לינארית - 26.7

• יהי F שדה ו-V קבוצה לא ריקה. V הוא מרחב וקטורי מעל השדה F אמ"מ:
חיבור - 1. סגירות 2. חילופיות 3. קיבוציות 4. נטרלי לחיבור 5. איברים נגדיים
כפל - 1. סגירות 2. פילוג מעל החיבור ב-V 3. פילוג מעל החיבור ב-F 4. אסוציאטיביות (קיבוציות) 5. תכונת הזהות

• כל שדה הוא מרחב וקטורי מעל עצמו
• קבוצה היא מ"ו מעל קבוצה שמוכלת בה.
• תכונות בסיסיות של מ"ו:

1. הנטרלי הוא יחיד ב-V
2. לכל איבר בV יש נגדי יחיד
3. אם $\underline{v}\in V$ ומקיים $\underline{v}+\underline{v}=\underline{v}$ אז בהכרח $\underline{v}=\underline{0}$
4. לכל $a\in F$, $a\cdot\underline{0}=\underline{0}$
5. לכל $\underline{v}\in F$ $0\cdot\underline{v}=\underline{0}$
6. אם $\underline{v}\in V$ ו-$a\in F$ אז $a\cdot\underline{v}=\underline{0}$ אמ"מ $\underline{v}=\underline{0}$ או $a=0$
7. לכל $\underline{v}\in V$, $-1\cdot\underline{v}=-\underline{v}$
8. $\underline{v}\in V$ ו- $a\in F$ אז $-a\cdot\underline{v}=a\cdot(-\underline{v})=-(a\cdot\underline{v})$
9. לכל $\underline{v}\in V$, $-(-\underline{v})=\underline{v}$
10. אם $\underline{u},\underline{v}\in V$ $-(\underline{v}+\underline{u})=(-\underline{v})+(-\underline{u})$

• מושג ההפרש $\underline{u}-\underline{v}=\underline{u}+(-\underline{v})$
• תת מרחבים - קבוצה חלקית W של מרחב וקטורי V מעל שדה F נקראת תת מרחב של V, אם W בפני עצמה מהווה מ"ו מעל F ביחס לפעולות החיבור והכפל בסקלר של המרחב V
• טענה - אם V מרחב וקטורי מעל שדה F ו-U תת מרחב של V, אז:
(א) הוקטור $\underline{0}$, הנטרלי ביחס לחיבור ב-V שייך לU והוא הנטרלי ביחס לחיבור גם בU.
(ב) לכל $\underline{u}\in U$ גם $-\underline{u}\in U$ והוא גם הנגדי ל$\underline{u}$ בU
• **משפט** - תהי W קבוצה חלקית של מ"ו V מעל שדה F אז W תת מרחב של V אמ"מ:
א. $W\neq\phi$ ב. אם $\underline{w_1}+\underline{w_2}\in W$ ג. $k\in F$ $k\cdot\underline{w}\in W$
• אופציה לקיצור המשפט ע"י חיבור של ב'+ג': $a\cdot\underline{w_1}+b\cdot\underline{w_2}\in W$
• טיפ שימושי - במקום לבדוק ש $W\neq\phi$ נבדוק שהוא מכיל את $\underline{0}$.
• $F_n[x]$ הוא תת מרחב של $F[x]$ ($F[x]$ מרחב וקטורים מעל x)
• $\{0\}$ - תת מרחב טריוויאלי, גם המרחב עצמו הוא תת מרחב טריוויאלי
• $\mathbb{R}[x]$ מרחב הפולינומים שמקדמיהם ממשיים.
• אם יש קבוצה עם וקטור אחד, כדי שיהיה תת מרחב הוא חייב להיות וקטור האפס
• חיתוך של תתי מרחבים - אם W_1, W_2 תתי מרחבים גם החיתוך שלהם הוא תת מרחב.
• איחוד של תתי מרחבים - אם W_1,W_2 תתי מרחבים, האיחוד שלהם תת מרחב אמ"מ $W_1\subseteq W_2$ או $W_2\subseteq W_1$

צירוף לינארי • צירוף לינארי - וקטור הוא צירוף לינארי של וקטורים אחרים אם קיימים סקלרים שהכפלתם עם הוקטורים נותנים את הוקטור.

• לבדוק אם וקטור הוא צירוף לינארי של וקטורים אחרים נכתוב:

$(1,2,3) = a_1(0,0,1) + a_2(1,0,0) + a_3(0,1,0)$

נדרג ואז אם אין פתרון ⇐ לא צירוף לינארי

אם פתרון יחיד או אינסוף ⇐ צירוף לינארי (באינסוף נבחר 1 לדוגמא).

• וקטור האפס הוא צירוף לינארי של כל הוקטורים.

• אם וקטור מסויים הוא צירוף לינארי של קבוצת וקטורים, אז גם של כל קבוצה שמכילה אותה.

sp • מרחב נפרש (sp) - נסמן ב $sp(T)$ את אוסף כל הצירופים הלינאריים של וקטורים מ-T

כלומר: $sp(T)=\{a_1v_1+a_2v_2 \dots + a_kv_k \mid a_1 \dots a_k \in F,\ v_1 \dots v_k \in T\}$

• $sp(T)$ הוא תת מרחב של V

• $T \subseteq sp(T)$

• אם W תת-מרחב של V שמכיל את T אז W מכיל גם את $sp(T)$

• נשים סקלר לפני הוקטורים מ T ונשווה ל (x,y,z)

אם יש תנאים לפתרון - ה sp הוא משוואה

אם אין תנאים לפתרון - ה sp הוא כל המרחב.

• הגדרה - יהי V מרחב וקטורים מעל שדה F. אומרים ש V נוצר סופית אמ"מ קיימת קבוצה סופית של וקטורים שפורשת (יוצרת) את V.

• טענה - אם $S \subseteq T$ אז $sp(S) \subseteq sp(T)$ (המשפט ההפוך לא עובד)

• טענה - $sp(T \cup \{v\}) = sp(T)$ אמ"מ v צירוף לינארי של וקטורים מ-T

• טענה - אמ"מ $sp(T)=sp(V)$ אם הדירוג של כל אחת מהמטריצות נותן את אותה מטריצה מדורגת קנונית

חיתוך מרחבים נפרשים • נייצג את x על ידי שני הספנים (sp) ונשווה ביניהם ואז נדרג ונציב את הסקלרים באחד הייצוגים.

• פעולות אלמנטריות לא משנות את ה sp [פעולה על אחד הוקטורים ב sp]

מרחב שורות של מטריצה • כדי לבדוק שוויון sp אפשר גם לשים כל אחד מהוקטורים בשורה במטריצה (לכל sp מטריצה) ואז לבצע ~~שורות~~ פעולות אלמנטריות ולראות אם מגיעים לאותה מטריצה (עד כדי שורות אפסים)

סכום תתי מרחבים הגדרה - $S+T=\{s+t \mid s \in S,\ t \in T\}$

• סכום של תתי מרחבים הוא תת מרחב שמכיל את שני תתי המרחבים.

סכום sp • הגדרה - $sp(S)+sp(T)=sp(S \cup T)$

• $U+W=U$ אמ"מ $W \subseteq U$

- $U\cup W \subseteq U+W$ } עבור שני תתי מרחבים
- $sp(U\cup W) = U+W$
- $U+W$ הוא התת מרחב הקטן ביותר שמכיל את U ואת W

סכום ישר

- אומרים ש V הוא סכום ישר של U ו-W ורושמים $U\oplus W$ אמ"מ:
א. $V=W+U$ ב. לכל וקטור V יש הצגה יחידה כסכום של וקטור מ-U עם וקטור מW
ב. $U\cap W=\{\underline{0}\}$

תלות לינארית

- אומרים שקבוצה ת"ל מעל F אם קיימים סקלרים (לא כולם 0) כך ש $a_1v_1+a_2v_2...+a_nv_n=0$ אחרת, הוקטורים נקראים בת"ל.
- תלוי לינארית (ת"ל) - אינסוף
- בלתי תלוי לינארית (בת"ל) - יחיד
- אם יש יותר וקטורים מהחזקה של R^n אז בהכרח ת"ל.
- כל קבוצה שיש לה תת קבוצה ת"ל היא ת"ל.
- כל תת קבוצה של קבוצה בת"ל היא בת"ל.
- וקטור יחיד הוא בת"ל רק אם הוא וקטור ה-$\underline{0}$
- כל קבוצת וקטורים שמכילה את וקטור האפס היא ת"ל.
- אם אחד מהוקטורים בקבוצה הוא צ"ל של השאר אז הקבוצה ת"ל.
- קבוצה בת 2 וקטורים ת"ל אם אחד הוקטורים הוא כפולה של השני.
- $\underline{V}$ צירוף לינארי של וקטורים מT אמ"מ הקבוצה $T\cup\{\underline{v}\}$ תלויה לינארית
- $\underline{V}$ לא צירוף לינארי של וקטורים מ-T אמ"מ הקבוצה $T\cup\{\underline{v}\}$ בת"ל.

בסיס+מימד

- אומרים ש B בסיס של V אמ"מ קבוצה בת"ל ופורשת את V:
* בת"ל $a_1v_1+a_2v_2...a_nv_n=0$ נדרג, אם יש פתרון יחיד טריוויאלי $\Leftarrow$ בת"ל.
* פורשת $sp(B)=V$, נשים את הוקטורים בעמודות המתאימה עם x, y, z במשתנים חופשים $\Leftarrow$ אם אין תנאי לפתרון אז פורשת
- אם וקטורים בת"ל מעל $\mathbb{C}$ אז הם בת"ל מעל R ולא להפך
- $B\neq\{\underline{0}\}$ קבוצה חלקית של V אז: א. B בסיס אמ"מ קבוצה מקסימלית בת"ל.
ב. B בסיס אמ"מ קבוצה פורשת מינימלית של V.
- B בסיס של $\underline{V}$ אמ"מ לכל וקטור בV יש הצגה יחידה כצירוף לינארי של וקטורים מ-V
- ~~אם יש 2 קבוצות~~ אם גודל הקבוצה גדול ממספר הוקטורים שהמרחב נפרש על ידם אז בהכרח הקבוצה ת"ל (לדוגמא 4 וקטורים מעל R^3 בהכרח ת"ל)
- נניח של-V בסיס בגודל n וקטורים. אז: קבוצת וקטורים מעל n וקטורים היא ת"ל.
קבוצת וקטורים מתחת לn וקטורים לא פורשת.

- מספר הוקטורים בכל בסיס שנמצא זהה.
- מספיק רק בת"ל או רק פורש אם מספר הוקטורים הוא בדיוק n, על מנת להוכיח בסיס.
- מרוכבים מעל R - מימד $=2n$
- בפולינומים - מימד $= n+1$
- ב R^n - מימד $= n$
- משפט - יהי V מרחב וקטורים נוצר סופית מעל שדה F ו U תת מרחב של V אז:

  א. U נוצר סופית ו $\dim U \leq \dim V$

  ב. $\dim U = \dim V$ אמ"מ $U=V$
- כל קבוצה בת"ל במרחב נוצר סופית, ניתנת להשלמה לבסיס
  - נוסיף וקטור שלא צירוף לינארי של הוקטורים הקיימים.
  - אם צריך להוסיף כמה וקטורים נוסיף אחד אחד בהדרגה.
- משפט המימד - $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$