H 12.2

(a)

$$Z_c = \sum_{\vec{p}} \sum_{\vec{x}} \exp(-\beta H)$$

$$= \underbrace{\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p_i \int d^3x_i}_{N\text{-mal}} \exp(-\beta H)$$

$$= \left[\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p \int d^3x \quad \exp\left(-\beta\left(\frac{p^2}{2m} + \varkappa x^2\right)\right) \right]^N$$

$$= \left[\frac{16\pi^2 V}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^\infty dp\, p^2 \int_0^\infty dx\, x^2 \quad \exp\left(-\beta\left(\frac{p^2}{2m} + \varkappa x^2\right)\right) \right]^N$$

$$F = -k_B T \ln(Z_c)$$

$$= -k_B T N \ln(Z_{c,1})$$

Man kann das Integral lösen. Hatten wir schon mal.

Mathematica liefert hier:

$$Z_{c,1} = \frac{V}{2\sqrt{2}\,\hbar^3 (\beta\varkappa)^{3/2} \left(\frac{\beta}{m}\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{V}{\sqrt{8}\,\hbar^3 \beta^3} \left(\frac{m}{\varkappa}\right)^{3/2}$$

Daraus: $F = -k_B T N \ln\left(\frac{V}{\sqrt{8}(\hbar\beta)^3} \left(\frac{m}{\varkappa}\right)^{3/2}\right)$

(b)

$$\langle x^2 \rangle = \frac{1}{Z_c} \sum_{\alpha} \exp(-\beta H) \; x^2$$

Dadurch kommt zu der Integration bei Z_c noch ein x^2. Mal schauen, was Mathematica dort macht.

$$\langle x^2 \rangle = \frac{3}{2} \frac{1}{\beta \varkappa} = \frac{3}{2} \frac{k_B T}{\varkappa}$$

$$[k_B T] = J = kg \, \frac{m^2}{s^2}$$

$$[\varkappa] = \frac{J}{m^2} \longrightarrow \left[\frac{k_B T}{\varkappa}\right] = m^2. \quad \text{Passt.}$$

$$R = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$$

$$V = \frac{3}{4} \pi R^3 = \frac{3}{4} \pi \left(\frac{3}{2} \frac{k_B T}{\varkappa} \right)^{3/2}$$

(c)

Tja, das habe ich schon mit Mathematica ausgerechnet. Allerdings kann man m und γ durch V ersetzen?

(d)

Ich muss an den Druck kommen.

$$F = -PV + \mu N$$

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{N,T}$$

$$F = -k_B T N \ln\left(\frac{V}{\sqrt{8}(\hbar\beta)^3}\left(\frac{m}{\gamma}\right)^{3/2}\right)$$

$$P = k_B T N \frac{1}{\frac{V}{\sqrt{8}(\hbar\beta)^3}\left(\frac{m}{\gamma}\right)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{8}(\hbar\beta)^3}\left(\frac{m}{\gamma}\right)^{3/2}$$

$$= \frac{k_B T N}{V}$$

$P(V)$ ist eine einfache Hyperbel. Aber wie kann sich V ändern, wenn N und T konstant bleiben? Ändern sich m oder γ?