Übung 12

Ausgabe: 08.07.2014, Abgabe: 15.07.2014, Besprechung: 17./18.07.2014

12.1 Wasserstomatom im Magnetfeld

Das Elektron im H-Atom befinde sich in dem Eigenzustand $|n\,l\,m_l\,m_s\rangle$ mit dem Energieeigenwert E_n.

1. Wie ändern sich Eigenzustand und Eigenwert, wenn man ein konstantes Magnetfeld B in z-Richtung anlegt? Spin-Bahn-Wechselwirkung und diamagnetische Anteile sollen unberücksichtigt bleiben.
2. Wie hoch sind die Entartungsgrade vor und nach dem Einschalten des Feldes?

12.2 Zylindersymmetrisches Potential

Es sei ein Teilchen ohne Spin in einem zylindersymmetrischen Potential $V(\rho)$ gegeben. Die Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) sind definiert über $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, wobei $\rho \geq 0$ und $0 \leq \varphi < 2\pi$.

In Zylinderkoordinaten gilt weiterhin für den Laplace-Operator:

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
$$\equiv -\frac{1}{\hbar^2}\left(\hat{p}_\rho^2 + \hat{p}_z^2 + \frac{1}{\rho^2}\hat{L}_z^2\right),\ \hat{L}_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}\,.$$

1. Zeigen Sie, dass der entsprechende Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{\rho})$ mit $\hat{L}_z$ und $\hat{p}_z$ vertauscht. Begründen Sie damit den Ansatz
$$\Phi_{nmk}(\rho, \varphi, z) = f_{nm}(\rho)\,\mathrm{e}^{im\varphi}\mathrm{e}^{ikz}$$
für die stationären Zustände des Teilchens. Welche Werte nehmen m und k an?
2. Leiten Sie aus der Eigenwertgleichung $\hat{H}\Phi = E\Phi$ eine Differentialgleichung für $f_{nm}(\rho)$ her.
3. Sei $\hat{\Sigma}_y$ der Operator, der in der Ortsdarstellung einer Spiegelung an der xz-Ebene entspricht. Kommutieren die Operatoren $\hat{\Sigma}_y$ und $\hat{H}$? Zeigen Sie, dass $\hat{\Sigma}_y$ und $\hat{L}_z$ antikommutieren, und dass der Zustand $\hat{\Sigma}_y|\Phi_{nmk}\rangle$ ein Eigenvektor von $\hat{L}_z$ ist. Welches ist der entsprechende Eigenwert?

12.3 Virialtheorem für den sphärischen, harmonischen Oszillator

Betrachten Sie den sphärischen, harmonischen Oszillator mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega\hat{r}^2 \tag{1}$$

1. Berechnen Sie den Kommutator $\frac{i}{\hbar}[H, \hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{p}}]$
2. Zeigen Sie, dass $\langle\Psi|[H, \hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{p}}]|\Psi\rangle = 0$ für einen Eigenzustand $|\Psi\rangle$ des Hamiltonian gilt.
3. $\langle T\rangle = \langle\Psi|T|\Psi\rangle$ und $\langle V\rangle = \langle\Psi|V|\Psi\rangle$ seien die Erwartungswerte der kinetischen Energie T und der potentiellen Energie V. Zeigen Sie das sogenannte 'Virialtheorem'
$$\langle T\rangle - \langle V\rangle = 0 \tag{2}$$