לינוי אלימלך
319122610

1. בתרגיל הזה נוכיח כמה מהמקרים הפשוטים יותר של משפט הדואליות החזקה:

a. נניח ש (P) אינו בר ביצוע ו(D) אפשרי. צריך להראות ש (D) אינו מוגבל

לפי הלמה של פרקש מתקיים $\exists y': y'^T A \ge 0 \wedge y'^T b < 0$

נניח ש y הוא פתרון פיזיבילי של (D). אז מתקיים $A^T y \le c$.

נניח ש $y-\lambda y'$ כאשר $\lambda > 0$.

ונקבל $A^T(y-\lambda y') = A^T y - \lambda (y'^T A)^T \le A^T y \le c$

$b^T(y-\lambda y') = b^T y - \lambda (y'^T b) \ge b^T y$

הכוונה ש $y-\lambda y'$ הוא פתרון אפשרי של (D) וזה פתרון טוב יותר כי זה פתרון מקסימלי.

מכיוון ש $\lambda \to \infty$ הפתרון לא חסום ומתקיים:

$\forall \lambda > 0\ \exists \lambda' > \lambda : b^T(y-\lambda' y') > b^T(y-\lambda y')$

b. נניח ש (D) הוא בלתי אפשרי ו(P) הוא אפשרי. אז לפי הלמה של פרקש מתקיים

$\exists x' \ge 0 : x'^T A^T = 0 \wedge x'^T c < 0$

ואז נקבל $Ax' = 0 \wedge c^T x' < 0$

נניח ש x הוא הפתרון האפשרי של (P) ואז $x+\lambda x'$ עבור $\lambda > 0$.

על חיבור $x+\lambda x'$ לתוך (P) נקבל: $A(x+\lambda x') = Ax + \lambda A x' = Ax + 0 = b$

$c^T(x+\lambda x') = c^T x + \lambda c^T x' < c^T x$

זה אומר ש $x+\lambda x'$ הוא פתרון אפשרי של (P) וזה פתרון יותר טוב (פתרון מקסימלי)

מכיוון ש $\lambda \to \infty$ הפתרון לא חסום ומתקיים:

$\forall \lambda > 0\ \exists \lambda' > \lambda : c^T(x+\lambda' x') < c^T(x+\lambda x')$

2. בתרגיל הזה נוכיח טענה מהי דרוש להוכיח את טענת ההתכנסות עבור פוליטופ $P=\{x: Cx\le d\}$

a. אם P ריק (לא אפשרי), עפ״י הלמה של פרקש, $\exists z\ge 0$ כך ש $z^TC=0$ וגם $z^Td<0$

ניתן לשנות את z כך ש $z^Td=-1$.

אפשר לחשב בעזרת LP עבור z: $z^TC=0 \mid z^Td=-1 \mid z\ge 0$

מכיוון שהפתרון הבסיסי הוא פתרון אפשרי, אפשר לתחום ע״י גודל הקלט ונקבל $|z_i|\le 2^L$

עכשיו ניתן לשקול עבור הפתרון הבסיסי:

$$z^T(d+2^{-L'}\mathbb{1}) = -1+2^{-L'}z^T\mathbb{1} \le -1+2^{-L'}m2^L$$

עבור מספיק $L'>L$ נקבל $z^T(d+2^{-L'}\mathbb{1})<0$ עבור הפתרון הבסיסי.

לכן עפ״י הלמה של פרקש נקבל ש $P'=\{Cx\le d+2^{-L'}\}$ הוא לא אפשרי.

b. נניח ש P הוא אפשרי, אז קיים פתרון אפשרי $\bar{x}$ כך שמספק את P במצב ש
$C\bar{x}\le d\le d+2^{-L'}\mathbb{1}$

בהתחשב בכל הנקודות x שברדיוס $2^{-2L'}$ מספיק ל $\bar{x}$.

נקבל $\|x-\bar{x}\|_\infty\le 2^{-2L'}$

(נגדיר δ שהוא ההפרש המקסימלי של קורדינטה x מ $\bar{x}$. הכוונה $\delta=\max_i|\bar{x}_i-x_i|$)

ונקבל ש: $Cx=C\bar{x}+C(x-\bar{x})\le d+2^Ln\delta\mathbb{1}$ כאשר $x-\bar{x}\le\delta\mathbb{1}$ וגם $Cy\le 2^Lny$

עבור נקודה נתון y.

לפתח תחמנו את הביטוי $2^Ln\delta$: $\delta<2^{-2L'}$. ולכן $2^Ln\delta\le 2^{L+\log n-2L'}$

עבור הפתרון x שהוא אפשרי, נדרש $Cx\le d+2^{-L'}\mathbb{1}$ מכאן $L+\log n-2L'<-L'$

נסדר את הביטוי כך $L'>L+\log n$. ולכן P הוא אפשרי. קיים רדיוס $2^{-2L'}$

כך שהוא מוכל ב $\{x: Cx\le d+2^{-L'}\mathbb{1}\}$

מכאן ההוכחה אפשר לקחת ש $L'>\max\{L\log m, L+\log n\}$

a.3. בהינתן גרף לא מכוון $G=(V,E)$ מצא את הקליק המקסימלי ב G.

בעיית קליקה מקסימלית יכולה לחושב כבעיית IP כך:

- משתנים: נגדיר משתנה בינארי x_i לכל קודקוד i בגרף $G=(V,E)$.
  המשתנה x_i יהיה 1 אם הקודקוד i נכלל בקליקה ו 0 אחרת.
- פונקציה אובייקטיבית: המטרה למקסם את גודל הקליקה אשר שווה ערך למקסום סכום המשתנים x_i
  לכן הפונקציה היא $\text{maximize} \sum_{i\in V} x_i$
- אילוצים: האילוצים מבטיחים שאם שני קודקודים אינם מחוברים בקבוצה, לא ניתן לכלול את שניהם בקליקה. עבור כל זוג קודקודים i,j שאינם מחוברים בקבוצה, יש לנו את האילוץ:

$$x_i + x_j \le 1 \quad \forall (i,j)\notin E$$

האילוץ מבטיח שלכל היותר אחד מ x_i או x_j יכול להיות 1. כלומר לכל היותר ניתן לכלול אחד מהקודקודים i,j בקליקה.

- Integer Programing formulation - הניסוח המלא של הבעיה הוא:

$$\text{maximize} \sum_{i\in V} x_i$$

$$\text{subject to } x_i + x_j \le 1 \quad \forall (i,j)\notin E \qquad x_i\in\{0,1\} \quad \forall i\in V$$

ניסוח זה מבטיח שהפתרונות האפשריים של ה IP תואמים לקליקות בגרף והפתרון האופטימלי של ה IP מתאים לקליקה בגודל מקסימלי בגרף.

b. בהינתן סט של שמות $w_1, w_2 \dots w_n$, $U=\{w_1,\dots,w_n\}$ ומטרה t, המטרה היא למצוא subset $S\in U$ שמקיים $\sum_{w\in S} w = t$

ניתן לנסח את בעיית set cover כבעיית תכנות שלמים IP באופן הבא:

משתנים: נגדיר משתנה בינארי x_i עבור כל מספר שמופיע בקבוצה $U=\{w_1,\dots,w_n\}$

המשתנה x_i יהיה 1 אם המספר נכלל בתת הקבוצה S או 0 אחרת.

פונקציה אובייקטיבית: במקרה זה אין מטרה ספציפית למקסם או למזער. מעוניינים למצוא פתרון כך בודק שעונה על כל האילוצים לכן נגדיר פונ' מטרה להיות כל קבוע למשל:

$$\text{minimize } 0$$

אילוצים: האילוץ מבטיח שסכום המספרים השמים בקבוצה המשנה S שווה ל t

נקבל כך: $\sum_{i\in U} w_i \cdot x_i = t$

↓

Integer programing formulation: הניסוח המלא של ה IP של בעיית ה set cover הוא:

$$\text{minimize } 0$$

$$\text{subject to } \sum_{i\in U} w_i \cdot x_i = t \qquad x_i \in \{0,1\} \ \forall i \in U$$

ניסוח זה מבטיח שהבחירות הבוליאניות של ה IP תואמות לאת הקבוצה של U שהסכום שלהן שווה ל t וגם פתרון אפשרי של ה IP מתאים לאת הקבוצה S חוקית

3.ג. בעיית min coloring יכולה לנוסח בצורה הבאה כ IP:

~~משתנים:~~ נגדיר משתנה בינארי $x_{i,j}$ לכל קודקוד i בגרף $G=(V,E)$ לכל צבע j

המשתנה $x_{i,j}$ יהיה 1 אם הקודקוד i הוא צבוע בצבע j, ואפס אחרת.

פונקציה אובייקטיבית: האובייקט הוא למזער את המספר המינימלי של צבעים להשתמש. נגדיר משתנה חדש z_j לכל צבע j שהוא 1 אם צבע j בשימוש בגרף ואפס אחרת.

עם המשתנים האובייקטיבית תהיה $\text{minimize} \sum_j z_j$

הגבלות: הגבלות מבטיחות שהקודקודים צבועים כראוי עם הצבע שמותר להם.

לכל קודקוד i יש את ההגבלה הבאה:

$$\sum_j x_{i,j} = 1 \quad \forall i \in V$$

לכל קשת (i,k) בגרף, ולכל צבע j יש הגבלה:

$$x_{i,j} \le z_j \quad \forall i \in V, \forall j$$

Integer programming Formulation: של השלם הוא:

$$\text{minimize} \sum_j z_j$$

$$\text{subject to} \sum_j x_{ij} = 1 \quad \forall i \in V$$

$$x_{ij} + x_{kj} \le 1 \quad \forall (i,k) \in E, \forall j$$

$$x_{ij} \le z_j \quad \forall i \in V, \forall j$$

$$x_{ij}, z_j \in \{0,1\} \quad \forall i \in V \ \forall j$$

הפורמולה מבטיחה את הפתרון האפשרי והפתרון האופטימלי.