לינארית 1א' - סיכום

1. $\underset{\text{משוואה}}{a_{11}}\underset{\text{משתנה}}{x_1}$

2. פעולות מותרות על מטריצה: החלפת שורה, כפל במספר שונה מ-0, כפל בשורה והוספתו לשורה אחרת

3. איבר מוביל - איבר ראשון בשורה שלא מתאפס

~~איבר~~ משתנה תלוי - אם בעמודה שלו יש איבר מוביל

משתנה חופשי - אין בעמודה שלו איבר מוביל

4. מדורגת $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & 19 \end{array}\right)$ קנונית $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right)$ נהפוך את כל המובילים ל-1 אחרת היא לא קנונית

5. מטריצות a,b **שקולות שורה** $(a\sim b)$ - אם אפשר להגיע מאחת לשנייה על ידי פעולות שורה

6. כל מטריצה שקולת שורה למטריצה מדורגת קנונית יחידה.

7. דרגה של מטריצה A בגודל $(\overset{\text{שורות}}{m}\times\underset{\text{עמודות}}{n})$ נקראת - **rank (A)**, $r(A)$ היא מספר השורות שלא מתאפסות בצורה מדורגת של A. ומספר המשתנים התלויים

8. $\text{rank}(A)\leq m$, $\text{rank}(A)\leq n$, $\text{rank}(A)\leq \min\{m,n\}$

9. $\text{rank}(A)=n$ פתרון יחיד , $\text{rank}(A)<n$ אינסוף פתרונות

10. **מערכת הומוגנית** = מערכת משוואות לינארית בה כל המקדמים החופשיים שווים ל-0

11. למערכת הומוגנית תמיד יש פתרון שנקרא **הפתרון הטריוויאלי** $(x_1...x_n)=(0..0)$.

12. אם $(x_1...x_n)$ פתרון של הומוגנית גם $\alpha(x_1...x_n)$ פתרון עבור כל α.

13. אם $(x_1...x_n)$ ו-$(y_1...y_n)$ פתרון של מערכת הומוגנית אז גם $(x_1+y_1,...x_n+y_n)$

14. למערכת הומוגנית יש או רק פתרון טריוויאלי או אינסוף פתרונות

15. בהומוגנית אם יש יותר נעלמים ממשוואות $\Leftarrow$ אינסוף פתרונות

16. **מערכת/מטריצה ריבועית** - מספר השורות שווה למספר הנעלמים

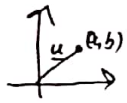
17. **מטריצת יחידה** - מטריצה בגודל חאח באלכסון 1 בשאר המקומות 0.

כללי של הלא הומוגנית

$(t-2,2-2t,t) \Rightarrow \underset{\text{פתרון כללי של ההומוגנית המתאימה}}{(t,-2t,t)} + \underset{\text{פתרון יחיד של הלא הומוגנית}}{(-2,2,0)}$

וקטורים

18. וקטור מתחיל בראשית ונגמר בנקודה שמתאימה לו



$\underline{u}=(a,b)$

19. $(a_1,b_1)+(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2)$, $k(a_1,b_1)=(ka_1,kb_1)$

20. פעולות חשובות שכפל וחיבור הנל מקיימות בR^n:

- סגירות
- חילופיות (קומוטטיביות)
- קיבוציות (אסוציאטיביות)
- פילוג (דיסטריבוטיביות)
- איבר נטרלי לחיבור
- סקלר נטרלי לכפל
- קיום איבר נגדי

* באמצעות תכונות הבסיס אלה, אפשר להוכיח עוד תכונות, למשל: $0\cdot\underline{u}=\underline{0}$, $-\underline{u}=(-1)\cdot\underline{u}$

21. מכפלה סקלרית $\underline{u}\cdot\underline{v}=(a_1..a_n)\cdot(b_1...b_n)=a_1b_1+a_2b_2...+a_nb_n$

22. תכונות של מכפלה סקלרית:

- סימטריות
- אי שליליות: א. $\underline{u}\cdot\underline{u}\ge 0$ ב. $\underline{u}\cdot\underline{u}=0 \leftrightarrow u=0$
- לינאריות $(\underline{u}+\underline{v})\cdot w=\underline{u}\cdot\underline{w}+\underline{v}\cdot\underline{w}$
- הומוגניות $(k\cdot\underline{u})\cdot\underline{v}=k\cdot(\underline{u}\cdot\underline{v})$

23. נורמה (אורך) $\|\underline{u}\|=\sqrt{\underline{u}\cdot\underline{u}}=\sqrt{a_1^2+...a_n^2}$

24. תכונות של נורמה:

- אי שליליות: א. $\|\underline{u}\|\ge 0$ ב. $\|\underline{u}\|=0 \leftrightarrow \underline{u}=0$
- הומוגניות $\|k\cdot\underline{u}\|=|k|\,\|\underline{u}\|$
- אי שוויון המשולש (המינקובסקי) $\|k+\underline{u}\|\le\|\underline{u}\|+\|\underline{k}\|$

25. וקטור יחידה - נורמה =1 $\|\underline{u}\|=1$

26. מציאת וקטור יחידה באותו כיוון של וקטור אחר - נרמול: $\frac{1}{\|\underline{u}\|}\cdot\underline{u}$

27. אי שוויון קושי-שוורץ: $|\underline{u}\cdot\underline{v}|\le\|\underline{u}\|\cdot\|\underline{v}\|$

28. זווית בין וקטורים $\cos\theta=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{\|\underline{u}\|\cdot\|\underline{v}\|}$

29. אי - שוויון המשולש: $\|\underline{u}+\underline{v}\|\le\|\underline{u}\|+\|\underline{v}\|$

30. שוויון קו"ש $\theta=0,\pi \Leftarrow |\cos\theta|=1$

שוויון בא"ש משולש $\underline{u}=k\cdot\underline{v}$ עבור $0\le k$

31. אורתוגונליים: וקטורים נקראים אורתוגונליים אם $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$ $\Leftarrow$ $\cos\theta=\frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$ ($u\cdot v=0$)

וקטורים אורתוגונליים הם ניצבים (מאונכים)

$\underline{0}$- אורתוגונלי לכל וקטור , $(\alpha\cdot u)(\beta\cdot v)=0 \Leftarrow \underline{v}\cdot\underline{u}=0$

32. מרחק בין $\underline{u},\underline{v}\in R^n$ מוגדר כך $d(\underline{u},\underline{v})=\|\underline{u}-\underline{v}\|=\sqrt{(a_1-b_1)^2+\dots(a_n-b_n)^2}$

33. תכונות המרחק: 1. $d(\underline{u},\underline{v})=d(\underline{v},\underline{u})$

2. $d(\underline{u},\underline{u})=0$ $(u=v \Leftarrow d(u,v)=0)$

3. א"ש המשולש $d(u,v)\le d(u,w)+d(w,v)$

34. הקשר בין אורתוגונליות ומרחק: $\underline{u}\cdot\underline{v}=0 \Leftarrow \|u-v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$ (משפט פיתגורס)

35. סקלרים יוצאים ~~[illegible]~~ מנורמה בערך מוחלט

ישרים ומישורים

ישרים במישור

1. ייצוג פרמטרי של ישר שעובר בראשית $L=\{t\underline{v}: t\in\mathbb{R}\}$
2. ישר שלא עובר בראשית $L=\{\underline{p}+t\underline{v}: t\in\mathbb{R}\}$ $\underline{v}$-וקטור כיוון $\underline{p}$-וקטור הצבה (נקודת הצבה)
3. מציאת הצגה פרמטרית של ישר באמצעות 2 נקודות:

וקטור כיוון מתחיל בראש של $\underline{p}$ ומסתיים בראש של Q (ולכן יש לנו גם נקודות)

כיוון: $-P+Q=Q-P \Rightarrow L=\{P+t(Q-P): t\in\mathbb{R}\}$

4. ממשוואה להצגה - פותרים את המשוואה, הפתרון הכללי הוא הצגה פרמטרית.

למשל: $L: x+3y=2$ y-חופשי ולכן נסמן $y=t$, $x=-2-3t$ כלומר נקודה על הישר מהצורה $(-2-3t, t)$ אפשר לרשום:

$L=\{(-2,0)+t(-3,1): t\in\mathbb{R}\}$

מהצגה למשוואה - נשווה את ההצגה לנקודה כללית, נבודד את t מכל רכיב ונשווה ביניהם.

למשל:

$\{L:(2,0)+t(-3,1): t\in\mathbb{R}\}$

$(x,y)=(-2-3t, t)$

$$\begin{cases} x=-2-3t \\ y=t \end{cases} \quad \begin{cases} t=\frac{x+2}{-3} \\ t=y \end{cases} \Rightarrow y=\frac{x+2}{-3}$$

5. מצב הדדי בין ישרים במישור: נחתכים (בנקודה אחת)
מקבילים (אין חיתוך)
מתלכדים (אין סוף נקודות חיתוך)

אלגברית מצב הדדי נשווה בין הישרים

ישרים במרחב

6. משוואות ישר במרחב - 2 משוואות לינאריות עם 3 נעלמים
7. כדי לעבור לפרמטרית פותרים את המערכת (נסמן את המשתנה החופשי ב-t ונמצא פתרון כללי שהוא ייצוג)
8. כדי לעבור למשוואה - משווים את ההצגה לנקודה כללית, מבודדים את t בכל רכיב ומשווים ביניהם.
9. מצב הדדי בין ישרים במרחב: נחתכים, מתלכדים, מקבילים, מצטלבים (לא נחתכים ולא מקבילים)

פתרון 1   אינסוף   אין פתרון

כדי לבדוק אם מקבילים או מצטלבים נבדוק אם קיים k עבורו: $V_1=kV_2$ (V_1,V_2-וקטורי כיוון)

אם כן - מקבילים, אחרת מצטלבים.

מישורים

1. מישור דרך הראשית - הצגה פרמטרית: $\Pi=\{t_1P+t_2Q\}$, $t_{1,2}\in\mathbb{R}$, Π נקרא המישור הנפרש ע"י Q,P

משוואה: $ax+by+cz=0$

2. מישור שלא עובר בראשית - הצגה בעזרת 3 נקודות (שאינן נמצאות על אותו ישר) $\underline{P}-\underline{Q}\neq t(\underline{P}-\underline{S})$

פרמטרית:

$$\Pi=\{\underset{\text{נקודת הצבה}}{\underline{P}}+\underbrace{t_1(\underline{P}-\underline{Q})+t_2(\underline{P}-\underline{R})}_{\text{מישור דרך הראשית}}: t_{1,2}\in\mathbb{R}\}$$

משוואה: $ax+by+cz=d$

3. איך עוברים ממשוואה להצגה פרמטרית ולהפך:

משוואה ← הצגה: x - תלוי z, y - חופשיים לכן נציב: $z=t_2, y=t_1$ ⇐ נבודד את x.

נחלק למספר, עם t_1 ו-t_2: $(a,b,c)+t_1(d,e,f)+t_2(x,y,z)$

הצגה ← משוואה: 1. נשווה את ההצגה לנקודה כללית

2. נתייחס אל $t_{1,2}$ כמשתנים ואל x,y,z כפרמטרים

3. נבדוק מתי למשוואה יש פתרון

4. התנאי שנקבל הוא משוואת המישור

4. מצב הדדי בין מישורים: משווים את ההצגות של המישורים, יש פתרון ← חותך, אין פתרון ← מקבילים

5. מצב הדדי בין ישר ומישור: יש פתרון ← חותך, אין פתרון ← מתלכדים.

שדות

1. על מנת להוכיח שקבוצה היא שדה נוכיח שהיא מקיימת את התכונות הבאות:
① סגירות, ② קיבוציות (אסוציטיביות), ③ חילופיות (קומוטטיביות), ④ איברים נטרליים, ⑤ נגדי לחיבור, ⑥ הופכי לכפל, ⑦ פילוג (הפכן חנק)

2. Z_p - שדה בו יש p איברים על Z_p נגדיר חיבור וכפל:
$a+b=$ שארית חלוקה של $a+b$ ב-p
$a\cdot b=$ שארית חלוקה של $a\cdot b$ ב-p

3. משפט: Z_p שדה ⟷ p ראשוני!
Z_1 לא שדה ראשוני אבל $\{0\}$ כל צורת שדה

4. בדירוג מטריצה ב-Z_p יש לשים לב שלא כופלים שורה ב-p כי זה כמו לכפול ב-0.

5. תכונות השדה: א. לכל $a\in F$ קיים נגדי יחיד ב. לכל $a\in F$, $a\neq 0$, קיים הופכי יחיד
ג. לכל $a\in F$, $a\cdot 0=0$ ד. לכל $a,b\in F$, אם $a\cdot b=0$ אז $a=0$ או $b=0$.

6. מציאת נגדי ב-Z_p: $x+(-x)=0$ הנגדי a הוא $-x$ ונכניס אותו לשדה.
מציאת הופכי ב-Z_p: $x\cdot\frac{1}{x}=1$ ההופכי a הוא $\frac{1}{x}$ ונכניס אותו לשדה.

7. אם אין שורת סתירה ויש k משתנים חופשיים, יהיו אינסוף פתרונות מעל Z_p (בניגוד לאינסוף מעל R)

מספרים מרוכבים:

1. $\sqrt{-1}=i$ $i^2=-1$

2. $C=\{a+bi : a,b\in R\}$ - קבוצת מרוכבים

3. $Z=a+bi$ a-חלק ממשי $Re(z)$, b-חלק מדומה $Im(z)$

4. $a+bi=c+di \leftrightarrow a=c$ $d=b$

5. $(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+bci+adi+bdi^2=(ac-bd)+(bc+ad)i$

6. הצמוד המרוכב ל $Z=a+bi$ הוא $\bar{Z}=a-bi$

7. תכונות: א. $\bar{\bar{Z}}=Z$

ב. $\overline{Z_1\cdot Z_2}=\bar{Z}_1\cdot\bar{Z}_2$

ג. $\overline{Z_1+Z_2}=\bar{Z}_1+\bar{Z}_2$

ד. $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}=\frac{\bar{Z}_1}{\bar{Z}_2}$

ה. $Re(Z)=R(\bar{Z})$, $Im(Z)=-Im(\bar{Z})$

ו. $Z=\bar{Z} \leftrightarrow Z$ ממשי.

8. ערך מוחלט: $Z=a+bi$ הוא $\sqrt{a^2+b^2}$

9. $|Z|^2=Z\cdot\bar{Z}$

10. טריק למציאת הופכי $\frac{1}{a+bi}$ נכפול ב $(a-bi)$ במונה ובמכנה ונקבל $\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$

11. תכונות הנורמה ~~תכונות~~ מתקיימות גם בערך המוחלט