样条插值

样条插值

- 样条：工程设计中的绘图工具，是富有弹性的细长条。绘图时，用压铁迫使样条通过指定的点，并调整样条，使之具有光滑的外形。
- 目的：不知节点上的导数值，希望得到一条次数较低且光滑的曲线。

三次样条 $S(x)$ 插值

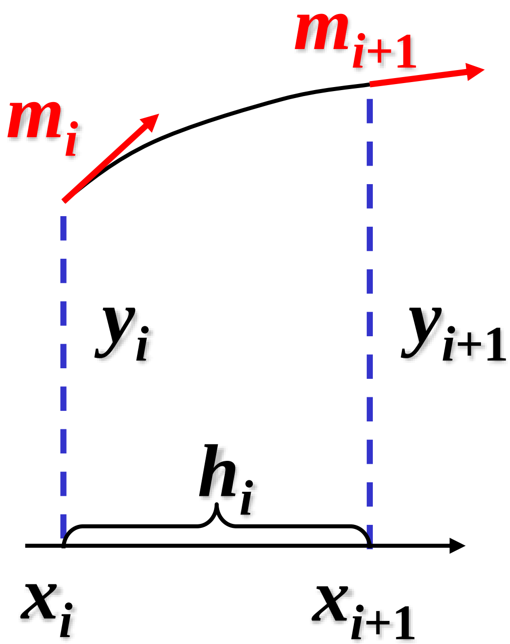
求 $S(x)$, 使满足

(1) $S(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,\cdots,n.$

(2) 在 $[x_i, x_{i+1}]$ $S(x)$ 为 3 次多项式;

(3) $S(x)$ 的 2 阶导数连续。

假设 x_i 点的导数为 m_i,（未知）$\Rightarrow$



$$S(x) = h_i(x)y_i + h_{i+1}(x)y_{i+1} + H_i(x)m_i + H_{i+1}(x)m_{i+1}$$

利用分段 3 次 Hermite插值，在 $[x_i, x_{i+1}]$ 有：

$$S(x) = \underbrace{\left(1+2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2}_{h_i} y_i +$$

$$\underbrace{\left(1+2\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2}_{h_{i+1}} y_{i+1} +$$

$$\underbrace{(x-x_i)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2}_{H_i} m_i +$$

$$\underbrace{(x-x_{i+1})\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2}_{H_{i+1}} m_{i+1}$$

$$S(x)=h_i(x)y_i+h_{i+1}(x)y_{i+1}+H_i(x)m_i+H_{i+1}(x)m_{i+1}$$

对 $S(x)$ 求二阶导数，并令中间各节点上

$$S''(x_i^-)=S''(x_i^+)\ \ (i=1,2,\cdots,n-1)\Rightarrow$$

$$(1-\alpha_i)m_{i-1}+2m_i+\alpha_i m_{i+1}=\beta_i,$$

其中 $\begin{cases}\alpha_i=h_{i-1}/(h_{i-1}+h_i) \\ \beta_i=3\left[\dfrac{1-\alpha_i}{h_{i-1}}(y_i-y_{i-1})+\dfrac{\alpha_i}{h_i}(y_{i+1}-y_i)\right]\end{cases}$ 系数已知!

$$\begin{cases} \alpha_i = h_{i-1} / (h_{i-1} + h_i) \\ \beta_i = 3\left[\dfrac{1-\alpha_i}{h_{i-1}}(y_i - y_{i-1}) + \dfrac{\alpha_i}{h_i}(y_{i+1} - y_i) \right] \end{cases}$$

如果 $h_i = h \Rightarrow \quad \alpha_i = \dfrac{1}{2}, \quad \beta_i = \dfrac{3(y_{i+1} - y_{i-1})}{2h}$

$(1-\alpha_i) m_{i-1} + 2m_i + \alpha_i m_{i+1} = \beta_i$ 简化为

$$m_{i-1} + 4m_i + m_{i+1} = 3(y_{i+1} - y_{i-1}) / h$$

未知变量 $m_0, m_1, \ldots, m_n$ 为 $n+1$ 个, 只有 $n-1$ 个方程, 所以有无穷组解!

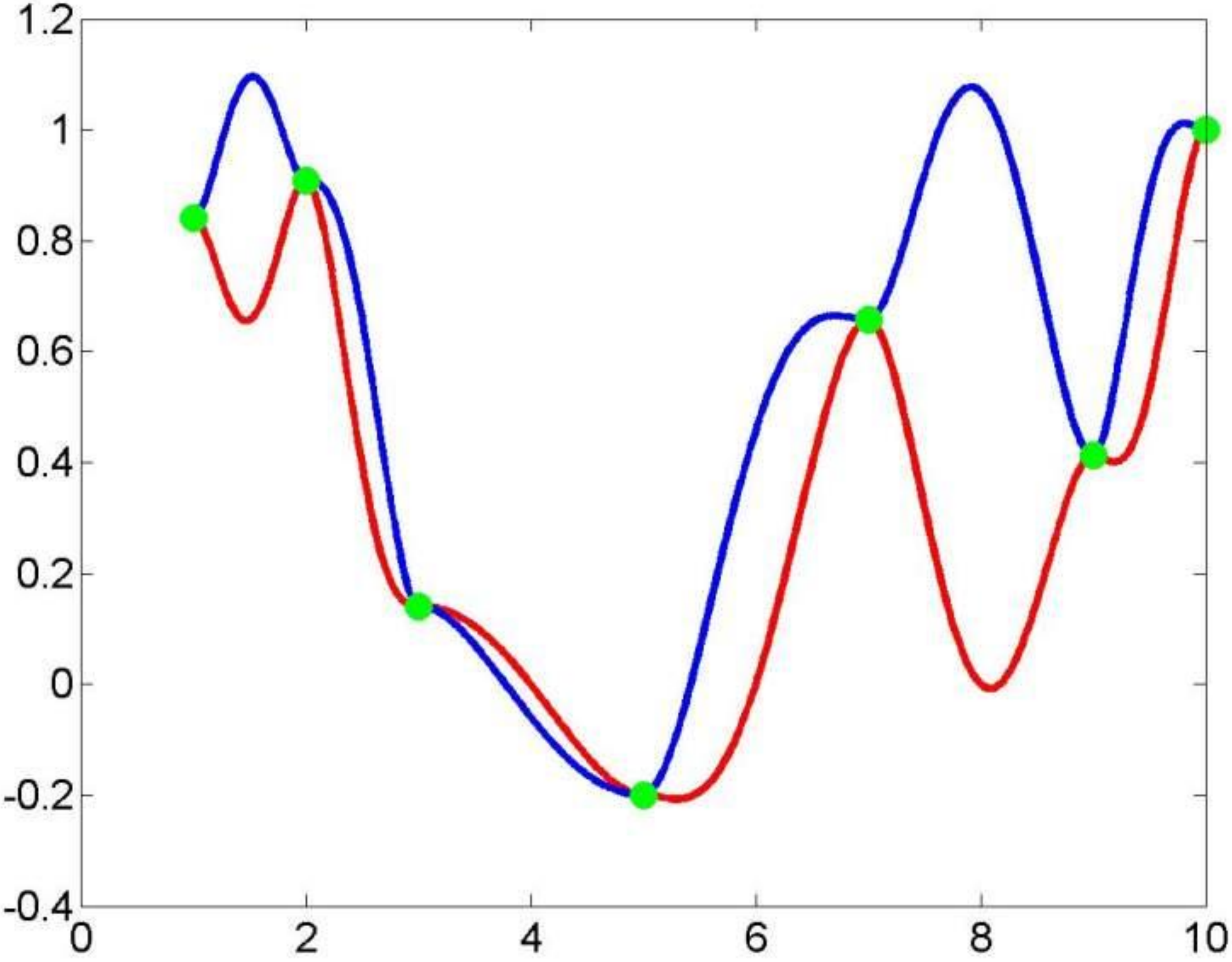
欲求出解需要人为地补充条件。例如:

1. $S'(x_0)=m_0, S'(x_n)=m_n$, m_0, m_n 已知

2. $S''(x_0)=S''(x_n)=0$;

3. $S'(x_0)=S'(x_n), S''(x_0)=S''(x_n)$ (周期条件)

附加条件不同，解也不同。


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
0
2
4
6
8
10

总 结

- 样条插值函数是在仅仅知道插值节点上的函数值而构造出的光滑的插值函数。
- 为确定节点上的导数值，须根据具体情况补充条件。
- 问题：三次样条要求二阶导数连续，为什么？