PUPPE, D.
Math. Zeitschr. Bd. 69, S. 395—417 (1958)

Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen. II
Sphärenähnliche Mannigfaltigkeiten

Von

DIETER PUPPE

Einleitung

Unter einer *Pseudomannigfaltigkeit* verstehen wir im folgenden grundsätzlich eine orientierbare und in bestimmter Weise orientierte geschlossene Pseudomannigfaltigkeit im Sinne von SEIFERT-THRELFALL [9]. Sei P^n eine solche Pseudomannigfaltigkeit und $g: P^n \to S^n$ eine stetige Abbildung vom Grade 1 auf die n-Sphäre. V sei irgendein weiterer topologischer Raum. Wir werden folgende Frage untersuchen:

Wann folgt für alle $a: S^n \to V$ aus $a \circ g \simeq 0$ sogar $a \simeq 0$? ($\simeq$ bedeutet: homotop) — oder in der Terminologie von Teil I dieser Arbeit:

Wann ist die durch g induzierte Abbildung der Homotopiemengen $g^*: \pi(S^n, V) = \pi_n(V) \to \pi(P^n, V)$ monomorph (d.h. Kern $g^* = g^{*-1}(0) = 0$, vgl. [8] 1.3)?

Unter einem gewissen Aspekt wurde die Frage schon in [7] behandelt. Sei σ ein (offenes) n-Simplex einer simplizialen Zerlegung von P^n und $g: P^n \to P^n/(P^n - \sigma)$[1] $= S^n$ die Identifizierung von $P^n - \sigma$ zu einem Punkt. g hat offenbar den Grad 1. Ist ferner $\alpha = [a] \in \pi_n(V)$ die Homotopieklasse von $a: S^n \to V$, so ist $a \circ g$ eine Abbildung von der Art, wie sie in [7] mit f_α bezeichnet wurde. $a \circ g$ ist auf dem $(n-1)$-dimensionalen Gerüst konstant, und die Hinderniskohomologieklasse gegenüber einer Deformation von $a \circ g$ in die konstante Abbildung ist $\bar{d}(a \circ g) = \alpha$, wenn wir die Kohomologiegruppe $H^n(P^n, \pi_n(V))$ mit $\pi_n(V)$ identifizieren (vgl. [7] § 4). Nach [7] Satz 1 ist $\alpha \in H^n_*(P^n, \pi_n(V))$ mit $a \circ g \simeq 0$ gleichwertig, d.h. es ist $H^n_*(P^n, \pi_n(V)) =$ Kern g^* (vgl. [8] 1.3). Man erhält daher aus [7] Satz 4a):

Für festes V ist $g^*: \pi_n(V) \to \pi(P^n, V)$ genau dann für alle Pseudomannigfaltigkeiten P^n monomorph, wenn der Hurewiczsche Homomorphismus $\pi_n(V) \cong \pi_{n-1}(\Omega V) \to H_{n-1}(\Omega V)$ monomorph ist. (ΩV ist der Raum der geschlossenen Wege in V mit festem Anfangspunkt.)

Daß für $g: P^n \to S^n$ eine spezielle Abbildung vom Grade 1 gewählt wurde, ist unwesentlich, da alle Abbildungen $P^n \to S^n$ vom Grade 1 untereinander homotop sind (Hopf-Whitneyscher Klassifikationssatz [21] Th. 4).

---

[1]) Für $A \subset X$ bezeichnet X/A wie in Teil I [8] den Raum, der aus X durch Identifizieren von A zu einem Punkt entsteht.

Wir fragen hier umgekehrt:

Für welche Pseudomannigfaltigkeiten P^n ist $g^*: \pi_n(V) \to \pi(P^n; V)$, induziert durch eine Abbildung $g: P^n \to S^n$ vom Grade 1, für alle V monomorph?

Die Sphäre $P^n = S^n$ hat diese Eigenschaft offenbar. Zur Abkürzung nennen wir die Pseudomannigfaltigkeiten mit dieser Eigenschaft *sphärenähnlich*. Wir werden zuerst einige Sätze über sphärenähnliche Pseudomannigfaltigkeiten allgemein beweisen und dann den Spezialfall der kompakten differenzierbaren Mannigfaltigkeiten noch genauer untersuchen. Die wichtigsten Ergebnisse sind:

1) P^n ist genau dann sphärenähnlich, wenn sich die Sphäre S^{n+1} mit dem Grad 1 auf die Einhängung SP^n abbilden läßt (6.3 Satz 3).

2) Produkte und „Summen" (zur Definition s. 6.5) von sphärenähnlichen Pseudomannigfaltigkeiten sind wieder sphärenähnlich (6.4 Satz 4, 6.5 Satz 7). Insbesondere ist jedes Produkt von Sphären sphärenähnlich.

3) Jede kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit M^n, die topologisch und differenzierbar in den euklidischen Raum R^{n+1} eingebettet werden kann, ist sphärenähnlich (7.1).

4) Eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit M^n ist genau dann sphärenähnlich, wenn es eine kompakte differenzierbare Teilmannigfaltigkeit $'M^n$ von R^{n+1} gibt, die sich mit dem Grad 1 auf M^n abbilden läßt (7.2 Satz 12).

5) Die Stiefel-Whitneyschen Klassen einer sphärenähnlichen (kompakten, differenzierbaren) Mannigfaltigkeit sind trivial (7.5 Satz 13).

Außerdem wird gezeigt werden, daß alle zweidimensionalen Pseudomannigfaltigkeiten sphärenähnlich sind (6.8 Satz 9), und daß sich die Sphärenähnlichkeit in der Dimension 3 durch eine bekannte Kohomologieoperation, nämlich das „Postnikow-Quadrat" (6.8 Satz 10, 6.9 Satz 11) — im Fall der Mannigfaltigkeiten auch durch Verschlingungszahlen (7.6 Satz 16) — charakterisieren läßt.

Die Beweise stützen sich ganz entscheidend auf die Ergebnisse und Methoden von Teil I [*8*]. Die Bezeichnungen und grundsätzlichen Vereinbarungen von Teil I gelten auch hier (vgl. Teil I 1.1—1.4). Insbesondere werden — von Ausnahmen abgesehen — in den Räumen Grundpunkte festgelegt und nur solche Abbildungen und Homotopien zugelassen, die die Grundpunkte ineinander überführen. Welche speziellen Punkte man als Grundpunkte nimmt, ist jedoch bei *CW*-Komplexen, also z.B. bei Pseudomannigfaltigkeiten von untergeordneter Bedeutung [vgl. Teil I 5.5.A) und E)].

Die Numerierung der Paragraphen von Teil I wird hier mit § 6 und § 7 weitergeführt. Bei Hinweisen auf §§ 1—5 ist immer Teil I dieser Arbeit [*8*] gemeint, sofern nicht ausdrücklich eine andere Arbeit zitiert wird.

§ 6. Sphärenähnliche Pseudomannigfaltigkeiten

6.1. Wie in der Einleitung bereits erklärt, nennen wir eine Pseudomannigfaltigkeit P^n *sphärenähnlich*, wenn $g^*: \pi(S^n, V) = \pi_n(V) \to \pi(P^n, V)$ (zur Definition s. 1.3), induziert durch eine Abbildung $g: P^n \to S^n$ vom Grade 1, für jedes V monomorph ist. Es wurde auch darauf hingewiesen, daß es gleichgültig ist, welche Abbildung $g: P^n \to S^n$ vom Grade 1 man dabei zugrunde legt, weil alle untereinander homotop sind.

Sei $e^n \subset P^n$ eine n-Zelle, und P^n entstehe aus $P^n - e^n$ dadurch, daß eine Vollkugel E^n mittels $f: S^{n-1} \to P^n - e^n$ angeheftet wird (S^{n-1} = Randsphäre von E^n)[2]). Dann ist P^n der Abbildungskegel C_f von f, und Pf ist die Injektion $P^n - e^n \to P^n$ (vgl. 1.4). $Qf: P^n \to P^n/(P^n - e^n) = S^n$ ist die natürliche Projektion (vgl. 1.9), hat also den Grad 1. Jede Abbildung $g: P^n \to S^n$ vom Grade 1 ist daher mit Qf homotop, und aus 4.4 Satz 13 folgt:

Satz 1. *Ist P^n sphärenähnlich und hat $g: P^n \to S^n$ den Grad 1, so ist die induzierte Abbildung der Homotopiemengen $g^*: \pi_n(V) \to \pi(P^n, V)$ für jedes V einwertig, d.h. für alle $a, a': S^n \to V$ folgt $a \simeq a'$ aus $g \circ a \simeq g \circ a'$.*

Bemerkung. Gemäß der Vereinbarung in 1.1 ist hier unter „$\simeq$" immer Homotopie relativ zum Grundpunkt zu verstehen. Unter Benutzung von [7] Hilfssatz 2 kann man aber auch zeigen: Sind $g \circ a$ und $g \circ a'$ frei homotop, so auch a und a'.

6.2. Satz 2. *Eine Pseudomannigfaltigkeit P^n ist schon dann sphärenähnlich, wenn eine Abbildung $g: P^n \to S^n$ vom Grade 1 für den speziellen Bildraum $V = S(P^n - e^n)$ einen Monomorphismus $g^*: \pi_n(V) \to \pi(P^n, V)$ induziert.* (e^n ist eine Zelle auf P^n wie in 6.1, und S ist der Einhängungsoperator, vgl. 1.8.)

Beweis. Nach 6.1 ist g mit Qf homotop, wenn $f: S^{n-1} \to P^n - e^n$ eine anheftende Abbildung für die Zelle e^n ist. Man kann daher $g = Qf$ annehmen. Wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge $\mathfrak{A}f$ (1.12 Satz 6) ist

$$(Qf)^*: \pi_n(V) \to \pi(P^n, V)$$

für jedes einzelne V genau dann monomorph, wenn

$$(Sf)^*: \pi(S(P^n - e^n), V) \to \pi_n(V)$$

verschwindet. Ist $(Qf)^*$ monomorph, also $(Sf)^* = 0$ für $V = S(P^n - e^n)$, so gilt $(Sf)^*[1] = [Sf] = 0$ [vgl. 1.3, 1 bezeichnet die Identität von $S(P^n - e^n)$], d.h. $Sf \simeq 0$. Es folgt $(Sf)^* = 0$ und damit die Monomorphie von $(Qf)^*$ für alle V, d.h. P^n ist sphärenähnlich.

6.3. Satz 3. *Eine Pseudomannigfaltigkeit P^n ist genau dann sphärenähnlich, wenn es eine Abbildung $S^{n+1} \to SP^n$ (SP^n = Einhängung von P^n) vom Grade 1 gibt, d.h. wenn der $(n+1)$-dimensionale Grundzykel von SP^n sphärisch ist.*

Beweis. Für $n = 1$ ist die Behauptung trivial, denn die einzige 1-dimensionale Pseudomannigfaltigkeit ist die 1-Sphäre S^1. Für $n > 1$ ist 3.4 Satz 12 anwendbar. Demnach ist P^n genau dann sphärenähnlich, wenn die Einhängung $Sg: SP^n \to S^{n+1}$ einer Abbildung $g: P^n \to S^n$ vom Grade 1 ein Rechts-Homotopieinverses r besitzt. Für jede Abbildung $r: S^{n+1} \to SP^n$ ist $\mathrm{Grad}(Sg \circ r) = (\mathrm{Grad}\, Sg) \cdot (\mathrm{Grad}\, r) = \mathrm{Grad}\, r$. Ist also $Sg \circ r \simeq 1$, so folgt $\mathrm{Grad}\, r = 1$; und wird $\mathrm{Grad}\, r = 1$ vorausgesetzt, so folgt $\mathrm{Grad}(Sg \circ r) = 1$ und damit $Sg \circ r \simeq 1$,

[2]) Insbesondere muß der Grundpunkt von P^n in $f(S^{n-1}) \subset P^n - e^n$ liegen. Man kann (bei vorgegebenem Grundpunkt) e^n immer so wählen, daß das der Fall ist.

weil $Sg \circ r$ eine Selbstabbildung von S^{n+1} ist. Daß r rechts-homotopieinvers zu Sg ist, ist also mit $\operatorname{Grad} r = 1$ äquivalent.

6.4. Satz 4. *Sind die Pseudomannigfaltigkeiten P_1^n und P_2^m sphärenähnlich, so auch ihr Produkt $P_1^n \times P_2^m$.*

Beweis. Nach 5.1 Satz 14 induziert die Injektion $P_1^n \times P_2^m \to P_1^n \barwedge P_2^m$ Monomorphismen der Homotopiemengen für jeden Bildraum. Weil kein Punkt einer Pseudomannigfaltigkeit ausgeartet ist [5.5.A)], gilt $P_1^n \barwedge P_2^m \equiv P_1^n \wedge P_2^m$ $(= (P_1^n \times P_2^m)/(P_1^n \vee P_2^m))$ nach 5.6 Satz 16. Dabei geht die obige Injektion in die natürliche Projektion $p: P_1^n \times P_2^m \to P_1^n \wedge P_2^m$ über. Diese induziert also ebenfalls Monomorphismen der Homotopiemengen.

Seien $g_1: P_1^n \to S^n$ und $g_2: P_2^m \to S^m$ Abbildungen vom Grade 1. Nach Voraussetzung sind die induzierten Abbildungen der Homotopiemengen g_1^* und g_2^* für jeden Bildraum monomorph. Nach 5.11 Satz 22 folgt das gleiche für $(g_1 \wedge g_2)^*$. Also ist auch $((g_1 \wedge g_2) \circ p)^* = p^* \circ (g_1 \wedge g_2)^*$ monomorph.

Andererseits ist $S^n \wedge S^m = S^{n+m}$ (vgl. 5.9) und $(g_1 \wedge g_2) \circ p: P_1^n \times P_2^m \to S^n \wedge S^m = S^{n+m}$ hat den Grad 1. (Man erhält nämlich dieselbe Abbildung, wenn man $g_1 \times g_2: P_1^n \times P_2^m \to S^n \times S^m$ mit der Projektion $S^n \times S^m \to S^n \wedge S^m = S^{n+m}$ zusammensetzt, und für diese beiden Abbildungen sieht man leicht, daß sie den Grad 1 haben.)

Als Folgerung aus Satz 4 ergibt sich:

Satz 5. *Jedes Produkt von Sphären ist sphärenähnlich.*

(Bemerkung: Satz 5 könnte man auch aus 6.3 Satz 3 und 5.9 Satz 20 folgern.)

Satz 5 enthält (bei weiterer Spezialisierung auf 1-Sphären) den Satz von R. H. Fox [*4*], daß die natürliche Abbildung der Homotopiegruppen irgendeines Raumes in die Torus-Homotopiegruppen monomorph ist.

Für „gruppenartige" (group-like) Bildräume V wurde die Monomorphie von $g^*: \pi_n(V) \to \pi(S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k}, V)$, induziert durch eine Abbildung

$$g: S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k} \to S^n$$

vom Grade 1 $(n = n_1 + \cdots + n_k)$ auch von G. W. WHITEHEAD [*16*] bewiesen.

6.5. Zu zwei Pseudomannigfaltigkeiten gleicher Dimension P_0^n, P_1^n wird eine „Summe" besonderer Art definiert, die wir (zum Unterschied von der topologischen Summe im Sinne von BOURBAKI [2]) mit $P_0^n \oplus P_1^n$ bezeichnen:

Analog wie in 6.1 sei $e_i^n \subset P_i^n$ eine n-Zelle, und P_i^n entstehe aus $P_i^n - e_i^n$ durch Anheften der Vollkugel E^n mittels $f_i: S^{n-1} \to P_i^n - e_i^n$ $(i = 0, 1,$ $S^{n-1} =$ Randsphäre von $E^n)$. Um nicht daran gebunden zu sein, daß $f_i(S^{n-1})$ den Grundpunkt von $P_i^n - e_i^n \subset P_i^n$ enthält, legen wir hier ausnahmsweise keine Grundpunkte fest. $\tilde{f}_i: E^n \to P_i^n$ sei die natürliche Abbildung [Einschränkung der Identifizierung $E^n + (P_i^n - e_i^n) \to P_i^n$ auf E^n]. Wir orientieren E^n und nehmen an, daß $\tilde{f}_0$ die Orientierung erhält und $\tilde{f}_1$ sie umkehrt. Das wird durch geeignete Wahl von f_i erreicht. Wenn es zunächst nicht der Fall ist, braucht man nur vor f_i eine orientierungsumkehrende Selbstabbildung von S^{n-1} vorzuschalten. Die „Summe" $P_0^n \oplus P_1^n$ wird nun als derjenige Raum definiert, der aus

$$(P_0^n - e_0^n) + (P_1^n - e_1^n) + (S^{n-1} \times I)$$

durch folgende Identifizierungen hervorgeht (Fig. 1):

$$S^{n-1} \times I \ni (x, 0) = f_0(x) \in P_0^n - e_0^n$$
$$S^{n-1} \times I \ni (x, 1) = f_1(x) \in P_1^n - e_1^n.$$

Wird P_i^n simplizial zerlegt, und wählt man bei der obigen Konstruktion für die Zelle e_i^n ein (offenes) Simplex dieser Zerlegung, so ist $P_0^n \oplus P_1^n$, wie man sehr leicht bestätigt, eine orientierbare Pseudomannigfaltigkeit[3]). Die Orientierung wird so festgelegt, daß sie auf $P_i^n - e_i^n \subset P_0^n \oplus P_1^n$ $(i = 0, 1)$ mit der ursprünglichen übereinstimmt. Daß das möglich ist, wurde durch die Wahl des Orientierungscharakters von $\tilde{f}_i$ erreicht.

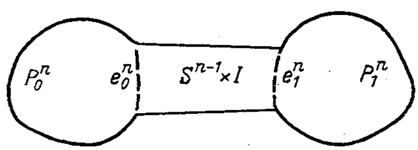

Fig. 1

Es scheint plausibel, daß $P_0^n \oplus P_1^n$ nur von den Pseudomannigfaltigkeiten P_i^n und nicht von den bei der Konstruktion getroffenen Auswahlen abhängt. Ich kenne jedoch keinen Beweis dafür. Dagegen gilt sicher:

Satz 6. *Der Homotopietyp von $P_0^n \oplus P_1^n$ hängt nur von den Pseudomannigfaltigkeiten P_i^n ab (und nicht von der Wahl der Zellen e_i^n und der anheftenden Abbildungen $f_i: S^{n-1} \to P_i^n - e_i^n$).*

Der Beweis wird in 6.10 geführt. Da es hier immer nur auf den Homotopietyp der Räume ankommt, genügt uns dieses Ergebnis. Insbesondere ist $P_0^n \oplus P_1^n$ in jedem Falle einer orientierbaren Pseudomannigfaltigkeit homotopieäquivalent, und man kann den Begriff der Sphärenähnlichkeit darauf anwenden[4]).

Satz 7. *Die Summe $P_0^n \oplus P_1^n$ zweier Pseudomannigfaltigkeiten ist genau dann sphärenähnlich, wenn es beide Summanden P_i^n sind $(i = 0, 1)$.*

Beweis. Wir wählen (für $i = 0, 1$) eine Zellenzerlegung von P_i^n, die P_i^n zu einem CW-Komplex im Sinne von J. H. C. Whitehead [*18*] macht (z.B. eine simpliziale Zerlegung), und benutzen zur Konstruktion von $P_0^n \oplus P_1^n$ je eine n-Zelle e_i^n dieser Zerlegungen. Um die allgemeine Theorie anwenden zu können, die in Teil I dieser Arbeit entwickelt wurde, ist es bequem, nun doch Grundpunkte festzulegen: Sei x_0 der Grundpunkt von S^{n-1}. Die anheftende

---

[3]) Sie unterscheidet sich von der in [7] S. 314 definierten „Summe" von Pseudomannigfaltigkeiten nur dadurch, daß dort die Ränder der herausgenommenen Simplexe direkt miteinander identifiziert werden, während hier der „Schlauch" $S^{n-1} \times I$ eingefügt wird. Bis auf Homotopieäquivalenz liefert beides das gleiche.

[4]) Werden bei der Definition von $P_0^n \oplus P_1^n$ als Zellen e_i^n von vornherein nur Simplexe einer simplizialen Zerlegung zugelassen, so kann man im folgenden ohne Satz 6 auskommen. Man weiß dann allerdings nichts darüber, ob $P_0^n \oplus P_1^n$ von den bei der Konstruktion getroffenen Auswahlen unabhängig ist.

Abbildung $f_i: S^{n-1} \to P_i^n - e_i^n$ wird so gewählt, daß $f_i(x_0)$ eine 0-Zelle der Zerlegung von P_i^n ist, und diese sei der gemeinsame Grundpunkt von $P_i^n - e_i^n$ und P_i^n. Unter diesen Voraussetzungen (die nach Satz 6 die Allgemeinheit des Beweises nicht einschränken) läßt sich $P_i^n \oplus P_i^n$ als CW-Komplex auffassen: Auf $P_i^n - e_i^n$ bleibt die ursprüngliche Zerlegung, und

$$(P_0^n \oplus P_1^n) - [(P_0^n - e_0^n) \cup (P_1^n - e_1^n)] = S^{n-1} \times (I - \{0, 1\})$$

zerlegt man in die 1-Zelle $x_0 \times (I - \{0, 1\})$ und ihr Komplement, das eine n-Zelle ist.

Da $P_0^n - e_0^n$ und $P_1^n - e_1^n$ in $P_1^n \oplus P_1^n$ punktfremd sind, gibt es keinen gemeinsamen Grundpunkt für diese drei Räume. Um diesem Nachteil abzuhelfen, gehen wir zu

$$P_0^n \overline{\oplus} P_1^n = (P_0^n \oplus P_1^n)/(x_0 \times I)$$

über und legen das Bild von $x_0 \times I$ in $P_0^n \overline{\oplus} P_1^n$ als Grundpunkt fest. $x_0 \times I$ ist zusammenziehbar, und $(P_0^n \oplus P_1^n, x_0 \times I)$ ist ein Paar von CW-Komplexen, besitzt also die Homotopieerweiterungseigenschaft HE (vgl. 1.6; als Grundpunkt für $P_0^n \oplus P_1^n$ kann man irgendeinen Punkt von $x_0 \times I$ wählen). Eine Zusammenziehung von $x_0 \times I$ läßt sich daher zu einer Homotopie der Identität von $P_0^n \oplus P_1^n$ fortsetzen, und es folgt (1.2 Hilfssatz 3)

$$P_0^n \oplus P_1^n \equiv P_0^n \overline{\oplus} P_1^n.$$

Es genügt also, die Behauptung von Satz 7 für $P_0^n \overline{\oplus} P_1^n$ an Stelle von $P_0^n \oplus P_1^n$ zu beweisen:

$(P_0^n \overline{\oplus} P_1^n, P_0^n - e_0^n)$ ist ein Paar von CW-Komplexen und hat daher die Homotopieerweiterungseigenschaft HE (vgl. 1.6). Für die Injektion

$$h: P_0^n - e_0^n \to P_0^n \overline{\oplus} P_1^n$$

folgt also aus 1.6 Satz 2, daß

$$Ph: P_0^n \overline{\oplus} P_1^n \to C_h$$

mit der natürlichen Projektion

$$g: P_0^n \overline{\oplus} P_1^n \to (P_0^n \overline{\oplus} P_1^n)/(P_0^n - e_0^n) = P_1^n$$

(vgl. Fig. 1) homotopieäquivalent ist. g hat offenbar den Grad 1. Wir setzen ferner $g_i = Q f_i: P_i^n \to S^n$ (vgl. 6.1), wobei $f_i: S^{n-1} \to P_i^n - e_i^n$ die bei der Konstruktion vou $P_0^n \oplus P_1^n$ benutzte anheftende Abbildung für e_i^n ist. g_i hat dann ebenfalls den Grad 1

Ist nun $P_0^n \overline{\oplus} P_1^n$ sphärenähnlich, d.h. ist

$$(g_1 \circ g)^* = g^* \circ g_1^*: \pi_n(V) \to \pi(P_0^n \overline{\oplus} P_1^n, V)$$

monomorph für jeden Bildraum V, so ist offenbar auch $g_1^*: \pi_n(V) \to \pi(P_1^n, V)$ monomorph. Aus Symmetriegründen gilt das gleiche für P_0^n, d.h. P_0^n und P_1^n sind sphärenähnlich.

Setzt man umgekehrt P_0^n und P_1^n als sphärenähnlich voraus, so ist $(g_1 \circ g)^* = g^* \circ g_1^*$ monomorph für jedes V (d.h. $P_0^n \overline{\oplus} P_1^n$ sphärenähnlich), weil g_1^* und g^* es sind — g_1^* nach Voraussetzung und g^* nach

Hilfssatz 1. *Ist $g_0^*: \pi_n(V) \to \pi(P_0^n, V)$ monomorph (für ein bestimmtes V), so auch $g^*: \pi(P_1^n, V) \to \pi(P_0^n \overline{\oplus} P_1^n, V)$.*

Beweis. Nach Definition ist $g_0 = Q f_0$ mit $f_0: S^{n-1} \to P_0^n - e_0^n$. Aus der Monomorphie von $g_0^* = (Q f_0)^*$ folgt wegen der Exaktheit der Abbildungsfolge $\mathfrak{A} f_0$ (1.12 Satz 6) nacheinander, daß $(S f_0)^*$ verschwindet und $(S P f_0)^*$ epimorph ist. Sei

$$g': P_0^n \overline{\oplus} P_1^n \to (P_0^n \overline{\oplus} P_1^n)/(P_1^n - e_1^n) = P_0^n$$

die natürliche Projektion (vgl. Fig. 1). Offenbar ist $P f_0 = g' \circ h$ (denn $P f_0: P_0^n - e_0^n \to P_0^n$ und $h: P_0^n - e_0^n \to P_0^n \overline{\oplus} P_1^n$ sind die Injektionen). Es folgt $S P f_0 = S g' \circ S h$ und $(S P f_0)^* = (S h)^* \circ (S g')^*$. Mit $(S P f_0)^*$ ist also auch $(S h)^*$ epimorph. Aus der Exaktheit der Abbildungsfolge $\mathfrak{A} h$ erhält man nun rückwärts: $(Q h)^* = 0$, und $(P h)^*$ ist monomorph. Damit ist alles gezeigt, weil $P h$ mit g homotopieäquivalent ist.

6.6. Bemerkung. Der Beweis von Satz 7 zeigt, daß man ihn schärfer so aussprechen könnte:

Satz 7'. *Induzieren die Abbildungen $g_i: P_i^n \to S^n$ vom Grade 1 Monomorphismen der Homotopiemengen $g_i^*: \pi_n(V) \to \pi(P_i^n, V)$ für einen bestimmten Bildraum V $(i = 0, 1)$, so gilt das Entsprechende für eine Abbildung $g: P_0^n \oplus P_1^n \to S^n$ vom Grade 1 — und umgekehrt.*

Im Gegensatz hierzu kann man Satz 4 in 6.4 nicht in analoger Weise verschärfen, wie folgendes Beispiel zeigt: Sei M^4 die komplexe projektive Ebene, die eine 4-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, und $g: M^4 \to S^4$ eine Abbildung vom Grade 1. Nimmt man $V = S^4$ als Bildraum, so ist $g^*: \pi_4(S^4) \to \pi(M^4, S^4)$ monomorph, weil für jedes $a: S^4 \to S^4$

$$\mathrm{Grad}\,(a \circ g) = \mathrm{Grad}\, a$$

ist. Die Identität $1: S^1 \to S^1$ induziert trivialerweise einen Monomorphismus $\pi_1(S^4) \to \pi(S^1, S^4) = \pi_1(S^4) = 0$. Dagegen ist $\pi_5(S^4) \to \pi(M^4 \times S^1, S^4)$, induziert durch eine Abbildung $M^4 \times S^1 \to S^5$ vom Grade 1, nicht monomorph.

Beweis. Sei $p: M^4 \times S^1 \to M^4 \wedge S^1 = S M^4$ die natürliche Projektion (vgl. 5.3). $S g \circ p: M^4 \times S^1 \to S^5$ hat den Grad 1 (vgl. den Beweis von Satz 4 in 6.4). Wäre $(S g \circ p)^* = p^* \circ (S g)^*: \pi_5(S^4) \to \pi(M^4 \times S^1, S^4)$ monomorph, so auch $(S g)^*: \pi_5(S^4) \to \pi(S M^4, S^4)$. Das ist aber unmöglich, denn $\pi_5(S^4) \neq 0$ und $\pi(S M^4, S^4) = 0$. Letzteres folgt z.B. aus dem Steenrodschen Klassifikationssatz [*10*] Th. 28.1, wenn man beachtet, daß das „Steenrodsche Quadrat" $S q^2: H^3(S M^4, Z_2) \to H^5(S M^4, Z_2)$ [5]) epimorph ist ([*10*] § 20). Man kann es aber

[5]) Zur Definition s. STEENROD [*10*], [*12*], [*13*], [*14*]. Z_m bezeichnet die zyklische Gruppe der Ordnung m. $S q^i$ ist die heute übliche Bezeichnung für $S q_{q-i}$ in [*10*], wenn es sich um die Abbildung der q-ten in die $(q+i)$-te Kohomologiegruppe handelt. $S q^0 =$ Identität, und $S q^i = 0$ für $i > q$.

auch dem Beweis von Satz 9 in [*7*] entnehmen: Bei Benutzung der dortigen Bezeichnungen ist die Ordnung s von $\pi_5(S^4)$ gleich 2, und nimmt man für $f_1: S_1^4 \to S^3$ die konstante Abbildung und für $f_2: S_2^4 \to S^3$ die Einhängung der Hopfschen Faserung $S^3 \to S^2$, so stimmt die dort konstruierte Pseudomannigfaltigkeit P mit SM^4 überein (vgl. auch [*10*] § 20, wo M^4 genau beschrieben ist).

6.7. Satz 8. *Ist die Pseudomannigfaltigkeit P^n sphärenähnlich, so verschwinden für ihre Einhängung SP^n alle Kohomologieoperationen (zur Definition s.* STEENROD [*12*])

$$k: H^q(SP^n, G) \to H^{n+1}(SP^n, G')$$

mit $0<q<n+1$ und mit beliebigen Koeffizientengruppen G, G'.

Beweis. Nach 6.3 Satz 3 gibt es eine Abbildung $r: S^{n+1} \to SP^n$ vom Grade 1. r^* sei der induzierte Homomorphismus der Kohomologiegruppen. Für jedes $c \in H^q(SP^n, G)$ gilt $r^* k(c) = k r^*(c) = k(0) = 0$, denn $r^*(c) \in H^q(S^{n+1}, G) = 0$. Daraus folgt $k(c) = 0$, da r^* in der Dimension $n+1$ ein Isomorphismus ist.

Die „Steenrodschen Quadrate" $Sq^i: H^q(X, Z_2) \to H^{q+i}(X, Z_2)$ [5]) sind Kohomologieoperationen, die mit der Einhängung vertauschbar sind, d.h. das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^{n-i}(P^n, Z_2) & \xrightarrow{Sq^i} & H^n(P^n, Z_2) \\ \wr\| & & \wr\| \\ H^{n-i+1}(SP^n, Z_2) & \xrightarrow{Sq^i} & H^{n+1}(SP^n, Z_2) \end{array} \qquad 0 \leqq i < n$$

ist kommutativ (STEENROD [*10*] (11.5), (11.6)[6])). Aus Satz 8 ergibt sich daher:

Folgerung 1. *Für jede sphärenähnliche Pseudomannigfaltigkeit P^n verschwinden die Steenrodschen Quadrate $Sq^i: H^{n-i}(P^n, Z_2) \to H^n(P^n, Z_2)$ für $i > 0$.*

Auch die „zyklischen reduzierten Potenzen"

$$\mathcal{P}^i: H^q(X, Z_p) \to H^{q+2i(p-1)}(X, Z_p)$$

[p = ungerade Primzahl, zur Definition s. STEENROD [*14*] (6.8)] sind mit der Einhängung vertauschbar ([*14*] (6.16)), und man erhält analog:

Folgerung 2. *Für jede sphärenähnliche Pseudomannigfaltigkeit P^n verschwinden die zyklischen reduzierten Potenzen*

$$\mathcal{P}^i: H^{n-2i(p-1)}(P^n, Z_p) \to H^n(P^n, Z_p) \qquad \text{für } i > 0.$$

Als weiteres spezielles Beispiel interessieren die bei J. H. C. WHITEHEAD [*20*] § 5 definierten Kohomologieoperationen

$$\mathfrak{p}_0: H^q(X, G) \to H^{2q+1}(X, \Gamma(G)), \qquad \text{„Postnikow-Quadrat"}$$

$$\mathfrak{p}_1: H^q(X, G) \to H^{2q}(X, \Gamma(G)), \qquad q = \text{gerade, „Pontrjagin-Quadrat"}.$$

[6]) Daß in [*10*] ein etwas anderer Begriff der Einhängung benutzt wird ist unwesentlich, da die beiden verschiedenen Einhängungen für *CW*-Komplexe homotopieäquivalent sind (1.8 Hilfssatz 5).

(Zur Definition von $\Gamma(G)$ s. J. H. C. WHITEHEAD [*19*] Chap. II.) Der Isomorphismus $H^{q+1}(S P^n, G) \cong H^q(P^n, G)$ $(q > 0)$ ist im wesentlichen durch den Korandhomomorphismus

$$H^q(P^n, G) \to \delta^* : H^{q+1}(\tilde{C} P^n, P^n; G)$$

gegeben (s. STEENROD [*10*] § 11; $\tilde{C} P^n$ bezeichnet den Kegel über P^n, vgl. auch [*8*] 3.7, wo der analoge Isomorphismus der Homologiegruppen ausführlich behandelt wird). Daher besagt die Formel (5.5) in [*20*], daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^q(P^n, G) & \xrightarrow{\mathfrak{p}_0} & H^n(P^n, \Gamma(G)) \\ \wr\!\| & & \wr\!\| \\ H^{q+1}(S P^n, G) & \xrightarrow{\mathfrak{p}_1} & H^{n+1}(S P^n, \Gamma(G)) \end{array} \qquad \begin{array}{l} n = 2q+1, \\ 0 < q = \text{ungerade} \end{array}$$

kommutativ ist. Wir erhalten also aus Satz 8:

Folgerung 3. *Für jede sphärenähnliche Pseudomannigfaltigkeit P^n ($n = 2q+1$, $q =$ ungerade) verschwindet das Postnikow-Quadrat $\mathfrak{p}_0 : H^q(P^n, G) \to H^n(P^n, \Gamma(G))$ für jede Koeffizientengruppe G.*

6.8. Satz 9. *Jede zweidimensionale Pseudomannigfaltigkeit P^2 ist sphärenähnlich.*

Satz 10. *Eine dreidimensionale Pseudomannigfaltigkeit P^3 ist genau dann sphärenähnlich, wenn das Postnikow-Quadrat $\mathfrak{p}_0 : H^1(P^3, G) \to H^3(P^3, \Gamma(G))$ für jede Koeffizientengruppe G verschwindet. (Vgl. auch 6.9 Satz 11.)*

Um die übliche Hindernistheorie anwenden zu können, wählen wir zum Beweis dieser Sätze eine simpliziale Zerlegung von P^n $(n = 2, 3)$. σ sei ein (offenes) n-Simplex dieser Zerlegung und

$$g : P^n \to P^n/(P^n - \sigma) = S^n$$

die Identifizierung von $P^n - \sigma$ zu einem Punkt, die offenbar den Grad 1 hat. Für jedes $a : S^n \to V$ (V zunächst beliebig) ist dann $[a] \in \pi_n(V) = H^n(P^n, \pi_n(V))$ die Hinderniskohomologieklasse gegenüber einer Deformation von $a \circ g$ in die konstante Abbildung $P^n \to V$. Das wurde in der Einleitung unter Berufung auf [*7*] bereits ausgeführt.

Beweis von Satz 9. Nach 6.2 Satz 2 genügt es zu zeigen, daß die eben konstruierte Abbildung $g : P^2 \to S^2$ für den speziellen Bildraum $V = S(P^2 - \sigma)$ einen Monomorphismus $g^* : \pi_2(V) \to \pi(P^2, V)$ induziert. Weil $V = S(P^n - \sigma)$ einfach zusammenhängend ist (s. 3.4 Folgerung aus Hilfssatz 9), stehen die Homotopieklassen von Abbildungen $P^2 \to V$ in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu den Elementen von $H^2(P^2, \pi_2(V)) = \pi_2(V)$ (WHITNEY [*21*] Th. 4.5). Für jedes $a : S^n \to V$ entspricht $[a \circ g] = g^*[a]$ dabei seiner Hinderniskohomologieklasse $[a]$. Folglich wird diese umkehrbar eindeutige Beziehung gerade durch g^* geliefert. Insbesondere ist g^* monomorph.

Beweis von Satz 10. Ist P^3 sphärenähnlich, so ergibt sich das Verschwinden des Postnikow-Quadrats aus 6.7 Folgerung 3.

Zum Nachweis der Umkehrung genügt es nach 6.2 Satz 2 zu zeigen, daß die oben konstruierte Abbildung $g: P^3 \to S^3$ für $V = S(P^3 - \sigma)$ einen Monomorphismus $g^*: \pi_3(V) \to \pi(P^3, V)$ induziert. $V = S(P^3 - \sigma)$ ist einfach zusammenhängend (s. 3.4 Folgerung aus Hilfssatz 9). Nach J. H. C. WHITEHEAD [*20*] § 7 ist $a \circ g: P^3 \to V$ (für irgendein $a: S^3 \to V$) genau dann nullhomotop, wenn die Hinderniskohomologieklasse $[a] \in \pi_3(V) = H^3(P^3, \pi_3(V))$ im Bild von

$$H^1(P^3, \pi_2(V)) \xrightarrow{\mathfrak{p}_0} H^3(P^3, \Gamma(\pi_2(V))) \xrightarrow{\mathfrak{i}_*} H^3(P^3, \pi_3(V))$$

liegt. [$\mathfrak{i}_*$ wird dabei durch den Homomorphismus $\mathfrak{i}: \Gamma(\pi_2(V)) \cong \Gamma_3(V) \to \pi_3(V)$ aus der exakten Folge $\Sigma(V)$ induziert, vgl. [*19*] §§ 1, 10, 13]. Verschwindet $\mathfrak{p}_0$, so folgt also $[a] = 0$ aus $[a \circ g] = 0$.

6.9. In Ergänzung zu 6.7 Folgerung 3 und 6.8 Satz 10 stellen wir einige Eigenschaften des Postnikow-Quadrats

$$\mathfrak{p}_0(G): H^q(X, G) \to H^{2q+1}(X, \Gamma(G))$$

zusammen:

Eine ausführliche Untersuchung von $\Gamma(G)$ findet man bei J. H. C. WHITEHEAD [*19*] Chap. II. Ist Z die Gruppe der ganzen Zahlen und $Z_m = Z/mZ$ zyklisch von der Ordnung m, so gilt

$$\Gamma(Z) = Z \qquad ([19]\ \S\ 5\ \text{(A)})$$

$$\Gamma(Z_m) = \begin{cases} Z_m & \text{für ungerades } m \\ Z_{2m} & \text{für gerades } m \end{cases} \qquad ([19]\ \S\ 5\ \text{(B)}).$$

Nach [*20*] (5.1) wird $\mathfrak{p}_0(Z)$ und $\mathfrak{p}_0(Z_m)$ durch $c \to c \smile \delta c$ (δ = Korandoperator) induziert, wobei c eine ganzzahlige q-Kokette von X mit $\delta c = 0$ bzw. $\delta c \equiv 0 \bmod m$ ist. Daraus folgt:

$\mathfrak{p}_0(Z)$ und $\mathfrak{p}_0(Z_m)$ für ungerades m verschwinden immer.

Für gerades m ist dagegen nicht von vornherein $\mathfrak{p}_0(Z_m) = 0$, da dann $c \smile \delta c$ nicht mod m sondern nur mod $2m$ zu reduzieren ist.

Satz 11. *Das Postnikow-Quadrat $\mathfrak{p}_0(G): H^q(X, G) \to H^{2q+1}(X, \Gamma(G))$ verschwindet schon dann für jede Koeffizientengruppe G, wenn es für die speziellen Gruppen Z_{2^k}, $k = 1, 2, \ldots$, verschwindet.*

Beweis. Ein Homomorphismus $\xi: G' \to G$ induziert $\Gamma\xi: \Gamma(G') \to \Gamma(G)$ (s. [*19*] § 6). Aus den Definitionen von $\Gamma\xi$ und $\mathfrak{p}_0$ (s. [*20*] (5.1)) folgt unmittelbar, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^q(X, G') & \xrightarrow{\mathfrak{p}_0(G')} & H^{2q+1}(X, \Gamma(G')) \\ \downarrow{\scriptstyle \xi_*} & & \downarrow{\scriptstyle (\Gamma\xi)_*} \\ H^q(X, G) & \xrightarrow{\mathfrak{p}_0(G)} & H^{2q+1}(X, \Gamma(G)) \end{array}$$

kommutativ ist.

Sei nun zunächst G endlich erzeugt. Dann ist $G = \sum_\nu G^{(\nu)}$ mit $G^{(\nu)} = Z$ oder Z_{p^k} (p = Primzahl). Ist $\xi^{(\nu)}: G^{(\nu)} \to G$ die Injektion und $\eta^{(\nu)}: G \to G^{(\nu)}$ die Projektion, so gilt

$$\mathfrak{p}_0(G) \circ \xi_*^{(\nu)} = (\Gamma \xi^{(\nu)})_* \circ \mathfrak{p}_0(G^{(\nu)}) = 0,$$

denn $\mathfrak{p}_0(G^{(\nu)})$ verschwindet (für $G^{(\nu)} = Z$ oder Z_{p^k} mit ungeradem p immer, und für $G^{(\nu)} = Z_{2^k}$ nach Voraussetzung). Wegen $\sum_\nu \xi^{(\nu)} \circ \eta^{(\nu)} = 1$ folgt

$$\mathfrak{p}_0(G) = \mathfrak{p}_0(G) \circ \sum_\nu \xi_*^{(\nu)} \circ \eta_*^{(\nu)} = \sum_\nu \mathfrak{p}_0(G) \circ \xi_*^{(\nu)} \circ \eta_*^{(\nu)} = 0.$$

Im allgemeinen Fall (G eventuell nicht endlich erzeugt) gibt es zu jedem $c \in H^q(X, G)$ eine endlich erzeugte Untergruppe $G' < G$, so daß $c \in \xi_* H^q(X, G')$, wenn $\xi: G' \to G$ die Injektion bezeichnet. Nun ist, wie oben gezeigt wurde, $\mathfrak{p}_0(G) \circ \xi_* = (\Gamma \xi)_* \circ \mathfrak{p}_0(G') = 0$, also $\mathfrak{p}_0(G)(c) = 0$.

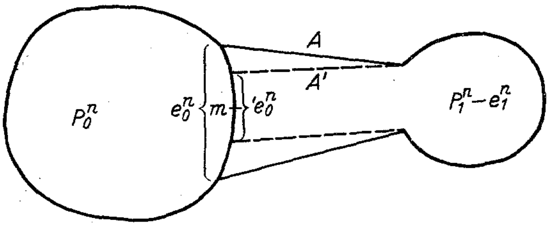

Fig. 2

6.10. Beweis von Satz 6. Es soll gezeigt werden, daß der Homotopietyp von $P_0^n \oplus P_1^n$ erhalten bleibt, wenn man die bei der Konstruktion benutzten Zellen $e_i^n < P_i^n$ und anheftenden Abbildungen $f_i: S^{n-1} \to P_i^n - e_i^n$ ($i = 0, 1$, vgl. 6.5) durch andere Zellen und anheftende Abbildungen ersetzt. Man beachte, daß hier ausnahmsweise keine Grundpunkte festgelegt wurden; es wird sich also immer um freie Homotopien und Homotopieäquivalenzen handeln.

I. Wir ändern zunächst nur e_0^n in $'e_0^n$, f_0 in $f_0': S^{n-1} \to P_0^n - {}'e_0^n$ ab, und zwar so, daß die abgeschlossene Hülle $\overline{'e_0^n}$ von $'e_0^n$ in e_0^n liegt. Sei m ein Punkt in $'e_0^n$ und A bzw. A' entstehe aus

$$(P_0^n - m) + (P_1^n - e_0^n) + (S^{n-1} \times I)$$

durch die Identifizierungen (Fig. 2)

$$S^{n-1} \times I \ni (x, 0) = f_0(x) \quad \text{bzw.} \quad f_0'(x) \in P_0^n - m$$
$$S^{n-1} \times I \ni (x, 1) = f_1(x) \in P_1^n - e_1^n.$$

Weil $P_0^n - e_0^n$ und $P_0^n - {}'e_0^n$ Deformationsretrakte von $P_0^n - m$ sind, ist $P_0^n \oplus P_1^n$ Deformationsretrakt von A, wenn man $P_0^n \oplus P_1^n$ mit Hilfe von e_0^n, e_1^n, f_0, f_1 konstruiert, und Deformationsretrakt von A', wenn man $'e_0^n, e_1^n, f_0', f_1$ zur Konstruktion benutzt (vgl. 6.5). Um zu sehen, daß sich der Homotopietyp von $P_0^n \oplus P_1^n$ bei Ersetzung von e_0^n, f_0 durch $'e_0^n, f_0'$ nicht ändert, genügt es also zu zeigen, daß A mit A' homotopieäquivalent ist:

P_0^n sollte aus $P_0^n - e_0^n$ durch Anheften einer Vollkugel E^n mittels $f_0: S^{n-1} \to P_0^n - e_0^n$ entstehen ($S^{n-1} =$ Randsphäre von E^n). Man kann daher $'e_0^n$ als Teilmenge von $E^n - S^{n-1}$ und f_0' als Abbildung in $E^n - S^{n-1} \subset E^n$ auffassen. Weil $f_0'(S^{n-1})$ in E^n die Verschlingungszahl 1 mit m hat (vgl. die Orientierungsvorschriften in 6.5), ist $f_0': S^{n-1} \to E^n - m$ zu der Injektion $S^{n-1} \to E^n - m$ homotop. Durch Zusammensetzen mit der Identifizierung $(E^n - m) + (P_0^n - e_0^n) \to P_0^n - m$ gehen diese Abbildungen in

$$f_0': S^{n-1} \to P_0^n - {}'e_0^n \subset P_0^n - m$$

bzw.

$$f_0: S^{n-1} \to P_0^n - e_0^n \subset P_0^n - m$$

über, die infolgedessen als Abbildungen in $P_0^n - m$ homotop sind. Sei $\Phi_t: S^{n-1} \to P_0^n - m$ $(t \in I)$ eine Homotopie zwischen f_0 und f_0', d.h. $\Phi_0 = f_0$, $\Phi_1 = f_0'$. Wir definieren $\chi: A \to A'$ und $\chi': A' \to A$ durch

$$\chi \mid [(P_0^n - m) \cup (P_1^n - e_1^n)] = \text{Identität}$$

$$\chi(x, s) = \begin{cases} \Phi_{2s}(x), & s \leqq \frac{1}{2} \\ (x, 2s-1), & s \geqq \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (x, s) \in S^{n-1} \times I$$

$$\chi' \mid [(P_0^n - m) \cup (P_1^n - e_1^n)] = \text{Identität}$$

$$\chi'(x, s) = \begin{cases} \Phi_{1-2s}(x), & s \leqq \frac{1}{2} \\ (x, 2s-1), & s \geqq \frac{1}{2} \end{cases} \qquad (x, s) \in S^{n-1} \times I.$$

Wie man leicht sieht, ist dann

$$\chi' \circ \chi \simeq 1, \qquad \chi \circ \chi' \simeq 1;$$

denn $\chi' \circ \chi$ ist auf $(P_0^n - m) \cap (P_1^n - e_1^n)$ die Identität, und die Strecke $x \times I \subset S^{n-1} \times I$ geht in einen Weg über, der sich aus dem Deformationsweg von x bei der Homotopie Φ_t, dem Inversen davon und der Strecke $x \times I$ zusammensetzt. Analoges gilt für $\chi \circ \chi'$. Es ist also bewiesen, daß A mit A' homotopieäquivalent ist.

II. Nun werden wir uns von der Voraussetzung $\overline{'e_0^n} \subset e_0^n$ befreien: Seien $e_{01}^n, e_{02}^n \subset P_0^n$ irgend zwei n-Zellen. Man wähle eine simpliziale Zerlegung von P_0^n und zwei n-Zellen $'e_{01}^n, 'e_{02}^n \subset P_0^n$, so daß $\overline{'e_{0j}^n}$ $(j = 1, 2)$ ganz im Inneren eines n-Simplexes von P_0^n und zugleich in e_{0j}^n enthalten ist (Fig. 3). Man verbinde einen Punkt von $'e_{01}^n$ mit einem Punkt von $'e_{02}^n$ durch einen doppelpunktfreien Weg, der das $(n-2)$-dimensionale Gerüst von P_0^n nicht trifft. Nach Definition der Pseudomannigfaltigkeit ist das möglich (Verbindbarkeit, vgl. SEIFERT-THRELFALL [9] § 24). Eine geeignete „schlauchartige" Umgebung e_{03}^n dieses Weges ist eine n-Zelle und enthält $\overline{'e_{01}^n}$ und $\overline{'e_{02}^n}$.

Haben die Ausgangszellen e_{0j}^n die Eigenschaft, daß P_0^n aus $P_0^n - e_{0j}^n$ durch Anheften einer Vollkugel entsteht[7]), so kann man die drei weiteren hier betrachteten Zellen offenbar so wählen, daß sie auch die entsprechende Eigenschaft haben. Nach dem Beweisschritt I ändert sich der Homotopietyp von $P_0^n \oplus P_1^n$ nicht, wenn man bei der Konstruktion von $P_0^n \oplus P_1^n$

$$e_{01}^n \text{ durch } 'e_{01}^n, \quad 'e_{01}^n \text{ durch } e_{03}^n, \quad e_{03}^n \text{ durch } 'e_{02}^n, \quad \text{oder} \quad 'e_{02}^n \text{ durch } e_{02}^n$$

ersetzt (und dabei beliebige anheftende Abbildungen benutzt), also auch dann nicht, wenn man e_{01}^n durch e_{02}^n ersetzt.

III. Entsprechend kann man die aus P_1^n herausgenommene Zelle e_1^n beliebig abändern, und Satz 6 ist bewiesen.

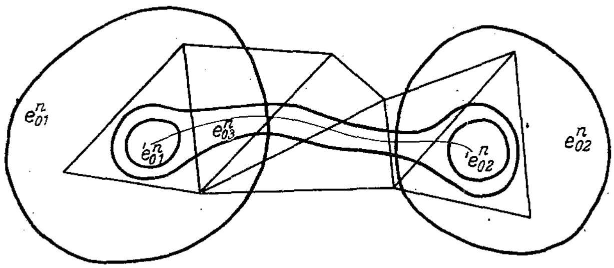

Fig. 3

§ 7. Sphärenähnliche Mannigfaltigkeiten

7.1. Unter einer *Mannigfaltigkeit* M^n verstehen wir hier eine kompakte, orientierbare und orientierte, homogene Mannigfaltigkeit, die sich mit einer Differenzierbarkeitsstruktur[8]) versehen läßt. Jede solche Mannigfaltigkeit ist eine Pseudomannigfaltigkeit im Sinne der Einleitung und des vorigen Paragraphen. (Zur Frage der simplizialen Zerlegbarkeit vgl. J. H. C. Whitehead [*17*] Th. 7.)

Ist M^n einer differenzierbaren Teilmannigfaltigkeit des euklidischen Raumes R^{n+1} homöomorph (nicht notwendig differenzierbar homöomorph), so nennen wir M^n *einbettbar.*

Sei M^n eine differenzierbare Teilmannigfaltigkeit von R^{n+1}. Wir erweitern R^{n+1} durch den Punkt ∞ zur Sphäre S^{n+1}. Trägt man auf jeder Normalen durch einen Punkt von M^n nach beiden Seiten eine (abgeschlossene) Strecke der Länge $\varepsilon > 0$ ab, so erhält man, falls ε genügend klein ist, eine (abgeschlossene) Umgebung U von M^n, die dem Produkt $M^n \times I$ homöomorph ist (vgl. Thom [*15*] II.3, „voisinage tubulaire"[9])). Die natürliche Projektion $M^n \times I \to SM^n$ auf die Einhängung von M^n (vgl. 1.8) läßt sich zu einer Abbildung

[7]) Mir ist nicht bekannt, ob das eine echte Einschränkung ist.

[8]) „Differenzierbar" bedeutet hier immer: beliebig oft differenzierbar.

[9]) Im allgemeinen ist die „voisinage tubulaire" ein (nichttrivialer) Faserraum über M^n. In unserem Fall ist der Faserraum trivial, weil M^n als orientierbare Hyperfläche in R^{n+1} zweiseitig ist.

$r: S^{n+1} \to SM^n$ erweitern (das Komplement von $U = M^n \times I$ geht in den Grundpunkt über), die offenbar den Grad 1 hat. Daraus und aus 6.3 Satz 3 folgt:

Jede einbettbare Mannigfaltigkeit ist sphärenähnlich.

Bemerkungen. 1. Hier wurde die Tatsache, daß M^n eine Mannigfaltigkeit ist (und nicht bloß eine Pseudomannigfaltigkeit) nur benutzt, um die Existenz von U, d.h. die Möglichkeit, $M^n \times I$ topologisch in R^{n+1} einzulagern, zu zeigen. Für Pseudomannigfaltigkeiten P^n gilt also: *Läßt sich $P^n \times I$ topologisch in R^{n+1} einbetten, so ist P^n sphärenähnlich.*

2. Es ist leicht zu zeigen, daß jedes Produkt von Sphären einbettbar ist. Man könnte also 6.4 Satz 5 auch hier gewinnen.

7.2. Nicht jede sphärenähnliche Mannigfaltigkeit ist einbettbar, wie die Linsenräume (p, q) mit ungeradem p zeigen (vgl. 7.7). Es gilt jedoch:

Satz 12. *Eine Mannigfaltigkeit M^n ist genau dann sphärenähnlich, wenn es eine einbettbare Mannigfaltigkeit $'M^n$ gibt, die sich durch eine Abbildung $'M^n \to M^n$ vom Grade 1 auf M^n abbilden läßt.*

Beweis. I. Haben $h: 'M^n \to M^n$ und $g: M^n \to S^n$ den Grad 1, so auch ihre Zusammensetzung $'g = g \circ h$. Ist $'M^n$ einbettbar, so ist es nach 7.1 sphärenähnlich; nach Definition (s. Einleitung oder 1.1) ist also die induzierte Abbildung der Homotopiemengen $'g^* = h^* \circ g^*: \pi_n(V) \to \pi('M^n, V)$ für jeden Bildraum V monomorph. Folglich ist auch g^* monomorph. Das zeigt, daß die Bedingung für Sphärenähnlichkeit hinreichend ist.

II. Wir setzen nun umgekehrt voraus, daß M^n sphärenähnlich ist. Dann gibt es nach 6.3 Satz 3 eine Abbildung $S^{n+1} \to SM^n$ vom Grade 1. Statt SM^n benutzen wir hier besser die andere Art der Einhängung $\tilde{S}M^n$ (vgl. 1.8) und verzichten auf die Festlegung von Grundpunkten. $\tilde{S}M^n$ entsteht aus $M^n \times I$ durch Identifizieren von $M^n \times 0$ und $M^n \times 1$ zu je einem Punkt s_- bzw. s_+. Nach 1.8 Hilfssatz 5 ist $\tilde{S}M^n$ mit SM^n homotopieäquivalent, also gibt es auch eine Abbildung $f': S^{n+1} \to \tilde{S}M^n$ vom Grade 1. $\tilde{S}M^n - \{s_-, s_+\}$ ist das Produkt von M^n mit einer offenen Strecke, die wir für den Augenblick durch die euklidische Gerade R^1 repräsentieren. Wir wählen auf M^n eine Differenzierbarkeitsstruktur[8]) und eine Metrik (im Sinne der Topologie, nicht Riemannsche Metrik). Die Metrik sei etwa dadurch bestimmt, daß M^n in einen euklidischen Raum R^m genügend hoher Dimension topologisch (nicht unbedingt differenzierbar) eingebettet wird. Damit ist eine Differenzierbarkeitsstruktur auf $\tilde{S}M^n - \{s_-, s_+\} = M^n \times R^1$ gegeben und eine Metrik ϱ (die Produktmetrik mit der euklidischen Metrik von R^1). Auch $S^{n+1} - f'^{-1}\{s_-, s_+\} = f'^{-1}(M^n \times R^1)$ ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (allerdings nicht kompakt und eventuell nicht zusammenhängend). Nach STEENROD [*11*] 6.7 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine differenzierbare ε-Approximation von $f' | f'^{-1}(M^n \times R^1)$, d.h. eine differenzierbare[8]) Abbildung

$$f'': f'^{-1}(M^n \times R^1) \to M^n \times R^1 \subset \tilde{S}M^n$$

mit $\varrho(f'(x), f''(x)) < \varepsilon$ für alle $x \in f'^{-1}(M^n \times R^1)$. Die Festsetzung $f''(x) = f'(x)$ für alle $x \in f'^{-1}\{s_-, s_+\}$ ergänzt f'' zu einer stetigen Abbildung $S^{n+1} \to \tilde{S}M^n$, denn wegen $\varrho(f'(x), f''(x)) < \varepsilon$ strebt $f''(x)$ zugleich mit $f'(x)$ gegen s_- bzw. s_+. Wird ε genügend klein gewählt, so ist $f'' \simeq f'$[10]), also hat mit f' auch f'' den Grad 1.

Wir identifizieren M^n mit $M^n \times 0 \subset M^n \times R^1 \subset \tilde{S}M^n$. Nach THOM [*15*] Th. I.5 gibt es einen differenzierbaren Homöomorphismus h von $M^n \times R^1$ auf sich mit folgenden Eigenschaften:

a) h ist außerhalb von $\{(y, t) \mid y \in M^n,\ t \in R^1,\ |t| \leqq 1\}$ die Identität.

b) h bildet $y \times R^1$ für jedes $y \in M^n$ in sich ab.

c) Setzt man $f = h \circ f''$, so besteht $f^{-1}(M^n)$ aus (einer oder mehreren) differenzierbaren Teilmannigfaltigkeiten $'M_i^n$, $i = 1, 2, \ldots, q'$, von S^{n+1}.

Wegen a) läßt sich h durch die Festsetzungen $h(s_-) = s_-$, $h(s_+) = s_+$ auf ganz $\tilde{S}M^n$ und damit f auf S^{n+1} erweitern. Wegen b) ist $h \simeq 1$ [man kann (y, t) mit $h(y, t)$ in $y \times R^1$ durch eine Strecke verbinden]. Folglich ist $f \simeq f''$; f hat daher ebenso wie f'' den Grad 1.

Zur Abkürzung wird definiert

$$C_-M^n = \{(y, t) \mid y \in M^n,\ t \leqq 0\} \cup \{s_-\} \subset \tilde{S}M^n$$
$$C_+M^n = \{(y, t) \mid y \in M^n,\ t \geqq 0\} \cup \{s_+\} \subset \tilde{S}M^n$$
$$\bar{f} = f \mid f^{-1}(M^n).$$

Das Diagramm der Homologiegruppen

$$\begin{array}{ccccccc}
H_{n+1}(S^{n+1}) & \to & H_{n+1}(S^{n+1}, f^{-1}(C_-M^n)) & \xleftarrow{\cong} & H_{n+1}(f^{-1}(C_+M^n), f^{-1}(M^n)) & \to & H_n(f^{-1}(M^n)) \\
{\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}_*} \\
H_{n+1}(\tilde{S}M^n) & \xrightarrow{\cong} & H_{n+1}(\tilde{S}M^n, C_-M^n) & \xleftarrow{\cong} & H_{n+1}(C_+M^n, M^n) & \xrightarrow{\cong} & H_n(M^n),
\end{array}$$

in dem die vertikalen Homomorphismen durch die Abbildung f und ihre Einschränkungen, die horizontalen durch Injektionen bzw. durch den Randhomomorphismus induziert sind, ist kommutativ. Einige Homomorphismen sind als Isomorphismen gekennzeichnet. Daß das richtig ist, folgt aus dem Ausschneidungssatz für die Homologiegruppen („excision property") bzw. aus der Zusammenziehbarkeit von C_-M^n und C_+M^n. Weil f den Grad 1 hat, ist f_* epimorph. Aus dem Diagramm ergibt sich, daß dann alle vertikalen Abbildungen Epimorphismen sein müssen, insbesondere auch $\bar{f}^*$. Sind z_i' und z Erzeugende von $H_n('M_i^n) \subset H_n(f^{-1}(M^n))$ [vgl. oben c)] bzw. $H_n(M^n)$, so gibt

---

10) Beweis. Nach Voraussetzung liegt M^n in R^m und trägt die induzierte Metrik. In naheliegender Weise läßt sich $\tilde{S}M^n$ so in R^{m+1} einbetten, daß die induzierte Metrik $\bar{\varrho}$ auf $\tilde{S}M^n - \{s_-, s_+\} = M^n \times R^1$ durchweg kleiner ist als ϱ. Es ist also erst recht $\bar{\varrho}(f'(x), f''(x)) < \varepsilon$ für alle $x \in S^{n+1}$. Nun folgt die Behauptung aus Satz II und III bei ALEXANDROFF-HOPF [*1*] S. 343f.

es demnach eine Linearkombination $\sum_i \gamma_i z'_i$ mit

$$\bar{f}_*\left(\sum_i \gamma_i z'_i\right) = z. \tag{1}$$

z ist durch die Orientierung von M^n festgelegt; z'_i und damit die Orientierung von $'M^n_i$ wählen wir so, daß $\gamma_i \geqq 0$ ist für alle i.

Für jedes i nehmen wir nun γ_i Exemplare von $'M^n_i$. Die Gesamtheit dieser Mannigfaltigkeiten wird in der Form M^n_j, $j=1, 2, \ldots, q$, neu durchnumeriert; d. h. jedes M^n_j ist ein $'M^n_i$, und jedes $'M^n_i$ kommt unter den M^n_j genau γ_i-mal vor. Wird

$$f^{(j)} = \bar{f}\,|\,M^n_j = f\,|\,M^n_j \tag{2}$$

gesetzt, und bezeichnet man die durch die Orientierung bestimmte Erzeugende von $H^n(M^n_j)$ mit z_j ($=z'_i$ für ein gewisses i), so kann man (1) in der Form

$$\sum_{j=1}^{q} f^{(j)}_*(z_j) = z \tag{3}$$

schreiben.

Eine einbettbare Mannigfaltigkeit $'M^n$, die sich mit dem Grade 1 auf M^n abbilden läßt, erhält man nun in der Form $'M^n = M^n_1 \oplus M^n_2 \oplus M^n_3 \oplus \cdots \oplus M^n_q$ (Summe im Sinne von 6.5). Wir werden nämlich zeigen:

A) *Man kann die Konstruktion von $M^n_1 \oplus M^n_2 \oplus \cdots \oplus M^n_q$ (vgl. 6.5) so ausführen, daß eine differenzierbare Teilmannigfaltigkeit $'M^n$ des euklidischen Raumes R^{n+1} entsteht.*

B) *Es gibt eine Abbildung $'M^n \to M^n$ vom Grade* 1.

Beweis von A). Nach Konstruktion sind die Mannigfaltigkeiten M^n_j ($='M^n_i$ für geeignetes i) einbettbar. Wir legen sie disjunkt in den R^{n+1}. Um zunächst $M^n_1 \oplus M^n_2$ zu bilden, wählen wir auf M^n_1 und M^n_2 je eine (kleine) abgeschlossene Vollkugel. Ihr Inneres sei die Zelle e^n_i ($i=1, 2$). Daß sich die Ränder von $M^n_1 - e^n_1$ und $M^n_2 - e^n_2$ überhaupt in R^{n+1} durch einen „Schlauch" $S^{n-1} \times I$ verbinden lassen, der topologisch eingelagert ist und abgesehen von seinen Randsphären, keine Punkte mit $M^n_1 \cup M^n_2$ gemeinsam hat, ist klar. Durch „Abrunden" an den Ansatzstellen sorgt man dafür, daß eine differenzierbare Mannigfaltigkeit entsteht. Um wirklich $M^n_1 \oplus M^n_2$ zu erhalten, muß man jedoch noch auf die Orientierungen achten: Wenn der Verbindungsschlauch $S^{n-1} \times I$ an M^n_2 „von außen" angesetzt wird, so wird durch die Orientierungen festgelegt, ob er an M^n_1 „von außen" oder „von innen" angesetzt werden muß. Je nachdem ob das eine oder andere der Fall ist, legen wir M^n_2 in das Außen- oder Innengebiet von M^n_1 (eventuell unter Abänderung der zuerst gewählten Einbettung). Dann sind auch die Orientierungsvorschriften erfüllt. Analog wird $(M^n_1 \oplus M^n_2) \oplus M^n_3$ aus $M^n_1 \oplus M^n_2$ und M^n_3 gebildet, und in dieser Weise fortfahrend, ganz $'M^n = M^n_1 \oplus M^n_2 \oplus \cdots \oplus M^n_q$ als differenzierbare Teilmannigfaltigkeit von R^{n+1} konstruiert.

Beweis von B). Um die Vorstellung zu fixieren, wollen wir für die Zellen, die bei der Konstruktion von

$$M_1^n \oplus M_2^n, \quad (M_1^n \oplus M_2^n) \oplus M_3^n, \quad ((M_1^n \oplus M_2^n) \oplus M_3^n) \oplus M_4^n, \ldots$$

aus

$$M_1^n, \quad M_1^n \oplus M_2^n, \quad (M_1^n \oplus M_2^n) \oplus M_3^n, \ldots$$

herausgenommen werden, disjunkte Zellen auf M_1^n wählen. Identifiziert man dann in den „Verbindungsschläuchen“ $S^{n-1} \times I$, die in $'M^n$ auftreten, jeweils die „mittlere Sphäre“ $S^{n-1} \times \frac{1}{2}$ zu einem Punkt, so entsteht ein Raum X, den man aus der topologischen Summe $M_1^n + M_2^n + \cdots + M_q^n$ dadurch erhalten kann, daß je ein Punkt $m_j \in M_j^n$ $(j = 2, 3, \ldots, q)$ mit einem gewissen Punkt $m_{1j} \in M_1^n$ identifiziert wird. $\psi : 'M^n \to X$ sei die natürliche Projektion. Setzt man $'f^{(1)} = f^{(1)}$ [vgl. (2)] und deformiert man $f^{(j)}$ in $'f^{(j)} : M_j^n \to M^n$ so, daß $'f^{(j)}(m_j) = f^{(1)}(m_{1j})$ ist $(j = 2, 3, \ldots, q)$, so induzieren die $'f^{(j)}$ zusammen $(j = 1, 2, \ldots, q)$ eine Abbildung $\varphi : X \to M^n$, definiert durch $\varphi | M_j^n = 'f^{(j)} \cdot \varphi \circ \psi : 'M^n \to M^n$ hat den Grad 1, denn sind z, z' und z_j die durch die Orientierung bestimmten Erzeugenden von $H_n(M^n)$, $H_n('M^n)$ bzw. $H_n(M_j^n) \subset H_n(X)$, so ist

$$\varphi_* \psi_*(z') = \varphi_*\Big(\sum_j z_j\Big) = \sum_j {'f_*^{(j)}}(z_j) = \sum_j f_*^{(j)}(z_j),$$

also nach (3)

$$\varphi_* \psi_*(z') = z.$$

7.3. Bemerkung. Bekanntlich bedeutet die Existenz einer Abbildung $g : 'M^n \to M^n$ vom Grade 1 eine starke Einschränkung für das Paar von Mannigfaltigkeiten $('M^n, M^n)$. Wir heben hier zwei Punkte hervor (vgl. auch 7.5 Satz 15):

A) *g induziert Epimorphismen der Homologie- und Monomorphismen der Kohomologiegruppen (mit beliebigen Koeffizientengruppen).*

Beweis. Sind $g_* : H_i('M^n, G) \to H_i(M^n, G)$, $g^* : H^i(M^n, G) \to H^i('M^n, G)$ die induzierten Homomorphismen der Homologie- bzw. Kohomologiegruppen, so gilt für alle $c \in H^i(M^n, G)$, $z' \in H_j('M^n, Z)$ (G ist irgendeine abelsche Gruppe, Z die Gruppe der ganzen Zahlen):

$$g_*\big(g^*(c) \frown z'\big) = c \frown g_*(z'). \tag{4}$$

(Vgl. Gysin [5] (5.11), das $\frown$-Produkt ist eine bilineare Abbildung $H^i(M^n, G) \times H_j(M^n, Z) \to H_{j-i}(M^n, G)$, die in gewisser Weise — s. [5] — durch die natürliche bilineare Abbildung $G \times Z \to G$ induziert wird.) Ist z' speziell die durch die Orientierung bestimmte Erzeugende von $H_n('M^n, Z)$, so ist $z = g_*(z')$ die durch die Orientierung bestimmte Erzeugende von $H_n(M^n, Z)$. Die Zuordnung $c \to c \frown z$ definiert einen Isomorphismus $H^i(M^n, G) \to H_{n-i}(M^n, G)$ (Poincaréscher Dualitätssatz, vgl. [5] § 6). Daher läßt sich jede Homologieklasse von M^n in der Form $c \frown z$ schreiben, ist also nach (4) g_*-Bild von $g^*(c) \frown z'$, d.h. g_* ist epimorph. Aus $g^*(c) = 0$ folgt $c \frown z = 0$ nach (4) und daraus $c = 0$ nach dem Poincaréschen Dualitätssatz, d.h. g^* ist monomorph.

B) *Ist $'M^n$ vom Homotopietyp der Sphäre S^n, so auch M^n.*

Beweis. Aus den Voraussetzungen folgt, daß es eine Abbildung $g': S^n \to M^n$ vom Grade 1 gibt. Ist $\tilde{M}^n$ eine Überlagerung von M^n, so läßt sich $g': S^n \to M^n$ in eine Abbildung $\tilde{g}: S^n \to \tilde{M}^n$ und die Projektion $p: \tilde{M}^n \to M^n$ zerlegen (vgl. z.B. STEENROD [*11*] 17.6). $g' = p \circ \tilde{g}$ kann nur dann den Grad 1 haben, wenn $\tilde{M}^n$ kompakt ist [denn sonst ist $H_n(\tilde{M}^n) = 0$] und p den Grad ± 1 hat. Dann ist aber $\tilde{M}^n$ keine echte Überlagerung von M^n, sondern p ist eine Homöomorphie. Daraus folgt $\pi_1(M^n) = 0$. Nach A) ist $g'_*: H_i(S^n) \to H_i(M^n)$ epimorph und wegen der speziellen Struktur von $H_i(S^n)$ sogar isomorph. Folglich ist g' eine Homotopieäquivalenz (vgl. J. H. C. WHITEHEAD [*18*] Th. 3).

7.4. Sei $H^*(X, Z_2) = \sum_{q=0}^{\infty} H^q(X, Z_2)$ der Kohomologiering mod 2 des Raumes X. Das $\smile$-Produkt liefert die multiplikative Struktur. Die Steenrodschen Quadrate $Sq^i: H^q(X, Z_2) \to H^{q+i}(X, Z_2)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ definieren additive Endomorphismen Sq^i von $H^*(X, Z_2)$ mit $Sq^0 =$ Identität und $Sq^i(H^q(X, Z_2)) = 0$ für $i > q$ [vgl. Fußnote [5]) S. 401]. Aus letzterem folgt, daß $Sq^i(c)$ für ein festes $c \in H^*(X, Z_2)$ nur für endlich viele i von 0 verschieden ist. Man kann daher den Endomorphismus $Sq = \sum_{i=0}^{\infty} Sq^i$ bilden. Die Cartansche Produktformel [*3*] (5) besagt, daß Sq auch in bezug auf die multiplikative Struktur von $H^*(X, Z_2)$ ein Endomorphismus ist.

Für jedes $c \in H^*(X, Z_2)$ bezeichne c_q den homogenen Bestandteil vom Grade q, d.h.

$$c = \sum_q c_q, \qquad c \in H^q(X, Z_2).$$

Ist $c \neq 0$ und q die kleinste Zahl mit $c_q \neq 0$, so gilt

$$(Sq(c))_q = (Sq^0(c_q))_q = c_q \neq 0;$$

folglich ist Sq monomorph.

Der Endomorphismus $1 + Sq = \sum_{i=1}^{\infty} Sq^i$ bildet $\sum_{i=q}^{\infty} H^i(X, Z_2)$ in $\sum_{i=q+1}^{\infty} H^i(X, Z_2)$ ab. Ist also $H^i(X, Z_2) = 0$ für alle $i > n$, so ist $(1 + Sq)^{n+1} = 0$. Durch Binomialentwicklung der linken Seite folgt

$$Sq \circ \sum_{\nu=1}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} (Sq)^{\nu-1} = 1$$

und damit die Epimorphie von Sq. Zusammenfassend stellen wir fest:

Für einen Raum X mit endlicher Kohomologiedimension (genauer: $H^i(X, Z_2) = 0$ für alle genügend großen i) ist Sq ein Ringautomorphismus von $H^*(X, Z_2)$.

7.5. Nach WU [*23*] läßt sich die Stiefel-Whitneysche Klasse einer Mannigfaltigkeit M^n folgendermaßen aus ihrem Kohomologiering mod 2 und dem Automorphismus Sq bestimmen:

Ist $u_i \in H^i(M^n, Z_2)$, so definiert die Zuordnung $c_{n-i} \to u_i \cup c_{n-i}$ $(c_{n-i} \in H^{n-i}(M^n, Z_2))$ einen Homomorphismus $H^{n-i}(M^n, Z_2) \to H^n(M^n, Z_2)$. Nach dem Poincareschen Dualitätssatz erhält man auf diese Weise einen Isomorphismus zwischen $H^i(M^n, Z_2)$ und der Gruppe der Homomorphismen von $H^{n-i}(M^n, Z_2)$ in $H^n(M^n, Z_2) \cong Z_2$. Sei nun u_i dasjenige Element von $H^i(M^n, Z_2)$, das dem Homomorphismus $Sq^i: H^{n-i}(M^n, Z_2) \to H^n(M^n, Z_2)$ entspricht, d.h.

$$u_i \cup c_{n-i} = Sq^i(c_{n-i}) \qquad \text{für alle } c_{n-i} \in H^{n-i}(M^n, Z_2).$$

Wir bilden $u = \sum_{i=0}^{n} u_i$, das auch durch

$$(5) \qquad (u \cup c)_n = (Sq(c))_n \qquad \text{für alle } c \in H_*(M^n, Z_2)$$

definiert werden kann. (Wie in 7.4 bezeichnet der Index n den homogenen Bestandteil vom Grade n.) Nach Wu [*23*] ist dann $w = Sq(u)$ die *Stiefel-Whitneysche Klasse von* M^n (d.h. $w = \sum_{i=0}^{n} w_i$, $w_0 = 1 =$ Einselement des Kohomologierings, $w_i =$ Stiefel-Whitneysche Klasse der Dimension i für $i > 0$).

Für eine sphärenähnliche Mannigfaltigkeit M^n ist nach 6.7 Folgerung 1:

$$(Sq(c))_n = (Sq^0(c))_n = c_n \qquad \text{für alle } c \in H_*(M^n, Z_2),$$

also nach (5)

$$u = 1 \qquad \text{und} \qquad w = Sq(u) = 1.$$

Das zeigt:

Satz 13. *Die Stiefel-Whitneysche Klasse w einer sphärenähnlichen Mannigfaltigkeit ist trivial* (*d.h.* $w = w_0 = 1$, $w_i = 0$ *für* $i > 0$).

Insbesondere verschwinden für sphärenähnliche Mannigfaltigkeiten alle Stiefel-Whitneyschen „Zahlen", d.h. alle Elemente von $H^n(M^n, Z_2) \cong Z_2$, die sich im Kohomologiering $H^*(M^n, Z_2)$ als Polynome in den Stiefel-Whitneyschen Klassen w_i darstellen lassen. Nach Thom [*15*] Th. IV.10 folgt daraus:

Satz 14. *Jede sphärenähnliche Mannigfaltigkeit ist* (*im Sinne von* Thom [*15*] IV. 1) *Rand mod 2 einer geeigneten berandeten Mannigfaltigkeit.*

Satz 13 hätte man statt aus 6.7 auch aus 7.2 Satz 12 folgern können: Die Stiefel-Whitneysche Klasse einer einbettbaren Mannigfaltigkeit ist nämlich trivial[11]), und es gilt:

Satz 15. *Gibt es eine Abbildung $g: {}'M^n \to M^n$ vom Grade 1 und ist die Stiefel-Whitneysche Klasse w' von ${}'M^n$ trivial, so auch die von M^n.*

[11]) Beweis. Sei M^n eine differenzierbare Teilmannigfaltigkeit von R^{n+1}, $w \in H^*(M^n, Z_2)$ ihre Stiefel-Whitneysche Klasse und $\bar{w} \in H^*(M^n, Z_2)$ die Whitneysche Klasse des Faserraums der Normalenvektoren von M^n in R^{n+1}. Da dieser Faserraum trivial ist, gilt $\bar{w} = 1$. Nach der Whitneyschen Dualitätsformel (s. Wu [*22*] Th. II) ist $w \cup \bar{w} = w$ die Whitneysche Klasse des Faserraums der Tangentenvektoren von R^{n+1}, eingeschränkt auf M^n. Dieser ist ebenfalls trivial, also $w = 1$.

Beweis. Nach der beschriebenen Konstruktion von WU ist $w' = Sq(u')$, wobei u' durch eine zu (5) analoge Formel in $'M^n$ definiert ist. Aus der Voraussetzung $w' = 1$ folgt $u' = 1$, weil Sq ein Automorphismus ist (7.4); also

(6) $$\big(Sq(c')\big)_n = (u' \cup c')_n = c'_n \qquad \text{für alle } c' \in H^*('M^n, Z_2).$$

$H^*(M^n, Z_2)$ wird nach 7.3.A) durch g^* monomorph in $H^*('M^n, Z_2)$ abgebildet, man kann also $H^*(M^n, Z_2)$ mittels g^* als Unterring in $H^*('M^n, Z_2)$ einbetten. Weil die Sq^i Kohomologieoperationen sind (vgl. 6.7), ist Sq mit dieser Einbettung verträglich, und aus (6) folgt insbesondere

$$\big(Sq(c)\big)_n = c_n \qquad \text{für alle } c \in H^*(M^n, Z_2).$$

Bei der Berechnung der Stiefel-Whitneyschen Klasse w von M^n nach der Wuschen Methode ergibt sich also $u = 1$ [vgl. (5)] und $w = Sq(u) = 1$.

7.6. Das Postnikow-Quadrat $\mathfrak{p}_0 : H^1(P^3, G) \to H^3\big(P^3, \Gamma(G)\big)$, das in 6.8 ein Kriterium für die Sphärenähnlichkeit dreidimensionaler Pseudomannigfaltigkeiten P^3 lieferte (Satz 10), hängt im Spezialfall einer Mannigfaltigkeit $P^3 = M^3$ eng mit den Verschlingungszahlen zusammen. Wir beschränken uns auf den Fall $G = Z_m$ mit geradem m, was durch 6.9 gerechtfertigt wird.

Zunächst eine allgemeine Vorbemerkung (für die m nicht gerade zu sein braucht): Die exakte Folge

$$0 \to Z \to Z \to Z_m \to 0,$$

bei der die Injektion $Z \to Z$ durch Multiplikation mit m gebildet wird, induziert für jeden Raum X exakte Folgen der Homologie- bzw. Kohomologiegruppen, in denen die Rand- bzw. Korandhomomorphismen

$$\partial_m : H_i(X, Z_m) \to H_{i-1}(X, Z)$$
$$\delta_m : H^i(X, Z_m) \to H^{i+1}(X, Z)$$

auftreten. Wird $a \in H_i(X, Z_m)$ durch die ganzzahlige Kette $\tilde{a}$ mit $\partial \tilde{a} = m\tilde{b}$ (d.h. $\tilde{a}$ ist ein Zykel mod m) repräsentiert, so ist $\partial_m(a)$ die Homologieklasse von $\tilde{b}$. Entsprechendes gilt für δ_m.

Nun sei m gerade und $a \in H^q(X, Z_m)$, repräsentiert durch die ganzzahlige Kokette $\tilde{a}$ mit $\delta\tilde{a} = m\tilde{b}$. Dann ist $\mathfrak{p}_0(a) \in H^{2q+1}(X, Z_{2m})$ die Kohomologieklasse von $\tilde{a} \cup \delta\tilde{a} = m(\tilde{a} \cup \tilde{b})$ (vgl. 6.9). Andererseits ist $a \cup \delta_m(a) \in H^{2q+1}(X, Z_m)$[12] die Kohomologieklasse von $\tilde{a} \cup \tilde{b}$. Ist $\mu : Z_m \to Z_{2m}$ die Multiplikation mit m und wird

$$\mu_* : H^i(X, Z_m) \to H^i(X, Z_{2m})$$

durch μ induziert, so gilt also

(7) $$\mathfrak{p}_0(a) = \mu_*\big(a \cup \delta_m(a)\big).$$

[12] Hier wird das $\cup$-Produkt einer Kohomologieklasse mod m mit einer ganzzahligen Kohomologieklasse gebildet. Dem liegt die natürliche Paarung $Z_m \times Z \to Z_m$ in den Koeffizientengruppen zugrunde.

Falls $X = M^3$ eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit ist, läßt sich der Ausdruck $a^1 \smile \delta_m(a^1)$, $a^1 \in H^1(M^3, Z_m)$ leicht dualisieren und führt dann zu den Verschlingungszahlen. Bei den Isomorphismen $\mathfrak{d}: H^i(M^3, Z) \to H_{3-i}(M^3, Z)$ bzw. $\mathfrak{d}: H^i(M^3, Z_m) \to H_{3-i}(M^3, Z_m)$ des Poincaréschen Dualitätssatzes gehen $\smile$-Produkte in Schnitte von Homologieklassen (vgl. GYSIN [5] (6.11)) und δ_m geht in ∂_m über (denn benutzt man zur Berechnung der Homologie- und Kohomologiegruppen duale Zellteilungen von M^3, so ist der Randoperator ∂ dem Korandoperator δ dual). Folglich ist

$$\mathfrak{d}\left(a^1 \smile \delta_m(a^1)\right) = \mathfrak{S}\left(\mathfrak{d}(a^1), \partial_m \mathfrak{d}(a^1)\right) \cdot c_0, \quad a^1 \in H^1(M^3, Z_m). \tag{8}$$

Mit $\mathfrak{S}$ bezeichnen wir die Schnittzahl sowohl von Ketten als auch von Homologieklassen. In (8) handelt es sich um die Schnittzahl zwischen einer Homologieklasse mod m und einer ganzzahligen Homologieklasse; das Ergebnis ist also eine Zahl mod m. c_0 ist die Homologieklasse mod m eines Punktes von M^3. Ist c^3 die durch die Orientierung bestimmte Erzeugende von $H^3(M^3, Z_m)$, so gilt $\mathfrak{d}(c^3) = c_0$, und aus (8) folgt weiter

$$a^1 \smile \delta_m(a^1) = \mathfrak{S}\left(\mathfrak{d}(a^1), \partial_m \mathfrak{d}(a^1)\right) \cdot c^3, \quad a^1 \in H^1(M^3, Z_m). \tag{9}$$

Zu zwei Elementen $a_1, b_1 \in H_1(M^3, Z)$ mit endlicher Ordnung gehört eine *Verschlingungszahl* $\mathfrak{V}(a_1, b_1)$. Sie ist eine rationale Zahl mod 1 und wird folgendermaßen definiert: Seien $\tilde{a}_1, \tilde{b}_1$ punktfremde (singuläre) Zykel, die a_1 bzw. b_1 repräsentieren, und sei $\partial \tilde{a}_2 = m\,\tilde{a}_1$. (Weil a_1 endliche Ordnung haben sollte, gibt es eine 2-Kette $\tilde{a}_2$ und eine ganze Zahl m mit dieser Eigenschaft.) Dann wird

$$\mathfrak{V}(a_1, b_1) \equiv \frac{1}{m} \cdot \mathfrak{S}(\tilde{a}_2, \tilde{b}_1) \bmod 1 \tag{10}$$

gesetzt, und man zeigt, daß $\mathfrak{V}(a_1, b_1)$ mod 1 von den getroffenen Auswahlen unabhängig ist (vgl. SEIFERT-THRELFALL [9] § 77). Ist $a_2 \in H_2(M^3, Z_m)$ die Homologieklasse mod m von $\tilde{a}_2$, so gilt $\partial_m(a_2) = a_1$ nach Definition von ∂_m, also kann man (10) auch in der Form

$$\mathfrak{V}\left(\partial_m(a_2), b_1\right) \equiv \frac{1}{m} \cdot \mathfrak{S}(a_2, b_1) \bmod 1 \tag{11}$$

schreiben. Damit geht (9) über in

$$a^1 \smile \delta_m(a^1) = m \cdot \mathfrak{V}\left(\partial_m \mathfrak{d}(a^1), \partial_m \mathfrak{d}(a^1)\right) \cdot c^3, \quad a^1 \in H^1(M^3, Z_m). \tag{12}$$

Zusammen mit (7) stellt das eine Beziehung zwischen dem Postnikow-Quadrat und der „*Eigenverschlingung*" von Elementen aus $H_1(M^3, Z)$ her. Im Hinblick auf das genannte Kriterium für die Sphärenähnlichkeit einer dreidimensionalen Pseudomannigfaltigkeit (6.8 Satz 10, 6.9 Satz 11) formulieren wir ausdrücklich:

Satz 16. *Für eine Mannigfaltigkeit M^3 verschwindet das Postnikow-Quadrat*

$$\mathfrak{p}_0(Z_{2^k}): H^1(M^3, Z_{2^k}) \to H^3(M^3, Z_{2^{k+1}})$$

genau dann, wenn für die Eigenverschlingung $\mathfrak{V}(a_1, a_1)$ der Elemente $a_1 \in H_1(M^3, Z)$ mit endlicher Ordnung gilt:

(13) $2^{k-1} \cdot \mathfrak{V}(a_1, a_1) \equiv 0 \bmod 1$ für alle $a_1 \in H_1(M^3, Z)$ mit $2^k \cdot a_1 = 0$.

[Man beachte: $2^k \cdot \mathfrak{V}(a_1, a_1) \equiv 0 \bmod 1$ ist für die in (13) betrachteten Elemente a_1 immer erfüllt, weil man bei der Definition (10) von $\mathfrak{V}(a_1, a_1)$ $m = 2^k$ nehmen kann.]

Beweis von Satz 16. $\mathfrak{p}_0(a_1) \in H^3(M^3, Z_{2^{k+1}})$ verschwindet nach (7) genau dann, wenn

(14) $$a^1 \cup \delta_m(a^1) \equiv 0 \bmod 2 \qquad (m = 2^k)$$

ist, denn $\mu_*: H^3(M^3, Z_{2^k}) = Z_{2^k} \to H^3(M^3, Z_{2^{k+1}}) = Z_{2^{k+1}}$ ist die Multiplikation mit $m = 2^k$. (14) ist nach (12) mit

$$2^{k-1} \cdot \mathfrak{V}\left(\partial_m \mathfrak{d}(a^1), \partial_m \mathfrak{d}(a^1)\right) \equiv 0 \bmod 1$$

äquivalent. Es genügt daher zu zeigen, daß $\partial_m \mathfrak{d}(a^1)$ genau die Elemente $a_1 \in H_1(M^3, Z)$ mit $m \cdot a = 0$ durchläuft. Das ergibt sich aber sofort aus der Definition von ∂_m, wenn man berücksichtigt, daß $\mathfrak{d}$ ein Isomorphismus ist.

7.7. HANTZSCHE gibt in [6] Satz 4 eine notwendige Bedingung für die Einbettbarkeit einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit M^3 in den euklidischen Raum R^4 an:

M^3 ist höchstens dann einbettbar, wenn die Torsionsgruppe von $H_1(M^3, Z)$ direkte Summe zweier isomorpher Gruppen ist.

Daraus folgt, daß die dreidimensionalen Linsenräume (p, q) $\left(\text{vgl. SEIFERT-THRELFALL [9] S. 210; } p, q \text{ sind teilerfremde natürliche Zahlen mit } 0 \leqq q \leqq \frac{p}{2}\right)$ nicht einbettbar sind, denn $H_1\left((p, q), Z\right)$ ist zyklisch von der Ordnung p. Die Linsenräume (p, q) mit ungeradem p sind aber sphärenähnlich: Das Postnikow-Quadrat $\mathfrak{p}_0(Z_{2^k}): H^1\left((p, q), Z_{2^k}\right) \to H^3\left((p, q), Z_{2^{k+1}}\right)$ verschwindet in ihnen für jedes k, weil $H^1\left((p, q), Z_{2^k}\right) = 0$ ist. Nach 6.9 Satz 11 verschwindet $\mathfrak{p}_0(G)$ dann auch für jede andere Koeffizientengruppe G, und daraus folgt die Sphärenähnlichkeit (6.8 Satz 10). Es gibt also sphärenähnliche Mannigfaltigkeiten, die nicht einbettbar sind.

Die Linsenräume (p, q) mit geradem p sind dagegen auch nicht sphärenähnlich: Für ein erzeugendes Element b von $H_1\left((p, q), Z\right)$ gilt $\mathfrak{V}(b, b) \equiv \pm \frac{q}{p} \bmod 1$ (s. [9] S. 279). Ist $p = 2^k \cdot r$, $r =$ ungerade und $a = r \cdot b$, so folgt

$$2^{k-1} \cdot \mathfrak{V}(a, a) \equiv \pm 2^{k-1} \cdot \frac{r^2 \cdot q}{p} \equiv \pm \frac{r \cdot q}{2} \not\equiv 0 \bmod 1$$

(weil q ungerade ist). Andererseits ist $2^k \cdot a = p \cdot b = 0$, also kann $\mathfrak{p}_0(Z_{2^k})$ nicht verschwinden (7.6 Satz 16) und der Linsenraum (p, q) nicht sphärenähnlich sein (6.8 Satz 10). Auch die Summe M^3 zweier Linsenräume (p, q) und (p, q') mit geradem p (Summe im Sinne von 6.5) ist nicht sphärenähnlich

(6.5 Satz 7) und daher nicht einbettbar (7.1). Die Bedingung von HANTZSCHE ist dagegen für M^3 erfüllt. Man gewinnt also aus unseren Untersuchungen notwendige Bedingungen für Einbettbarkeit, die in manchen Fällen schärfer sind als die von HANTZSCHE. (Allerdings wird bei HANTZSCHE nicht vorausgesetzt, daß es sich um differenzierbare Mannigfaltigkeiten und differenzierbare Einbettungen handeln soll.)

Literatur

[1] ALEXANDROFF, P., u. H. HOPF: Topologie. Berlin: Springer 1935. — [2] BOURBAKI, N.: Topologie générale, Chap. I: Structures topoligiques, 2. Aufl. Paris 1951. — [3] CARTAN, H.: Une theorie axiomatique des carrés de Steenrod. C. R. Acad. Sci. Paris **230**, 425—427 (1950). — [4] FOX, R. H.: Homotopy groups and torus homotopy groups. Ann. of Math. **49**, 471—510 (1948). — [5] GYSIN, W.: Zur Homologietheorie der Abbildungen und Faserungen von Mannigfaltigkeiten. Comment. Math. Helv. **14**, 61—122 (1941/42). — [6] HANTZSCHE, W.: Einlagerung von Mannigfaltigkeiten in euklidische Räume. Math. Z. **43**, 38—58 (1938). — [7] PUPPE, D.: Zur Homotopie von Abbildungen eines Polyeders. Math. Z. **61**, 303—323 (1954). — [8] PUPPE, D.: Homotopiemengen und ihre induzierten Abbildungen I. Math. Z. **69**, 299—344 (1958). — [9] SEIFERT, H., u. W. THRELFALL: Lehrbuch der Topologie. Leipzig: Teubner 1934. — [10] STEENROD, N. E.: Products of cocycles and extensions of mappings. Ann. of Math. **48**, 290—320 (1947). — [11] STEENROD, N. E.: The topology of fibre bundles. Princeton University Press 1951. — [12] STEENROD, N. E.: Reduced powers of cohomology classes. Ann. of Math. **56**, 47—67 (1952). — [13] STEENROD, N. E.: Homology groups of symmetric groups and reduced power operations. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 213—217 (1953). — [14] STEENROD, N. E.: Cyclic reduced powers of cohomology classes. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **39**, 217—223 (1953). — [15] THOM, R.: Quelques propriétés globales des variétés differentiables. Comment. Math. Helv. **28**, 17—86 (1954). — [16] WHITEHEAD, G. W.: On mappings into group-like spaces. Comment. Math. Helv. **28**, 320—328 (1954). — [17] WHITEHEAD, J. H. C.: On C^1-complexes. Ann. of Math. **41**, 807—824 (1940). — [18] WHITEHEAD, J. H. C.: Combinatorial homotopy I. Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 213—245 (1949). — [19] WHITEHEAD, J. H. C.: A certain exact sequence. Ann. of Math. **52**, 51—110 (1950). — [20] WHITEHEAD, J. H. C.: On the theory of obstructions. Ann. of Math. **54**, 68—84 (1951). — [21] WHITNEY, H.: The maps of an n-complex into an n-sphere. Duke Math. J. **3**, 51—55 (1937). — [22] WU WEN-TSÜN: On the product of sphere-bundles and the duality theorem modulo two. Ann. of Math. **49**, 641—653 (1948). — [23] WU WEN-TSÜN: Classes caractéristiques et i-carrés d'une variété. C. R. Acad. Sci. Paris **230**, 508—509 (1950).

Mathematisches Institut der Universität Heidelberg

(Eingegangen am 4. September 1957)