置换群特征标规则

1 规则

1. 画出杨图

2. 对于给定类$(1^{\nu_1}2^{\nu_2}...)$依次给出

$$1,2,3,...,\nu_1,\underbrace{\nu_1+1,\nu_1+1,\nu_1+2,\nu_1+2}_{\nu_2\text{对}},...$$

比如$(1^3,2)$,$(1^2,3)$,$(1,2^2)$,$(1,4)$,$(2,3)$,(5)分别需要给出

$$
\begin{aligned}
&(1^3,2)\text{: } 12344\\
&(1^2,3)\text{: } 12333\\
&(1,2^2)\text{: } 12233\\
&(1,4)\text{: } 12222\\
&(2,3)\text{: } 11222\\
&(5)\text{: } 11111
\end{aligned}
$$

3. 接下来就需要按照一定规则在杨图上添上这些数字。

[1] 数字从小到大填入杨图，需要满足从左到右不减，从上到下也不减。

[2] 相同的数字必须连在一块。如下图所示，前两个是允许的，最后一个是不允许的。

2	2	
2		

2	2	2

	2	2
2		

[3] 不允许在一个田字形出现完全相同的数字。

4. 接下来就需要根据填出来的杨图进行运算得到特征标。

如果在杨图的一种填法中，相同的数字占了偶数行则给出一个-1，没有就给出一个 1，然后把各种填法结果相加就得到特征标。

比如：

1	2
4	3
4	

1
2
2
2
2

左图 4 占了 2 行，因此给出一个-1，右图 2 占了 4 行，因此也给出一个-1。对于

1	3
2	3
2	

给出了两个-1，所以最终是给出一个 1。

2 求 S5 特征标表[2]

	$[1^5]$	$[2^1,1^3]$	$[2^2,1^1]$	$[3^1,1^2]$	$[3^1,2^1]$	$[4^1,1^1]$	$[5^1]$
#	1	10	15	20	20	30	24
$s[5^1]$	1	1	1	1	1	1	1
$s[4^1,1^1]$	4	2	0	1	-1	0	-1
$s[3^1,2^1]$	5	1	1	-1	1	-1	0
$s[3^1,1^2]$	6	0	-2	0	0	0	1
$s[2^2,1^1]$	5	-1	1	-1	-1	1	0
$s[2^1,1^3]$	4	-2	0	1	1	0	-1
$s[1^5]$	1	-1	1	1	-1	-1	1

特征标表第一行是恒等表示，只有一种填法。第一列是表示的维数，可以通过钩长图去求。

接下来按顺序求剩下的特征标。

（1）先求表示$[4,1]$的特征标$\chi^{[4,1]}$，给出杨图

类$(1^3,2)$给出数字$1,2,3,4,4$，按规则填入杨图有两种填法。

1	2	4	4
3			

1	3	4	4
2			

分别给出两个 1，因此特征标为$\chi^{[4,1]}_{(1^3,2)}=1+1=2$。

类$(1,2^2)$给出数字$1,2,2,3,3$，可以发现没有满足规则的填法，因此$\chi^{[4,1]}_{(1,2^2)}=0$。

类$(1^2,3)$给出数字$1,2,3,3,3$，有一种填法。

1	3	3	3
2			

因此$\chi^{[4,1]}_{(1^2,3)}=1$。

类$(2,3)$给出数字$1,1,2,2,2$，有一种填法。

1	2	2	2
1			

给出一个-1，$\chi^{[4,1]}_{(2,3)}=-1$。

类$(1,4)$给出数字$1,2,2,2,2$，没有满足规则的填法，因此$\chi^{[4,1]}_{(1,4)}=0$。

类(5)给出数字$1,1,1,1,1$，给出一种填法。

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

给出一个-1，$\chi_{(5)}^{[4,1]} = -1$。

这就给出了不可约表示$[4,1]$的全部特征标，其他按同样方法可以给出。

参考

[1] 物理学中的群论基础，徐建军

[2] 特征标表 https://www.jgibson.id.au/articles/characters/