physik421 - Übung 10

Lino Lemmer
l2@uni-bonn.de

Frederike Schrödel

Simon Schlepphorst
s2@uni-bonn.de

1. Juli 2014

10.1 Spinmatrizen

Gegeben sind die drei Pauli-Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

10.1.1 Eigenschaften

$$\begin{aligned}
\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\
&= 0 \\
\sigma_x^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \mathbb{1} \\
\sigma_y^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \mathbb{1} \\
\sigma_z^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \mathbb{1} \\
\sigma_x\sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\
&= i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= i\sigma_z
\end{aligned}$$

10.1.2 Eigenzustände und Eigenwerte von σ_z

Zunächst die Eigenwerte:

$$
\begin{aligned}
& \det\left(\sigma_z - \lambda_\pm \mathbb{1}\right) = 0 \\
\iff \quad & \begin{vmatrix} 1-\lambda_\pm & 0 \\ 0 & -1-\lambda_\pm \end{vmatrix} = 0 \\
\iff \quad & \left(1-\lambda_\pm\right)\left(-1-\lambda_\pm\right) = 0 \\
\iff \quad & \lambda_\pm^2 - 1 = 0.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgen direkt die Eigenwerte: $\lambda_+ = 1$ und $\lambda_- = -1$. Nun die Eigenzustände. Beginnen wir mit $|+\rangle$:

$$
\begin{aligned}
& \sigma_z \,|+\rangle = \lambda_+ \,|+\rangle \\
\iff \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} |+\rangle = 1\,|+\rangle\,.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt offensichtlich

$$
|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Nun $|-\rangle$:

$$
\begin{aligned}
& \sigma_z \,|-\rangle = \lambda_- \,|-\rangle \\
\iff \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} |-\rangle = -1\,|-\rangle \\
\implies \quad & |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

10.1.3 Eigenwerte und Eigenzustände von σ_x und σ_y

$$
\begin{aligned}
& \det\left(\sigma_x - \lambda_\pm \mathbb{1}\right) = 0 \\
\iff \quad & \begin{vmatrix} -\lambda_\pm & 1 \\ 1 & -\lambda_\pm \end{vmatrix} = 0 \\
\iff \quad & \lambda_\pm^2 - 1 = 0 \\
\iff \quad & \lambda_\pm^2 = 1
\end{aligned}
$$

Es ergeben sich die gleichen Eigenwerte, wie für σ_z. Nun überprüfen wir, ob σ_x auch die gleichen Eigenzustände besitzt:

$$\begin{aligned}
\sigma_x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&\neq 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\sigma_x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\neq -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

Warum findet ihr nicht die richtige Eigenfunk[tionen] von σ_x und σ_y

σ_x hat demnach andere Eigenzustände als σ_z.
Nun überprüfen wir σ_y:

$$\begin{aligned}
& \det\left(\sigma_y - \lambda_\pm \mathbb{1}\right) = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \begin{vmatrix} -\lambda_\pm & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -\lambda_\pm \end{vmatrix} = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \lambda_\pm^2 - 1 = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & \lambda_\pm^2 = 1
\end{aligned}$$

Es ergeben sich die gleichen Eigenwerte, wie für σ_z. Nun überprüfen wir, ob σ_y auch die gleichen Eigenzustände besitzt:

$$\begin{aligned}
\sigma_y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&\neq 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\sigma_y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\neq -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$\checkmark$

auch σ_y besitzt also nicht die gleichen Eigenzustände, wie σ_z.

10.1.4

Hier ist die Unbestimmtheitsrelation $\Delta\sigma_i \Delta\sigma_j \geq \left|\left\langle\left[\sigma_i, \sigma_j\right]\right\rangle\right|$ für die drei Paulimatrizen zu zeigen.

$\Delta\sigma_x \cdot \Delta\sigma_y \geq |\langle[\sigma_x, \sigma_y]\rangle|_3 = |\langle\sigma_z\rangle|$

10.2 Lamor Präzession

10.3 Zwei Spin-1/2 Teilchen

10.3.1

Es sollen die gemeinsamen Eigenzustände $|S_1 S_2; S m_s\rangle$ des Gesamtspinoperators $\hat{S} = \hat{S}_1 + \hat{S}_2$, dessen z-Komponenten $\hat{S}_z$ und $\hat{S}_1^2$, $\hat{S}_2^2$.

Wenn man S^2 in der Basis $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$ und $|--\rangle$ ausdrückt, erhält man:

$$S^2 = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Um an die Eigenzustände zu kommen bestimmt man zuerst die Eigenwerte. Nach einigen rechnen erhält man drei mal den Eigenwert $2\hbar$ und ein mal 0. Aus $\lambda = 2$ und $\lambda = 0$ erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |++\rangle = |11\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle) = |10\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |--\rangle = |1-1\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle \quad = |00\rangle$$

Dies ist unsere neue Basis.

10.3.2

$$S^2 = (S_1 + S_2)^2 \implies S_1 \cdot S_2 = \frac{1}{2}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right)$$

Die Eigenzustände $\left|S_1 S_2; S m_S\right\rangle$ sind gemeinsame Eigenzustände der Operatoren S^2, S_z, S_1^2, S_2^2 und damit auch zu $S_1 \cdot S_2$:

$$S_1 S_2 \left|1 m_S\right\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(2 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)\left|l m_S\right\rangle = \frac{1}{4}\hbar^2 \left|1 m_S\right\rangle$$

Eigenwert: $1/4\hbar^2$

$$S_1 S_2 \left|00\right\rangle = \frac{\hbar^2}{2}\left(0 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)\left|00\right\rangle = -\frac{3}{4}\hbar^2 \left|00\right\rangle$$

Eigenwert: $-(3/4)\hbar^2$

10.3.3

P ist hermitisch, da die Spinoperatoren S_1 und S_2 hermitisch sind und miteinander vertauschen. Ferner gilt:

$$P\left|1 m_S\right\rangle = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)\left|1 m_S\right\rangle = \left|1 m_S\right\rangle$$
$$P\left|00\right\rangle = \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\right)\left|00\right\rangle = 0$$
$$\Longrightarrow P^2\left|S m_S\right\rangle = P\left|S m_S\right\rangle$$

P projeziert auf den Unterraum der Triplettzustände $\left|1 m_S\right\rangle$.

10.4 Gesamtdrehimpuls des Elektrons

10.4.1

Es soll gezeigt werden, dass für die Quantenzahl j nur die Werte $l + (1/2)$ und $l - (1/2)$ möglich sind.

$$\left|l - \frac{1}{2}\right| \leq j \leq l + \frac{1}{2}$$
$$l = 0 \Longrightarrow j = \frac{1}{2}$$
$$l \geq 1 \Longrightarrow j = 1 + \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2}$$

10.4.2

Beweis durch vollständige Induktion, beginnend mit $\left|l + 1/2 m_j\right\rangle$.
Für $m_j = l + 1/2$ gilt:

$$\left|l + \frac{1}{2}\ l + \frac{1}{2}\right\rangle = \left|l l\right\rangle\left|+\right\rangle \qquad \text{mit } \left|+\right\rangle = \left|\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right\rangle$$

Für $m_j = l-(1/2)$ gilt dann:

$$\left|l+\frac{1}{2}\ l-\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2l}{2l+1}}\,|l l-1\rangle\,|+\rangle + \sqrt{\frac{1}{2l+1}}\,|ll\rangle\,|-\rangle$$

Vorausgesetzt die Formel ist korrekt, dann gilt für $m_j - 1$:

$$J_- = L_- + S_-$$

$$J_-\left|l+1/2 m_j\right\rangle = \hbar\sqrt{\left(l+1/2+m_j\right)\left(l+1/2-m_j+1\right)}\left|l+1/2 m_j-1\right\rangle$$

$$J_-\left|l m_j-\frac{1}{2}\right\rangle|+\rangle = \hbar\left|l m_j-\frac{1}{2}\right\rangle|-\rangle + \hbar\sqrt{\left(l+m_j-\frac{1}{2}\right)\left(l-m_j+\frac{3}{2}\right)}\left|l m_j-\frac{3}{2}\right\rangle|+\rangle$$

$$J_-\left|l m_j+\frac{1}{2}\right\rangle|-\rangle = \hbar\sqrt{\left(l+m_j+\frac{1}{2}\right)\left(l-m_j+\frac{1}{2}\right)}\left|l m_j\right\rangle|-\rangle$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\left|l+\frac{1}{2}\ m_j-1\right\rangle &= \left|l m_j-\frac{1}{2}\right\rangle|-\rangle\left\{\sqrt{\frac{1}{(2l+1)\left(l-m_j+3/2\right)}}+\frac{l-m_j+1/2}{\sqrt{(2l+1)\left(l-m_j+3/2\right)}}\right\}\\ &\quad+\sqrt{\frac{l+m_j-1/2}{2l+1}}\left|l m_j-\frac{3}{2}\right\rangle|+\rangle\\ &=\sqrt{\frac{l-m_j+3/2}{2l+1}}\left|l m_j-\frac{1}{2}\right\rangle|-\rangle+\sqrt{\frac{l+m_j-1/2}{2l+1}}\left|l m_j-\frac{3}{2}\right\rangle|+\rangle\end{aligned}$$

Die Relation für $\left|l+1/2 m_j\right\rangle$ ist damit bewiesen.

Für den Zustand $\left|l-1/2 m_j\right\rangle$ und $m_j = l-(1/2)$ gilt dann:

$$\left|l-\frac{1}{2}\ l-\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{2l+1}}\,|l l-1\rangle\,|+\rangle - \sqrt{\frac{2l}{2l+1}}\,|ll\rangle\,|-\rangle$$

Wir schließen von m_j auf $m_j - 1$

$$J_-\left|l-\frac{1}{2}m_j\right\rangle = \hbar\sqrt{\left(l-\frac{1}{2}+m_j\right)\left(l+\frac{1}{2}-m_j\right)}\left|l-\frac{1}{2}\ m_j-1\right\rangle$$

$$J_-\left|l m_j-\frac{1}{2}\right\rangle|+\rangle = \hbar\left|l m_j-\frac{1}{2}\right\rangle|-\rangle + \hbar\sqrt{\left(l+m_j-\frac{1}{2}\right)\left(l-m_j+\frac{3}{2}\right)}\left|l m_j-\frac{3}{2}\right\rangle|+\rangle$$

$$J_-\left|l m_j+\frac{1}{2}\right\rangle|-\rangle = \hbar\sqrt{\left(l+m_j+\frac{1}{2}\right)\left(l-m_j+\frac{1}{2}\right)}\left|l m_j-\frac{1}{2}\right\rangle|-\rangle$$

Daraus folgt wieder:

$$\begin{aligned}
\left|l-\frac{1}{2}\ m_j-1\right\rangle =&\sqrt{\frac{1}{(2l+1)\left(l+m_j-1/2\right)}}\left|lm_j-\frac{1}{2}\right\rangle|-\rangle+\sqrt{\frac{l-m_j+3/2}{2l+1}}\left|lm_j-\frac{3}{2}\right\rangle|+\rangle\\
&-\sqrt{\frac{\left(l+m_j+1/2\right)^2}{(2l+1)\left(l+m_j-1/2\right)}}\left|lm_j-\frac{1}{2}\right\rangle|-\rangle\\
=&\sqrt{\frac{l-m_j+3/2}{2l+1}}\left|lm_j-\frac{3}{2}\right\rangle|+\rangle-\sqrt{\frac{l+m_j-1/2}{2l+1}}\left|lm_j-\frac{1}{2}\right\rangle|-\rangle
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis vollständig.