}$ 建立局部坐标系 (Fig. 5) 局部定义
我们可以用一个 \wedge 修饰表示 李代数的元素，例如 \mathbf{v}^\wedge
还可以用上标标明正切空间，例如 ${}^{\mathcal{X}}\mathbf{v}^\wedge \in T_{\mathcal{X}}\mathcal{M}$

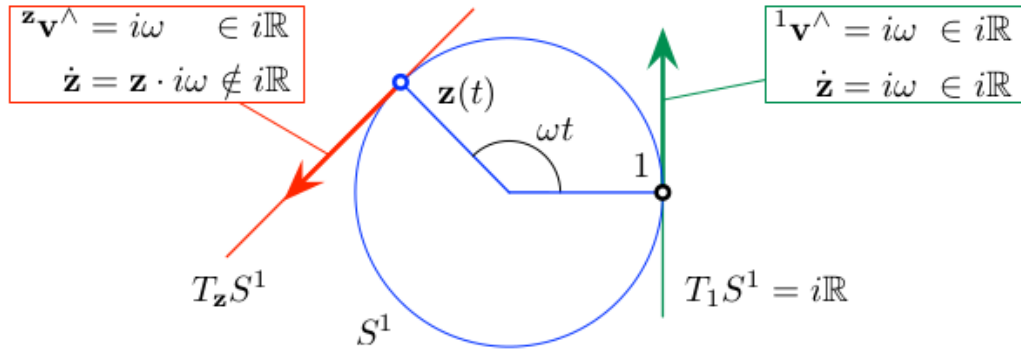


Fig. 5

让一个点 $z \in S^1$ 以恒定的角速度 ω 运动， $\mathbf{z}(t) = \cos \omega t + i \sin \omega t$
经过 1 和 z 时它的速度分别在各自的正切空间 $T_1 S^1$ 和 $T_z S^1$ 中
 $T_z S^1$ 中速度在全局坐标中表示为 $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{z} i \omega$ ，在 z 处的局部坐标中表示为 ${}^z \mathbf{v}^\wedge = i \omega$
它们的关系为 ${}^z \mathbf{v}^\wedge = \mathbf{z}^{-1} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{z}^* \dot{\mathbf{z}}$ ， $T_1 S^1$ 中 ${}^1 \mathbf{v}^\wedge = \dot{\mathbf{z}} = i \omega$
很明显所有正切空间的结构都是 $i\mathbb{R}$ 也就是李代数，这也是 $\dot{\mathbf{z}}$ 在么元处的结构
这就是为什么李代数在么元处的正切空间定义

Example 3: 旋转群 $SO(3)$ ，其李代数 $\mathfrak{so}(3)$ 和向量空间 \mathbb{R}^3

在 3×3 旋转矩阵 \mathbf{R} 的旋转群中，我们有正交条件 $\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$
正交空间可以通过取这个约束的时间导数找到，即 $\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{R} = 0$
整理可得，

$$\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = -\dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{R}$$

可以看到 $\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}$ 是一个反对称矩阵，反对称矩阵通常记作 $[\omega]_\times$ ，且有着如下形式：

$$[\omega]_\times = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

也即 $\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = [\omega]_\times$ ，当 $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ 时有

$$\dot{\mathbf{R}} = [\omega]_\times$$

也就是说， $[\omega]_\times$ 就是 $SO(3)$ 的李代数，我们称之为 $\mathfrak{so}(3)$

因为 $[\omega]_\times \in \mathfrak{so}(3)$ 有三个自由度， $SO(3)$ 的维度为 3

李代数是一个向量空间，其元素可以被分解为

$$[\omega]_\times = \omega_x \mathbf{E}_x + \omega_y \mathbf{E}_y + \omega_z \mathbf{E}_z$$

$$\text{其中 } \mathbf{E}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{E}_z = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\omega = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) \in \mathbb{R}^3$ 是角速度向量

以上一一对应的线性关系使得我们可以通过 \mathbb{R}^3 表示 $\mathfrak{so}(3)$ ——我们写作 $\mathfrak{so}(3) \triangleq \mathbb{R}^3$
 \mathbb{R}^3 和 $\mathfrak{so}(3)$ 之间的相互转换通过线性操作符 vee 和 hat 实现，

$$\begin{aligned}\text{Hat} : \quad \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathfrak{so}(3); & \omega &\mapsto \omega^\wedge = [\omega]_\times \\ \text{Vee} : \quad \mathfrak{so}(3) &\rightarrow \mathbb{R}^3; & [\omega]_\times &\mapsto [\omega]_\times^\vee = \omega\end{aligned}$$

李代数的结构的求解（见 Example 3）可以通过对群约束（3）求对时间的导数得到

如果是乘法群，群约束（3）会产生新的约束 $\mathcal{X}^{-1}\dot{\mathcal{X}} = -\dot{\mathcal{X}}^{-1}\mathcal{X}$ ，该约束适用于在 \mathcal{X} 相切的元素李代数的元素也因此有了这种形式：

$$\mathbf{v}^\wedge = \mathcal{X}^{-1}\dot{\mathcal{X}} = -\dot{\mathcal{X}}^{-1}\mathcal{X} \quad (9)$$

2. 笛卡尔向量空间 \mathbb{R}^m

李代数元素 τ^\wedge 具有不寻常的结构（反对称矩阵，虚数，实四元数，见 Table I）

但是对我们来说关键的一点是它们可以用一些 base elements E_i 的线性组合表示

其中 E_i 被称作 generators of \mathfrak{m} （origin 附近 \mathcal{X} 在第 i 个方向上的导数）

这样就可以很方便地把坐标作为 \mathbb{R}^m 中的向量来处理，我们可以简单记作 τ

我们可以通过两个互逆的线性映射或同构 (isomorphism) 将 \mathfrak{m} 传递到 \mathbb{R}^m 反之亦然

这两个互逆的线性映射通常称为 *hat* 和 *vee*（见 Fig. 6），

$$\text{Hat} : \quad \mathbb{R}^m \rightarrow \mathfrak{m}; \quad \tau \mapsto \tau^\wedge = \sum_{i=1}^m \tau_i E_i \quad (10)$$

$$\text{Vee} : \quad \mathfrak{m} \rightarrow \mathbb{R}^m; \quad \tau^\wedge \mapsto \tau = \sum_{i=1}^m \tau_i \mathbf{e}_i \quad (11)$$

其中 \mathbf{e}_i 为 \mathbb{R}^m 的基向量，且 $\mathbf{e}_i^\wedge = E_i$

这代表李代数 \mathfrak{m} 和线性空间 \mathbb{R}^m 是同构的，可以写作 $\mathfrak{m} \cong \mathbb{R}^m$ 或 $\tau^\wedge \cong \tau$

向量 $\tau \in \mathbb{R}^m$ 相对于它的同构 $\tau^\wedge \in \mathfrak{m}$ 对我们的目的来说更方便，因为它可以堆积成更大规模的状态向量，更重要的是可以通过矩阵运算靠线性代数操作

本文中我们更偏向于使用 \mathbb{R}^m 因此我们将大多数操作和对象（具体来说，伴随，雅可比，扰动矩阵及其协方差矩阵）都定义在 \mathbb{R}^m 上

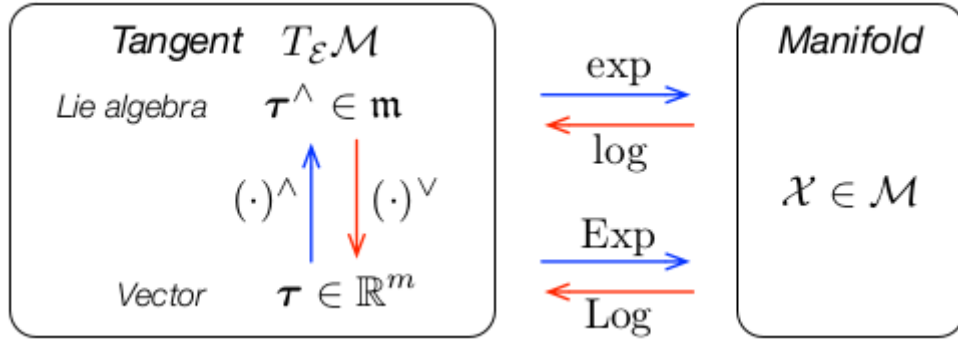


Fig. 6

流形 \mathcal{M} 和其在么元处的正切空间 $T_\epsilon \mathcal{M}$ 表示（李代数 \mathfrak{m} 和笛卡尔 \mathbb{R}^m ）之间的映射

$\text{hat}(\cdot)^\wedge$ 和 $\text{vee}(\cdot)^\vee$ 是可逆线性映射或同构 (10-11)

$\text{exp}(\cdot)$ 和 $\text{log}(\cdot)$ 是李代数和流形之间的映射， $\text{Exp}(\cdot)$ 和 $\text{Log}(\cdot)$ 是向量空间 \mathbb{R}^m 和流形 \mathcal{M} 之间直接映射的捷径

D. The exponential map

F. The adjoint, and the adjoint matrix

G. Derivatives on Lie groups

H. Uncertainty in manifolds, covariance propagation

I. Discrete integration on manifolds

III. DIFFERENTIATION RULES ON MANIFOLDS

A. The chain rule

B. Elementary Jacobian blocks

C. Useful, but deduced, Jacobian blocks

V. LANDMARK - BASED LOCALIZATION AND MAPPING

A. Localization with error-state Kalman filter on manifold

B. Smoothing and Mapping with graph-based optimization

C. Smoothing and mapping with self-calibration

D. 3D implementations

VI. CONCLUSION