עבודה מספר 3 אלגוריתמים מתקדמים

עינב אלימלך 319122[illegible]0

שאלה 1

חברה של תפוזים מגדלת ומוכרת. יש להם שני שדות ו3 חנויות. הדרישות החודשיות בכל חנות הן 8, 5, 7.
השדה בגליל מייצר 10 טון בחודש ובנגב 9 טון בחודש. ועלות ההובלה של טון מפורטת בטבלה:

	Tel Aviv	Haifa	Jerusalem
Galilee	5	3	7
Negev	6	10	4

המטרה היא להבין כמה טונות של תפוזים יש להעביר מכל שדה לכל חנות על מנת לעמוד בדרישות תוך מזעור סך המשלוחים עלות. נסח בעיה זו כתכנית לינארית. לאחר מכן השתמש בפותר תכנית לינארית כלשהו כדי לפתור את הבעיה. בפתרון שלך צריך לכתוב מה התכנית שאתה פותר ולתת לשניהם את האופטימום והפתרון האופטימלי. שמור צריך לכתוב מהי העלות הכוללת המינימלית וכמה יש להעביר טונות מכל שדה לכל עיר.

פתרון:

בשאלה הזו צריך להבין כמה טון תפוזים יש להעביר מכל שדה לכל חנות, על מנת לעמוד בדרישות תוך כדי מזעור עלות משלוח כוללת.
נשתמש בתכנות לינארי כמו שלמדנו בכיתה ולשם כך נגדיר את משתני ההחלטה, את פונקציית המטרה והאילוצים הלינאריים.

משתני ההחלטה הם:

x_{ij} – כמות התפוזים שמועברים משדה i לחנות j כאשר $i \in$ {נגב, גליל} ו- $j \in$ {ירושלים, חיפה, תל אביב}

הפונקציה האובייקטיבית ומה נרצה למזער עבורה את עלות המשלוחים הכוללת שהיא סכום עלות ההובלה כפול כמות התפוזים המועברת מכל שדה לכל חנות. בקצר נרצה למזער את הפו' הבאה:

Minimize: $5x_{\text{גליל, תל אביב}} + 3x_{\text{גליל, חיפה}} + 7x_{\text{גליל, ירושלים}} + 6x_{\text{נגב, תל אביב}} + 10x_{\text{נגב, חיפה}} + 4x_{\text{נגב, ירושלים}}$

בכפוף לאילוצים הלינאריים הבאים:

1. כמות התפוזים המובלת מכל שדה לא תעלה על ייצורו.

$x_{\text{גליל, תל אביב}} + x_{\text{גליל, חיפה}} + x_{\text{גליל, ירושלים}} \le 10$

$x_{\text{נגב, תל אביב}} + x_{\text{נגב, חיפה}} + x_{\text{נגב, ירושלים}} \le 9$

המשך ←

ב. כמות האבוקדו המועברת לכל חנות חייבת לעמוד בביקוש (הדרישה החודשית לכל חנות):

עבור תל אביב: $X_{\text{תל אביב, מפעל}} + X_{\text{תל אביב, נמל}} \geq 8$

עבור חיפה: $X_{\text{חיפה, מפעל}} + X_{\text{חיפה, נמל}} \geq 5$

עבור ירושלים: $X_{\text{ירושלים, מפעל}} + X_{\text{ירושלים, נמל}} \geq 6$

ג. כמות האבוקדו המועברת בדרכה להיות לא שלילית $\forall i,j \quad X_{i,j} \geq 0$

עכשיו נשתמש בפותר תכנות לינארי. נזין את פונ' המטרה ואת האילוצים שתיארתי.
הפותר יספק את הפתרון האופטימלי שיפחית את עלות ההובלה המינימלית, כמות האבוקדו שיש להוביל מכל שדה לכל חנות כדי לעמוד בדרישות.
נקבל העלות הכוללת המינימלית היא 82 (objective function) וזה כמובן מתוך 1000 שקל.
נקבל שהמשתנים המדויקים הם:

$X_{\text{תל אביב, מפעל}} = 5$

$X_{\text{חיפה, מפעל}} = 5$

$X_{\text{ירושלים, מפעל}} = 0$

$X_{\text{תל אביב, נמל}} = 3$

$X_{\text{חיפה, נמל}} = 0$

$X_{\text{ירושלים, נמל}} = 6$

המשמעות היא שכדי למזער את הפו' האובייקטיבית יש להקצות:
5 יחידות מהמפעל לתל אביב
5 יחידות מהמפעל לחיפה
ואף אחד מהמפעל לירושלים
באופן דומה יש להקצות 3 יחידות מהנמל לתל אביב,
אף אחד מהנמל לחיפה
ו6 יחידות מהנמל לירושלים.

שאלה 2

השתמשו בגרסה השנייה של הלמה של פרקש שהצגנו בכיתה כדי להוכיח את הנוסח המקורי הבא:
נניח ש $\{x\ge 0, Ax=b\}$ הוא מערכת של אי שוויון לינארי.
אם זה בלתי אפשרי, אז יש $y\in R^n$ כזה שמקיים $y^TA\ge 0$ ועדיין $y^Tb<0$.

פתרון

הגרסה השנייה של הלמה של פרקש אומרת כך:
בהינתן מטריצה $A\in R^{m\times n}$ ווקטור $b\in R^m$, לפחות ורק אחד מהתנאים הבאים מתקיים:

- קיים $x\in R^n$ כך ש $Ax=b$ וגם $x\ge 0$
- קיים $y\in R^m$ כך ש $y^TA\ge 0$ וגם $y^Tb<0$

עכשיו בואו נוכיח את הנוסחה המקורית:
בהינתן $Ax=b$ $x\ge 0$ מערכת אי שוויון לינארית.
אם יש פתרון בלתי אפשרי, אז קיים $y\in R^n$ כך ש $y^TA\ge 0$ וגם $y^Tb<0$
נניח שהמערכת הבאה מתקיימת $Ax=b$, $x\ge 0$ ובלתי אפשרית (בלתי ניתנת לביצוע). לפי הגרסה השנייה של הלמה של פרקש, אם המערכת אינה ניתנת לביצוע, אז האמירה השנייה חייבת להיות נכונה.
לכן קיים $y\in R^m$ כך ש $y^TA\ge 0$ וגם $y^Tb<0$.

עם זאת בניסוח המקורי, אנחנו מחפשים קיומו של $y\in R^n$ ולא ל $y\in R^m$.
אי התאמה זו נוצרת מכיוון שבניסוח המקורי אנחנו רואים y כמשתנה כפול המשויך לאילוצים $Ax=b$, בעוד שבגרסה השנייה של הלמה של פרקש, y משויך לאילוצים $Ax\ge b$.

כדי ליישב את הפערים, נשקול את הטרנספוזיציה של המערכת $Ax=b$ שנותנת לנו $A^Ty=b^T$.

כעת y הוא וקטור ב $\mathbb{R}^n$ כנדרש $\Leftarrow y\in\mathbb{R}^n$-

לכן אם המערכת $Ax=b$, $x\geq 0$ היא אינה ניתנת לביצוע, אז מתקיים $y\in\mathbb{R}^n$ כך ש $y^TA\geq 0$ וגם $y^Tb<0$ שהוא בדיוק הניסוח המקורי למה ש פרקש. מש"ל

שאלה 3

פתרון

(a) (i) לפי האלגוריתם נבחר אינדקס אחד להכניס ולהוציא בכל פעם. כאשר מכניסים את $\bar{A}_{j,s}>0$ ש אשר נוציא את i ונכניס j. במקרה הזה זה יהיה עבור $j=s$, $t=i$.

(ii) מקודם z לא היה בבסיס בניגוד לכך שהוא נמצא עכשיו ולכן זהו z הפבסף. בפתרון שלנו t להיות האינדקס הכי קטן שהוא הפבסף וגם $t\neq z$ ולכן בהכרח $t>z$.

(iii) מתקיים $t\in B$ ולכן מהגדרת $\hat{c}$ מתקיים $\hat{c}_t=0$. האלגוריתם בוחר את מי להכניס לבסיס החדש לפי $(\hat{c}_N)<0$ ובחרנו להכניס את z במקרה הזה ולכן מתקיים ש $\hat{c}_s<0$ כנדרש.

(b) (i) לפי סעיף a, $\bar{A}_{t,s}>0$, $d_B=-\bar{A}_s$ ולכן $d_t<0$.
עכשיו מההגדרה של d נסיק כי $d_s=1$.

(ii) $j\in B$, $j\neq t$ ו j הפבסף, זה נתון.
צריך להראות ש $d_j<0$ או לחלופין להוכיח $\bar{A}_{j,s}>0$.
מתקיים גם $\bar{b}_t=\bar{b}_j=0$ כי הם גם הפבספים ומקטנת $\bar{b}$.
בבחירת ה i המינימלי $\frac{\bar{b}_i}{\bar{A}_{i,s}}$ מתוך $\min \bar{A}_{i,s}>0$ בחרנו בשלילה בן j
וזה בעצם בסתירה לכך ש t הוא האינדקס ההפכפך הכי קטן.

(iii) לפי הגדרת d, מתקיים $d_j=0$ עבור $j\in N\setminus s$

(iv) ניתן לראות שמתקיים $Ad=A_Bd_B+A_Nd_N$
וגם מתקיים $d_B=-\bar{A}_s=-(A_B^{-1}A_N)_s$ $\quad d_N=e_s$ ↓

ולכן מתקיים ואפשר להסיק ש $A_N d_N = (A_N)_s$

ואז ⇐ $Ad = A_B d_B + A_N d_N = -A_B(A_B^{-1}A_N)_s + A_N e_s =$
$= -(A_N)_s + (A_N)_s = 0$

(c) (ii) בחרנו להכניס את s לבסיס לפי האלגוריתם, התנאי הנדרש לבחור משהו להכנס לבסיס זה $\bar{c}_s < 0$.

(iii) יהיה j אינדקס של משתנים הפכפך כלשהו שונה מ-s.
נחלק למספר מקרים:
אם $j \notin B'$ כאשר $s \neq j$, כי בחרנו את s להיות ההפכפך הכי זול.
כלל בחירת האינדקס k שיכנס לבסיס הוא האינדקס המינימלי $(\bar{c}_{N'})_k < 0$. לא בחרנו ב-j כלל לכן בהכרח מתקיים:
$(\bar{c}_{N'})_j = \bar{c}'_j \geq 0$
אם $j \in B'$. מהגדרת הווקטור $\hat{c}$ כל איברי הבסיס הם 0 ולכן מתקיים $\bar{c}'_j = 0$
מש"ל.

(d) $\bar{c}^T = c^T - c_B^T A_B^{-1} A$
$\bar{c}'^T = c^T - c_{B'}^T A_{B'}^{-1} A$
$\hat{f} = \bar{c}^T - \bar{c}'^T = c^T - c_B^T A_B^{-1} A - c^T + c_{B'}^T A_{B'}^{-1} A =$
$= c_{B'}^T A_{B'}^{-1} A - c_B^T A_B^{-1} A = (c_{B'}^T A_{B'}^{-1} - c_B^T A_B^{-1})A$
עבור $v = (c_{B'}^T A_{B'}^{-1} - c_B^T A_B^{-1})$
מתקיים $\hat{f}^T \cdot d = v^T A \cdot d = v^T \cdot 0$ כי $Ad = 0$

(e) $\hat{f}_t = \hat{c}_t'^T - \hat{c}_t^T$, $\hat{c}_t' < 0$ (לפי סעיף (i)(c)) , $\hat{c}_t = 0$ (לפי סעיף (iii)(a)) $\rightarrow \hat{f}_t < 0$

$\hat{f}_s = \hat{c}_t'^T - \hat{c}_t^T$, $\hat{c}_s' \geq 0$ (לפי סעיף (ii)(c)) , $\hat{c}_s < 0$ (לפי סעיף (iii)(a)) $\rightarrow \hat{f}_s > 0$

$j \in B, j \neq t$, j הפכפך : $\hat{f}_j = \hat{c}_j'^T - \hat{c}_j^T$, $\hat{c}_j' \geq 0$ (לפי סעיף (ii)(c)) , $\hat{c}_j = 0$ ($j \in B$ בסיס) $\rightarrow \hat{f}_j \geq 0$

$j \in B$, j לא הפכפך : $\hat{f}_j = \hat{c}_j'^T - \hat{c}_j^T$, $\hat{c}_j' = 0$ ($j \in B'$ בסיס שלא הפכפך) $\rightarrow \hat{f}_j \geq 0$

$\hat{c}_j = 0$ ($j \in B$ בסיס) ; $\rightarrow \hat{f}_j = 0$

(f) נחשב את ערכו של ט.

נסתכל על הסכום $\sum_{i=1}^{n} f_i d_i$ ונסיק עבור כל i בנפרד.

עבור $i = s$ מתקיים $f_i > 0$ $d_i = 1$ ולכן $f_i d_i > 0$

עבור $i = t$ מתקיים $d_i < 0$ $f_i < 0$ ולכן $f_i d_i > 0$

עבור i הפכפך $i \in B$: $d_i \geq 0$ $f_i \geq 0$ ולכן $f_i d_i \geq 0$

עבור i לא הפכפך $i \in B$ $f_i = 0$ ולכן $f_i d_i = 0$

עבור $i \neq s$ $i \in N$: $d_i = 0$ ולכן $f_i d_i = 0$

נסכם עבור הסכום הכולל ונקבל $\sum_{i=1}^{n} f_i d_i > 0$

שאלה 4

a. צריך להוכיח שאם A היא psd אז כל הערכים העצמיים שלה אינם שליליים.

פתרון

בהתחשב בכך ש A היא מטריצה psd נרצה להוכיח שכל הערכים העצמיים שלה אינם שליליים.

נתחיל בהתחשב בווקטור עצמי v של A עם ערך עצמי λ.

לפי ההגדרה מתקיים $Av=\lambda v$

לוקחים הגדרה של שני הצדדים ונקבל $v^TA^T=\lambda v^T$

נכפיל את הצדדים ב v $v^TAv=\lambda v^Tv$

מכיוון ש A היא psd, אנחנו יודעים ש $v^TAv \geq 0$.

כמו כן v^Tv הוא הריבוע של הנורמה האוקלידית של v שהוא תמיד לא שלילי. לכן נקבל $\lambda v^Tv \geq 0$

אם v אינו וקטור האפס (מאחר וקטורים עצמיים אינם אפס בהגדרה). אז $v^Tv>0$. ולכן נוכל לחלק את שני הצדדים של אי השוויון ב v^Tv כדי לקבל $\lambda \geq 0$

זה מוכיח שהערך העצמי λ של A אינו שלילי. מכיוון ש v ו λ היו שרירותיים, זה מוכיח שכל הערכים העצמיים של A אינם שליליים אם A הוא psd.

b. צריך להוכיח שאם $A\in R^{n\times n}$ היא מטריצה סימטרית כך שכל הערכים העצמיים שלה אינם שליליים אז קיים $B\in R^{n\times n}$ כך ש $A=B^TB$

פתרון

מכיוון ש A היא מטריצה סימטרית אמיתית, לפי המשפט הספקטרלי, ניתן לאלכסן אותה בצורה אורתוגונלית. זה אומר שקיימת מטריצה אורתוגונלית P כלומר $P^{-1}=P^T$ ומטריצה אלכסונית D כך: $A=PDP^T$

המטריצה האלכסונית D מכילה את הערכים העצמיים של A שכולם אי שליליים.
לכן נוכל לכתוב D בתור $D=C^2$ כאשר C היא מטריצה אלכסונית
נוספת שהערכים שלה הם השורשים הריבועיים של הערכים המתאימים בD.

עכשיו נגדיר $B=PC$ כאשר $B^T=C^TP^T$ ונקבל

$$B^TB=(C^TP^T)(PC)=C^T(P^TP)C=C^2=D$$

אם נציב בהצגה למשוואה של A נקבל:

$$A=PDP^T=PB^TBP^T=(PB^T)(PB^T)^T=B^TB$$

נוכל להראות שאם A היא מטריצה סימטרית אממשית עם D הערכים העצמיים הם אי שליליים, אז קיימת מטריצה B כך ש $A=B^TB$.

c. צריך להוכיח שאם $A\in R^{n\times n}$ אז קיים $B\in R^{n\times n}$ כך ש $A=B^TB$ מתקיים שA היא psd

<u>פתרון</u>

בהינתן ש A היא מטריצה כך שקיימת מטריצה B עם $A=B^TB$, אנחנו רוצים להראות ש A היא חיובית למחצה (PSD).

נזכיר שמטריצה A היא PSD עבור כל $v\in R^n$, $v^TAv\geq 0$

ניקח שיש וקטור כלשהו $v\in R^n$ ויש לנו: $v^TAv=v^TB^TBv=(Bv)^T(Bv)$

הביטוי $(Bv)^T(Bv)$ הוא הריבוע של הנורמה האוקלידית של הוקטור Bv, שהוא תמיד אי שלילי ולכן נקבל ש $v^TAv=(Bv)^T(Bv)\geq 0$

מכיון ש v היה שרירותי, זה מוכיח לנו שלכל $v\in R^n$ מתקיים $v^TAv\geq 0$, זו ההגדרה של מטריצת PSD.

לכן אם A מטריצה כך שמתקיים $A=B^TB$ אז A היא PSD.

מהדברים שהוכחתי כאן זה מוכיח לנו ששלושת המשפטים מתקיימים עבור מטריצת PSD:

a. לכל $v\in R^n$ מתקיים $v^TAv\geq 0$

b. כל הערכים העצמיים של A אי שליליים

c. $A=B^TB$ עבור איזשהו $B\in R^{n\times n}$

מש"ל.