朗道能级怎么来的?

Kean 2021-05-07

1 电磁场中的哈密顿量

电子在电磁场中的哈密顿量为

$$H=rac{1}{2m_e}(oldsymbol{P}+eoldsymbol{A})^{\,2}-earphi$$

为什么具有这个形式,将其代入哈密顿正则方程试试

$$rac{dm{r}}{dt} = rac{\partial H}{\partial m{P}}$$
 $rac{dm{P}}{dt} = -rac{\partial H}{\partial m{r}}$

可得其分量为

$$egin{aligned} rac{dx}{dt} &= rac{1}{m_e} \left(P_x + e A_x
ight) \ rac{dP_x}{dt} &= -rac{e}{m_e} igg[\left(P_x + e A_x
ight) rac{\partial A_x}{\partial x} + \left(P_y + e A_y
ight) rac{\partial A_y}{\partial x} + \left(P_z + e A_z
ight) rac{\partial A_z}{\partial x} igg] + e rac{\partial arphi}{\partial x} \end{aligned}$$

进一步求导得

$$\begin{split} m_{e} \, \frac{d^{2}x}{dt^{2}} &= m_{e} \, \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = m_{e} \, \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{m_{e}} \left(P_{x} + eA_{x} \right) \right] = \frac{dP_{x}}{dt} + e \frac{dA_{x}}{dt} \\ &= -\frac{e}{m_{e}} \left[\left(P_{x} + eA_{x} \right) \frac{\partial A_{x}}{\partial x} + \left(P_{y} + eA_{y} \right) \frac{\partial A_{y}}{\partial x} + \left(P_{z} + eA_{z} \right) \frac{\partial A_{z}}{\partial x} \right] + e \frac{dA_{x}}{dt} + e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= -e \left[\frac{dx}{dt} \frac{\partial A_{x}}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial A_{y}}{\partial x} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial A_{z}}{\partial x} \right] + e \left[\frac{dx}{dt} \frac{\partial A_{x}}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial A_{x}}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial A_{x}}{\partial z} + \frac{\partial A_{x}}{\partial t} \right] + e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= -e \left[\frac{dx}{dt} \frac{\partial A_{x}}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial A_{y}}{\partial x} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial A_{z}}{\partial x} - \frac{dx}{dt} \frac{\partial A_{x}}{\partial x} - \frac{dy}{dt} \frac{\partial A_{x}}{\partial y} - \frac{dz}{dt} \frac{\partial A_{x}}{\partial z} \right] + e \frac{\partial A_{x}}{\partial t} + e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= -e \left[\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]_{x} + e \left(\nabla \varphi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right)_{x} \end{split}$$

最终得到

$$egin{aligned} m_e rac{d^2 m{r}}{dt^2} &= -e [m{v} imes (
abla imes m{A})] + e igg(
abla arphi + rac{\partial m{A}}{\partial t} igg) \ &= -e (m{v} imes m{B} + m{E}) \end{aligned}$$

此即洛伦兹力公式。由此式证明上面的哈密顿量应该是对的。

进一步,将正则动量量子化为 $\mathbf{P} \rightarrow -i\hbar \nabla$,得到

$$H=rac{1}{2m_{\circ}}\left(-i\hbar\,
abla+eoldsymbol{A}
ight){}^{2}-earphi$$

采用横波条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$,哈密顿量可以写为

$$egin{align} H &= rac{1}{2m_e} \left(oldsymbol{P}^2 + e oldsymbol{A} \cdot oldsymbol{P} + e^2 oldsymbol{A}^2
ight) - e arphi \ &= rac{1}{2m_e} \left(-\hbar^2
abla^2 - e i \hbar oldsymbol{A} \cdot
abla + e^2 oldsymbol{A}^2
ight) - e arphi \ &= rac{1}{2m_e} \left(-\hbar^2
abla^2 - e i \hbar oldsymbol{A} \cdot
abla + e^2 oldsymbol{A}^2
ight) - e arphi \ &= rac{1}{2m_e} \left(-\hbar^2
abla^2 - e i \hbar oldsymbol{A} \cdot
abla + e^2 oldsymbol{A}^2
ight) - e arphi \ &= e^2 old$$

2 朗道能级

现有一均匀磁场沿 z 方向,即 $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}$ 。

取朗道规范 $A_y=Bx,\ A_x=A_z=0$,容易验证 $\nabla\cdot {\pmb A}=0,\ \nabla\times {\pmb A}={\pmb B}$ 。由于没有电场,可以令 $\varphi=0$ 。此时,哈密顿量为

$$H = rac{1}{2m_e} [P_x^2 + (P_y + eBx)^2 + P_z^2]$$

由于 $[P_y,H]=[P_z,H]=0$,表示具有相同的本征态,因此,能量本征态具有形式

$$\psi(x,y,z) = e^{i(k_y y + k_z z)} \phi(x)$$

接下来看看 $\phi(x)$ 究竟是什么。可以将哈密顿量写成

$$egin{align} H &= rac{1}{2m_e} ig[P_x^2 + (\hbar k_y + eBx)^2 + (\hbar k_z)^2 ig] \ &= rac{P_x^2}{2m_e} + rac{e^2 B^2}{2m_e} \Big(rac{\hbar k_y}{eB} + x\Big)^2 + rac{(\hbar k_z)^2}{2m_e} \ &= rac{P_x^2}{2m_e} + rac{1}{2} m_e \omega^2 \Big(rac{\hbar k_y}{eB} + x\Big)^2 + rac{(\hbar k_z)^2}{2m_e} \end{split}$$

其中, $\omega = \frac{eB}{m_e}$ 为回旋角频率。令 $X = \frac{\hbar k_y}{eB} + x$,

$$H = rac{P_{x}^{2}}{2m_{e}} + rac{1}{2}m_{e}\omega^{2}X^{2} + rac{\left(\hbar k_{z}
ight)^{2}}{2m_{e}}$$

将哈密顿量代入薛定谔方程, 可知

$$\left[rac{P_x^2}{2m_e}+rac{1}{2}m_e\omega^2X^2
ight]\!\phi(x)=E'\phi(x)$$

由于 $[X,P_x]=[x,P_x]=i\hbar$,因此上式就是谐振子本征方程

$$E'=\hbar\omega\Big(n+rac{1}{2}\Big)$$
 $\phi(x)=H_n$

其中, H_n 是谐振子本征态,是个厄米多项式。这个谐振子以 $x_0 = \frac{\hbar k_y}{eB}$ 为中心简谐运动。

最终,能量本征值为

$$E=\hbar\omega\Big(n+rac{1}{2}\Big)+rac{(\hbar k_z)^{\,2}}{2m_e}$$

本征态为

$$\psi(x,y,z) = e^{i(k_y y + k_z z)} H_n(x - x_0)$$

在 2D 电子气中,有 k_z =0,因此能量本征值和本征态为

$$E=\hbar\omega\Big(n+rac{1}{2}\Big) \ \psi(x,y)=e^{ik_yy}H_n(x-x_0)$$

对于一个能级,由于量子数 k_y 的存在,是简并的。考虑周期性边界条件

$$\psi(x,y+L_y) = e^{ik_y(y+L_y)} H_n(x-x_0) = \psi(x,y)$$

因此, $k_y L_y = 2m\pi$, 也就是 $k_y = \frac{2m\pi}{L_y}$, 因此振动中心 $x_0^m = \frac{2\pi\hbar}{eBL_y}m$ 。

在 L_x 范围内的态数目为

$$rac{L_x}{arDelta x_0} = rac{eBL_xL_y}{2\pi\hbar} = rac{BS}{rac{h}{e}}$$

其中, $\phi_0 = \frac{h}{e}$ 为量子磁通,物理意义十分明显,态数目就是磁场产生的磁通BS能容纳多少量子磁通。

参考

 $[1] \ \ https://zh.wikipedia.org/wiki/\%E6\%9C\%97\%E9\%81\%93\%E9\%87\%8F\%E5\%AD\%90\%E5\%\\ 8C\%96$