סיכום אינפי - 14.6

- לכל סביבה של A שנסמן ב V_A (ציר ה y) קיימת סביבה נקובה של x_0 שנסמן $N_\delta(x_0)$
- $\lim_{x\to m} f(x)=L$ ככל ש x מתקרב ל m, $f(x)$ מתקרב ל L.
- גבול פונקציה $f(x)$ כאשר $x\to x_0$ הוא יחיד.
- לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש: $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$
  כאשר $\lim_{x\to x_0} f(x)=L$
- חסום מלמעלה - • נסדר את ה $f(x)$ כך שיכלול את $x-x_0$
  - נחסום את שאר הביטוי
  - באמצעות $x-x_0<$ מספר נגיע לביטוי שנשאר כאשר הוא חסום במספר
  - נציב את המספר שקיבלנו במקום הביטוי ונגיע ל δ שהוא $\min\{x,y\}$
  כאשר x הוא המספר שבחרנו מההתחלה ו y הוא הביטוי עם ה ε שמצאנו.
- כאשר יש מכנה נשים ♡ שלא נבחר δ שתאפס את המכנה
  לדוגמא אם $x\to2$ והמכנה מתאפס ב 3 אז $\delta<|3-2|=1$ למשל $\delta=\frac{1}{2}$
  ואז נחסום את כך- $|x-2|<\frac{1}{2}$ ונגיע לחסם הביטוי.
- כשמחלקים אי שוויון ב 1 אז נהפוך את הסימנים ($<\leftrightarrow>$)
- לסכום של שוויונים יש את אי-שוויון המשולש $|x^3+x^2+3x+7|\le|x|^3+|x|^2+3|x|+7$
- יהיו x_0 ו C מספרים ממשיים אז: א. $\lim_{x\to x_0} C=C$ ב. $\lim_{x\to x_0} x=x_0$
- אם $\lim g(x)=M$ ו $\lim_{x\to a} f(x)=L$ אז:
  א. $\lim (f+g)(x)=\lim f(x)+\lim g(x)=L+M$
  ב. $\lim (f\cdot g)(x)=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=L\cdot M$
  ג. אם $M\neq0$ אז: $\lim\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{M}$
- אם $\lim_{x\to a} f(x)=L$ אזי $\lim[f(x)]^n=L^n$ עבור n טבעי.
- $\lim\frac{x}{y}=\frac{\lim x}{\lim y}$
- $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
- כאשר x_0 מאפס את המונה או המכנה ננסה לפשט ולצמצם את החלק שמאפס.
- $\underset{x\to x_0}{f(x)-L\to0}\Leftrightarrow \underset{x\to x_0}{f(x)\to L}$
- טריק שימושי: $|x|=|(x-2)+2|\le|x-2|+|2|<$ מספר שחסמנו איתו $+2$
- * כשעושים ערך מוחלט לכל הא שוויון הצדדים מתהפכים
- לפני שדנים ב $\lim_{x\to a} f(x)$, יש לוודא שהפונקציה $f(x)$ מוגדרת בסביבה נקובה של $x=a$, פרט אולי ל $x=a$ עצמה (נקובה). אם התנאי לא מתקיים אז מראש אין גבול

- טריק - נכפול ונחלק בצמוד של המכנה ~~ובמונה~~ ובמכנה ניעזר בנוסחא. $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$
- אם לפונקציה יש גבול סופי כאשר $x\to a$ אז בסביבה נקובה של $x=a$, $f(x)$ חסומה.
- $\sin\frac{1}{x}$ - חסומה
- ← מכפלת פונקציה אפסה בפונקציה חסומה היא פונקציה אפסה.
- ← משפט הסנדוויץ' - אם $f(x)\le h(x)\le g(x)$ וגם $\lim f(x)=\lim g(x)=L$ $\Leftarrow$ $\lim\limits_{a\to x} h(x)=L$
- ← $f(x)<0 \Leftarrow L<0$, $f(x)>0 \Leftarrow L>0$
- ← $L\le 0 \Leftarrow f(x)\le 0$, $L\ge 0 \Leftarrow f(x)\ge 0$
- $L_f\le L_g \Leftarrow f(x)\le g(x)$
- אם סביב הנקודה $x=a$, $f(x)$ מחליפה סימן וגם $\exists\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ אז $L=0$
- $\exists\lim[f(x)+g(x)]=L$ אז,

א. אין זה גורר הכרח שקיים כל אחד מהגבולות של $f(x)$ ושל $g(x)$

ב. אם קיים הגבול של אחת הפונקציות אבל של השניה לא אז $\nexists\lim[f(x)+g(x)]$

- טבלה עם משפט ההגדרה: (סופי, ∞, $-\infty$)

לכל:		
L סופי	$L=\infty$	$L=-\infty$
$(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$	(R,∞)	$(-\infty,S)$
$\varepsilon>0$	$R>0$	$S<0$
קיים:		
a סופי	$a=\infty$	$a=-\infty$
$(a-\delta,a+\delta)-\{a\}$	(M,∞)	$(-\infty,N)$
$\delta>0$	$M>0$	$N<0$
כך ש:		
a סופי	$a=\infty$	$a=-\infty$
$0<\lvert x-a\rvert<\delta$	$x>M$	$x<N$

$\Downarrow$ (בשלילה של המשפט זה הופך ל"לא קיים")

L סופי	$L=\infty$	$L=-\infty$
$\lvert f(x)-L\rvert<\varepsilon$	$f(x)>R$	$f(x)<S$

- בהוכחות של אי קיום גבול נפצל ל-3 מקרים: L-סופי, $L=\infty$, $L=-\infty$
- אם הפונקציה חסומה ואז הגבול לא יכול להיות $\pm\infty$
- באי קיום גבול במקרה סופי נמצא קודם ε כך ש: $2\varepsilon <$ המרחק בין התחומים בו הפונקציה מוגדרת
  ואז נניח עבור 2 התחומים $L-\varepsilon < f(x) < L+\varepsilon$
  ונראה כי L נמצאת בשני תחומים זרים ונקבל סתירה!
- באי קיום גבול במקרה האינסופי $(\infty, -\infty)$ ניקח דוגמא נגדית ונראה כי קיים M עבורו $f(x) \not> M$ ו-s עבור $f(x) \not< s$.
- משפטים של חל ← מתאימים גם ל-L-סופי ו-$a=\pm\infty$

- $\infty+\infty=\infty$ $\quad \infty+c=\infty$ $\quad -\infty-\infty=-\infty$ $\quad -\infty+c=-\infty$

$$c\cdot\infty=\begin{cases}\infty & c>0\\ \text{לא מוגדר} & c=0\\ -\infty & c<0\end{cases} \qquad c\cdot(-\infty)=\begin{cases}-\infty & c>0\\ \text{לא מוגדר} & c=0\\ \infty & c<0\end{cases}$$

$$\frac{1}{0^+}=\infty \qquad \frac{1}{0^-}=-\infty \qquad \infty^n=\infty,\ n\in\mathbb{N} \qquad \infty(-\infty)=(-\infty)\cdot\infty=-\infty$$

$$(-\infty)^n=\begin{cases}-\infty & n \text{ אי-זוגי}\\ \infty & n \text{ זוגי}\end{cases} \qquad \frac{c}{\pm\infty}=0$$

- ביטויים לא מוגדרים:

$$\frac{0}{0},\ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \infty-\infty,\ -\infty+\infty,\ 0\cdot\infty,\ 0(-\infty),\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$$

- $$\lim_{x\to a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to a}|f(x)| = |L|, \quad |-\infty|=\infty$$

- $(\infty)^n=\infty \quad (-\infty)^n=\infty$ $\qquad$ n - זוגי:
  $(\infty)^n=\infty \quad (-\infty)^n=-\infty$ $\qquad$ n - אי זוגי:

- גבול כאשר $a=\pm\infty$ בפולינומים
  $\lim P(x) = \lim a_n x^n$
- החזקה הגבוהה ביותר
- בפונקציות רציונליות או מנה של פונקציות כאשר כל אחת מהן מורכבת מצירוף של חזקות רציונליות של פונקציות ב-x. יש לצמצם תחילה מונה ומכנה בחזקה הדומיננטית במכנה.
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, $\quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{\sin x}{x}=0$, $\quad \lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ לא קיים!

Scanned with CamScanner

- גבול חד צדדי -

כאשר x שואף ל-x_0 מצד ימין (+) נסמן: $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ $\quad f_+(x_0)$

כאשר x שואף ל-x_0 מצד שמאל (−) נסמן: $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ $\quad f_-(x_0)$

- הגדרת גבול מימין - הגבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל-a מימין הוא L, אם לכל סביבה של $y=L$ קיים $\delta>0$ כך ש- $a<x<a+\delta$
  - L סופי: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש $a<x<a+\delta \Rightarrow L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$
  - $L=\infty$: לכל $R>0$ קיים $\delta>0$ כך ש $a<x<a+\delta \Rightarrow f(x)>R$
  - $L=-\infty$: לכל $S<0$ קיים $\delta>0$ כך ש $a<x<a+\delta \Rightarrow f(x)<S$

- הגדרת הגבול משמאל - הגבול של $f(x)$ כאשר x שואף ל-a משמאל הוא L, אם לכל סביבה V_L של $y=L$ קיים $\delta>0$ כך ש- $a-\delta<x<a \Rightarrow f(x)\in V_1$
  - L סופי: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש $a-\delta<x<a \Rightarrow L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$
  - $L=\infty$: לכל $R>0$ קיים $\delta>0$ כך ש $a-\delta<x<a \Rightarrow f(x)>R$
  - $L=-\infty$: לכל $S<0$ קיים $\delta>0$ כך ש $a-\delta<x<a \Rightarrow f(x)<S$

- משפט - $\exists \lim_{x \to a} f(x)=L \iff \exists \lim_{x \to a^+} f(x)=L \;,\; \exists \lim_{x \to a^-} f(x)=L$

- $\frac{1}{0^+}=\infty \;,\; \frac{1}{0^-}=-\infty$

- כל המשפטים שלמדנו עד כה תקפים בגבולות חד צדדיים.