双三次 B 样条插值曲面*

方 逵
(长沙大学教学与计算机系，长沙，410003)

摘要 本文研究三次 B 样条插值曲面。对于给定的拓扑网格点阵 $P_{i,j}$，导出了其插值三次 B 样条曲面的控制顶点，每四个顶点 $P_{i,j}$，$P_{i+1,j}$，$P_{i,j+1}$，$P_{i+1,j+1}$ 由九个三次 B 样条曲面片构成，整个曲面是 C^2 连续的，最后，给出了一个数值实例。

关键词 CAGO 三次 B 样条曲面 插值

1. 引 言

曲面插值在计算机辅助几何设计中有着广泛的应用，它是曲面造型的一种重要方法。目前曲面插值有多种方法，比较典型的有分块 Bēzier 插值曲面[1]，三角曲面片拼接[2-3]，三次 B 样条插值曲面[4]等。三次 B 样条插值曲面一般必须通过反算控制顶点来实现，且曲面的局部形状控制很困难。本文利用均匀三次 B 样条曲线的端点性质，直接计算三次 B 样条曲面的控制顶点使曲面插值型值点，该方法可局部修改，且曲面无需求解大型的矢量方程，从而计算费用小，曲面实现方便，数值实例表明本文的方法是有效的。

2. 双三次 B 样条曲面插值

给定 $(n+1)\times(m+1)$ 个空间点阵 $\vec{r}_{ij}$ $(i=0,1,\cdots,n_j;\ j=0,1,\cdots,m)$，双三次 B 样条曲面可分块表示为

$$\vec{r}_{l,k}(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}E_{i,3}(u)E_{j,3}(v)r_{(i+l)(j+k)},$$
$$0\leqslant u,v\leqslant 1,\ l=0,1,\cdots,n-3,\ k=0,1,\cdots,m-3 \tag{2.1}$$

其中 基函数为

$$E_{0,3}(t)=(-t^3+3t^2-2t+1)/3!,$$
$$E_{1,3}(t)=(3t^3-6t^2+4)/3!,$$
$$E_{2,3}(t)=(-3t^3+2t^2+3t+1)/3!,$$
$$E_{3,3}(t)=t^3/3!$$

变量 t 可用 u 或 v 代替，这里 $\vec{r}_{ij}$ 称为 deBoor 点。

---

* 湖南省教育厅科研课题资助项目(00C022)
蔡海涛教授推荐
收稿日期：2001 年 2 月 5 日

由方程(2. 1)式易知, 三次 B 样条曲面块的四条边界曲线为

$$\left.\begin{aligned}
\vec{r}_{l,k}(0,v)&=\frac{1}{6}\sum_{j=0}^{3}E_{j,3}(v)\left(\vec{r}_{e(j+k)}+4\vec{r}_{(l+1)(j+k)}+\vec{r}_{(l+2)(j+k)}\right)\\
\vec{r}_{l,k}(1,v)&=\frac{1}{6}\sum_{j=0}^{3}E_{j,3}(v)\left(\vec{r}_{(l+1)(j+k)}+4\vec{r}_{(l+2)(j+k)}+\vec{r}_{(l+3)(j+k)}\right)\\
\vec{r}_{l,k}(u,0)&=\frac{1}{6}\sum_{j=0}^{3}E_{i,j}(u)\left(\vec{r}_{i+e)k}+4\vec{r}_{(i+e)(k+1)}+\vec{r}_{i+l)(K+2)}\right)\\
\vec{r}_{l,k}(u,1)&=\frac{1}{6}\sum_{j=0}^{3}E_{i,j}(u)\left(\vec{r}_{(i+l)(k+1)}+4\vec{r}_{(i+l)(k+2)}+\vec{r}_{(i+e)(k+3)}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{2. 2}$$

若给定空间型值点阵 $\vec{V}_{Pq}(P=0,\ l,\ \cdots,\ n;\ q=0,1,\ \cdots,\ m)$直接代入方程(2. 1)式, 因 B 样条曲面无插值性, 所以三次 B 样条曲面无法插值 $\vec{V}_{ij}$。为了构造三次 B 样条插值曲面, 本文采用扩充 DeBoor 点的方法来实现, 首先扩充端点, 定义:

$$\begin{aligned}
&V_{(-1)j}=V_{0j}+(V_{0j}-2V_{1j}+V_{2j})/4,\\
&V_{(n+1)j}=V_{nj}+(V_{(n-2)j}-2V_{n-1)j}+V_{nj})/4,\qquad j=0,1,\cdots,m,
\end{aligned}\tag{2. 3}$$

$$\begin{aligned}
&V_{i(-1)}=V_{io}+(V_{io}-2V_{i1}+V_{i2})/4,\\
&V_{i(n+1)}=V_{in}+(V_{i(n-2)}-2V_{i(n-1)}+V_{in})/4,\qquad i=0,1,\cdots,n,
\end{aligned}\tag{2. 4}$$

接着沿 u 方向定义 deBoor 点($P=0,1,\ \cdots,\ n$)

$$\left.\begin{aligned}
r_{(3P)(3q)}&=V_{Pq},\\
r_{(3P)(3q-1)}&=V_{Pq}-\lambda_{Pq}T^{u}_{Pq},\\
r_{(3P)(3q+1)}&=V_{Pq}+\lambda_{Pq}T^{u}_{Pq},
\end{aligned}\right\}\quad q=0,1,\cdots,m\tag{2. 5}$$

其中　$T^{u}_{Pq}=(V_{P(q+1)}-V_{P(q-1)})/|V_{P(q+1)}-V_{P(q-1)}|$, λ_{Pq}是大于零的调节参数。

沿 V 方向定义 deBoor 点($q=0,1,\ \cdots,\ m$):

$$\begin{aligned}
&r_{(3P)q}=V_{pq},\\
&r_{(3P-1)q}=V_{Pq}-U_{Pq}T^{v}_{Pq},\ P=0,1,\cdots,n\\
&r_{(3P+1)q}=V_{Pq}+U_{Pq}T^{v}_{Pq},
\end{aligned}\tag{2. 6}$$

其中　$T^{v}_{Pq}=(V_{(P+1)q}-V_{(P-1)q}/|V_{(P+1)q}-V_{(P-1)q}|$, U_{Pq}是大于零的调节参数。

由此可知: 以 $r_{ij}(i=-1,0,1,\ \cdots,3n,3n+1;j=-1,0,1,\ \cdots,3m,3m+1)$为 deBoor 点的三次 B 样条曲面为:

$$\begin{aligned}
&\vec{r}_{l,k}(U,V)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}E_{i,3}(u)E_{j,3}(u)r_{(i+l-1)(j+k-1)},\\
&0\leqslant u,\ V\leqslant 1,\ l=0,1,\cdots,3n-1,\ k=0,1,\cdots,3m-1,
\end{aligned}\tag{2. 7}$$

下面证明三次 B 样条曲面插值 V_{ij}. 对 $P=0,1,\ \cdots,\ n$, 由方程(2. 2)以及(2. 5)易知:

$$r_{l,3q}(u,1)=\sum_{i=0}^{3}E_{i,3}(u)r_{(i+l-1)3q},\qquad q=1,2,\cdots,m,$$

同理可得:

$$r_{(3P)(3q)}(1,1)=r_{(3P)(3q)}=V_{Pq},\qquad P=0,1,\cdots,n;\ q=0,1,\cdots,m\tag{2. 8}$$

由上证明了 $\vec{r}_{l,k}(u,v)$插值所有型值点阵 V_{Pq}。

3. 数值例子

众所周知, 构造复合的 C^2 连续插值曲面是比较困难的, 例如用反算法计算分段双三次 B 样条曲面计算费用大, 曲面缺乏局部性。本文构造的曲面比较方便, 计算费用小, 曲面可以作局部修改。图 1 即为用本文方法绘制的插值曲面图形。

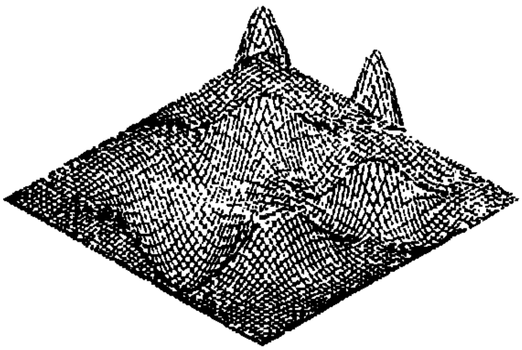

图 1

参 考 文 献

[1] Bohm, W., A Survey of Curve and Surface Methods in CAGD, CAGD, 1984, 1(1): 1—60

[2] Barnhill, R. E., Birkhoff, G. & Gordon, W. J., Smooth Interpolation in Triangles, J. Approximation Theory. 1973, 8: 114—128

[3] 方逵, 刘杰, 任意三角形域上的一种 C^2 插值方法, 计算数学, 1993, 15(4): 456—461

[4] 方逵等, 计算机辅助几何设计, 河北教育出版社, 1994

[5] Barsky, B. A. & Greenberg, D. P., Determining a set of B— spline control vertices to Gernerate an Interpolation surface, Comput. Graphics and Image processing, 1980, 14: 203—226

BICUBIC B— SPLINE INTERPOLATION SURFACE

Fang Kui

(Department of Mathematics & computer, changsha University, Changsha, 410003)

Abstract In this paper, bicubic interpolation surfaces are discussed. For given net points matrix $P_{i,j}$, the four vertice points $P_{i,j}$, $P_{i+1,j}$, $P_{i,j+1}$, $P_{i+1,j+1}$, the composited interpolation surface is constructed by 9 bicubic B— spline surface patches. The interpolation surface is C^2— Continuons. Finally, a numerical example is given.

Key words CAGO, Interpolation; Bicubic B— spline surface