

第三章作业

1 韩其智、孙洪洲《群论》 p325 4.3, 4.4, 4.5, 4.7, 4.9

4.3 求出二维转动群的所有不等价不可约表示和双值表示.

Answer:

因为 $SO(2)$ 是一个 Abel 群, 由舒尔引理可知 $SO(2)$ 的所有不可约表示都是一维的, 且满足

$$a(\theta_1 + \theta_2) = a(\theta_1)a(\theta_2)$$

上式对 θ_1 求导, 并令 $\theta_1 = 0$ 。并由 $\left. \frac{da(\theta_1 + \theta_2)}{d\theta_1} \right|_{\theta_1=0} = \frac{da(\theta_2)}{d\theta_2}$, 得到

$$a(\theta) = Ce^{A\theta}$$

其中, $A = \left. \frac{da(\theta)}{d\theta} \right|_{\theta=0}$ 。由 $a(0) = 1$, 得到

$$a(\theta) = e^{A\theta}$$

为了满足么正性, 令 $A = im$, 得到

$$a(\theta) = e^{im\theta}$$

(1) 实空间旋转

对于实空间三维旋转, 周期性边界条件为 $a(\theta) = a(\theta + 2\pi)$, 有 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 。

一维表示显然不可约。对任意的表示 $e^{im\theta}$ 和任意非 0 数 a , 有 $ae^{im\theta}a^{-1} = e^{im\theta}$ 。

因此对所有的 m ，对应的表示 $e^{im\theta}$ 都是不等价的。

由于对所有的 m ， $e^{im\theta}$ 构成一组完备的基，所以应该给出了所有的不等价不可约表示。

前面用到了周期性边界条件 $a(\theta) = a(\theta + 2\pi)$ ，可以得到 $a(2\pi) = a(0) = 1$ 。

(2) 自旋内秉空间的旋转

对应的周期性边界条件应该是 $a(\theta) = a(\theta + 4\pi)$ 。可以得到 $m = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \dots$ ，对于 m 为整数，得到的表示跟前面相同，且 $a(2\pi) = 1$ 。

对于 m 为半奇数， $a(2\pi) = -1$ ，这个操作记为 \bar{E} ，将这个操作与 $SO(2)$ 转动群的群元相乘得到集合 $\bar{E} \cdot SO(2)$ 。这个集合和 $SO(2)$ 合并得到大集合 $\{\bar{E} \cdot SO(2), SO(2)\}$ ，这个大集合在 $SO(2)$ 的乘法下构成一个群，称为双群 $SO^D(2)$ ，注意此时 $SO(2)$ 并不是 $SO^D(2)$ 的子群了。双群的表示就是 $SO(2)$ 的双值表示。

即对于表示的指标 $m = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1, \pm \frac{3}{2}, \dots$ ，

$$a(\theta) = e^{im\theta}$$

若 $\theta \in [0, 2\pi)$ ，则 $a(\theta) \in SO(2)$ 。若 $\theta \in [2\pi, 4\pi)$ ，则 $a(\theta) \in \bar{E} \cdot SO(2)$ 。满足保乘关系

$$a(\theta_1 + \theta_2) = a(\theta_1)a(\theta_2)$$

双值表示也可以理解为： $SO(2)$ 的群元 $a(\theta)$ 对应着双群中 $\bar{E} \cdot SO(2), SO(2)$ 两个群元的表示，

$$a(\theta) = \begin{cases} e^{im\theta} \\ -e^{im\theta} \end{cases}$$

其中， $\theta \in [0, 2\pi]$ 。

4.4 推导 $D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma)$ 满足

$$i \frac{\partial}{\partial \alpha} D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma) = m' D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma)$$

$$i \frac{\partial}{\partial \gamma} D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma) = m D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma)$$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \cot \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} - 2 \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \gamma} \right) \right] D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma) = j(j+1) D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma)$$

Answer:

SO(3)群的表示为

$$D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma) = e^{-im'\alpha} d_{m'm}^j(\beta) e^{-im\gamma}$$

前两个式子容易看出来，主要看第三个式子。可以证明（见附录 1）

$$J^2 R(\alpha\beta\gamma) = \left[-\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \cot \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} - 2 \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \gamma} \right) \right] R(\alpha\beta\gamma) \quad (1)$$

$$R(\alpha\beta\gamma)|jm\rangle = \sum_{m'=-j}^j D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma)|jm'\rangle$$

那么利用

可以得到

$$\begin{aligned} J^2 R(\alpha\beta\gamma)|jm\rangle &= \left[-\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \cot \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} - 2 \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \gamma} \right) \right] R(\alpha\beta\gamma)|jm\rangle \\ &= \sum_{m'=-j}^j D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma) J^2 |jm'\rangle = \sum_{m'=-j}^j D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma) j(j+1) |jm'\rangle \end{aligned}$$

进一步可以得到

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + \cot \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\sin^2 \beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} - 2 \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \gamma} \right) \right] D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma) = j(j+1) D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma)$$

4.5 设 $(2j+1)$ 个向量 $|jm\rangle$, $m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$ 空间按 D_j 变换, 即

$$R(\alpha\beta\gamma)|jm\rangle = \sum_{m'=-j}^j D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma)|jm'\rangle$$

证明, $|jm\rangle$ 必是 J^2, J_z 的本征矢, 对应本征值为 $j(j+1), m$

Answer:

由

$$R(\alpha\beta\gamma) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z}$$

$$D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma) = e^{-im'\alpha} d_{m'm}^j(\beta) e^{-im\gamma}$$

考虑在单位元附近做无穷小的展开,

$$\begin{aligned} R(00\gamma)|jm\rangle &= e^{-i\gamma J_z}|jm\rangle \approx (1 - i\gamma J_z)|jm\rangle \\ &= \sum_{m'=-j}^j D_{m'm}^j(00\gamma)|jm'\rangle \\ &= \sum_{m'=-j}^j \delta_{m'm} e^{-im\gamma}|jm'\rangle \\ &= e^{-im\gamma}|jm\rangle \approx (1 - im\gamma)|jm\rangle \end{aligned}$$

由上式得

$$J_z|jm\rangle = m|jm\rangle$$

同理可得

$$\begin{aligned} R(0\beta 0)|jm\rangle &= e^{-i\beta J_y}|jm\rangle \approx (1 - i\beta J_y)|jm\rangle \\ &= \sum_{m'=-j}^j D_{m'm}^j(0\beta 0)|jm'\rangle \\ &= \sum_{m'=-j}^j \left[\delta_{m'm} - \frac{\beta}{2} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} \delta_{m',m+1} + \frac{\beta}{2} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \delta_{m',m-1} \right] |jm'\rangle \\ &= |jm\rangle - \frac{\beta}{2} \sqrt{(j+m+1)(j-m)} |j, m+1\rangle + \frac{\beta}{2} \sqrt{(j+m)(j-m+1)} \delta_{m',m-1} |j, m-1\rangle \end{aligned}$$

因此,

$$J_y|j, m\rangle = -\frac{i}{2}\sqrt{(j+m+1)(j-m)}|j, m+1\rangle + \frac{i}{2}\sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j, m-1\rangle$$

由对易关系, $J_x = -i[J_y, J_z]$, 可以推出

$$J_x|j, m\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{(j+m+1)(j-m)}|j, m+1\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j, m-1\rangle$$

引入 $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$, 得

$$\begin{aligned} J_+|jm\rangle &= \sqrt{(j+m+1)(j-m)}|jm+1\rangle \\ J_-|jm\rangle &= \sqrt{(j+m)(j-m+1)}|jm-1\rangle \end{aligned}$$

由 $J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = J_z^2 + J_z + J_+J_-$ 得到

$$J^2|j, m\rangle = j(j+1)|j, m\rangle$$



4.7 设 J^2, J_z 和 B 是一组力学量完全集, $|jmb\rangle$ 是共同本征矢,

$$\begin{aligned} J^2|jmb\rangle &= j(j+1)|jmb\rangle \\ J_z|jmb\rangle &= m|jmb\rangle \\ B|jmb\rangle &= b|jmb\rangle \end{aligned}$$

证明, 算符

$$\begin{aligned} V_m^j &= \sum_{m_1, m_2} (-1)^{j_2 - m_2} \langle j_1, m_1, j_2, -m_2 | j_1, j_2, j, m \rangle |j_1, m_1, b_1\rangle \langle j_2, m_2, b_2| \\ m &= -j, -j+1, \dots, j-1, j \end{aligned}$$

是 SO(3)群的 j 秩不可约张量。

Answer:

算符 V_m^j 如果满足

$$R(\alpha\beta\gamma)V_m^j R^\dagger(\alpha\beta\gamma) = \sum_{m'} D_{m'm}(\alpha\beta\gamma)V_{m'}^j$$

那么这个算符就是 **j 秩不可约张量算符**。

$$\begin{aligned}
& e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z} \sum_{m_1, m_2} (-1)^{j_2 - m_2} \langle j_1, m_1, j_2, -m_2 | j_1, j_2, j, m \rangle |j_1, m_1, b_1\rangle \langle j_2, m_2, b_2| e^{i\gamma J_z} e^{i\beta J_y} e^{i\alpha J_z} \\
&= \sum_{m_1, m_2} (-1)^{j_2 - m_2} \langle j_1, m_1, j_2, -m_2 | j_1, j_2, j, m \rangle e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z} |j_1, m_1, b_1\rangle \langle j_2, m_2, b_2| e^{i\gamma J_z} e^{i\beta J_y} e^{i\alpha J_z} \\
&= \sum_{m_1, m_2} (-1)^{j_2 - m_2} e^{-i\gamma m_1} e^{i\gamma m_2} \langle j_1, m_1, j_2, -m_2 | j_1, j_2, j, m \rangle e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} |j_1, m_1, b_1\rangle \langle j_2, m_2, b_2| e^{i\beta J_y} e^{i\alpha J_z} \\
&= \sum_{m_1, m_2} (-1)^{j_2 - m_2} e^{-i\gamma m_1} e^{i\gamma m_2} d_{m_1', m_1}^{j_1}(\beta) d_{m_2', m_2}^{j_2}(\beta) \langle j_1, m_1, j_2, -m_2 | j_1, j_2, j, m \rangle e^{-i\alpha m_1'} \sum_{m_1' = -j_1}^{j_1} |j_1, m_1', b_1\rangle \sum_{m_2' = -j_2}^{j_2} \langle j_2, m_2', b_2| e^{i\alpha m_2'} \\
&= \sum_{m_1, m_2, m_1', m_2'} (-1)^{j_2 - m_2} e^{-i\alpha m_1'} d_{m_1', m_1}^{j_1}(\beta) e^{-i\gamma m_1} e^{i\alpha m_2'} d_{m_2', m_2}^{j_2}(\beta) e^{i\gamma m_2} \langle j_1, m_1, j_2, -m_2 | j_1, j_2, j, m \rangle |j_1, m_1', b_1\rangle \langle j_2, m_2', b_2| \\
&= \sum_{m_1, m_2, m_1', m_2'} (-1)^{j_2 - m_2} D_{m_1', m_1}^{j_1}(\alpha\beta\gamma) D_{m_2', m_2}^{j_2*}(\alpha\beta\gamma) \langle j_1, m_1, j_2, -m_2 | j_1, j_2, j, m \rangle |j_1, m_1', b_1\rangle \langle j_2, m_2', b_2| \\
&= \sum_{m'} D_{m'm}(\alpha\beta\gamma) V_{m'}^j ?
\end{aligned}$$

4.9 设 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是自旋为 1/2 的粒子， S_z 为 1/2 和 -1/2 的本征矢， Y_{lm} 是轨道角动量本征态。

写出总角动量 j，投影为 m，轨道角动量 $l=j+1/2$ 的态 $\Psi_{l=j+\frac{1}{2}}^{jm}$ 。试问，当空间绕 x 轴转 π 时，

$\Psi_{l=j+\frac{1}{2}}^{jm}$ 如何改变？

Answer:

$$\begin{aligned}
\Psi_{l=j+\frac{1}{2}}^{jm} &= |jm\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2} \right\rangle \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2} \right| jm \rangle \\
&\quad + \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2} \right\rangle \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2} \right| jm \rangle \\
&= \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} Y_{j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} Y_{j+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}} \\
&= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} Y_{j+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} Y_{j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

绕 x 轴转动 π 对应的旋转矩阵为

$$R_x(\pi) = R\left(\theta = \frac{\pi}{2}, \varphi = 0, \psi = \pi\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

对应的欧拉角满足为 $\beta = \pi, \gamma - \alpha = \pi$ 。

取 $\alpha = 0$ ，得到变换算符为 $R = e^{-i\pi L_y} e^{-i\pi L_z}$ ，将其作用到态矢量上，获得

$$\begin{aligned}
R\Psi_{l=j+\frac{1}{2}}^{jm} &= e^{-i\pi L_y} e^{-i\pi L_z} \Psi_{l=j+\frac{1}{2}}^{jm} \\
&= \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\pi L_y} e^{-i\pi L_z} Y_{j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\pi L_y} e^{-i\pi L_z} Y_{j+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}} \\
&= e^{-i\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\pi L_y} Y_{j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}} - e^{-i\pi\left(m-\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\pi L_y} Y_{j+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}} \\
&= e^{-i\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\pi L_y} Y_{j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}} - e^{-i\pi\left(m-\frac{1}{2}\right)} \sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\pi L_y} Y_{j+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

要求

$$\begin{aligned}
e^{-i\pi L_y} Y_{j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}} &= e^{-i\pi L_y} |j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}\rangle = \sum_{m'=-j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} |j+\frac{1}{2}, m'\rangle \langle j+\frac{1}{2}, m'| e^{-i\pi L_y} |j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}\rangle \\
&= \sum_{m'=-j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} |j+\frac{1}{2}, m'\rangle d_{m', m+\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}(\pi) = \sum_{m'=-j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} |j+\frac{1}{2}, m'\rangle (-1)^{j-m} \delta_{m', -m-\frac{1}{2}} \\
&= (-1)^{j-m} |j+\frac{1}{2}, -m-\frac{1}{2}\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e^{-i\pi L_y} Y_{j+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}} &= e^{-i\pi L_y} |j+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}\rangle = \sum_{m'=-j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} |j+\frac{1}{2}, m'\rangle \langle j+\frac{1}{2}, m'| e^{-i\pi L_y} |j+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}\rangle \\
&= \sum_{m'=-j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} |j+\frac{1}{2}, m'\rangle d_{m', m-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}}(\pi) = \sum_{m'=-j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} |j+\frac{1}{2}, m'\rangle (-1)^{j-m+1} \delta_{m', -m+\frac{1}{2}} \\
&= (-1)^{j-m+1} |j+\frac{1}{2}, -m+\frac{1}{2}\rangle
\end{aligned}$$

上式利用了 $d_{m'm}^j(\pi) = (-1)^{j-m} \delta_{m', -m}$ 。

最终得到

$$\begin{aligned}
R\Psi_{l=j+\frac{1}{2}}^{jm} &= e^{-i\pi(m+\frac{1}{2})} \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (-1)^{j-m} Y_{j+\frac{1}{2}, -m-\frac{1}{2}} \\
&\quad - e^{-i\pi(m-\frac{1}{2})} \sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (-1)^{j-m+1} Y_{j+\frac{1}{2}, -m+\frac{1}{2}} \\
&= \begin{pmatrix} -e^{-i\pi(m-\frac{1}{2})} (-1)^{j-m+1} \sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} Y_{j+\frac{1}{2}, -m+\frac{1}{2}} \\ e^{-i\pi(m+\frac{1}{2})} (-1)^{j-m} \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} Y_{j+\frac{1}{2}, -m-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. SU(2)群参数是(a,b)，SO(3)群参数是方位角(θ,φ,ψ)或 Euler 角(α,β,γ)。

已知(a,b)与(α,β,γ)之间有 Cayley-Klein 关系，试给出(a,b)与(θ,φ,ψ)的关系，以及(θ,φ,ψ)和(α,β,γ)的关系。尽可能化简表达式，不出现“反三角函数”。

Answer:

若用方位角(θ,φ,ψ)来描述 SO(3)群元素，有

$$C_n(\psi) = C_k(\varphi)C_j(\theta)C_k(\psi)C_j^{-1}(\theta)C_k^{-1}(\varphi)$$

由 SO(3)和 SU(2)的同态关系

$$\begin{aligned} C_k(\varphi) \rightarrow u_1 &= \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\varphi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix}, \quad C_k^{-1}(\varphi) \rightarrow u_1^{-1} = \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix} \\ C_j(\theta) \rightarrow u_2 &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad C_j^{-1}(\theta) \rightarrow u_2^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\ C_k(\psi) \rightarrow u_3 &= \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\psi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\psi} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

进一步由保乘关系得到，

$$\begin{aligned} C_n(\psi) \rightarrow u(\theta, \varphi, \psi) &= u_1 u_2 u_3 u_2^{-1} u_1^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\varphi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{2}\psi} & 0 \\ 0 & e^{\frac{i}{2}\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{i}{2}\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\frac{i\psi}{2}} \sin^2 \frac{\theta}{2} + e^{-\frac{i\psi}{2}} \cos^2 \frac{\theta}{2} & -i \sin \frac{\psi}{2} \sin \theta e^{-i\varphi} \\ -i \sin \frac{\psi}{2} \sin \theta e^{i\varphi} & e^{-\frac{i\psi}{2}} \sin^2 \frac{\theta}{2} + e^{\frac{i\psi}{2}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

即

$$a = e^{\frac{i\psi}{2}} \sin^2 \frac{\theta}{2} + e^{-\frac{i\psi}{2}} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$b = -i \sin \frac{\psi}{2} \sin \theta e^{-i\varphi}$$

接下来求 (θ, φ, ψ) 和 (α, β, γ) 的关系，由

$$a = \cos \frac{\beta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\alpha + \gamma)}$$

$$b = -\sin \frac{\beta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\alpha - \gamma)}$$

得到

$$\cos \frac{\beta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\alpha + \gamma)} = e^{\frac{i\psi}{2}} \sin^2 \frac{\theta}{2} + e^{-\frac{i\psi}{2}} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$-\sin \frac{\beta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\alpha - \gamma)} = -i \sin \frac{\psi}{2} \sin \theta e^{-i\varphi}$$

3. 利用公式

$$e^A B e^{-A} = B + \frac{1}{1!} [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots$$

证明

$$u(\mathbf{n}, \psi) \sigma_i u(\mathbf{n}, \psi)^{-1} = \sum_{j=1}^3 R_{ji}(\mathbf{n}, \psi) \sigma_j$$

其中， $u(\mathbf{n}, \psi) = e^{-i\frac{1}{2}\psi \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}} \in SU(2)$, $R(\mathbf{n}, \psi) = e^{-i\psi \mathbf{n} \cdot \mathbf{J}} \in SU(3)$

Answer:

我们知道，用 $SU(2)$ 的群元素对以泡利矩阵为基的矢量 \mathbf{h} 做共轭变换可以诱导出一个 $SU(3)$ 群元素。

为方便讨论，规定 $\sigma_{x,y,z} = \sigma_{1,2,3}$ ，由对易关系

$$[\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \sigma_1] = 2i\sigma_2 n_z - 2i\sigma_3 n_y = 2i(\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3) \begin{pmatrix} 0 \\ n_z \\ -n_y \end{pmatrix} = 2 \sum_{i=1}^3 \sigma_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J})_{i1}$$

其中

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = n_x J_x + n_y J_y + n_z J_z = i \begin{pmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{pmatrix}$$

进一步得

$$\begin{aligned} [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \sigma_1]] &= [\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, 2i\sigma_2 n_z - 2i\sigma_3 n_y] = -4n_x n_z \sigma_3 + 4n_z n_z \sigma_1 - 4n_x n_y \sigma_2 + 4n_y n_y \sigma_1 \\ &= 4(\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3) \begin{pmatrix} n_y n_y + n_z n_z \\ -n_x n_y \\ -n_x n_z \end{pmatrix} \\ &= 4 \sum_{i=1}^3 \sigma_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{J})_{i1}^2 \end{aligned}$$

其中，

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{J})^2 = \begin{pmatrix} n_y^2 + n_z^2 & -n_x n_y & -n_x n_z \\ -n_x n_y & n_x^2 + n_z^2 & -n_y n_z \\ -n_x n_z & -n_y n_z & n_x^2 + n_y^2 \end{pmatrix}$$

依次类推，可得

$$\begin{aligned}
e^{-i\frac{1}{2}\psi\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}\sigma_1e^{i\frac{1}{2}\psi\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}} &= \sigma_1 - \frac{i}{2}\psi[\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma},\sigma_1] + \frac{1}{2!}\left(-\frac{i}{2}\psi\right)^2[\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma},[\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma},\sigma_1]] + \dots \\
&= \sigma_1 - i\psi\sum_{i=1}^3\sigma_i(\mathbf{n}\cdot\mathbf{J})_{i1} + \frac{1}{2!}(-i\psi)^2\sum_{i=1}^3\sigma_i(\mathbf{n}\cdot\mathbf{J})_{i1}^2 + \dots \\
&= \sigma_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i\psi)^n}{n!}\sum_{i=1}^3\sigma_i(\mathbf{n}\cdot\mathbf{J})_{i1}^n \\
&= \sum_{i=1}^3\sigma_i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i\psi)^n}{n!}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{J})_{i1}^n \\
&= \sum_{i=1}^3\sigma_ie^{-i\psi(\mathbf{n}\cdot\mathbf{J})_{i1}}
\end{aligned}$$



4. 求电偶极跃迁的矩阵元

$$\langle j_1 m_1 | e\mathbf{r} | j_2 m_2 \rangle$$

Answer:

$$\langle j_1 m_1 | e\mathbf{r} | j_2 m_2 \rangle = \langle j_1 m_1 | x | j_2 m_2 \rangle e\mathbf{i} + \langle j_1 m_1 | y | j_2 m_2 \rangle e\mathbf{j} + \langle j_1 m_1 | z | j_2 m_2 \rangle e\mathbf{k}$$

令

$$x_0 = z$$

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x + iy)$$

$$x_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - iy)$$

反解得到

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 - x_{-1})$$

$$y = \frac{i\sqrt{2}}{2}(x_1 + x_{-1})$$

$$z = x_0$$

可以证明

$$[J_z, x_q] = qx_q$$

$$[J_+, x_q] = \sqrt{(1-q)(2+q)}x_q$$

$$[J_-, x_q] = \sqrt{(1+q)(2-q)}x_q$$

其中, $q = 0, 1, -1$ 。

因此, 有

$$\begin{aligned}\langle j_1 m_1 | e\mathbf{r} | j_2 m_2 \rangle &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \langle j_1 m_1 | (x_1 - x_{-1}) | j_2 m_2 \rangle e\mathbf{i} + \frac{i\sqrt{2}}{2} \langle j_1 m_1 | (x_1 + x_{-1}) | j_2 m_2 \rangle e\mathbf{j} + \langle j_1 m_1 | x_0 | j_2 m_2 \rangle e\mathbf{k} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} e(-\mathbf{i} + i\mathbf{j}) \langle j_1 m_1 | x_1 | j_2 m_2 \rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} e(\mathbf{i} + i\mathbf{j}) \langle j_1 m_1 | x_{-1} | j_2 m_2 \rangle + e\mathbf{k} \langle j_1 m_1 | x_0 | j_2 m_2 \rangle\end{aligned}$$

问题归结为求矩阵元 $\langle j_1 m_1 | x_q | j_2 m_2 \rangle$, 由 Wigner-Eckart 定理, 得

$$\langle j_1 m_1 | x_q | j_2 m_2 \rangle = \langle j_1 \| x^1 \| j_2 \rangle \langle j_1 m_1 | 1q j_2 m_2 \rangle$$

由 CG 系数的定义, 只有满足

$$j_1 = |j_2 - 1|, \dots, j_2 + 1$$

$$x_1: m_2 + 1 = m_1$$

$$x_{-1}: m_2 - 1 = m_1$$

$$x_0: m_2 = m_1$$

即跃迁选择定则 $\Delta m = m_1 - m_2 = 0, 1, -1$ 。接下来计算 $\langle j_1 \| x^1 \| j_2 \rangle$ 。

(1)

当 $j_2 \geq 1$ 时, 由

$$\langle j_1 \| x^1 \| j_2 \rangle = \frac{\langle j_1 0 | x_0 | j_2 0 \rangle}{\langle j_1 0 | 10 j_2 0 \rangle}$$

以及不为 0 的 CG 系数为,

$$\langle j_2 + 1, 0 | 10 j_2 0 \rangle = (j_2 + 1) \sqrt{\frac{1}{(2j_2 + 1)(j_2 + 1)}}$$

$$\langle j_2, 0 | 10 j_2 0 \rangle = 0$$

$$\langle j_2 - 1, 0 | 10 j_2 0 \rangle = -j_2 \sqrt{\frac{1}{j_2(2j_2 + 1)}}$$

(2)

当 $j_2 = \frac{1}{2}$ 时, 计算

$$\langle j_1 \| x^1 \| \frac{1}{2} \rangle = \frac{\langle j_1 \frac{1}{2} | x_0 | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle}{\langle j_1 \frac{1}{2} | 10 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle}$$

不为 0 的 CG 系数为

$$\langle \frac{3}{2} \frac{1}{2} | 10 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} | 10 \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = -\sqrt{\frac{1}{3}}$$

(3)

当 $j_2 = 0$ 时, 计算

$$\langle j_1 \| x^1 \| 0 \rangle = \frac{\langle 10 | x_0 | 00 \rangle}{\langle 10 | 1000 \rangle}$$

不为 0 的 CG 系数为

$$\langle 10 | 1000 \rangle = 1$$

附录

1 证明(1)式

利用

$$\begin{aligned}i \frac{\partial}{\partial \alpha} R(\alpha\beta\gamma) &= i \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-i\alpha J_3} e^{-i\beta J_2} e^{-i\gamma J_3} = J_3 R(\alpha\beta\gamma) \\i \frac{\partial}{\partial \beta} R(\alpha\beta\gamma) &= i \frac{\partial}{\partial \beta} e^{-i\alpha J_3} e^{-i\beta J_2} e^{-i\gamma J_3} = e^{-i\alpha J_3} J_2 e^{i\alpha J_3} R(\alpha\beta\gamma) = (J_2 \cos \alpha - J_1 \sin \alpha) R(\alpha\beta\gamma) \\i \frac{\partial}{\partial \gamma} R(\alpha\beta\gamma) &= i \frac{\partial}{\partial \gamma} e^{-i\alpha J_3} e^{-i\beta J_2} e^{-i\gamma J_3} = e^{-i\alpha J_3} e^{-i\beta J_2} J_3 e^{i\beta J_2} e^{i\alpha J_3} R(\alpha\beta\gamma) \\&= (J_1 \cos \alpha \sin \beta + J_2 \sin \alpha \sin \beta + J_3 \cos \beta) R(\alpha\beta\gamma)\end{aligned}$$

对应的线性方程组为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} R(\alpha\beta\gamma) = \begin{pmatrix} i \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ i \frac{\partial}{\partial \beta} \\ i \frac{\partial}{\partial \gamma} \end{pmatrix} R(\alpha\beta\gamma)$$

反解得出

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} R(\alpha\beta\gamma) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha\sin\beta & \sin\alpha\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial\alpha} \\ i\frac{\partial}{\partial\beta} \\ i\frac{\partial}{\partial\gamma} \end{pmatrix} R(\alpha\beta\gamma) \\
&= \begin{pmatrix} -\cos\alpha\cot\beta & -\sin\alpha & \frac{\cos\alpha}{\sin\beta} \\ -\sin\alpha\cot\beta & \cos\alpha & \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\frac{\partial}{\partial\alpha} \\ i\frac{\partial}{\partial\beta} \\ i\frac{\partial}{\partial\gamma} \end{pmatrix} R(\alpha\beta\gamma) \\
&= i \begin{pmatrix} -\cos\alpha\cot\beta\frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\alpha\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\gamma} \\ -\sin\alpha\cot\beta\frac{\partial}{\partial\alpha} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\gamma} \\ \frac{\partial}{\partial\alpha} \end{pmatrix} R(\alpha\beta\gamma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J^2 R(\alpha\beta\gamma) &= (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) R(\alpha\beta\gamma) \\
&= - \left(-\cos\alpha\cot\beta\frac{\partial}{\partial\alpha} - \sin\alpha\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\gamma} \right)^2 R(\alpha\beta\gamma) \\
&\quad - \left(-\sin\alpha\cot\beta\frac{\partial}{\partial\alpha} + \cos\alpha\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\frac{\partial}{\partial\gamma} \right)^2 R(\alpha\beta\gamma) - \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} R(\alpha\beta\gamma) \\
&= -\cot\beta\frac{\partial}{\partial\beta} - \cot^2\beta\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \frac{1}{\sin^2\beta}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} + 2\frac{\cot\beta}{\sin\beta}\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\gamma} - \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} \\
&= -\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \cot\beta\frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{1}{\sin^2\beta} \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} - 2\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\gamma} \right)
\end{aligned}$$

□

2 随便写写

由 $D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma) = \langle jm' | R(\alpha\beta\gamma) | jm \rangle$, 且 $R(\alpha\beta\gamma) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z}$, 并由变换关系得到

$$R(\alpha\beta\gamma) J_1 R(\alpha\beta\gamma)^{-1} = \sum_{i=1}^3 J_i R_{i1}(\alpha\beta\gamma)$$

其中为了方便, 记 $J_{x,y,z} = J_{1,2,3}$ 。利用 $R(\alpha\beta\gamma) = e^{-i\alpha J_3} e^{-i\beta J_2} e^{-i\gamma J_3}$, 得到

$$\begin{aligned}
R(\alpha\beta\gamma)J_1R(\alpha\beta\gamma)^{-1} &= e^{-i\alpha J_3}e^{-i\beta J_2}e^{-i\gamma J_3}J_1e^{i\gamma J_3}e^{i\beta J_2}e^{i\alpha J_3} \\
&= e^{-i\alpha J_3}e^{-i\beta J_2}\left[J_1 + \gamma J_2 - \frac{1}{2!}\gamma^2 J_1 - \frac{1}{3!}\gamma^3 J_2 + \dots\right]e^{i\beta J_2}e^{i\alpha J_3} \\
&= e^{-i\alpha J_3}e^{-i\beta J_2}(J_1\cos\gamma + J_2\sin\gamma)e^{i\beta J_2}e^{i\alpha J_3} \\
&= \begin{pmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma \\ -\sin\beta\cos\gamma \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

以此类推，容易得到

$$R(\alpha\beta\gamma)J_sR(\alpha\beta\gamma)^{-1} = \sum_{i=1}^3 J_i R_{is}(\alpha\beta\gamma)$$

其中， $s=1,2,3$ 。在这里可以看出在直角坐标的角动量按群元进行变换。