Automi e Linguaggi Formali
Esame del 12 Giugno 2018 – Parte II

Tempo a disposizione: 1 h 30 min

1. La domanda riguarda la dimostrazione che per ogni PDA P che accetta per stack vuoto, esiste una grammatica G_P che genera lo stesso linguaggio che P riconosce. Ora, immaginate che P abbia solo 2 stati (p e q) e che abbia la seguente transizione: $\delta(q, a, X) = \{(q, YZ)\}$. Mostrare le produzioni che G_P possiede in corrispondenza di questa transizione.

Le produzioni sono:

$$[qXq] \to a[qYq][qZq] \mid a[qYp][pZq]$$
$$[qXp] \to a[qYq][qZp] \mid a[qYp][pZp]$$

2. Data la seguente CFG: $S \to ASB \mid \epsilon \quad A \to aAS \mid a \quad B \to SbS \mid A \mid bb$, descrivere come si eliminano da essa le $\epsilon-$produzioni, ottenendo una grammatica che genera $L(S) - \{\epsilon\}$.

La sola variabile che può generare ϵ è S, quindi la nuova grammatica ha le seguenti produzioni:

$$S \to ASB \mid AB \quad A \to aAS \mid aA \mid a \quad B \to SbS \mid bS \mid Sb \mid b \mid A \mid bb$$

3. Il Teorema di Rice dimostra che tutte le proprietà sui linguaggi RE (cioè riconosciuti dalle Macchine di Turing) sono indecidibili. Consideriamo per esempio la seguente proprietà P_{CF}: il linguaggio è Context Free. Spiegare come viene definito il corrispondente linguaggio $L_{P_{CF}}$ che è indecidibile per il Teorema di Rice.

$L_{P_{CF}}$={ M | M è una TM che accetta un linguaggio CF}

4. Si chiede di descrivere la Forma Normale di Chomsky, di descrivere l'enunciato del pumping Lemma e di spiegare (meglio che potete) come si arriva a dimostrare il pumping Lemma partendo dalla Forma Normale.

La forma normale di Chomsky prevede solo 2 tipi di produzioni: $A \to a \mid BC$. In classe abbiamo dimostrato che ogni albero di derivazione di una grammatica in CNF è tale che se n è l'altezza dell'albero allora il prodotto dell'albero ha lunghezza minore o uguale di 2^{n-1}. Per cui se m è il numero di variabili della grammatica, allora un qualsiasi albero di derivazione con prodotto 2^m ha altezza almeno $m + 1$ e quindi sul suo cammino più lungo almeno una variabile ripete. Questo fatto consente di dimostrare che per ogni linguaggio CF esiste un valore $n \geq 2^m$ tale che ogni stringa z del linguaggio lunga almeno n puo essere scomposta in 5 parti, $z = uvwxy$, con $|vwx| \leq n$, e vx non vuoto e inoltre, per ogni $i \geq 0$, anche uv^iwx^iy appartiene al linguaggio. Questo viene chiamato il pumping lemma dei CFL e serve a dimostrare che certi linguaggi non sono CF.

5. Un circuito Hamiltoniano in un grafo G è un ciclo che attraversa ogni vertice di G esattamente una volta. Stabilire se un grafo contiene un circuito Hamiltoniano è un problema NP-completo.

Un *circuito quasi Hamiltoniano* in un grafo G è un ciclo che attraversa esattamente una volta tutti i vertici del grafo *tranne uno.* Il *problema del circuito quasi Hamiltoniano* è il problema di stabilire se un grafo contiene un circuito quasi Hamiltoniano.

(a) Dimostrare che il problema è in NP fornendo un certificato per il *Sì* che si può verificare in tempo polinomiale.
Sia n il numero di vertici del grafo che è istanza di QHC. Un certificato per QHC è una sequenza ordinata di n-1 vertici distinti. Occorre tempo polinomiale per verificare se ogni nodo è collegato al successivo e l'ultimo al primo.

(b) Mostrare come si può risolvere il problema del circuito Hamiltoniano usando il problema del circuito quasi Hamiltoniano come sottoprocedura.
Dato un qualsiasi grafo G che è un'istanza di HC, costruiamo in tempo costante un nuovo grafo G' che è un'istanza di QHC, aggiungendo a G un vertice isolato (senza archi). Chiaramente G' ha un QHC sse G ha un HC.

(c) Il problema del circuito quasi Hamiltoniano è un problema NP-completo?
☐ No, è un problema in P
☐ No, è un problema NP ma non NP-completo
☐ Si
Nei precedenti punti abbiamo dimostrato che QHC è NP e che è NP-hard. Quindi è NP-completo.