# physik421 - Übung 8

Lino Lemmer — l2@uni-bonn.de
Frederike Schrödel
Simon Schlepphorst — s2@uni-bonn.de

17. Juni 2014

## 8.1 Eigenvektoren in einer Orthonormalbasis

### 8.1.1

Es soll bestimmt werden, ob $\sigma_y$ hermitesch ist.

$$\begin{aligned}\sigma_y^\dagger &= \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}^* \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \sigma_y \implies \text{hermitesch}\end{aligned}$$

Außerdem sollen die Eigenwerte und Eigenvektoren bestimmt werden.

$$\begin{aligned}\left|\sigma_y - \lambda \mathbb{1}\right| &= (-\lambda)^2 - (-\mathrm{i})\mathrm{i} \\ &= \lambda^2 - 1 \\ &\implies \lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -1\lambda_1 \\ &\implies \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\text{normierung}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \Phi_1 \\ \lambda_2 &\implies \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \Phi_2\end{aligned}$$

### 8.1.2

Es soll Orthogonalität und Vollständigkeit der Eigenvektoren überprüft werden.

Orthogonalität: $\Phi_1 * \Phi_2 = 1 - 1 = 0$

Vollständigkeit: $\tilde{\eta}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 + \Phi_2) \qquad \tilde{\eta}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Phi_1 - \Phi_2)$

Da man die Basis durch die Eigenvektoren darstellen kann, müssen die Eigenvektoren vollständig sein.

## 8.1.3

$$P_{\mathrm{i}} = \Phi_{\mathrm{i}} \dagger \Phi_{\mathrm{i}}$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_1 \Phi_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cancel{2} \\ \cancel{2}\mathrm{i} \end{pmatrix} = \Phi_1$$

$$P_1 \Phi_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2 \Phi_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$P_2 \Phi_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cancel{2} \\ \cancel{2}\mathrm{i} \end{pmatrix} = \Phi_2$$

## 8.1.4

Zu zeigen $P_i P_j = \delta_{ij}$

$$\begin{aligned} P_1 P_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -2i \\ 2i & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \\ &= P_1 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Zu zeigen: $\sum_{\mathrm{i}} P_{\mathrm{i}} = \mathbb{1}$

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{1} \end{aligned}$$

## 8.2 Vollständiger Satz von Operatoren

In einen dreidimensinalen Raum sind zwei Operatoren durch

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$B = b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 8.2.1

$H$ ist hermitsch, da man es transponieren und komplex konjugieren kann ohne dass es sich ändert. Bei $B$ müsste dafür gelten, dass $b$ reell ist.

### 8.2.2

Um zu zeigen, dass $H$ und $B$ vertauschen muss gezeigt werden, dasss $[H,B]=0$ gilt.

$$\begin{aligned} [H,B] &= HB - BH \\ &= \hbar\omega b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \hbar\omega b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \hbar\omega b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \hbar\omega b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

### 8.2.3

Als nächstes sollen drei Vektoren bestimmt werden, die sowohl von $H$ als auch von $B$ Eigenvektoren sind. Zunächst bestimme ich die Eigenwerte der beiden Matrizen um daraus die Eigenräume zu bestimmen, aus denen ich gemeinsame Vektoren ermittele. Die Eigenwerte ermittel ich mit $\det(A - \lambda \mathbb{1})$. Damit erhalte ich als Eigenwerte zu der Matrix von $H$ $\lambda_{1,2} = \hbar\omega$ und $\lambda_3 = 0$. Für die Matrix von $B$ erhalte ich ebenfalls einen doppelten Eigenwert $\lambda_{1,2} = b$ und einen einzelnen $\lambda_3 = -b$. Nun bestimme ich die dazu gehörigen Eigenvektoren.

$1/\sqrt{2}$

$H$ hat zu den Eigenwert $\hbar\omega$ die Eigenvektoren $(1,0,0)^T$ und $(0,0,1)^T$ und zu den EW den EV $(0,1,0)^T$. Zu $B$ erhalte ich für $b$ die EV $(0,1,0)^T$ und $(1,0,1)^T$ und für $-b$ $(1,0,-1)^T$. Damit erhält man als gemeinsame EV $(0,1,0)^T$, $(1,0,1)^T$ und $(1,0,-1)^T$. EW: $(0,b)$ , $(\hbar, b)$ und $(\hbar\omega, -b)$.

### 8.2.4

Die EW $\lambda_{H,i}$ reichen nicht aus um den Zustand $i$ eindeutig zu bestimmen. Jeder Zustand $a(1,0,0,)^T + b(0,0,1)^T$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ gehört zum EW $\hbar\omega$. Hingegen wissen wir, das zum EW 0 $i = (0,1,0)^T$ sein muss.

Die Paaren von EW $(\lambda_{H,i}, \lambda_{B,i})$ reichen aus um den Zustand $i$ eindeutig zu bestimmen. Ist nun z.B. $\lambda_{H,i} = \lambda_\omega$ so wissen wir, weil es sich um einen EV von $B$ handelt, das entweder $i = (1,0,1)^T$ oder $i = (1,0,-1)^T$. Diese haben verschiedene EW von $B$: $b$ und $-b$. Beide EW zusammen reichen somit aus um $i$festzulegen. $\implies H, B$ vollständiger Satz.

### 8.2.5

$$B' = b\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hierfür erhalte ich die EW 0 (doppelt) und $b$ und daraus die EV $(1,0,0)^T$, $(0,0,1)^T$ und für $b$ $(0,1,0)^T$ Somit haben $B'$ und $H$ degenerierten Eigenraum (von $(1,0,0,^T$ und $(0,0,1)$ aufgespannt). Deswegen wird der Zustand durch diese EV auch nicht eindeutig estgelegt. $\implies$ kein vollständiger Satz.

## 8.3 Heisenbergdarstellung von Operatoren

### 8.3.1

Zu zeigen: $[A^n, B] = nA^{n-1}[A, B]$ falls $[A, B] = c \in \mathbb{C}$ Induktionsanfang: $n = 1$

$$[A, B] = 1A^0[A, B]$$

Induktionsschritt: angenommen die Behauptung gilt für n: zu zeigen $\left[A^{n+1}, B\right] = (n+1)A^n[A, B]$

$$\begin{aligned}
\implies \left[A^{n+1}, B\right] &= A^{n+1}B - BA^{n+1} \\
&= A^{n+1}B - A^nBA + A^nBA - BA^{n+1} \\
&= A^n[A, B] + \left[A^n, B\right]A \\
&= cA^n + nA^{n-1}cA \\
&= (n+1)A^nc \\
&= (n+1)A^n[A, B]
\end{aligned}$$

### 8.3.2

Zu zeigen $[H, p] \in \mathbb{C}$ mit $H = p^2/2m - qE_x$:

$$\begin{aligned}
[H, p] &= \left[\frac{p^2}{2m} - qE_x, p\right] \\
&= -qE\underbrace{\left[x, p\right]}_{i\hbar} \qquad | \text{ da } \left[p, p\right] = 0 \\
&= -i\hbar qE \in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

### 8.3.3

Zu zeigen: $\hat{p}_H(t) = \hat{p}_H(0) + qE + \hat{e}_x$ mit $H = \hat{p}^2/2m - qE_x$

$$\begin{aligned}
\hat{p}_H(t) &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht/\hbar}\hat{p}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\right)^n t^n H^n \hat{p}\mathrm{e}^{\mathrm{i}Ht/\hbar} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n-0)!}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}t\right)^{n-1} H^{n-1}\left(\frac{\mathrm{i}}{\hbar}t\right)(-\mathrm{i}\hbar qE\hat{e_x}) + \hat{p} \\
&= \hat{p} + qE + \hat{e}_x \\
&= \hat{p}_H(0) + qE + \hat{e}_x
\end{aligned}$$

## 8.4 Zeitentwicklung der Matrix-Darstellung von Operatoren im Wechselwirkungsbild

Gegeben ist ein Operator $\vec{q}_I$ im Wechselwirkungsbild. Es soll gezeigt werden, dass die Zeitableitung gegeben ist durch:

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{q}_I = \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\vec{q}_I + \left[\vec{H}_0, \vec{q}_I\right]$$

Im Wechselwirkungsbild benutzt man den Hamilton-Operator $H = H_0 + H_1$, wobei $H_0$ das Wechelwirkungsfreihe System und $H_1$ die Wechselwirkung beschreiben. Dabei gilt für die Wellenfunktion $\Psi_I$ im Wechselwirkungsbild (Nolting, Seite 221):

$$\left|\Psi_I(t)\right\rangle = U_0\left(t_0, t\right)\left|\Psi(t)\right\rangle \qquad \text{mit } U_0\left(t_0, t\right) = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{H}_0(t-t_0)}$$

Soll nun eine Observable A in das Wechselbild transformiert werden folgt:

$$\begin{aligned}
\left\langle\Psi\left|A\right|\Psi\right\rangle &= \left\langle\Psi\left|U_0\left(t_0,t\right)U_0^{-1}\left(t_0,t\right)AU_0\left(t_0,t\right)U_0^{-1}\left(t_0,t\right)\right|\Psi\right\rangle \\
&= \left\langle\Psi_I\left|U_0^{-1}\left(t_0,t\right)AU_0\left(t_0,t\right)\right|\Psi_I\right\rangle
\end{aligned}$$

Der transformierte Operator $A_I$ ist also $U_0^{-1}\left(t_0,t\right)AU_0\left(t_0,t\right)$. Damit lässt sich nun die gewünschte Geleichung herleiten (zur Übersichtlichkeit lasse ich die $\left(t_0,t\right)$-Abhängigkeit weg:

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{q}_I &= \mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U_0^{-1}\vec{q}U_0\right) \\
&= \mathrm{i}\hbar\frac{\partial U_0^{-1}}{\partial t}\vec{q}U_0 + \mathrm{i}\hbar U_0^{-1}\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}U_0 + \mathrm{i}\hbar U_0^{-1}\vec{q}\frac{\partial U_0}{\partial t}
\end{aligned}$$

mit $\frac{\partial U_0}{\partial t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\vec{H}_0U_0$ und $\frac{\partial U_0^{-1}}{\partial t} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}U_0^{-1}\vec{H}_0$

$$= \vec{H}_0U_0^{-1}\vec{q}U_0 + \mathrm{i}\hbar U_0^{-1}\frac{\partial\vec{q}}{\partial t}U_0 - U_0^{-1}\vec{q}U_0\vec{H}_0$$

mit $\vec{q}_I = U_0 \vec{q} U_0^{-1}$ und $\frac{\partial \vec{q}_I}{\partial t} = U_0 \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} U_0^{-1}$

$$= \vec{H}_0 \vec{q}_I - \vec{q}_I \vec{H}_0 + \mathrm{i}\hbar \frac{\partial \vec{q}_I}{\partial t}$$
$$= \left[\vec{H}_0, \vec{q}_I\right] + \mathrm{i}\hbar \frac{\partial \vec{q}_I}{\partial t}$$