## 置换群特征标规则

### 1 规则

- 1. 画出杨图
- 2. 对于给定类 $(1^{\nu_1}2^{\nu_2}...)$ 依次给出

$$1,2,3,...,
u_1,\underbrace{
u_1+1,
u_1+1,
u_1+2,
u_1+2},...$$
 $u_2$ 
対

比如 $(1^3,2),(1^2,3),(1,2^2),(1,4),(2,3),(5)$ 分别需要给出

 $(1^3, 2)$ : 12344

 $(1^2,3)$ : 12333

 $(1,2^2)$ : 12233

(1,4): 12222

(2,3): 11222

(5): 11111

- 3. 接下来就需要按照一定规则在杨图上添上这些数字。
- [1] 数字从小到大填入杨图, 需要满足从左到右不减, 从上到下也不减。
- [2] 相同的数字必须连在一块。如下图所示,前两个是允许的,最后一个是不允许的。

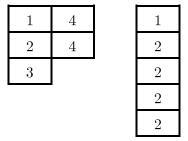
| 2 | 2 |  | 2 | 2 | 2 |   |   |
|---|---|--|---|---|---|---|---|
| 2 |   |  |   |   |   | • | 2 |

[3] 不允许在一个田字形出现完全相同的数字。

#### 4. 接下来就需要根据填出来的杨图进行运算得到特征标。

如果在杨图的一种填法中,相同的数字占了偶数行则给出一个-1,没有就给出一个1,然后把各种填法结果相加就得到特征标。

比如:



左图 4 占了 2 行, 因此给出一个-1, 右图 2 占了 4 行, 因此也给出一个-1。对于

| 1 | 3 |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 2 |   |

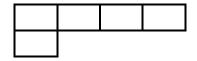
给出了两个-1, 所以最终是给出一个1。

## 2 求 S5 特征标表<sup>[2]</sup>

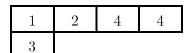
|                  | $[1^{5}]$ | $[2^{1},1^{3}]$ | $[2^{2},1^{1}]$ | $[3^1,1^2]$ | $[3^1, 2^1]$ | $[4^1,1^1]$ | $[5^{1}]$ |
|------------------|-----------|-----------------|-----------------|-------------|--------------|-------------|-----------|
| #                | 1         | 10              | 15              | 20          | 20           | 30          | 24        |
| $s[5^{1}]$       | 1         | 1               | 1               | 1           | 1            | 1           | 1         |
| $s[4^{1},1^{1}]$ | 4         | 2               | 0               | 1           | -1           | 0           | -1        |
| $s[3^{1},2^{1}]$ | 5         | 1               | 1               | -1          | 1            | -1          | 0         |
| $s[3^{1},1^{2}]$ | 6         | 0               | -2              | 0           | 0            | 0           | 1         |
| $s[2^{2},1^{1}]$ | 5         | -1              | 1               | -1          | -1           | 1           | 0         |
| $s[2^{1},1^{3}]$ | 4         | -2              | 0               | 1           | 1            | 0           | -1        |
| $s[1^{5}]$       | 1         | -1              | 1               | 1           | -1           | -1          | 1         |

特征标表第一行是恒等表示,只有一种填法。第一列是表示的维数,可以通过钩长图去求。 接下来按顺序求剩下的特征标。

#### (1) 先求表示[4,1]的特征标 $\chi^{[4,1]}$ , 给出杨图



类(13,2)给出数字1,2,3,4,4,按规则填入杨图有两种填法。



| 1 | 3 | 4 | 4 |
|---|---|---|---|
| 2 |   |   |   |

分别给出两个 1,因此特征标为 $\chi_{(\mathbf{l}^3,2)}^{[4,1]} = 1 + 1 = 2$ 。

类 $(1,2^2)$ 给出数字1,2,2,3,3,可以发现没有满足规则的填法,因此 $\chi^{[4,1]}_{(1,2^2)}=0$ 。

类(12,3)给出数字1,2,3,3,3,有一种填法。

| 1 | 3 | 3 | 3 |
|---|---|---|---|
| 2 |   |   |   |

因此 $\chi_{(1^2,3)}^{[4,1]} = 1$ 。

类(2,3)给出数字1,1,2,2,2, 有一种填法。

| 1 | 2 | 2 | 2 |
|---|---|---|---|
| 1 |   |   |   |

给出一个-1,  $\chi_{(2,3)}^{[4,1]} = -1$ 。

类(1,4)给出数字1,2,2,2,2,没有满足规则的填法,因此 $\chi_{(1,4)}^{[4,1]}=0$ 。

类(5)给出数字1,1,1,1,1,给出一种填法。

| 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|
| 1 |   |   |   |

给出一个-1,  $\chi_{(5)}^{[4,1]} = -1$ 。

这就给出了不可约表示[4,1]的全部特征标, 其他按同样方法可以给出。

# 参考

- [1] 物理学中的群论基础,徐建军
- [2] 特征标表 https://www.jgibson.id.au/articles/characters/