

2021 年春 《群论》 阮东 —— 回忆版

考试时间：19:00 – 21:00

1 简答题 (45 分)

1. 写出 $SU(2)$ 、 $SO(3)$ 群元素的三种不同的表达形式。
2. $SU(2)$ 群和 $SO(3)$ 群是什么关系？李代数 $\mathfrak{su}(2)$ 和 $\mathfrak{so}(3)$ 是什么关系？
3. 三维欧式空间中矢量 \mathbf{r} ，在笛卡尔坐标系下的坐标为 (x, y, z) ，在球谐坐标系下为 (r_0, r_{+1}, r_{-1}) ，问在三维转动下两者分别服从什么变换？
4. 写出李代数 $\mathfrak{su}(2)$ 的不可约表示的显示，及其李代数结构。
5. 写出 S_n 群的生成元和 Young 定理。
6. 分解外积， $[21] \odot [4]$ 。
7. 给出 S_6 群的不可约表示 $[411]$ 到 S_4 的分枝律。
8. 写出两粒子全对称波函数 ψ 和单电子波函数 θ 构成的全对称的波函数，能不能构成全反对称的？为什么？
9. $SO(3) \in SO(3) \otimes SO(3)$ ，写出两个 $SO(3)$ 不可约表示直积后的化简结果。

2 计算题 (55 分)

10. 二维平面上可以做转动 J_z 和平动 p_x 和 p_y , 求体系的李代数的代数结构和这三个算符的函数表示, 并证明二维动能 $T = \frac{P^2}{2m}$ 在 $SO(2)$ 群下是不变的。

示, 并证明二维动能 $T = \frac{P^2}{2m}$ 在 $SO(2)$ 群下是不变的。

11. a_m^+, a_m^- 有 $l, m (m = -l, -l+1, \dots, l)$ Boson 升降算符, 有对易关系:

$$[a_m^\pm, a_{m'}^\pm] = 0$$

$$[a_m^-, a_{m'}^+] = \delta_{m, m'}$$

定义算符

$$L_0 = \sum_m m a_m^+ a_m^-$$

$$L_\pm = \mp \sum_m \sqrt{\frac{(l \mp m)(l \pm m + 1)}{2}} a_{m \pm 1}^+ a_m^-$$

(1) 证明 L_0, L_\pm 张成李代数 $so(3)$ 。

(2) 证明 a_m^+ 是李代数 $so(3)$ 的不可约张量算符, 秩为多少?

12. 求 S_5 的所有不可约表示的标记及其维数, 并写出

1	2
3	4
5	

的杨算符 (不用展开)。