追赶法解三对角方程

chenli@bnu.edu.cn

三对角方程形式如下

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha_0 & & & & \\ 1-\alpha_1 & 2 & \alpha_1 & & & \\ & 1-\alpha_2 & 2 & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1-\alpha_{n-1} & 2 & \alpha_{n-1} \\ & & & & 1-\alpha_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

这个方程是我们在求样条函数节点的导数时得到的

基本过程：记三次样条函数为 $S(x)$，

令 $S''\left(x_i^-\right)=S''\left(x_i^+\right),(i=1,\cdots,n-1)\Rightarrow$

$$(1-\alpha_i)m_{i-1}+2m_i+\alpha_i m_{i+1}=\beta_i$$

其中

$$\begin{cases}\alpha_i=h_{i-1}/(h_{i-1}+h_i)，\ h_i=x_{i+1}-x_i; \\ \beta_i=3\left[\dfrac{1-\alpha_i}{h_{i-1}}(y_i-y_{i-1})+\dfrac{\alpha_i}{h_i}(y_{i+1}-y_i)\right]\end{cases} \quad (A)$$

$n-1$个方程，$n+1$ 个未知量。

补充条件后的方程可形式地写为

$$2m_0+\alpha_0 m_1=\beta_0 \qquad (1)$$

$$(1-\alpha_1)m_0+2m_1+\alpha_1 m_2=\beta_1 \qquad (2)$$

$$(1-\alpha_2)m_1+2m_2+\alpha_2 m_3=\beta_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(1-\alpha_{n-1})m_{n-2}+2m_{n-1}+\alpha_{n-1}m_n=\beta_{n-1}$$

$$(1-\alpha_n)m_{n-1}+2m_n=\beta_n \qquad (n+1)$$

$\alpha_0\ \beta_0$； $\alpha_n\,\beta_n$ 要根据具体的附加条件解出

例如，如果取附加条件为

$$S'(x_0)=m_0,\ S'(x_n)=m_n$$

形式地写出

$$\begin{cases} 2m_0+\alpha_0 m_1=\beta_0 \\ (1-\alpha_n)m_{n-1}+2m_n=\beta_n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_0=0, \beta_0=2m_0 \\ \alpha_n=1, \beta_n=2m_n \end{cases}$$

chenli@bnu.edu.cn

补充条件后的方程为三对角形式

$$\begin{pmatrix} 2 & \alpha_0 & & & & \\ 1-\alpha_1 & 2 & \alpha_1 & & & \\ & 1-\alpha_2 & 2 & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1-\alpha_{n-1} & 2 & \alpha_{n-1} \\ & & & & 1-\alpha_n & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

chenli@bnu.edu.cn

三对角方程的追赶法求解

$$2m_0 + \alpha_0 m_1 = \beta_0 \qquad (1)$$

$$(1-\alpha_1)m_0 + 2m_1 + \alpha_1 m_2 = \beta_1 \qquad (2)$$

$$(1-\alpha_2)m_1 + 2m_2 + \alpha_2 m_3 = \beta_2$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$(1-\alpha_{n-1})m_{n-2} + 2m_{n-1} + \alpha_{n-1} m_n = \beta_{n-1}$$

$$(1-\alpha_n)m_{n-1} + 2m_n = \beta_n \qquad (n+1)$$

$$2m_0 + \alpha_0 m_1 = \beta_0 \quad (1) \Rightarrow$$

$$m_0 = -\frac{\alpha_0}{2} m_1 + \frac{\beta_0}{2} \triangleq A_0 m_1 + B_0 \text{ 代入 } (2)$$

$$(1-\alpha_1) m_0 + 2m_1 + \alpha_1 m_2 = \beta_1 \quad (2) \Rightarrow$$

$$(1-\alpha_1)(A_0 m_1 + B_0) + 2m_1 + \alpha_1 m_2 = \beta_1$$

$$m_1 = -\frac{\alpha_1}{2+(1-\alpha_1)A_0} m_2 + \frac{\beta_1 - (1-\alpha_1) B_0}{2+(1-\alpha_1)A_0}$$

$$\triangleq A_1 m_2 + B_1$$

依次可得:

$$m_i = A_i m_{i+1} + B_i \quad i = 0,1,\cdots,n-1 \quad (B)$$

$$\begin{cases} A_i = \dfrac{-\alpha_i}{2+(1-\alpha_i)A_{i-1}}, \\ B_i = \dfrac{\beta_i-(1-\alpha_i)B_{i-1}}{2+(1-\alpha_i)A_{i-1}}, \end{cases} \quad (C)$$

$$i = 1,2,\cdots n-1.$$

将 $m_{n-1} = A_{n-1} m_n + B_{n-1}$

代入最后一个方程

$$(1-\alpha_n) m_{n-1} + 2m_n = \beta_n$$

得到

$$m_n = \frac{\beta_n - (1-\alpha_n) B_{n-1}}{2 + (1-\alpha_n) A_{n-1}} \quad (D)$$

总结：追赶法求 m_i 的步骤

1. 由 (A)式 $\Rightarrow \alpha_i\,,\,\beta_i \quad i=1,\,\ldots\,,\,n-1,$

   其中 $\alpha_0, \beta_0, \alpha_n, \beta_n$ 要根据补充条件来确定。

2. 计算 $A_i\,,\,B_i$，其中 $A_0=-\alpha_0/2,\ B_0=\beta_0/2;$

   由 (C)式 $\Rightarrow A_i\,,\,B_i\,,\ i=1,\ldots,n-1\,.$

3. 由 (D)式 $\Rightarrow m_n;$

4. 由 (B)式 $\Rightarrow m_i \quad i=n-1\,,n-2,\cdots 0.$

1, 2 是“追”的过程，3, 4 是“赶”的过程。