
武汉理工大学

数学建模暑期培训论文

第 6 题

基于空间几何与有限元分析的多级缠
绕绳索模型

第 21 组

姓名	方向
肖善	建模（组长）
易雨谦	建模
林荣武	编程

2016 年 8 月 26 日

基于空间几何与 ANSYS 有限元分析的多级缠绕绳索模型

摘要

随着工业发展，钢丝绳的性能越来越重要。本文针对一种新型多级缠绕绳索空间描述与受力情况问题分别建立了空间几何模型并进行 ANSYS 有限元分析。

对于问题一，要求对一级缠绕后的钢索，沿钢索轴向给出绕丝的空间几何描述。首先，一级中心丝中心线为直线，易给出空间表达式；其次，一级绕丝属于一级螺线，本文基于圆柱螺线方程，通过矩阵变换实现扩展欧式空间中的坐标变换，得出一级绕丝的空间表达式。最后，通过几何关系确定表达式中各参数，得出六根绕丝的空间表达式。用 matlab 绘图对表达式进行验证，所得结果正确。

对于问题二，在问题一的基础上，要求进一步给出二级缠绕绳索沿轴向的空间几何描述。首先，本文将二级绳股分为两类：二级中心绕丝以及二级侧绕丝；其次，对于第一类，为一次螺线表达式，但螺线半径等参数有所改变；对于第二类，本文推导出二次螺线表达式，由几何关系确定各参数。最后给出 6 根中心绕丝与 36 根侧绕丝表达式。用 matlab 绘图对表达式进行验证，所得结果正确。

对于问题三，要求给出二级缠绕的钢丝绳空间运动轨迹，运用有限元进行分析，钢丝绳的位移变化可以通过其运动参数曲率与绕率描述，通过曲率绕率的数学定义，利用第二问中的二级缠绕状态下的钢丝绳的空间表达式求出曲率和绕率的具体表达式；接着，在运用微分几何学当中的基本知识，得出螺旋线中弧长的变化公式，并与其自然函数相结合，运用曲线的 Frenet-Serret 公式，可以计算出曲线的相伴三棱形，通过投影方程，反解出在三维坐标系下的表达式。

对于问题四，要求分析二级缠绕钢丝绳的破坏方式，在 ANSYS 中对构件划分网格，施加轴向载荷 500N,另一端固定，结果显示形变最大值为 0.068mm,最大应力 934.5MPa. 钢丝绳轴向变形呈层状分布，以钢丝绳中心轴对称分布，说明网格划分均匀及精度能达到计算的要求。钢丝靠近中心股区域变形比远离中心股区域小，符合实际。从端面来看，外侧应变比中心更大，从而验证了外侧钢丝更容易破坏的结果。

本文从数学理论严格推导，用 matlab 验证，ANSYS 有限元分析模拟仿真，得出结果符合实际，且本文公式及分析均可推广到多级缠绕模型。

关键词： ANSYS 有限元分析 螺线 多级缠绕 空间描述

一、问题重述

某新款钢绳，选取同尺寸的钢丝，将六根钢丝围绕一根钢丝进行螺旋缠绕，获得钢索一股，六根缠绕的钢丝分别称为绕丝，中间的钢丝称为索芯，本过程称为一级缠绕。若将经过一级缠绕后的钢索作为单丝，进行二次缠绕或多次缠绕，可得到粗细不同且性能相异的复合钢索，此过程称为二级缠绕或多级缠绕。要求：

- (1) 对经过一级缠绕后的钢索，沿钢索轴向给出绕丝的空间几何描述；
- (2) 对经过二级缠绕后的钢索，沿钢索轴向给出处于各级绕丝的空间几何描述；
- (3) 若经过二级缠绕后的钢索处于使用中（钢索在轴向上有位移），沿钢索轴向给出处于各级绕丝在运动中的空间几何描述；
- (4) 分析该钢索经二级缠绕的破坏方式。

二、问题分析

2.1 问题一的分析

问题一属于空间几何建模，要求对一级缠绕的钢索，沿钢索轴向给出绕丝的空间几何描述。根据图片分析，本文绳索属于右同向捻，受相同拉力时，比交互捻变形更小。一级缠绕后的钢索索芯属于直线，绕丝属于一次圆柱螺线，首先，由于一级中心丝中心线为直线，很容易给出空间表达式，其次，一级绕丝属于一级螺线，本文基于圆柱螺线方程，通过矩阵变换实现扩展欧式空间中的坐标变换，得出一级绕丝的空间表达式。最后，通过确定捻距、捻角与钢丝半径之间的几何关系、第一根钢丝与索芯相对于 x 轴旋转的角度等确定表达式中各参数，通过第 i 根绕丝与第一根绕丝之间的夹角，得出六根绕丝的空间表达式。

2.2 问题二的分析

问题二在问题一的基础上，要求进一步给出二级缠绕绳索沿轴向的空间几何描述。首先，本文将二级绳股分为两类：二级中心绕丝以及二级侧绕丝。其中，二级中心绕丝属于一次螺线，它的螺旋中心是直线；而二级侧绕丝属于二次螺线，它的螺旋中心是螺线。其次，对于第一类，同样套用第一问的一次螺线表达式，但螺线半径等参数有所改变；对于第二类，本文推导出二次螺线表达式，同样由几何关系确定各参数。最后给出 6 根中心绕丝与 36 根侧绕丝表达式。

2.3 问题三的分析

问题三，第三题要求给出二级缠绕情况下的钢丝绳空间运动轨迹，运用有限元进行初步分析，钢丝绳的位移变化可以通过其运动参数曲率与绕率描述，通过曲率绕率的数学定义，利用第二问中的二级缠绕状态下的钢丝绳的空间表达式求出曲率和绕率的具体表达式，接着在运用微分几何学当中的基本知识，得出螺旋线中弧长的变化公式，并且与其自然函数相结合，运用通过曲线的 Frenet-Serret 公式^[1]，可以计算出曲线的相伴三棱形，通过投影方程，反解出在三维坐标系下的表达式。

2.4 问题四的分析：

第四问要求分析二级缠绕钢丝绳的破坏方式，钢丝绳的破坏来源于生活中的运载情况，即拉伸、弯曲和扭转等众多力导致，由于拉伸与弯曲在生活中最为常见并且是作为钢丝绳的主要破坏方式，因此在 ANSYS 从有限元的角度分析钢丝绳拉伸时的应力与应变，给出了在拉伸情况下的表达式，最后在 ANSYS 中对一级即二级缠绕方式进行仿真检验，从而验证钢索外侧最容易受到破坏

三、模型假设

- 1.假设每根钢丝的物理属性相同，结构一致。
- 2.假设在缠绕过程中钢丝不会发生破坏磨损现象。
- 3.假设一二级缠绕下不会发生绕丝脱离索芯的状况。
- 4.假设在二级缠绕方式下侧股中心丝与中心索芯圆心在条直线上。
- 5.假设每根钢丝可近似成圆柱。

四、符号说明

符号	含义
t	时间
$r(t)$	绕丝螺旋线随时间变化函数
$r(s)$	绕丝螺旋线随弧长变化函数
φ	角度
$x(t)$	X 轴方向上的轨迹
$y(t)$	Y 轴方向上的轨迹
$z(t)$	Z 轴方向上的轨迹
K	钢丝绳曲率
T	钢丝绳绕率
S	钢丝绳轨迹线弧长

五、模型的建立和求解

5.1 建模准备

5.1.1 空间变换

在三维欧式空间中，总可以建立一个右手直角坐标系，对于空间中的一个点 P ，总可以用一个三元有序数组 (x_p, y_p, z_p) 来表示其在笛卡尔坐标系下的坐标。

此坐标在扩展欧式空间^[1]中也有对应的齐次坐标为 $(x_p, y_p, z_p, 1)$ 。在扩展欧氏空间里点到点的移动可以由空间变换表示，而空间变换可以由坐标系平移、旋转以及点的平移、旋转所对应的 4 阶方阵表示。三维空间点 P 在三个坐标轴方向平移 tx, ty, tz 的平移变换矩阵为：

$$[T_p] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & tx \\ 0 & 1 & 0 & ty \\ 0 & 0 & 1 & tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

三维旋转变换分为三种基本旋转变换。即分别绕轴 x, y, z 旋转。规定旋转正方向与坐标轴矢量符合右手法则，即从坐标轴正值向坐标原点观察，逆时针方向转动的角度为正。则点 P 分别绕轴 x, y, z 旋转 θ 的变换矩阵为：

$$[T_{rx}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [T_{ry}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [T_{rz}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

坐标系沿三个坐标轴方向平移 tx, ty, tz ，所对应的平移变换矩阵为

$$[T_t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -tx \\ 0 & 1 & 0 & -ty \\ 0 & 0 & 1 & -tz \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

坐标系分别绕轴 x, y, z 旋转 θ 的变换矩阵如下：

$$[T_{rx}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [T_{ry}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [T_{rz}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由此，在扩展空间中的点 $P(x_p, y_p, z_p, 1)$ 变换到另一个点 $P'(x'_p, y'_p, z'_p, 1)$ ，是通过最基本的如上所述的矩阵进行一次又一次的叠加的，在实际中，常常需要进行更复杂的变换。此时，可以通过分解成若干个基本变换来实现，由这些基本变换构成的连续变换序列称为复合变换。具体表示如下：

$$\begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \\ z'_p \\ 1 \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^n [T_i] \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1-1)$$

其中 $[T_i]$ 表示如前所述的基本变换阵。

5.1.2 多级缠绕方式

下图展示了一二级的缠绕方式示意图。

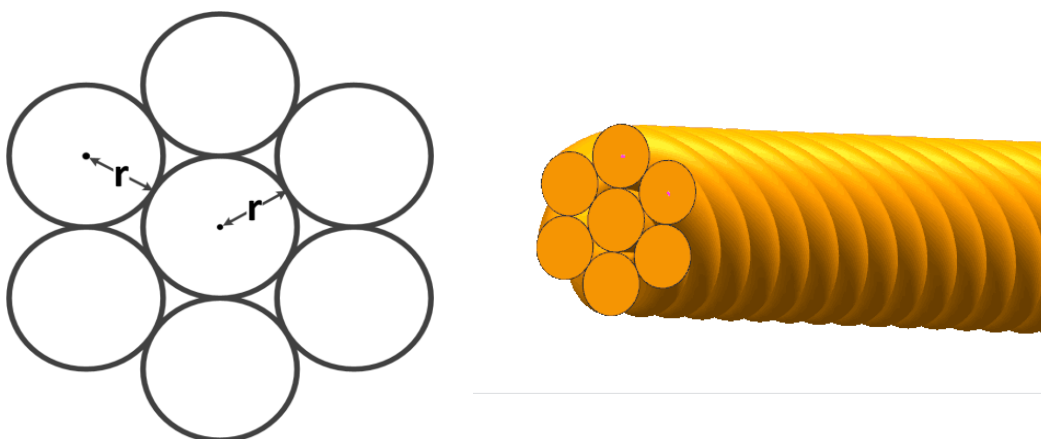


图 1 一级缠绕方式剖面图与整体图

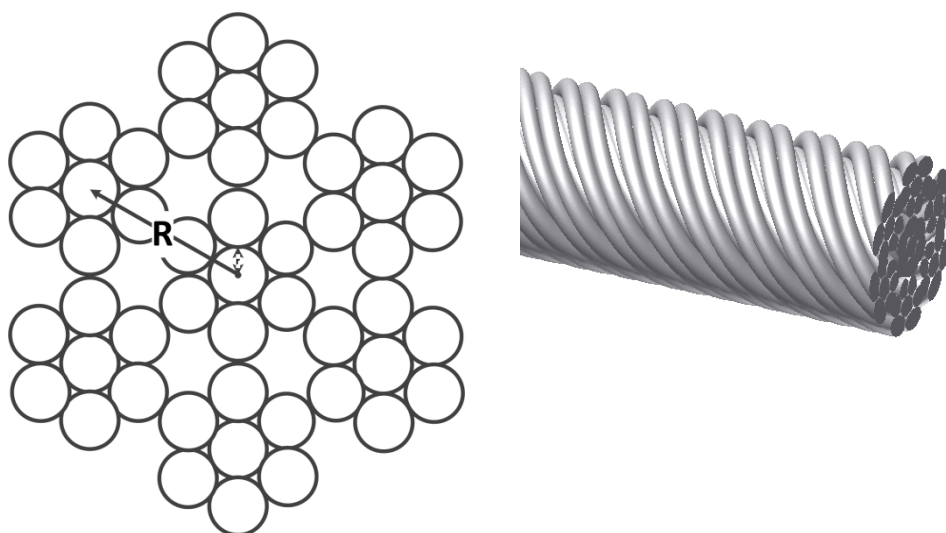


图 2 二级缠绕方式剖面图与整体图

5.1.3 微分几何学

题目中要求求出运动方程，由此引入微分几何中曲线的一些概念与定义，由空间曲线微分几何学关系^[2]：已知曲线 $L: r = r(s)$ ，在它上面 P 点处定义以下单

位向量。 $\frac{\dot{r}}{|\dot{r}|} = t$ 为切向量， $\frac{\ddot{r}}{|\ddot{r}|} = n$ 为主法向量， $t \times n = b$ 为副法向量。其中 t ， n 和

b 满足条件 $|t| = |n| = |b|$ ， $t \times n = b$ ， $b \times n = t$ ， $t \times b = n$ ，这样就构成曲线 L 的基本向量组，组成一个三角形，由于这个三角形在 L 上每个正常点都存在，这样的三角形叫做相伴三角形。弧长 s 为曲线的自然函数。设已知曲线的相伴三角形为

$\{P(s):t(s),n(s),b(s)\}$ ，则它的导向量 $d\vec{t}/ds, d\vec{n}/ds, d\vec{b}/ds$ 按 $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ 的线性分解式为

$$\begin{pmatrix} d\vec{t}/ds \\ d\vec{n}/ds \\ d\vec{b}/ds \end{pmatrix}^T = (\vec{t} \ \vec{n} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} 0 & -K & 0 \\ K & 0 & -T \\ 0 & T & 0 \end{pmatrix}$$

其中 K, T 分别为曲率和绕率。

图 3 三维状况下的二级缠绕情况图

5.2 问题一模型的建立与求解

5.2.1 模型建立

在缠绕状态下，绕丝对中心的轨迹是一条螺线，实际上，螺线也可以看成是有一条直线经过一系列空间变换得到，对于本题，设中心的钢丝绳为股芯与 z 轴重合， m 为绳股外层丝的捻距，则其参数方程可表示为：

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 0 \\ z(t) = tm \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (2-1)$$

绳股层钢丝即绕丝可以看作由一点 P 点绕索芯作螺旋运动得到，绕丝上的每一个点可以看作由 P 点作绕 z 轴的转动沿 z 轴移动组成。若 P 点绕 z 轴转动 φ ，则由几何关系其相应沿 z 轴的移动量 tz 为

$$tz = \varphi \frac{r_j}{\tan \alpha_j} \quad (2-2)$$

其中 α_j 为钢丝绳的捻角， r_j 为绕丝的捻绕半径。

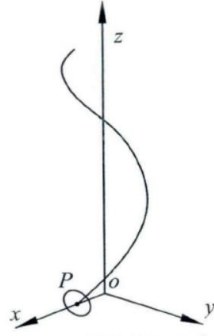


图 4 一次螺线示意图

因此绳股外层绕丝上每个点的齐次坐标可以由下式确定：

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{Bmatrix} = [T_{tp}][T_{rpz}] \begin{Bmatrix} r_j \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (2-3)$$

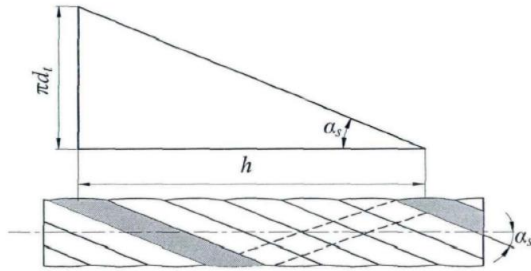


图 5 捻距捻角示意图

这样可以得到在一级缠绕情况下的绕丝空间状态的参数方程式，而由题意可知，这是有 6 条绕丝缠绕在索芯上的，所以得考虑到不同绕丝对于索芯的相对位置不同；设 γ_j 表示第一根钢丝与索芯相对于 x 轴旋转的角度，设 $\theta_{ji} = \frac{(i-1)2\pi}{n_j}$ 表

示为第 i 根绕丝与第一根绕丝之间的夹角；同时考虑到绕丝的捻绕方向，捻向分为右旋和左旋，因此，最终得到一级缠绕下的绕丝参数方程为

$$\begin{cases} x(\varphi) = r_j \cos(\gamma_j + \theta_{ji} + p\varphi) \\ y(\varphi) = r_j \sin(\gamma_j + \theta_{ji} + p\varphi) \\ z(\varphi) = \varphi \frac{r_j}{\tan \alpha_j} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, i \in [1, 6] \end{cases} \quad (2-4)$$

经分析，每一根单位钢丝绳都可近似等同于一根圆柱，其半径设为 r ，则式

(2-5) 中 $r_j = 2r$ ， $\tan \alpha_j = \frac{\pi}{3}$ ， $\theta_{ji} = \frac{(i-1)2\pi}{n_j}$ ($i=1,2,3,4,5,6$)，同时由附件中钢

丝绳照片可知，此钢丝绳是右旋状态，因此 $P=1$ 。在 Matlab 中的结果图显示如下所示：

5.2.2 结果分析

根据以上空间解析式代入参数，在 matlab 中绘制曲线如下：

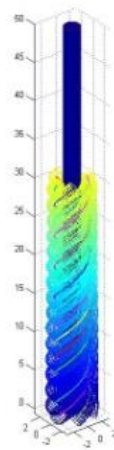


图 6 Matlab 中细钢管（半径为 1）一级缠绕示意图

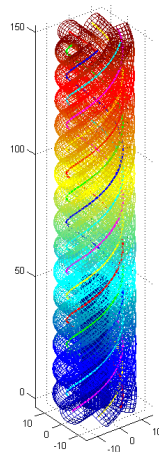


图 7 Matlab 中粗钢管（半径为 5）一级缠绕示意图

由图可知，曲线结果符合实际。

5.3 问题二模型的建立与求解

5.3.1 模型建立与求解

对于二级缠绕的情况，将绕丝分成两种类型，一种是螺旋绳股外层丝的中心绕丝，此种绕丝与（2）中情况类似，是沿着中心索芯作一次螺旋旋转，其空间

状态表达式如下：

$$\begin{cases} x(\varphi) = R_s \cos(\frac{(i-1)2\pi}{n_g} + p\varphi) \\ y(\varphi) = R_s \sin(\frac{(i-1)2\pi}{n_g} + p\varphi) \\ z(\varphi) = \varphi \frac{R_s}{\tan \beta_g} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, i \in [1, 6] \end{cases} \quad (2-5)$$

其中 R_s 为捻绕半径， β_g 为捻角， n_g 为中心绕丝个数，这里等于 6。

由于螺旋绳股外层丝的绕丝绕着螺旋绳股中心丝作螺旋缠绕，因此螺旋绳股的外层丝是一条复杂的空间二次螺旋线。以右旋同向捻钢丝绳为例，通过空间变换的方法，推导螺旋绳股的外层丝中心线的参量方程，最后扩展到一般情况。在二级缠绕状态下设点 $P(R_s, 0, 0)$ 为螺旋绳股中索芯上的一点，点 $S(R_s + r_j, 0, 0)$ 为

螺旋绳股外层丝中绕丝上的点，坐标系 $oxyz$ 的 z 轴与钢丝绳的中心索芯线重合。

点 P 绕 z 轴作螺旋运动可以得到螺旋绳股索芯线的一次螺旋线轨迹，而点 S 绕螺旋绳股中索芯线作螺旋运动，就可以得到螺旋绳股外层丝绕丝的二次螺旋线轨迹^[4]。点 S 空间轨迹的参量方程可以通过空间变换的方法求得。

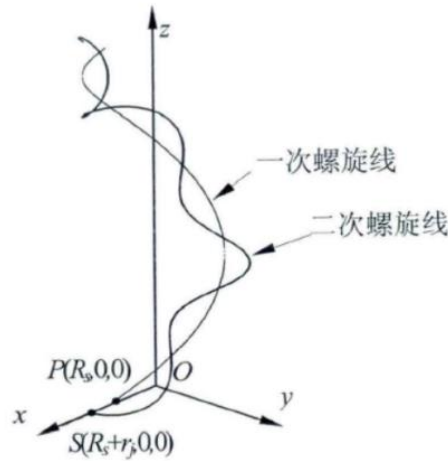


图 8 二级缠绕示意图

将原始坐标 $oxyz$ 系沿轴正向平移 R_s ，再绕 x 轴旋转 $-\beta_g$ （“-”表示按右手定则，坐标系旋转方向为负）则变换后得到的新坐标系 $o'x'y'z'$ 原点 o' 与点 P 重合，坐标轴 z' 与螺旋绳股中心线在 P 点的切线重合。坐标系的空间变换矩阵如下所示：

$$[T_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -R_s \\ 0 & \cos \beta_g & -\sin \beta_g & 0 \\ 0 & \sin \beta_g & \cos \beta_g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在新坐标系 $o'x'y'z'$ 里点 S 绕坐标轴 z' 旋转，并沿坐标轴 z' 移动。由于 P 点是沿一次螺旋线运动的，因此每一个位置坐标轴 z' 的方向都是不同的。若点 S 绕轴 z' 旋转 ω ，点 S 绕轴 z' 旋转的变换矩阵可以用 ω 表示如下：

$$[T_2] = \begin{bmatrix} \cos \omega & -\sin \omega & 0 & 0 \\ \sin \omega & \cos \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

S 点绕 z' 旋转角为 ω ，对应 P 点绕 z 轴旋转角为 φ ，则由几何关系可知

$$\frac{R_s \varphi}{\sin \beta_g} = r_j \omega \cot \alpha_j$$

即

$$\omega = \frac{R_s \varphi}{r_j \sin \beta_g \cot \alpha_j}$$

将坐标系 $o'x'y'z'$ 沿 x' 轴负向平移 R_s ，再绕 x' 轴旋转 β_g 使其与原坐标系 $oxyz$ 重合，该变换可用矩阵表示如下：

$$[T_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & R_s \\ 0 & \cos \beta_g & \sin \beta_g & 0 \\ 0 & -\sin \beta_g & \cos \beta_g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

在原始坐标系 $oxyz$ 里坐标系 $o'x'y'z'$ 绕 z 轴作螺旋运动，若旋转角为 φ ，则沿 z 轴的移动为 $\frac{\varphi R_s}{\tan \beta_g}$ ，该变换用矩阵可表示为：

$$[T_4] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\varphi R_s}{\tan \beta_g} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

综上可得 S 点运动轨迹（二次螺旋线）上个点在扩展欧式空间的齐次坐标表示如下：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} R_s + r_j \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其中 $[T] = [T_4][T_3][T_2][T_1]$ 是一个复合矩阵。

同理，考虑到有 6 根绕丝缠绕于一根侧索芯，6 根侧索芯又是缠绕于中心索芯时，二级当中的绕丝可以通过在 S 点的轨迹绕侧索芯旋转 θ_{ji} 得到。因此其参数方程可以在求 S 点运动轨迹参数方程的复合变换中，增加在新坐标系 $o'x'y'z'$ 里将点 S 绕 z' 轴旋转的基本变换求得，该基本变换矩阵为

$$[T_5] = \begin{bmatrix} \cos \theta_{ji} & -\sin \theta_{ji} & 0 & 0 \\ \sin \theta_{ji} & \cos \theta_{ji} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则对于二级缠绕情况下的复合变换矩阵表达式为：

$$[T] = [T_4][T_3][T_2][T_5][T_1]$$

得到最终的侧绕丝空间状态参数方程表达式为：

$$\left\{ \begin{array}{l} x(\varphi) = r_j (\cos(\gamma_j + \theta_{ui} + kf\omega) \cos(\varphi + \theta_u + \overline{\gamma_j}) \\ - f \cos \beta_g \sin(\gamma_j + \theta_{ui} + kfu) \sin(\varphi + \theta_u + \overline{\gamma_j})) \\ + R_s \cos(\varphi + \theta_u + \overline{\gamma_j}) \\ y(\varphi) = fr_j (\cos(\gamma_j + \theta_{ui} + kf\omega) \sin(\varphi + \theta_u + \overline{\gamma_j}) \\ + f \cos \beta_g \sin(\gamma_j + \theta_{ui} + kf\omega) \cos(\varphi + \theta_u + \overline{\gamma_j})) \\ + fR_s \sin(\varphi + \theta_u + \overline{\gamma_j}) \\ z(\varphi) = -fr_j \sin \beta_g \sin(\gamma_j + \theta_{ui} + kf\omega) \\ + (\varphi + \theta_u + \overline{\gamma_j}) R_s / \tan \beta_g \\ r_j = 2r, \gamma_j = \theta_{ui} / 2, \overline{\gamma_j} = \theta_u, \theta_{ui} = \frac{(i-1)2\pi}{6} \\ \theta_u = \frac{(u-1)2\pi}{6}, \omega = \frac{R_s \varphi}{r_j \sin \beta_g \cot \alpha_j} \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, u, i \in [1, 6] \end{array} \right. \quad (3-1)$$

其中 $f=1$ 为右旋， $k=1$ 为同向捻，在本题中即为这种状况。

在 Matlab 中绘制出相应的图像如下所示：

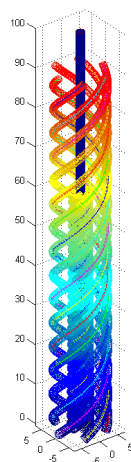


图 9 Matlab 中二级缠绕方式一级绕丝下的钢丝绳示意图

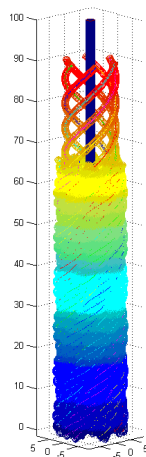


图 10 Matlab 中二级缠绕方式全局下的钢丝绳示意图

5.4 问题三模型建立与求解

5.4.1 模型建立

在有限元的概念中，位移指的就是物体在运动过程中内部所发生的变形量，所以从曲率和绕率这两个方面去描述物体的运动状态是合理的，曲率和绕率是钢丝绳的基本几何特性，曲率反映钢丝的弯曲程度，曲率越大弯曲越厉害；绕

率反映钢丝的扭转程度，绕率越大钢丝的扭转越大。设空间曲线的矢量方程为 $r=r(\varphi)$ ，设相应曲率和绕率分别为 $K(\varphi), T(\varphi)$ ，所建立的方程如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} K(\varphi) = \frac{\left\| \dot{r}(\varphi) \times \ddot{r}(\varphi) \right\|}{\left\| \dot{r}(\varphi) \right\|^3} \\ T(\varphi) = \frac{(\dot{r}(\varphi), \ddot{r}(\varphi), \dddot{r}(\varphi))}{\left\| \dot{r}(\varphi) \times \ddot{r}(\varphi) \right\|^2} \end{array} \right. \quad (4-1)$$

其可以用空间坐标 $x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi)$ 表达，分别求出 $x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi)$ 相应的 1、2、3 阶导数表达式代入相应方程，建立的最终空间状态的表达式如下所示：

$$\left\{ \begin{array}{l} K(\varphi) = \sqrt{\frac{(y'z'' - z'y'')^2 + (zx'' - xz'')^2 + (xy'' - yx'')^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^3}} \\ T(\varphi) = \frac{\begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}}{(y'z'' - z'y'')^2 + (zx'' - xz'')^2 + (xy'' - yx'')^2} \end{array} \right. \quad (4-2)$$

其中 x, y, z 表示钢丝绳的几何空间参数表达式， $x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$ 分别表示沿三个坐标轴表达式的一阶二阶三阶导。曲率和绕率是反映钢丝绳收到拉力时运动在内部所产生的微小形变，下面从一个整体的角度去描述这个物体的变化关系。设时间为 t ，在运动状态下钢丝绳的运动几何空间状态表达式为

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (4-3)$$

则可知在三个坐标系方向上的投影运动方程为：

$$r(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (4-4)$$

其中 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 表示坐标系上的单位正交向量。通过 (4-4) 不难推出在相应运动时间段内的弧长变化量为

$$\int_0^{\varphi} r(t) dt \quad (4-5)$$

则可得到空间绕丝曲线表达式为

$$r(s) = \int_0^s \dot{r}(t) dt \quad (4-6)$$

由前面的模型准备中的空间曲线弧微分定义可以知道，已知 (4-6)，通过曲线的 Frenet-Serret 公式，可以计算出曲线的相伴三棱形 $\{r(s), t(s), n(s), b(s)\}$ ，由此可通过 (4-5)、(4-4) 反解推出空间状态下的 $\{x(t), y(t), z(t)\}$ 表达式，即可求出运动学方程。

$$\begin{pmatrix} d\vec{t}/ds \\ d\vec{n}/ds \\ d\vec{b}/ds \end{pmatrix}^T = (\vec{t} \ \vec{n} \ \vec{b}) \begin{pmatrix} 0 & -K & 0 \\ K & 0 & -T \\ 0 & T & 0 \end{pmatrix} \quad (4-7)$$

其中， $\frac{dr(s)}{ds} = \vec{t}$, $\frac{r(s)}{r(s)} = \vec{n}$, $\vec{t} \times \vec{n} = \vec{b}$ 分别表示沿弧的切向量，法向量和副法向量。

5.5 问题四模型建立与求解

5.5.1 模型建立

通过附件中的钢丝绳损坏图可以发现，二级钢丝绳发生损坏的时候，往往是因为拉伸扭曲导致外部开始到内部逐渐发生磨损。采用有限元分析方法，对弯曲钢丝绳股内钢丝的应力分析，通过这种方法说明二级缠绕钢丝绳的破坏方式。钢丝绳在缠绕在滚筒或摩擦轮上弯曲时，如果只考虑弯矩，而不考虑由拉力和弯曲引起的钢丝或绳股之间的摩擦剪力时，称之为纯弯曲。从材料力学知，一根未经捻制的直径为 δ 的钢丝，在直径为 D 的摩擦轮上弯曲时，此时钢丝的弯曲应力可以表示为

$$\sigma_b = \frac{\delta}{D} E \quad (4-1)$$

其中 δ 为钢丝直径， E 为钢丝的弹性模量， D 为钢丝绳缠绕在滑轮或摩擦轮上的直径。虽然式 (4-1) 可以计算出钢丝的总体弯曲应力，但并不能够真实反映经过一次捻制和二次捻制后钢丝在弯曲状态下的弯曲应力。因此引入转角的概念，即变化后主法线和变化前密切平面之间的夹角。当钢丝绳在弯曲状态时钢丝的曲率变化和转角变化共同决定了弯曲应力的变化。任取一点变化前密切平面为：

$$A(X-x) + A(Y-y) + A(Z-z) = 0$$

变化后主法线：

$$\frac{X-x'}{a} = \frac{Y-y'}{b} = \frac{Z-z'}{c}$$

式中 X, Y, Z 空间曲线移动的三个面中心点的坐标, x, y, z, x', y', z' 分别表示变化前和变化后的空间曲线。

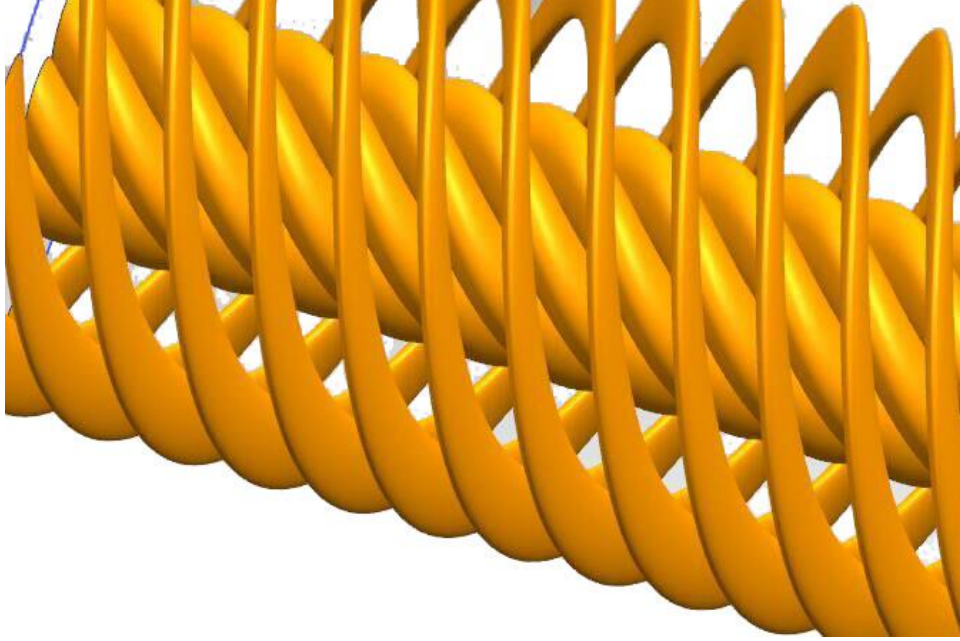


图 11 钢丝绳耳机中心绕丝示意图

$$\gamma_k = \arcsin \frac{A \cdot a + B \cdot b + C \cdot c}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2) \cdot (a^2 + b^2 + c^2)}}$$

其中

$$\begin{cases} A = yz - zy \\ B = zx - xz \\ C = xy - yx \end{cases} \quad \begin{cases} A = y' \cdot (x \cdot y' - y \cdot x') - z' \cdot (z \cdot x' - x \cdot z') \\ B = z' \cdot (y \cdot z' - z \cdot y') - x' \cdot (x \cdot y' - y \cdot x') \\ C = x' \cdot (z \cdot x' - x \cdot z') - y' \cdot (y \cdot z' - z \cdot y') \end{cases}$$

由空间曲线变化引起的最大弯曲应力变化为：

$$\sigma_{bij} = \frac{d_{ij}}{2} E_{ij} (K'_{ij} \cos(\psi_{\max} - \gamma_k) - K_{ij} \cos \psi_{\max})$$

式中, K_{ij} 、 K'_{ij} 表示第 j 股中第 i 钢丝层单根钢丝变形前后曲率, d_{ij} 表示第 j 股中

第 i 钢丝层单根钢丝的直径根据题意有 $d_{ij} = 2r_{ij}$, E_{ij} 表示第 j 股中第 i 钢丝

层单根钢丝的弹性模量。同时, 转角 ψ_{\max} 可由如下公式确定：

$$\psi_{\max} = \arctan\left(\frac{\sin \gamma_k}{\cos \gamma_k - \frac{K_{ij}}{K_{ij}'}}\right)$$

钢丝变化之后的绕率为：

$$T_{ij}^{*'} = \frac{h_s \cos \alpha_{ij}}{h_w \cos \beta_j} \frac{1}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

式中， h_s 为一次捻制钢丝的捻距， h_w 为二次捻制钢丝的捻距， α_{ij} 表示第 j 股中第 i 钢丝层钢丝捻角； β_j 为第 j 股层绳股捻角。据此，扭转应力可表示如下：

$$\tau_{ij} = (T_{ij}^{*'} - T_{ij}^*) \frac{d_{ij}}{2} G_{ij}$$

式中， T_{ij}^* 、 $T_{ij}^{*'}$ 为第 j 股中第 i 钢丝层钢丝变形前后绕率， G_{ij} 第 j 股中第 i 钢丝层单根钢丝的剪切模量。这便是应力分析的表达式。

5.4.2 ANSYS 求解

施加轴向载荷 500N,另一端固定,结果显示形变最大值为 0.068mm,最大应力 934.5MPa。

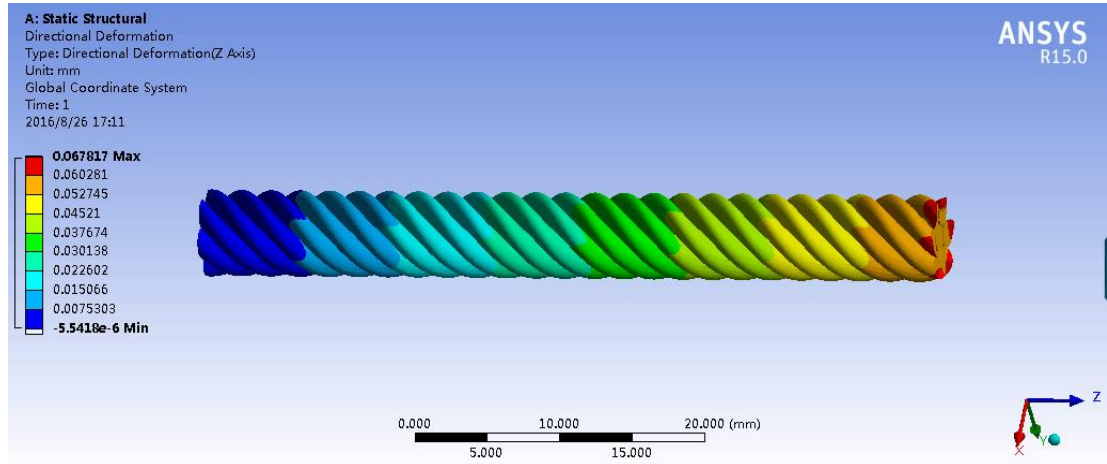


图 12 应变图

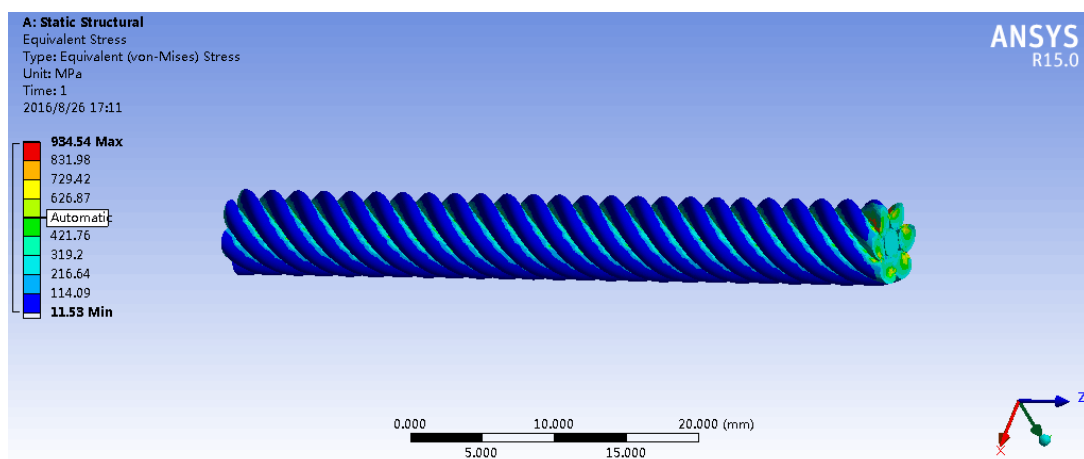


图 13 应力图

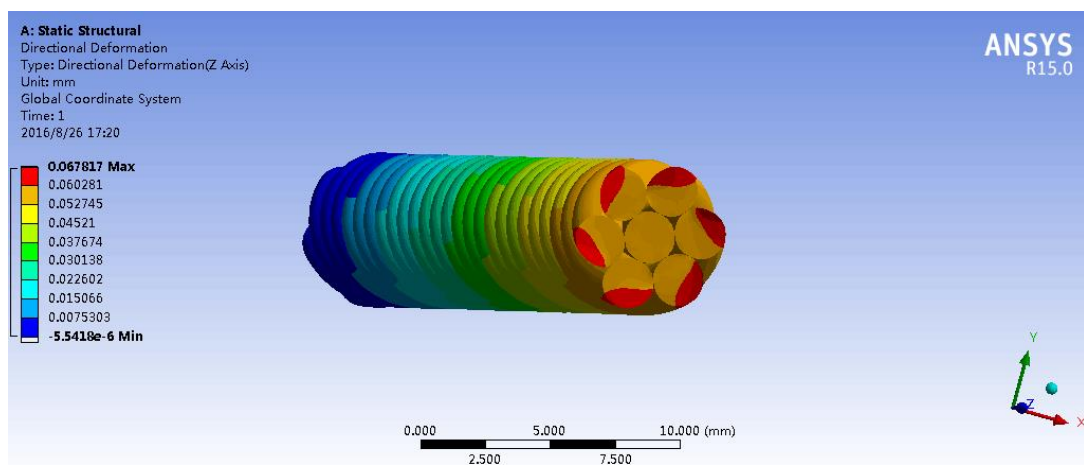


图 14 端面应力图

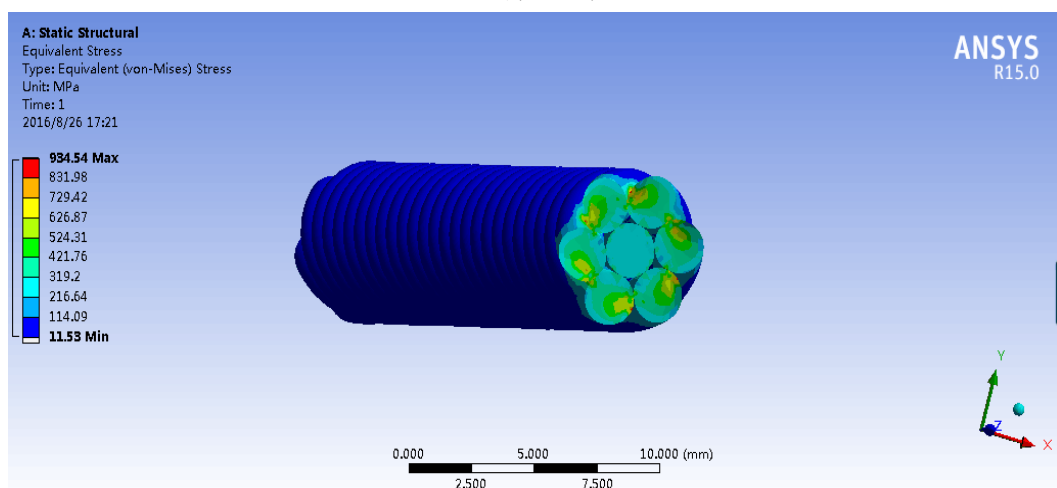


图 15 端面应变图

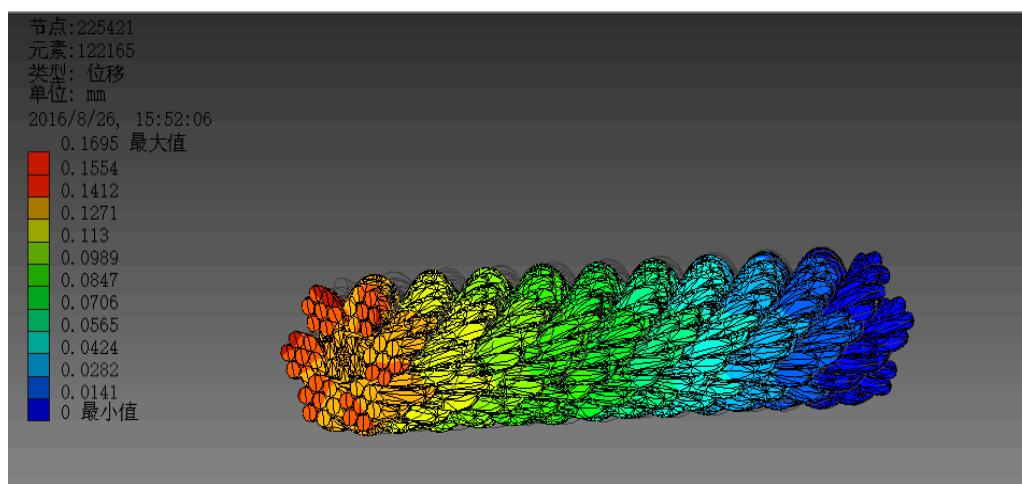


图 16 二级应变图

5.4.3 有限元结果分析：

经过上述有限元分析，沿轴方向变形云图如图 12 所示，钢丝绳轴向变形呈层状分布，以钢丝绳中心轴对称分布，说明网格划分均匀及精度能达到计算的要求。钢丝靠近中心股区域变形比远离中心股区域小，符合实际。侧丝比中心丝变形大，但是相差不明显。13 为单股钢丝绳受载后的应力分布情况。中心丝和侧丝应力相接近，侧丝与侧丝接触处应力比较大，说明应力比较集中，这是由于侧丝受载后，圆形截面变形成椭圆，相邻侧丝相互接触导致应力集中，这和理论数学模型计算结果相符侧丝应力比较大，同时反映出为什么钢丝绳绳芯在实际运用中容易松散。从端面来看，外侧应变比中心更大，可以得出外侧钢丝更容易破坏的结果。

六、 模型的评价和改进

6.1 模型优点：

(1) 问题一二从空间解析几何和扩展欧式空间变换的角度较为严谨地推出了一级螺旋线和二级螺旋线的空间表达式，并且考虑到了实际钢丝绳中的 6 个绕丝的情况，分别建立出 6 个一级缠绕状态下的绕丝方程和 49 个二级缠绕状态下的绕丝方程。

(2) 问题三从微分几何学的角度考虑，并且运用有限元当中的概念，重新定义了位移的含义，并且利用曲率绕率两个典型运动参数，从理论上描述出了钢丝绳的运动状况。

(3) 问题四利用有限元的方法，从应力的角度考虑钢丝绳的破坏情况，给出的破坏状态下的表达式，并且在 ANSYS 中进行仿真检验。

6.2.模型缺点:

- (1) 问题三中所得到的只是一个抽象的表达式，并未计算出最终的空间状态表达式。
- (2) 问题四中所考虑的破坏状况只有拉伸弯曲情况，实际情况更为复杂。

6.3 模型的推广与改进:

- (1) 问题三可从深层次数学空间几何角度出发，严格推导出钢丝绳在运动状态下的具体表达式。
- (2) 问题四可以考虑网格更加细化的情况，使用有限元将更加准确可靠。

参考文献

- [1]谭继文,熊永超,朴承凤. 钢丝绳动参数的新检测方法研究[J]. 阜新矿业学院学报(自然科学版),1994,01:67-70.
- [2]刘玉辉. 钢丝绳内在特性和力学性能的研究[D].太原理工大学,2014.
- [3]王宁. 光滑曲面上曲线的生成及其性质研究[D].南京航空航天大学,2002.
- [4]王桂兰,孙建芳,张海鸥. 钢丝绳捻制成形的空间几何模型与有限元分析[J]. 应用力学学报,2003,03:82-86+162.
- [5]胡勇. 双折线式卷筒多层缠绕系统力学分析与试验研究[D].武汉理工大学,2013.
- [6]倪忠进. 钢丝绳力学特性及失效机理研究[D].昆明理工大学,2008.
- [7]官快. 铁路悬索桥钢丝绳吊索应力数值分析及疲劳评估[D].西南交通大学,2015.
- [8]王晓宇,王雷,孟祥宝. 圆股钢丝绳几何建模与力学分析的探讨[J]. 矿山机械,2013,09:55-60.
- [9]孙土贵,史天录. 钢丝绳数学模型及有限元分析[J]. 五邑大学学报(自然科学版),2016,01:64-68.
- [10]张瑾. $1 \times 7 + \text{IWS}$ 结构钢丝绳服役中应力应变的数值模拟[D].西安理工大学,2009.
- [11]陈原培,陈志伟,孟鹏,孟凡明,龚宪生. 三角型和圆型钢丝绳股弯曲性能有限元比较研究[J]. 中国矿业大学学报,2015,06:1105-1112.

附录

matlab代码:

```
R=1;j=1;nn=9;p=1;m=100;h=100;
material_color = [ 'g','b','c','m','y','r','k' ];
[x2,y2,z2]=cylinder(R,m);%创建以(0,0)为圆心，高度为[0,1]，半径为 R 的圆柱
z2=z2*h;%高度放大 h 倍
mesh(x2,y2,z2)%重新绘图
hold on;
%这里随便给了组数据，中心轨迹 (x,y,z)以及对应的圆半径
for i=1:6
    Y=0.5*(i-1)*2*pi/nn;
    fai=0:0.1:10*pi;
    r=R+0.*fai;
    x=2.*r.*cos(Y+(i-1)*2*pi/nn+p.*fai);
    y=2.*r.*sin(Y+(i-1)*2*pi/nn+p.*fai);
    z=fai.*2.*r./(pi/3);
    %这里 x, y, z, r 是程度相等的数组，注意相邻两点不能重合
    x=x(:);
    y=y(:);
    z=z(:);
    plot3(x,y,z,material_color(i),'linewidth',2);
    hold on
    n=[gradient(x) gradient(y) gradient(z)];%曲线方向增量
    n=bsxfun(@rdivide,n,sqrt(sum(n.^2,2)));
    a=zeros(1,3);[ind ind]=min(n(1,:));
    a(ind)=1;
    r1=cross(n(1,:),a);
    r1=r1/sqrt(sum(r1.^2));
    r2=cross(n(1,:),r1);
    deg=0:20:360;
    xx=r(1)*(r1(1)*cosd(deg)+r2(1)*sind(deg))+x(1);
    yy=r(1)*(r1(2)*cosd(deg)+r2(2)*sind(deg))+y(1);
    zz=r(1)*(r1(3)*cosd(deg)+r2(3)*sind(deg))+z(1);
    d0=[xx(1) yy(1) zz(1)];
    for ii=2:length(x)
        r1=cross(r2,n(ii,:));
        r2=cross(n(ii,:),r1);
        xx=[xx;r(ii)*(r1(1)*cosd(deg)+r2(1)*sind(deg))+x(ii)];
        yy=[yy;r(ii)*(r1(2)*cosd(deg)+r2(2)*sind(deg))+y(ii)];
        zz=[zz;r(ii)*(r1(3)*cosd(deg)+r2(3)*sind(deg))+z(ii)];
```

```

        end
        mesh(xx,yy,zz);
        material_color(i);
    end
    hold on;grid on;axis equal;hidden off;
    第二问
    R=1;
    j=1;
    nn=9;
    p=1;
    m=100;
    h=50;
    RS=6*R;
    material_color = [ 'g','b','c','m','y','r','k' ] ;
    [x2,y2,z2]=cylinder(R,m);%创建以(0,0)为圆心，高度为[0,1]，半径为 R 的圆
柱
    z2=z2*h;%高度放大 h 倍
    mesh(x2,y2,z2)%重新绘图
    hold on;
    %这里随便给了组数据，中心轨迹 (x,y,z)以及对应的圆半径
    for i=1:6
        Y=0.5*(i-1)*2*pi/nn;
        fai=0:0.1:5*pi;
        r=R+0.*fai;
        x=6.*r.*cos(Y+(i-1)*2*pi/nn+p.*fai);
        y=6.*r.*sin(Y+(i-1)*2*pi/nn+p.*fai);
        z=fai.*6.*r./(pi/3);
        %这里 x, y, z, r 是程度相等的数组，注意相邻两点不能重合
        x=x(:);
        y=y(:);
        z=z(:);
        plot3(x,y,z,material_color(i),'linewidth',2);
        hold on
        n=[gradient(x) gradient(y) gradient(z)];%曲线方向增量
        n=bsxfun(@rdivide,n,sqrt(sum(n.^2,2)));
        a=zeros(1,3);[ind ind]=min(n(1,:));
        a(ind)=1;
        r1=cross(n(1,:),a);
        r1=r1/sqrt(sum(r1.^2));
        r2=cross(n(1,:),r1);
        deg=0:20:360;
        xx=r(1)*(r1(1)*cosd(deg)+r2(1)*sind(deg))+x(1);
        yy=r(1)*(r1(2)*cosd(deg)+r2(2)*sind(deg))+y(1);
        zz=r(1)*(r1(3)*cosd(deg)+r2(3)*sind(deg))+z(1);
    end

```



```

d0=[xx(1) yy(1) zz(1)];
for ii=2:length(x)
    r1=cross(r2,n(ii,:));
    r2=cross(n(ii,:),r1);
    xx=[xx;r(ii)*(r1(1)*cosd(deg)+r2(1)*sind(deg))+x(ii)];
    yy=[yy;r(ii)*(r1(2)*cosd(deg)+r2(2)*sind(deg))+y(ii)];
    zz=[zz;r(ii)*(r1(3)*cosd(deg)+r2(3)*sind(deg))+z(ii)];
end
mesh(xx,yy,zz);
material_color(i);
for u=1:6
    n1=u;

x1=6.*r.*(cos(Y+(i-1)*2*pi/nn+RS.*fai/(2*r*sin(pi/2)*3/pi))*cos(fai+2*(u-1)*2*pi/nn))-cos(pi/3)*sin(Y+(i-1)*2*pi/nn+RS.*fai/(2*r*sin(pi/2)*3/pi))*sin(fai+2*(u-1)*2*pi/nn)+RS*cos(2*r+2*(u-1)*2*pi/nn);

y1=6.*r.*(cos(Y+(i-1)*2*pi/nn+RS.*fai/(2*r*sin(pi/2)*3/pi))*sin(fai+2*(u-1)*2*pi/nn))-cos(pi/3)*sin(Y+(i-1)*2*pi/nn+RS.*fai/(2*r*sin(pi/2)*3/pi))*cos(fai+2*(u-1)*2*pi/nn)+RS*cos(2*r+2*(u-1)*2*pi/nn);

z1=6.*r.*sin(pi/3)*sin(Y+(i-1)*2*pi/nn+RS.*fai/(2*r*sin(pi/2)*3/pi))+(fai+2*(u-1)*2*pi/nn)*RS/tan(pi/3);
    x1=x1(:);
    y1=y1(:);
    z1=z1(:);
% plot3(x1,y1,z1,material_color(i),'linewidth',2);
    hold on
    n=[gradient(x1) gradient(y1) gradient(z1)];% 曲线方向增量
    n=bsxfun(@rdivide,n,sqrt(sum(n.^2,2)));
    a=zeros(1,3);[ind ind]=min(n(1,:));
    a(ind)=1;
    r1=cross(n(1,:),a);
    r1=r1/sqrt(sum(r1.^2));
    r2=cross(n(1,:),r1);
    deg=0:20:360;
    xx=r(1)*(r1(1)*cosd(deg)+r2(1)*sind(deg))+x1(1);
    yy=r(1)*(r1(2)*cosd(deg)+r2(2)*sind(deg))+y1(1);
    zz=r(1)*(r1(3)*cosd(deg)+r2(3)*sind(deg))+z1(1);
    d0=[xx(1) yy(1) zz(1)];
    for ii=2:length(x)
        r1=cross(r2,n(ii,:));
        r2=cross(n(ii,:),r1);
        xx=[xx;r(ii)*(r1(1)*cosd(deg)+r2(1)*sind(deg))+x1(ii)];

```

```

        yy=[yy;r(ii)*(r1(2)*cosd(deg)+r2(2)*sind(deg))+y1(ii)];
        zz=[zz;r(ii)*(r1(3)*cosd(deg)+r2(3)*sind(deg))+z1(ii)];
    end
    % mesh(xx,yy,zz);
    material_color(i);
    end
end
hold on;;grid on;axis equal;hidden off;

clc
R=1;
j=1;
nn=9;
p=1;
m=100;
h=50;
RS=6*R;
material_color = [ 'g','b','c','m','y','r','k' ];
alpha =pi/3;
nn = 3;
% [x2,y2,z2]=cylinder(R,m);%创建以(0,0)为圆心，高度为[0,1]，半径为 R 的
圆柱
% z2=z2*h;%高度放大 h 倍
% mesh(x2,y2,z2)%重新绘图
% hold on;
sita = 0:pi/100:2*pi;
for i=1:6
    r=R+0.*sita;

    phi = (i-1)*pi/3;
    x=6.*cos(sita + phi);
    y=6.*sin(sita + phi);
    z=6.*sita*tan(alpha);
    %这里 x, y, z, r 是程度相等的数组，注意相邻两点不能重合
    x=x(:);
    y=y(:);
    z=z(:);
    plot3(x,y,z,material_color(i),'linewidth',2);
    hold on

    n=[gradient(x) gradient(y) gradient(z)];%曲线方向增量
    n=bsxfun(@rdivide,n,sqrt(sum(n.^2,2)));
    a=zeros(1,3);[ind ind]=min(n(1,:));
    a(ind)=1;

```

```

r1=cross(n(1,:),a);
r1=r1/sqrt(sum(r1.^2));
r2=cross(n(1,:),r1);
deg=0:20:360;
xx=r(1)*(r1(1)*cosd(deg)+r2(1)*sind(deg))+x(1);
yy=r(1)*(r1(2)*cosd(deg)+r2(2)*sind(deg))+y(1);
zz=r(1)*(r1(3)*cosd(deg)+r2(3)*sind(deg))+z(1);
d0=[xx(1) yy(1) zz(1)];
for ii=2:length(x)
    r1=cross(r2,n(ii,:));
    r2=cross(n(ii,:),r1);
    xx=[xx;r(ii)*(r1(1)*cosd(deg)+r2(1)*sind(deg))+x(ii)];
    yy=[yy;r(ii)*(r1(2)*cosd(deg)+r2(2)*sind(deg))+y(ii)];
    zz=[zz;r(ii)*(r1(3)*cosd(deg)+r2(3)*sind(deg))+z(ii)];
end
mesh(xx,yy,zz);
material_color(i);

for u=1:6
    gamma = (u-1)*pi/3;
    x1 = 6.*cos(sita + phi)-2.*cos(sita+phi).*cos(nn.*sita + gamma) +
2.*sin(alpha).*sin(sita+phi).*sin(nn.*sita+gamma);
    y1 = 6.*sin(sita + phi)-2.*sin(sita+phi).*cos(nn.*sita + gamma) -
2.*sin(alpha).*cos(sita+phi).*sin(nn.*sita+gamma);
    z1 = 6.*sita.*tan(alpha)+2.*cos(alpha).*sin(nn.*sita+gamma);
    x1=x1(:);
    y1=y1(:);
    z1=z1(:);
    plot3(x1,y1,z1,material_color(i),'linewidth',1);
    hold on

    n=[gradient(x1) gradient(y1) gradient(z1)];% 曲线方向增量
    n=bsxfun(@rdivide,n,sqrt(sum(n.^2,2)));
    a=zeros(1,3);[ind ind]=min(n(1,:));
    a(ind)=1;
    r1=cross(n(1,:),a);
    r1=r1/sqrt(sum(r1.^2));
    r2=cross(n(1,:),r1);
    deg=0:20:360;
    xx=r(1)*(r1(1)*cosd(deg)+r2(1)*sind(deg))+x1(1);
    yy=r(1)*(r1(2)*cosd(deg)+r2(2)*sind(deg))+y1(1);
    zz=r(1)*(r1(3)*cosd(deg)+r2(3)*sind(deg))+z1(1);
    d0=[xx(1) yy(1) zz(1)];
    for ii=2:length(x)

```

```
        r1=cross(r2,n(ii,:));
        r2=cross(n(ii,:),r1);
        xx=[xx;r(ii)*(r1(1)*cosd(deg)+r2(1)*sind(deg))+x1(ii)];
        yy=[yy;r(ii)*(r1(2)*cosd(deg)+r2(2)*sind(deg))+y1(ii)];
        zz=[zz;r(ii)*(r1(3)*cosd(deg)+r2(3)*sind(deg))+z1(ii)];
    end
    mesh(xx,yy,zz);
    material_color(i);
end
end
```