

091M4041H - Assignment 6

♠ 201628017729008 Lingfeng Lin ♠

2016 年12 月29 日

1 Integer Programming

For a matrix filled with 0 and 1, you know the sum of every row and column. You are asked to give such a matrix which satisfies the conditions.

Solution:

1. 规约: $3SAT \leq 0-1$ Integer Programming.
2. NP: 0-1 整数线性规划问题是个NP问题, 即存在多项式时间证明。3SAT 问题可以在多项式时间内规约成0-1 整数线性规划问题。把每个子句写成0-1 整数线性规划的每个方程。
3. 构造一个3SAT 的解集: $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge \dots$ 为例。对应的0-1 整数规划问题为:

$$\begin{aligned} \min \quad & 0 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \geq 1 \\ & x_1 + x_2 + (1 - x_3) \geq 1 \\ & x_2 + (1 - x_3) + x_4 \geq 1 \\ & x_i \in \{0, 1\} \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{IP}$$

4. \implies 一个3SAT 的问题可以构造出形如上式0-1 整数线性规划问题, 这个3SAT 问题的特解 T 也就是0-1 整数线性规划里找到的一个可行解。
5. \longleftarrow 一个0-1 整数规划问题的每一行可以写成一个3SAT 问题的每一个子句。一个0-1 整数规划的解也就是3SAT 问题的解。

2 SIP problem

Solution:

1. 规约: $3SAT \leq SIP$ problem.
2. NP: SIP 问题可以在多项式时间内规约成3SAT 问题, 把每个 A_i 作为3SAT 解集的子句。 B_i 是每个元素的True, False 集 $B_2 : \{x_i, \bar{x}_i\}$ 。
3. 构造一个3SAT 的解集: $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_4) \wedge \dots$ 为例, 设 $(A : A_1, A_2, A_3, \dots, A_r)$ 和 $(B : B_1, B_2, B_3, \dots, B_s)$ 。对应的SIP 问题为:

$$\begin{aligned} |T \wedge A_i| &\geq 1 \\ |T \wedge B_i| &\leq 1 \end{aligned}$$

有限集A:

$$A_1 : \{x_1, x_2, x_3\}$$

$$A_2 : \{x_1, \bar{x}_2, x_4\}$$

这里把 \bar{x}_2 替换成 y_2 . 即:

$$A_2 : \{x_1, y_2, x_4\}$$

$$\vdots$$

$$A_n : \{\dots\}$$

对于有限集 B (注意 y_i 就是 \bar{x}_i):

$$B_1 : \{x_1, y_1\}$$

$$B_2 : \{x_2, y_2\}$$

$$\vdots$$

$$B_n : \{\dots\}$$

4. \implies 一个3SAT 的问题可以通过构造上式的SIP 问题进行求解。每一个 A_i 是3SAT 问题的每一个子句，因此当3SAT 解集为True 时，必定每一个子句须为True, 对应的每一个 A_i 须为True。因此一个3SAT 问题的特解 $T = \{x_1, x_2, x_3\}$ 满足3SAT 解集为True。因此与任意一个 A_i 的交肯定至少有一个元素。由于 B_i 的特殊性，一个3SAT 问题的特解与任意一个 B_i 的交最多为一个元素。

5. \Leftarrow 满足SIP 问题的解 T ， T 要与任意一个 A_i 交后至少有一个元素，与任意一个 B_i 交后至多有一个元素，这样的 T 构成的解集就是3SAT 问题的解集的形式，因此SIP 问题可以由3SAT 问题求解。