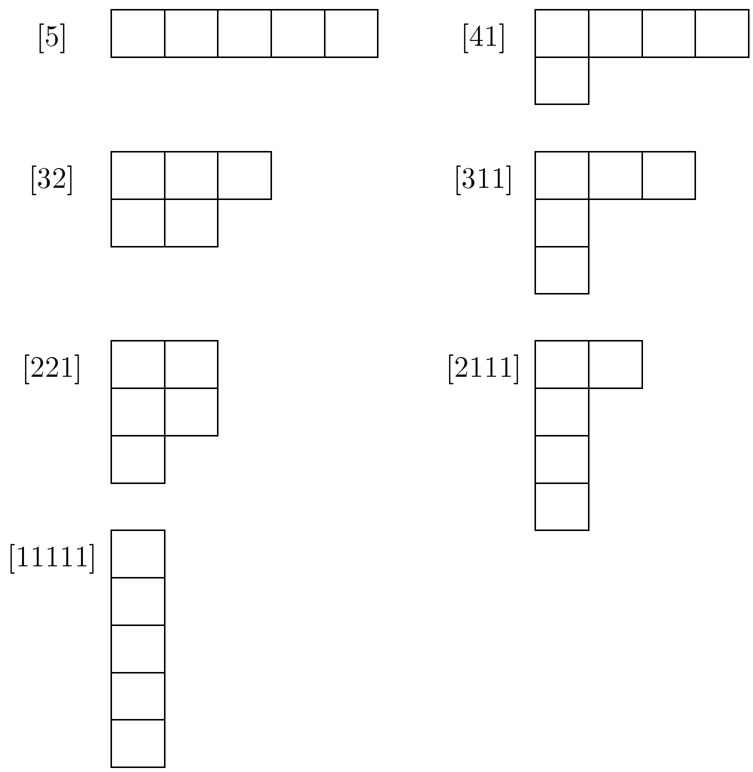
第四章作业

1. 韩其智、孙洪洲《群论》 p327 5.1 ~ 5.5

5.1 求 5 阶对称群 S5 的类，指出 S5 的哪些杨图是自轭的，哪些杨图是互为共轭的。

Answer:



由于杨图的个数等于类的个数，因此一共有 7 个类。容易看出[311]是自轭的。[5]和[11111]互为共轭，[41]和[2111]互为共轭，[32]和[221]互为共轭。

5.2 找出 4 阶对称群 S4 的所有不变子群，指出哪个不变子群的商群和 S3 同构。

Answer：

S4 一共有 24 个元素。

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

写成轮换结构为

$$\begin{aligned}&[4]:\ e\\&[31]:(123),(132),(124),(142),(134),(143),(234),(243)\\&[22]:(12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\\&[211]:(34),(24),(23),(14),(13),(12)\\&[1111]:(1234),(1243),(1324),(1342),(1423),(1432)\end{aligned}$$

接下来由这些类元素组合来构造不变子群。首先作为群一定包含了 e，其次考虑拉格朗日定理，非平凡子群的阶需为 2,3,4,6,8,12 其中一个。

因此，不变子群可能的选项有

$$G=\{e,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23)\}$$

$$A_4=\{e,\ (12)(34),\ (13)(24),\ (14)(23),\ (123),\ (132),\ (124),\ (142),\ (134),\ (143),\ (234),\ (243)\}$$

容易验证上面两个集合均满足封闭性且包含逆元，因此构成子群，因此是不变子群。

两个不变子群对应的商群的群元素个数分别为 6 和 2，显然商群S_4/A_4不可能跟 S3 同构。那么考虑S_4/G跟 S3 的同构关系。

$$S_3 = \{e,\ (23),\ (13),\ (12),\ (123),\ (132)\}$$

容易给出（见附录）

$$\begin{aligned}(23)G &= \{(23),(1243),(1342),(14)\}\\(13)G &= \{(13),(1432),(24),(1234)\}\\(12)G &= \{(12),(34),(1423),(1324)\}\\(123)G &= \{(123),(243),(142),(134)\}\\(132)G &= \{(132),(143),(234),(124)\}\end{aligned}$$

因此，$S_4/G = \{G,\ (23)G,\ (13)G,\ (12)G,\ (123)G,\ (132)G\}$跟 S3 同构。

5.3 设 An 是 n 阶对称群 Sn 的偶置换子群，证明:An 是 Sn 的不变子群,并求出商群 Sn/An。

偶置换子群的定义是所有偶置换构成的集合，单位元包含在这个集合里面。因为任意置换有确定的奇偶性，即写成对换乘积形式所用对换的个数的奇偶性是确定，所以逆和封闭性是满足的，因此构成一个子群 An。由于 Sn 中的元素无非就是偶置换和奇置换，且因为$uS_n = S_n$所以偶置换和奇置换个数相等。可以直接根据偶置换子群个数为 Sn 的一半得出它是不变的，也可以按定义

对$\forall h \in A_n,\ u \in S_n$，有

$$uhu^{-1} \in A_n$$

因此，An 是不变子群。取 1 个奇置换的元素做uH即可构造另一半的奇置换。因此，商群为

$$S_n/A_n = \{A_n,(12)A_n\}$$

5.4 5 阶对称群 S5 有多少个不等价不可约表示？每个维数是多少？

Answer：由 5.1 可知，S5 一共有 7 个类，因此由 7 个不等价不可约表示。

$$[5]\quad \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4&5\\\hline\end{array}$$

$$[41]\quad \begin{array}{lllll}1&2&3&4\\5\end{array}\qquad \begin{array}{llll}1&3&4&5\\2\end{array}\qquad \begin{array}{llll}1&2&4&5\\3\end{array}\qquad \begin{array}{llll}1&2&3&5\\4\end{array}$$

$$[32]\quad \begin{array}{lll}1&2&3\\4&5\end{array}\qquad \begin{array}{lll}1&2&4\\3&5\end{array}\qquad \begin{array}{lll}1&2&5\\3&4\end{array}\qquad \begin{array}{lll}1&3&4\\2&5\end{array}\qquad \begin{array}{lll}1&3&5\\2&4\end{array}$$

$$[311]\quad \begin{array}{lll}1&2&3\\4\\5\end{array}\qquad \begin{array}{lll}1&2&4\\3\\5\end{array}\qquad \begin{array}{lll}1&2&5\\3\\4\end{array}\qquad \begin{array}{lll}1&3&4\\2\\5\end{array}\qquad \begin{array}{lll}1&3&5\\2\\4\end{array}\qquad \begin{array}{lll}1&4&5\\2\\3\end{array}$$

$$[221]\quad \begin{array}{ll}1&2\\3&4\\5\end{array}\qquad \begin{array}{ll}1&3\\2&4\\5\end{array}\qquad \begin{array}{ll}1&4\\2&5\\3\end{array}\qquad \begin{array}{ll}1&2\\3&5\\4\end{array}\qquad \begin{array}{ll}1&3\\2&5\\4\end{array}$$

$$[2111]\quad \begin{array}{ll}1&2\\3\\4\\5\end{array}\qquad \begin{array}{ll}1&3\\2\\4\\5\end{array}\qquad \begin{array}{ll}1&4\\2\\3\\5\end{array}\qquad \begin{array}{ll}1&5\\2\\3\\4\end{array}$$

$$[11111]\quad \begin{array}{l}1\\2\\3\\4\\5\end{array}$$

由标准杨盘可以看出每个的维数分别为 1,4,5,6,5,4,1。用 Burnside 定理可以验证正确性。此外，用钩长图计算维数可以避免遗漏。

$$f^{[\lambda]}=\frac{n!}{\prod\limits_{ij}g_{ij}}$$

5.5 求 4 阶对称群 S4 的不可约表示$[\lambda]=[22]$。

Answer：

解法 1

[22]的两个标准杨盘如下所示

$$T_1^{[22]}\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \qquad T_2^{[22]}\ \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$

满足$T_2^{[22]}=\sigma_{21}T_1^{[22]}=(23)T_1^{[22]}$。

不可约表示的维数是 2。构造两个基

$$\psi_1=\psi(1234)$$
$$\psi_2=(23)\psi_1=\psi(1324)$$

标准杨盘$T_1^{[22]}$对应的杨算符$E(T_1^{[22]})=P(T_1^{[22]})Q(T_1^{[22]})$，其中

$$\begin{aligned}
P(T_1^{[22]}) &= [e+(12)]\,[e+(34)] = [e+(12)+(34)+(12)\,(34)] \\
Q(T_1^{[22]}) &= [e-(13)]\,[e-(24)] = [e-(13)-(24)+(13)\,(24)] \\
E(T_1^{[22]}) &= P(T_1^{[22]})Q(T_1^{[22]}) = [e+(12)+(34)+(12)\,(34)]\,[e-(13)-(24)+(13)\,(24)] \\
&= e-(13)-(24)+(13)\,(24)+(12)-(132)-(124)+(1324) \\
&\quad +(34)-(143)-(234)+(1423)+(12)\,(34)-(1432)-(1234)+(14)\,(23)
\end{aligned}$$

同理，标准杨盘$T_2^{[22]}$对应杨算符也可以给出

$$\begin{aligned}
P(T_2^{[22]}) &= [e+(13)]\,[e+(24)] = [e+(13)+(24)+(13)\,(24)] \\
Q(T_2^{[22]}) &= [e-(12)]\,[e-(34)] = [e-(12)-(34)+(12)\,(24)] \\
E(T_2^{[22]}) &= P(T_1^{[22]})Q(T_1^{[22]}) = [e+(13)+(24)+(13)\,(24)]\,[e-(12)-(34)+(12)\,(34)] \\
&= e+(13)+(24)+(13)\,(24)-(12)-(123)-(142)-(1423) \\
&\quad -(34)-(134)-(243)-(1324)+(12)\,(34)+(1234)+(1432)+(14)\,(23)
\end{aligned}$$

接着可以给出两个基矢量。

$$
\begin{aligned}
\Psi_1 &= E(T_1^{[22]})\psi_1 = E(T_1^{[22]})\psi(1234) \\
&= \psi(1234)+\psi(1243)+\psi(2134)+\psi(2143)+\psi(3412)+\psi(3421)+\psi(4312)+\psi(4321) \\
&\quad -\psi(1342)-\psi(1432)-\psi(2341)-\psi(2431)-\psi(3214)-\psi(3124)-\psi(4213)-\psi(4123)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Psi_2 &= E(T_2^{[22]})\psi_2 = E(T_2^{[22]})\psi(1324) \\
&= \psi(1324)+\psi(1342)+\psi(2413)+\psi(2431)+\psi(3124)+\psi(3142)+\psi(4213)+\psi(4231) \\
&\quad -\psi(1243)-\psi(1423)-\psi(2134)-\psi(2314)-\psi(3241)-\psi(3421)-\psi(4132)-\psi(4312)
\end{aligned}
$$

接着，把 S4 的 24 个群元素对应的 3 个生成元(12),(23),(34)作用到该基上，得到

$$
(12)\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}
$$

$$
(23)\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}
$$

$$
(34)\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix}
$$

解法 2

利用课件中所谓的规则，可以得到酉表示为

$$
U^{[22]}(1,2)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}
$$

$$
U^{[22]}(2,3)=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & -1\end{pmatrix}
$$

$$
U^{[22]}(3,4)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}
$$

2. 利用 S4 的特征标，计算 S4 的两个不可约表示的直积分解：

Answer：

$$[4] \otimes [22], [31] \otimes [31], [31] \otimes [22]$$

S4	(1^4)	$6(1^2 2)$	$8(13)$	$3(2^2)$	$6(4)$
[4]	1	1	1	1	1
[31]	3	1	0	-1	-1
[22]	2	0	-1	2	0
[211]	3	-1	0	-1	1
[1111]	1	-1	1	1	-1
$[4] \otimes [22]$	2	0	-1	2	0
$[31] \otimes [31]$	9	1	0	1	1
$[31] \otimes [22]$	6	0	0	-2	0

利用特征标正交关系可以投影出

$$\begin{aligned}
[4] \otimes [22] &= [22] \\
[31] \otimes [31] &= [4] \oplus [31] \oplus [22] \oplus [211] \\
[31] \otimes [22] &= [31] \oplus [211]
\end{aligned}$$

附录

1 利用 Python 的 sympy 库进行快速置换群的运算。

如要计算$(12)(34)\cdot(13)(24)$，执行

```
from __future__ import division
from sympy import *
from sympy.combinatorics import Permutation
from sympy.combinatorics.perm_groups import PermutationGroup
a = Permutation(1,2)(3,4)
b = Permutation(1,3)(2,4)
c = a*b
```

得到结果$c=(14)(23)$