H 12.1

(a)

$$\rho(E) = \frac{V E^2}{\pi^2 (\hbar c)^3} \qquad E(\vec{p}) = |p| c$$

Mit dieser Zustandsdichte und der Boseverteilung sollte man jetzt die Zustandssumme schreiben können:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE \ \rho(E) \ b(E)$$

Jetzt muss man aber wohl noch mal Z_G aufstellen.

Zustände sind im Impulsraum $p \in \mathbb{R}^3$.

oder k-Raum $k \in \mathbb{R}^3$.

Somit ist:

$$Z_{GC,1}(\vec{k}) = \frac{1}{1 - \exp\left(-\frac{E_{\vec{k}} - \mu}{k_B T}\right)}$$

$$Z_G = \prod_{\vec{k}} Z_G(\vec{k})$$

Die Photonen interagieren nicht miteinander. Also sollte es keinen Energieunterschied ausmachen, wenn sich die Anzahl ändert. Daher, glaube ich, ist $\mu = 0$.

Nun daraus das großkanonische Potential.

$$\Omega = -k_B T \ln(Z_G)$$

$$= -k_B T \sum_{\vec{k}} \ln(Z_{G,1}(\vec{k}))$$

$$= -k_B T \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3 V} \ln\left(\frac{1}{1 - \exp(-\beta \hbar k c)}\right)$$

$$\hbar dk = dp$$

$$= \frac{k_B T}{(2\pi\hbar)^3 V} \int_{\mathbb{R}^3} d^3p \ln(1 - \exp(-\beta|\vec{p}|c))$$

Kugelkoordinaten

$$= \frac{k_B T}{8\pi^3\hbar^3} \frac{4\pi}{V} \int_0^\infty dp\, p^2 \ln(1 - \exp(-\beta pc))$$

Nun substituieren, damit ich den Tipp auf dem Aufgabenblatt anwenden kann.

$$x := \beta pc \qquad dx = \beta\, dp\, c$$

$$p = \frac{x}{\beta c} \qquad dp = \frac{dx}{\beta c}$$

$$= \frac{k_B T}{8\pi^3 \hbar^3} \frac{4\pi}{V} \int_0^\infty \frac{dx}{\beta c} \left(\frac{x}{\beta c}\right)^2 \ln(1 - \exp(-x))$$

$$= -\frac{k_B^4 T^4}{2\pi^2 \hbar^3 c^3 V} \frac{\pi^4}{45} = -\frac{\pi^2 k_B^4}{2 \cdot 45\, \pi^2\, \hbar^3 c^3\, V} T^4$$

V steht im Nenner, sollte aber im Zähler stehen.
Da ist bei $\sum_k \to \int dk$ etwas falsch gelaufen.

$\sum_k$ ist einheitenlos

$\frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k$ auch, da $[k] = \frac{1}{\text{Länge}}$.

Warum? $\sum_k = \sum_n k_0 n$ $\quad k_0 = \frac{2\pi}{\ell}$

$V = \ell^3$

Integriere eigentlich über n $\quad k = n \cdot \frac{2\pi}{\ell}$

$dk = dn \frac{2\pi}{\ell}$

$dn = dk \frac{\ell}{2\pi}$ und somit $\frac{V}{(2\pi)^3}$.

Dann fehlt noch ein Faktor 2 wegen

Polarisation = Helizität.

Damit stimmt dann alles.

(b)

Mittlere Photonenzahl $\langle N \rangle$.

$$\langle N \rangle = \frac{1}{Z} \sum_n W(n)\; n$$

Skript, (5.136): Die Anzahl der Teilchen ist $N = \sum_\alpha b(E_\alpha)$.

Dort wird aber über alle Zustände summiert. Ich möchte über Energien summieren. Daher brauche ich $\rho(E)$.

$$N = \int dE\; \rho(E)\; b(E).$$

Also:

$$\int dE \; \frac{VE^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3} \; \frac{1}{\exp(-\beta E) - 1}$$

Wieder das Integral vom Aufgabenblatt nehmen.

$$x = \beta E \qquad\qquad dE = \frac{dx}{\beta}$$

$$\frac{V}{(\hbar c)^3} (k_B T)^3 \qquad \int dx\; x^2 \; \frac{1}{\exp(-x) - 1}$$

$$\approx 0{,}244 \left(\frac{k_B T}{\hbar c} \right)^3 V.$$

(c)

Berechne S aus Ω.

$$S = -\frac{\partial \Omega}{\partial T} = \frac{4\pi^2 k_B^4 V}{45\, \hbar^3 c^3} T^3$$

$$\Omega = U - TS - \mu N \qquad F = U - TS$$

$$U = \Omega + TS = \cancel{(4+1)} \frac{\pi^2 k_B^4 V}{\cancel{45}\, \hbar^3 c^3} T^4$$

$$9$$

$$\Omega = F, \text{ da } \mu = 0.$$

(d)

$$d\Omega = -S\,dT - p\,dV - N\,d\mu$$

$$p = -\left(\frac{d\Omega}{dV}\right)_{T,\mu}$$

$$= \frac{\pi^2 k_B^4}{45 \hbar^3 c^3} T^4$$

Dies hängt nicht vom Volumen ab. Der Strahlungsdruck steigt also nicht durch Kompression.

Dies liegt daran, dass die Photonen nicht miteinander wechselwirken.

(e)

Moment! Adiabatisch bedeutet $\delta Q = 0$.

$dS = 0$ ist reversibel.

Da $\mu = 0$, ändert sich die Entropie nicht mit der Photonenzahl. Nein.

$$d\underline{\Omega} = -S\,dT - p\,dV - N\,d\mu$$

$$S = -\frac{1}{T}d\underline{\Omega} - \frac{p}{T}dV - \frac{N}{T}d\mu$$

Die Temperatur ändert sich aber vielleicht.

$$dU = T\underset{\uparrow \atop 0}{dS} - p\,dV + \underset{\uparrow \atop 0}{\mu}\,dN$$

$$dU = -\underbrace{p}\,dV$$

$$d\left(5\,\frac{\pi^2 k_B^4 V}{45\hbar^3 c^3}T^4\right) \qquad \frac{\pi^2 k_B^4}{45\hbar^3 c^3}T^4 \qquad dV$$

Was passiert mit N, wenn V sich ändert?

$$\left(\frac{dN}{dV}\right)_T \approx 0{,}244 \left(\frac{k_B T}{\hbar c}\right)^3$$

Jetzt muss aber noch $dS = 0$ sein.

Also $\frac{dS}{dV} = 0$

$$\left(\frac{dS}{dV}\right)_T = \frac{4\pi^2 k_B^4}{45\,\hbar^3 c^3} T^3 \overset{!}{=} 0$$

Das geht aber nur für $T=0$. Also muss man T auch ändern dürfen.

Ich würde Erwarten, dass bei einer Länge $\ell = \sqrt[3]{V}$ die Energie mit $\frac{1}{\ell^4}$ abnimmt. (Astro 2)

$$S = \frac{4\pi^2 k_B^4 V}{45\,\hbar^3 c^3} T^3$$

$$dS = \frac{4\pi k_B^4}{45\hbar^3 c^3}\left(dV\,T^3 + 3\,V\,T^2 dT\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad dV\,T + 3\,V\,dT = 0$$

$$dN = 0{,}244 \left(\frac{k_B}{\hbar c}\right)^3 \left(3T^2 dT\,V + T^3 dV\right)$$

$$= 0{,}244 \left(\frac{k_B}{\hbar c}\right)^3 T^2 \underbrace{(3\, V dT + T dV)}_{=0 \text{ wegen } dS=0}$$

$\Rightarrow$ Photonenzahl konstant.

$$N = 0{,}244 \left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3 V = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \quad T(V) = \frac{\hbar c}{k_B} \sqrt[3]{\frac{N}{0{,}244\, V}}$$

Temperatur nimmt mit Volumen ab.

$$E \propto T^4 \propto \frac{1}{\sqrt[3]{V^4}} = \frac{1}{\ell^4}. \qquad \text{Oh yeah!}$$

Die Behauptung aus Austro 2 stimmt also.

$$P = \frac{\pi^2 k_B^4}{45 \hbar^3 c^3} T^4$$

$$P(V) = \ldots \; T^4(V)$$