H 10.1

(a)

Ist es so einfach?

$$E(p,\sigma) = \frac{p^2}{2m} - \mu B$$
$$= \frac{p^2}{2m} - g\mu_B \sigma B$$

Daraus bestimme ich die Zustandssumme:

$$Z_{GC} = \sum_n \exp\left(-\beta(E_n - \mu)\right)$$

Jetzt lassen sich die Zustände aber nicht aufzählen. Über p muss integriert, über σ summiert werden.

$$Z_{GC} = \int_{\mathbb{R}^3} dp \sum_{\sigma=\pm\frac{1}{2}} \exp\left(-\beta\left(\frac{p^2}{2m} - g\mu_B\sigma B\right)\right)$$

Die Exponentialfunktion faktorisiert. Somit werden p und σ unabhängig.

$$= 2\cosh\left(\beta g\mu_B \tfrac{1}{2} B\right) \int_{\mathbb{R}^3} dp \, \exp\left(-\beta \frac{p^2}{2m}\right)$$

Jetzt ist die Frage, wie viele Dimensionen der Zustandsraum hat. In der Skizze auf dem Aufgabenblatt ist p links und rechts dargestellt. Es könnte ein Betrag sein.

Das Integral ist

$$\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2},$$

wenn man Kugelkoordinaten annimmt.

Wenn man das nicht tut, und $4\pi p^2$ weniger hat, kommt

$$\frac{\pi m}{2\beta}$$

heraus.
Je nach dem, welche Version man nehmen mag, hat man dann die ganze Zustandssumme.

Versuchen wir es doch einfach mal mit der 1D-Variante.

Das Problem mit dieser Darstellung ist, dass man nach Ausführung des Integrals keine Fermiverteilung mehr erhält.

Wenn man das Integral stehen lässt, kann man partielle Integration machen. Wie bekommt man da jetzt die Zustandsdichte rein?

Also noch mal neu Z_{GC} aufstellen.

$$E_{p,\sigma} = \frac{p^2}{2m} - g\mu_B \sigma B$$

Laut Skript ist jetzt $Z_{GC,1} = 1 + \exp\left(-\frac{E_{\alpha_i} - \mu}{k_B T}\right)$ (5.7)

$$Z_{GC} = \prod_{i=1}^{\infty} Z_{GC,1}(\alpha_i, \mu, T) \qquad (5.6)$$

Was sind denn die α_i? Es sind Zustände mit p und σ.

(b)

$$\underline{\Omega} = -k_B T \ln(Z_{GK})$$

$$= -k_B T \ln\left[2\cosh\left(\beta g \mu_B \frac{1}{2} B\right) \frac{\pi m}{2\beta}\right]$$

Jetzt soll eine Sommerfeldentwicklung durchgeführt werden. Dazu muss die Fermiverteilung dort drin stecken, was sie aber nicht tut.

Mit neuem Ansatz erhalte ich für $\underline{\Omega}$:

$$\underline{\Omega} = -k_B T \sum_{\substack{\sigma=\pm\frac{1}{2} \\ p}} \ln\left[1+\exp\left(-\frac{\frac{p^2}{2m} - g\mu_B \sigma B - \mu}{k_B T}\right)\right]$$

Jetzt muss ich aus der Summe über die Impulse ein Integral über die Energie machen und erhalte so etwas, zu dem partiell integriert werden kann.

$$\underline{\Omega} = -k_B T \sum_{\sigma=\pm\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \ln\left[1+\exp\left(-\frac{\frac{p^2}{2m} - g\mu_B \sigma B - \mu}{k_B T}\right)\right]$$

Jetzt noch $d^3p = 4\pi p^2\, dp$, weil ich Kugelkoordinaten wähle. Nun Formel (5.24):

$$4\pi\, p^2\, dp = \rho_\sigma(E)\, dE\, \frac{(2\pi\hbar)^3}{V}$$

Damit komme ich zum geplanten Energieintegral.

$$\Omega = -k_B T \, \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{\sigma=\pm\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} dE \, \rho_\sigma(E) \ln\left[1 + \exp\left(-\frac{E-\mu}{k_B T}\right)\right]$$

Eventuell war vorher der Kehrwert vorhanden

Jetzt kann ich partielle Integration anwenden und $f(E)$ erhalten.

$$\Omega = k_B T \, \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{\sigma} \int_{\mathbb{R}} dE \, a(E) \, f(E) \cdot \left(-\frac{1}{k_B T}\right)$$

$$= -\frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{\sigma} \int_{\mathbb{R}} dE \, a(E) \, f(E)$$

$$= \frac{(2\pi\hbar)^3}{V} \sum_{\sigma} \int_{\mathbb{R}} dE \, b(E) \, f'(E)$$

Nun wird $b(E)$ angenähert. Fermiintegrale.

$$\Omega = \sum_{\sigma} \left(-b_\sigma[\mu] - \frac{\pi^2}{6} \rho_\sigma[\mu] \, (k_B T)^2 + \mathcal{O}[T^4]\right)$$

Jetzt ist das Magnetfeld aber weg. Oder steckt das in $\sum_\sigma$ noch drin?