



Métodos da Física Teórica

Victor Hugo dos Santos Lins

*Instituto de Física - Universidade de São Paulo,
R. do Matão 1371,
Cidade Universitária, São Paulo, Brasil.*

E-mail: victorlins@usp.br

Sumário

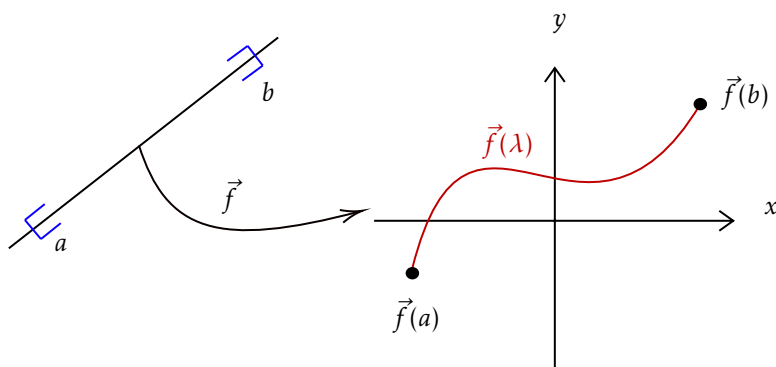
1	Cálculo Vetorial	2
1.1	Aula 11 (14/10/2021)	2
1.1.1	Caminhos em \mathbb{R}^2 em coordenadas cartesianas	2
1.1.2	Exemplos de caminhos em \mathbb{R}^2	2
1.1.3	Comprimento de um caminho	4
1.1.4	Coordenadas polares em \mathbb{R}^2	5
1.1.5	Caminhos em \mathbb{R}^2 em coordenadas polares	6
1.1.6	Generalização ao \mathbb{R}^3	7
1.2	Aula 12 (19/10/2021)	10
1.2.1	Campos escalares	10
1.2.2	Derivadas parciais	10
1.2.3	Integrais multidimensionais	11
1.3	Aula 13 (26/10/2021)	15
1.3.1	Campos vetoriais	15
1.3.2	Derivadas de campos vetoriais	16
1.3.3	Integrais em campos vetoriais	17
1.4	Aula 14 (04/11/2021)	20
1.4.1	Integrais de superfície	20
1.4.2	Teoremas de Gauss, Stokes e Helmholtz	22
1.4.3	Nabla em coordenadas curvilíneas	23
1.4.4	Aplicação ao campo gravitacional	25
1.5	Aula 15 (09/11/2021)	26
1.5.1	Equação de Onda 1D	26
1.5.2	Solução da equação de onda 1D	27
2	Resolução da P1 de 2018	31
2.1	Equação de Schrödinger	31
2.2	Exponencial de Matriz	33
3	Resolução da Lista 1 de 2021	35
3.1	Autovalores, autovetores e exponencial de matriz	35
4	Resolução da Lista 2 de 2021	37
4.1	Oscilador harmônico simples	37
4.2	Capacitor, circuito RLC e corrente alternada	38
4.3	Força de Lorentz	39
4.4	Cinemática do projétil com resistência do ar	42
4.5	Plano com inclinação temporalmente variável	43
4.6	Partícula em um potencial inversamente quadrático	45
5	Resolução da Lista 3 de 2021	46
5.1	Cinemática de uma partícula em um caminho	46
5.2	Corpo em movimento vinculado a uma esfera	47
5.3	Modelagem da temperatura de um quarto	48
5.4	Área de uma superfície em \mathbb{R}^3	48
5.5	Integral em duas dimensões	49
5.6	Integrais em três dimensões	49

1 Cálculo Vetorial

1.1 Aula 11 (14/10/2021)

1.1.1 Caminhos em \mathbb{R}^2 em coordenadas cartesianas

Seja $\vec{f} : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função que leve um parâmetro $\lambda \rightarrow \vec{f}(\lambda)$. Quando representamos os pontos no plano Oxy , uma curva é revelada. Fisicamente já fazemos isso desde o estudo da cinemática de forma intuitiva, quando levamos $t \rightarrow \vec{r}(t)$, isto é, usamos o tempo como parâmetro para encontrar a trajetória de uma partícula através da função \vec{r} .



Definição: vetor tangente

$$[\vec{f}(t)]' = \frac{d\vec{f}}{dt} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} \quad (1.1)$$

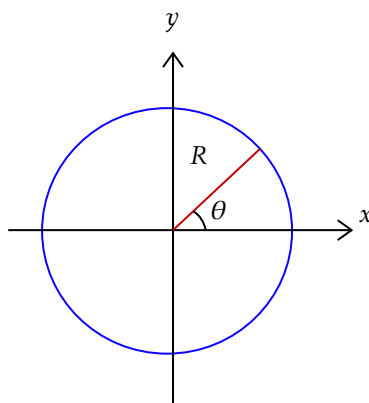
Na física, quando $\vec{f}(t) = \vec{r}(t)$, o vetor tangente é interpretado como a velocidade.

Definição: diferencial

$$d\vec{f}(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} (\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)) = \frac{d\vec{f}}{dt} dt \quad (1.2)$$

1.1.2 Exemplos de caminhos em \mathbb{R}^2

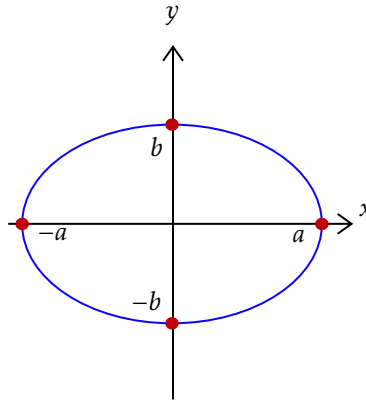
- Círculo



Nesse caso, o parâmetro a ser utilizado é θ , de forma que

$$\theta \longrightarrow \vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{pmatrix} = (R \cos \theta) \hat{e}_x + (R \sin \theta) \hat{e}_y \quad (1.3)$$

- Elipse



Novamente, o parâmetro a ser utilizado é θ , de forma que

$$\theta \longrightarrow (a \cos \theta) \hat{e}_x + (b \sin \theta) \hat{e}_y \quad (1.4)$$

onde pode-se verificar uma compatibilidade na parametrização quando testamos alguns pontos notáveis $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$.

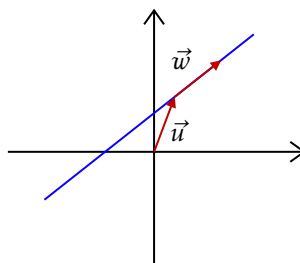
- O plano de Argand-Gauss $\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$

Tomando $\hat{e}_x \longrightarrow 1$ e $\hat{e}_y \longrightarrow i$, onde i é a unidade imaginária, o círculo se torna

$$\theta \longrightarrow R(\cos \theta + i \sin \theta) = Re^{i\theta} \quad (1.5)$$

onde no último passo foi utilizado a fórmula de Euler, revelando uma exponencial complexa para parametrizar esse caminho. Essa manipulação é muito útil porque facilita diversos cálculos na física.

- Reta



Dessa vez, suponha um parâmetro t e perceba que

$$t \longrightarrow \vec{u} + t\vec{w} \quad (1.6)$$

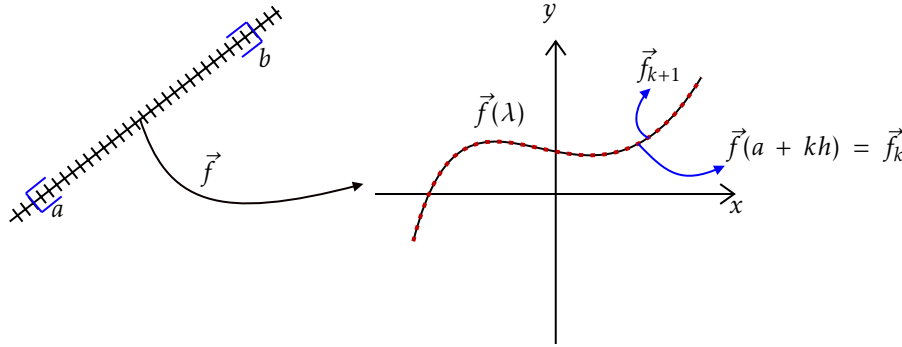
representa todos os pontos da reta, quando fazemos t percorrer \mathbb{R} .

1.1.3 Comprimento de um caminho

Vamos considerar uma partição regular \mathbb{P} intervalo real $I = [a, b]$ definida por

$$\mathbb{P} = \{a = t_0, t_1 = a + h, t_2 = a + 2h, \dots, b = t_n\} \quad (1.7)$$

com distância h entre dois pontos consecutivos. Esquemáticamente, considerando que $k \in \mathbb{Z}$, o que acontece é o seguinte:



Note que a distância entre dois pontos consecutivos no caminho é dada por

$$\|\vec{f}_{k+1} - \vec{f}_k\| \quad (1.8)$$

o que implica que o comprimento do caminho pode ser aproximado pelo somatório a seguir:

$$L \approx \sum_{k=0}^{N-1} \|\vec{f}_{k+1} - \vec{f}_k\| \quad (1.9)$$

Para calcular o comprimento exato, precisamos tomar o limite em que $N \rightarrow \infty$, isto é

$$L = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \|\vec{f}_{k+1} - \vec{f}_k\| \quad (1.10)$$

o que equivale a fazer $h \rightarrow 0$. Portanto, através da definição de diferencial em (1.2), temos

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \|d\vec{f}\| = \int_a^b \|[\vec{f}(t)]'\| dt \quad (1.11)$$

portanto, dado $\vec{f}(t)$ podemos encontrar o comprimento do caminho descrito quando t percorre um dado intervalo $[a, b]$ através da integral acima.

- Exemplo: comprimento do círculo

Consideremos a seguinte parametrização de um círculo com $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$\theta \longrightarrow R \cos \theta \hat{e}_x + R \sin \theta \hat{e}_y \quad (1.12)$$

Vamos calcular $[\vec{f}(\theta)]'$ a seguir

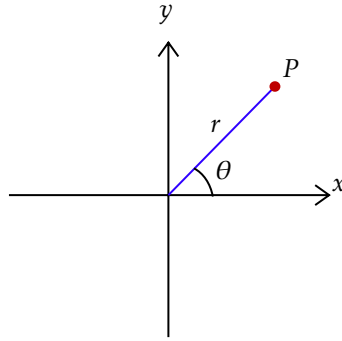
$$[\vec{f}(\theta)]' = -R \sin \theta \hat{e}_x + R \cos \theta \hat{e}_y \implies \|[\vec{f}(\theta)]'\| = R \quad (1.13)$$

Portanto, o comprimento do círculo será determinado pela eq. (1.11):

$$\int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R \quad (1.14)$$

1.1.4 Coordenadas polares em \mathbb{R}^2

Desejamos obter uma forma de relacionar o sistema de coordenadas cartesianas com o de coordenadas polares; confira o esquema a seguir:



Utilizando trigonometria, observe que podemos dizer que

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (1.15)$$

portanto qualquer ponto do plano pode ser dado por $\vec{r}(\theta)$ através de

$$\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (1.16)$$

uma vez escolhidos r e θ apropriadamente. Dadas as coordenadas (x, y) de um ponto no plano, podemos representar o mesmo ponto através de coordenadas polares verificando através das relações encontradas que

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.17)$$

Além disso, precisamos encontrar quem são os versores para o sistema de coordenadas polares. Para tanto, primeiro traçaremos um análogo com o que acontece no sistema de coordenadas cartesiano, e a partir daí obteremos uma prescrição para obter versores em todos os outros sistemas de coordenadas.

Em primeiro lugar, lembremos que no sistema de coordenadas cartesianas vale

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y \quad (1.18)$$

de forma que podemos obter os versores através de

$$\hat{e}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}, \quad \hat{e}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \quad (1.19)$$

e reconhecemos que estes já estão *normalizados*, então não há mais nada para fazer. Note que tudo que precisou ser feito foi calcular a derivada parcial de \vec{r} com respeito a variável associada ao versor desejado. A justificativa para isso dar certo tem a ver com a interpretação geométrica da derivada (obtenção do vetor tangente). Portanto, de forma análoga, reconhecemos que em coordenadas polares vale

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

o que implica que

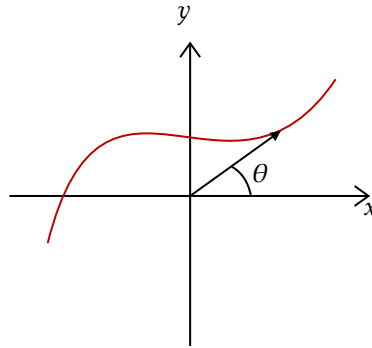
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y \equiv \hat{e}_r \quad (1.21)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -r \sin \theta \hat{e}_x + r \cos \theta \hat{e}_y \implies \hat{e}_\theta \equiv -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \quad (1.22)$$

Neste último passo, dividimos por r para poder normalizar e encontrar o versor.

1.1.5 Caminhos em \mathbb{R}^2 em coordenadas polares

Considere o caminho esquematizado a seguir:



Aprendemos que a equivalência entre as coordenadas cartesianas e as polares é de tal forma que podemos dizer que

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r(t) \cos(\theta(t)) \\ r(t) \sin(\theta(t)) \end{pmatrix} = r(t) \cos(\theta(t)) \hat{e}_x + r(t) \sin(\theta(t)) \hat{e}_y = r(t) \hat{e}_r \quad (1.23)$$

Então a trajetória da partícula sempre será ditada em coordenadas polares via $\vec{r}(t) = r(t) \hat{e}_r$. Agora precisamos encontrar as outras grandezas relevantes, como velocidade e aceleração.

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\hat{e}}_r \quad (1.24)$$

mas lembramos que $\hat{e}_r = \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y$, então

$$\dot{\hat{e}}_r = (-\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y) \dot{\theta} = \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (1.25)$$

portanto, $\vec{v}(t)$ simplifica para

$$\vec{v}(t) = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (1.26)$$

Derivando mais uma vez em relação ao tempo para encontrar a aceleração, temos

$$\dot{\vec{v}}(t) = \vec{a}(t) = \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \dot{\hat{e}}_r + (\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \hat{e}_r = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{e}_\theta \quad (1.27)$$

Portanto sabemos estudar a cinemática de uma partícula que percorre um caminho no \mathbb{R}^2 utilizando coordenadas polares, através das relações desenvolvidas acima.

1.1.6 Generalização ao \mathbb{R}^3

As ideias são extremamente análogas ao que foi feito em \mathbb{R}^2 , embora seja necessário tomar um pouco mais de cuidado com os cálculos porque agora possuímos uma dimensão extra. Escrevemos as parametrizações da seguinte forma:

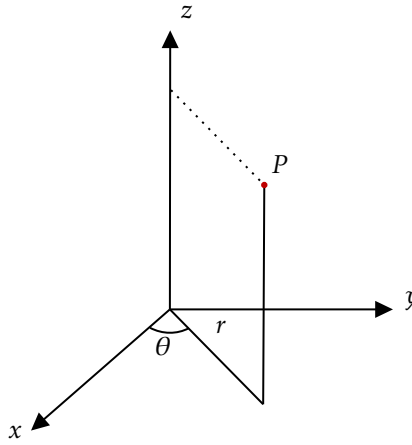
$$t \longrightarrow \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^3 \quad (1.28)$$

Exemplo da espiral: $t \longrightarrow R \cos \theta \hat{e}_x + R \sin \theta \hat{e}_y + z(t) \hat{e}_z$.

No que se refere a sistemas de coordenadas, estudaremos a seguir as coordenadas cilíndricas e as coordenadas esféricas.

- Coordenadas Cilíndricas

Nos basearemos na geometria do seguinte esquema:



De modo que podemos afirmar:

$$x = r \cos(\theta(t)), \quad y = r \sin(\theta(t)), \quad z = z(t) \quad (1.29)$$

Como de costume, podemos ainda definir

$$\hat{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \quad (1.30)$$

$$\hat{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \quad (1.31)$$

$$\hat{e}_z = (0, 0, 1) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \quad (1.32)$$

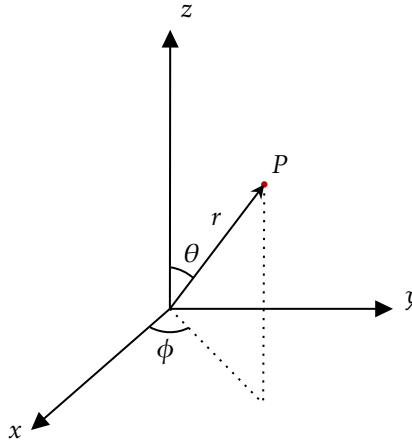
Portanto, conseguimos expressar a trajetória da partícula através de

$$\vec{r}(t) = (r(t) \cos(\theta(t)), r(t) \sin(\theta(t)), z(t)) \quad (1.33)$$

e reconhecemos que sua velocidade e aceleração podem sempre ser encontradas através da derivação em relação ao tempo de $\vec{r}(t)$.

- Coordenadas Esféricas

Dessa vez o esquema geométrico será este:



Cujas implicações geométricas são:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (1.34)$$

O que nos permite calcular os versores:

$$\hat{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (1.35)$$

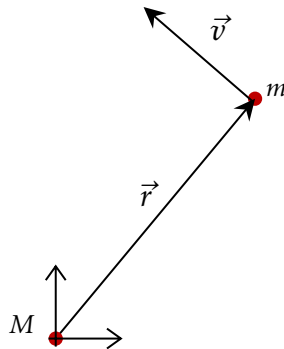
$$\hat{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \quad (1.36)$$

$$\hat{e}_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \quad (1.37)$$

mais uma vez, por derivação de $\vec{r}(t)$ encontramos velocidade e aceleração, e pode-se deixar em função dos versores em coordenadas esféricas, analogamente ao que foi feito quando estava sendo analisado o sistema de coordenadas polares (\mathbb{R}^2).

Exemplo: [Corpo massivo num campo gravitacional] Considere um sistema binário composto por um corpo de massa m e um corpo de massa $M \gg m$ (de forma que podemos assumir M um ponto fixo). Utilize o sistema de coordenadas mais apropriado para essa situação, mostre que o momento angular do sistema se conserva e esboce o diagrama de fase para o corpo m .

Solução: Observe a ilustração do sistema abaixo:



Por definição, o momento angular é dado por $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\dot{\vec{r}})$, o que implica que a sua derivada é calculada por

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times (m\dot{\vec{r}}) + \vec{r} \times (m\ddot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \left(-\frac{GMm\vec{r}}{r^3} \right) = 0 \quad (1.38)$$

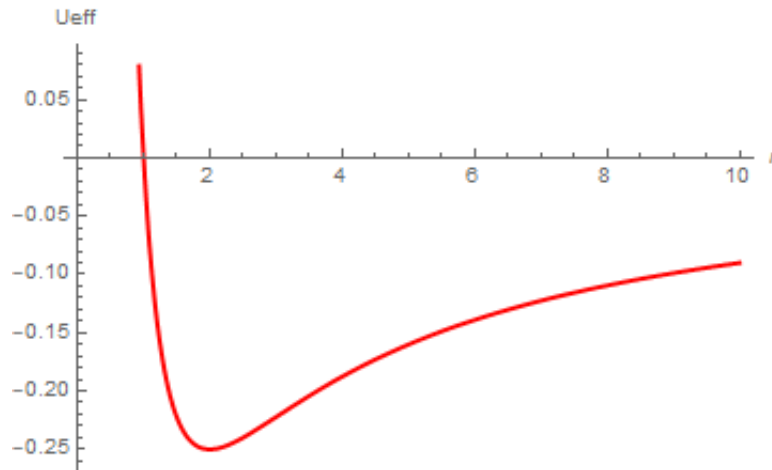
Portanto o momento angular é conservado. A priori poderíamos estar tentados a descrever o movimento conseguinte do corpo através de coordenadas esféricas, mas como o momento angular é conservado o movimento do corpo acontecerá num plano, e será mais simples descrevê-lo através de coordenadas polares. Dessa forma, o momento angular é

$$\vec{L} = m(r\hat{e}_r) \times (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\hat{e}_z \implies \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \quad (1.39)$$

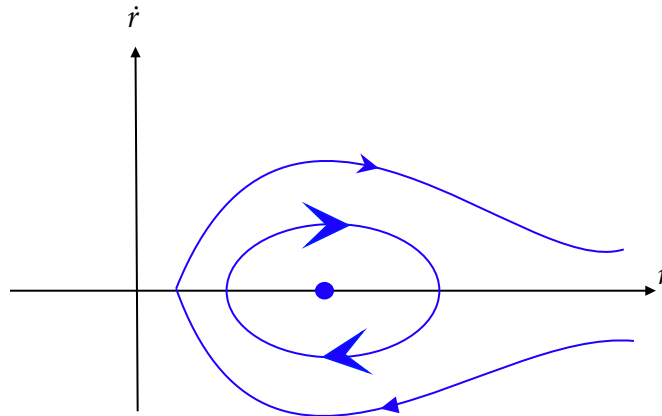
Com essa informação, calculamos agora a energia mecânica do sistema:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\left[\frac{L^2}{2m^2r^2} - \frac{GMm}{r} \right]}_{U_{eff}} \quad (1.40)$$

Para encontrar o diagrama de fase, é conveniente analisar o gráfico de $(U_{eff} \times r)$, que será plotado a seguir:



e por conseguinte o seu diagrama de fase é esboçado adiante através do gráfico da energia potencial:



1.2 Aula 12 (19/10/2021)

1.2.1 Campos escalares

Um campo escalar é uma função

$$\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (1.41)$$

Começaremos analisando o caso onde $n = 2$ para ganharmos intuição e depois generalizaremos.

Exemplo: $\phi(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$. O domínio desse campo escalar é tal que

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad (1.42)$$

(por conta da raiz quadrada que define ϕ). Isto é, os valores de x e y são restritos aos pontos que vivem no interior (e no contorno) de uma circunferência de raio 3 e centrada na origem. Outro conceito importante é o de curva de nível: uma projeção de $\phi(x, y) = C$, $C \in \mathbb{R}$, no plano.

1.2.2 Derivadas parciais

Definimos uma derivada parcial da seguinte forma:

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x + h, y) - \phi(x, y)}{h} \quad (1.43)$$

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x, y + h) - \phi(x, y)}{h} \quad (1.44)$$

Isto é, derivamos com respeito da uma variável enquanto consideramos as outras variáveis da função como constantes. Vamos a um exemplo: seja $\phi(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, calcular $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \phi}{\partial y}$.

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^3, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4y \quad (1.45)$$

A mesma ideia vale para as derivadas parciais de ordem maior, como:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \quad (1.46)$$

Teorema de Clairant

Dado que $\phi(x, y)$ é contínua no intervalo de interesse, vale

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \quad (1.47)$$

Além disso, as derivadas parciais contemplam as regras usuais de derivação total (incluindo a regra da cadeia).

Já aprendemos a definir o diferencial para caminhos $\vec{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como $d\vec{f}(t) = \frac{d\vec{f}}{dt} dt$, agora precisamos definir o diferencial para campos escalares:

Definição do diferencial de um campo escalar

$$d\phi(x, y) \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \quad (1.48)$$

Se $d\phi$ existe em um certo ponto, dizemos que ϕ é *diferenciável* naquele ponto. Além disso, também podemos definir a derivada direcional de um campo escalar:

Derivada direcional de um campo escalar

Trata-se da derivada na direção de um certo vetor \vec{u} :

$$D_{\vec{u}}\phi(\vec{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(\vec{x}_0 + h\vec{u}) - \phi(\vec{x}_0)}{h} \quad (1.49)$$

Alguns casos particulares são

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = D_{\hat{e}_x}\phi; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = D_{\hat{e}_y}\phi \quad (1.50)$$

Resultado importante:

$$D_{\vec{u}}\phi(\vec{x}) = \nabla\phi(\vec{x}) \cdot \vec{u} \quad (1.51)$$

Demonstração. Seja $g(h) = \phi(x + ha, y + hb)$. Podemos definir $\vec{r} = (x, y)$ e também $\vec{u} = (a, b)$ de forma que $g(h) = \phi(\vec{r} + h\vec{u})$. Vamos avaliar quanto vale a seguinte derivada em $h = 0$:

$$\left. \frac{dg}{dh} \right|_{h=0} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left. \frac{g(h + \xi) - g(h)}{\xi} \right|_{h=0} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\phi(\vec{r} + \xi\vec{u}) - \phi(\vec{r})}{\xi} = D_{\vec{u}}\phi(\vec{r}) \quad (1.52)$$

Por outro lado, usando a regra da cadeia,

$$\left. \frac{dg}{dh} \right|_{h=0} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial (x + ha)} \frac{\partial (x + ha)}{\partial h} + \frac{\partial \phi}{\partial (y + hb)} \frac{\partial (y + hb)}{\partial h} \right)_{h=0} = a \frac{\partial \phi}{\partial x} + b \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (1.53)$$

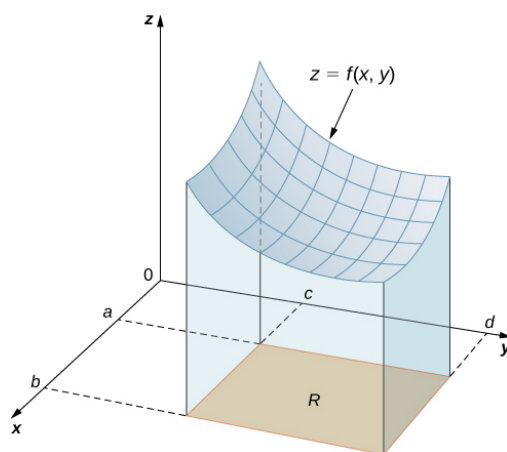
$$\therefore D_{\vec{u}}\phi(\vec{r}) = \nabla\phi \cdot \vec{u} \quad (1.54)$$

1.2.3 Integrais multidimensionais

Para funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podemos definir a integral de Riemann

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(\xi_k) \frac{b-a}{N} \quad (1.55)$$

A extensão aos campos escalares é imediata:



- (1) Dividimos $[a, b]$ em N partes iguais;
- (2) Dividimos $[c, d]$ em M partes iguais;
- (3) para cada retângulo R_{ij} , onde $i = \{0, \dots, N-1\}$ e $j = \{0, \dots, M-1\}$, escolhemos um ponto (x_{ij}^*, y_{ij}^*) dentro do retângulo

A integral (geometricamente é o volume) é

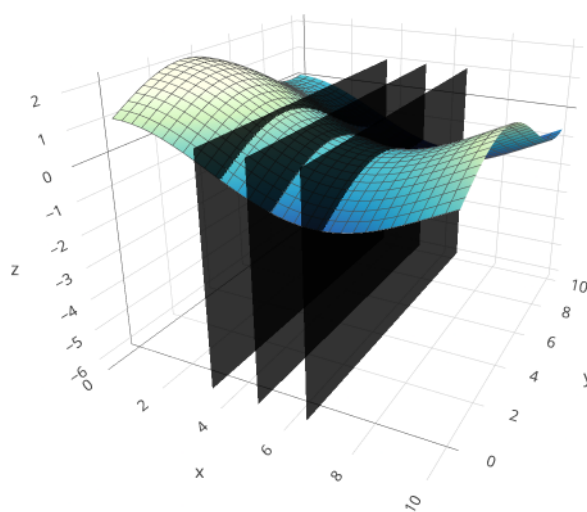
$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} \sum_{(i,j)=(0,0)}^{(N-1, M-1)} \phi(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y = \int_R \phi(x, y) dx dy \quad (1.56)$$

onde R diz respeito a região $[a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$. Na prática, para calcular a seguinte ideia é útil:

$$\int_c^d \phi(x, y) dy = f(x) \quad (1.57)$$

é função obtida integrando sobre y para x fixo. No caso antecedente, $\int_R \phi(x, y) dx dy$, temos 2 possibilidades:

- Fixo em x e integro em y

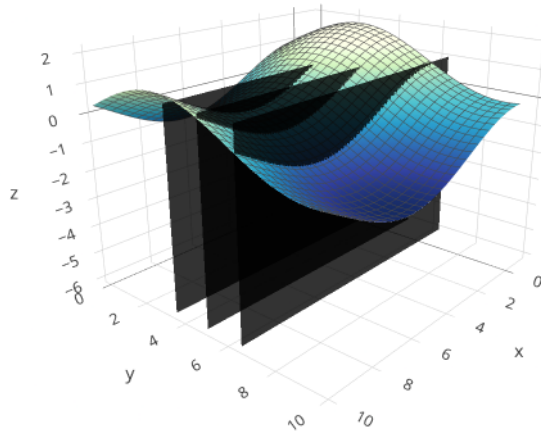


As áreas abaixo das interseções entre os planos em preto (incluindo os outros não-ilustrados) e $\phi(x, y)$ é justamente a integral em y para um x fixado. Observe que a

ideia é somar continuamente a contribuição dessas áreas para preencher todo o volume abaixo de $\phi(x, y)$. Analiticamente, temos:

$$\int_a^b dx \int_c^d \phi(x, y) dy \quad (1.58)$$

- Fixo em y e integro em x



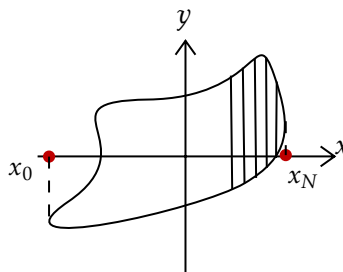
As áreas abaixo das interseções entre os planos em preto (incluindo os outros não-ilustrados) e $\phi(x, y)$ é justamente a integral em x para um y fixado. Observe que a ideia é somar continuamente a contribuição dessas áreas para preencher todo o volume abaixo de $\phi(x, y)$. Analiticamente, temos:

$$\int_c^d dy \int_a^b \phi(x, y) dx \quad (1.59)$$

Com efeito,

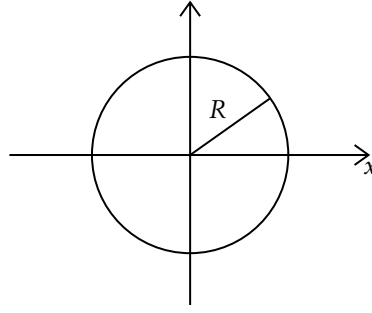
$$\int_a^b dx \int_c^d \phi(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b \phi(x, y) dx \quad (1.60)$$

se, e somente se, $\phi(x, y)$ for uma função contínua nos intervalos de interesse (*Teorema de Fubini*). Uma pergunta natural é como fazer para generalizar o processo de integração para regiões arbitrárias (diferentes de retângulos). Fatiando a região, podemos escrever $y(x)$ e a integral será



$$\int_D \phi(x, y) dx dy = \int_{x_0}^{x_N} dx \int_{y(x_0)}^{y(x_N)} \phi(x, y) dy \quad (1.61)$$

Exemplo. Seja D = área do círculo de raio R e $\phi(x, y) = 1$. Como obter a área do círculo?



$$x^2 + y^2 = R^2 \implies y = \pm \sqrt{R^2 - x^2} = y(x) \quad (1.62)$$

Para um x fixo, temos

$$-\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \quad (1.63)$$

Logo, a integral resulta

$$\int_D \phi(x, y) dx dy \equiv \int_D \phi(x, y) d^2x \quad (1.64)$$

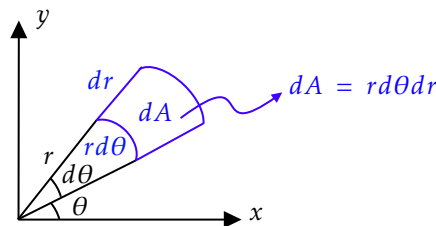
$$= \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \quad (1.65)$$

$$= 2 \left[\frac{x}{2} \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right) \right]_{-R}^R = \pi R^2 \quad (1.66)$$

Esse procedimento não foi trivial, pelo contrário, as integrais resolvidas dão bastante trabalho na prática. Por essa razão, em algumas situações será melhor usar coordenadas polares para aproveitar as simetrias do problema. A pergunta que segue é: como expressar o elemento infinitesimal de área

$$dA = d^2x = dx dy \quad (1.67)$$

em coordenadas polares?



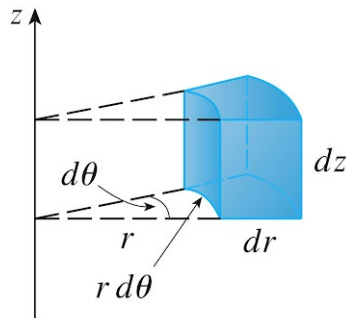
A integral do exemplo antecedente vira

$$\int_D d^2x = \int_D r dr d\theta = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \pi R^2 \quad (1.68)$$

O que claramente é muito mais elementar de ser feito do que o resolvido em coordenadas cartesianas. *Observação:* as mesmas técnicas podem ser usadas para campos escalares $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Em particular, passando para a dimensão três, podemos nos interessar em calcular o elemento de volume em coordenadas cilíndricas e esféricas.

$$\int_D \phi(x, y, z) dx dy dz = \int_D \phi(\vec{r}) d^3x \quad (1.69)$$

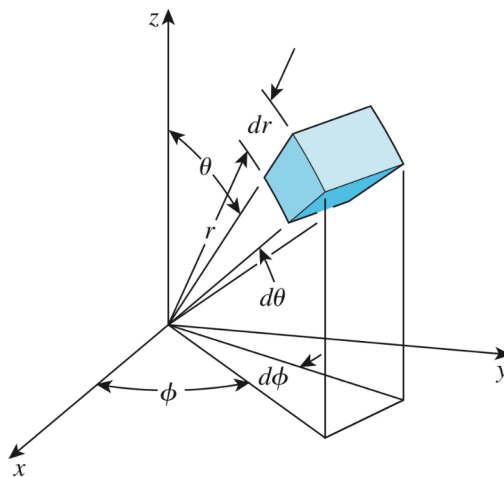
onde $dV = dx dy dz$ é o elemento de volume em coordenadas cartesianas e d^3x é o elemento de volume genérico (em coordenadas que estamos interessados).



ou seja, da geometria segue que

$$d^3x = r d\theta dr dz \quad (1.70)$$

Para as coordenadas esféricas, precisamos primeiro do elemento de superfície esférica:



o que implica que

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (1.71)$$

Para obter o elemento de volume, é suficiente multiplicar o comprimento infinitesimal na direção ortogonal à superfície (dr). Logo,

$$d^3x = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr \quad (1.72)$$

1.3 Aula 13 (26/10/2021)

1.3.1 Campos vetoriais

Campos vetoriais são funções $\vec{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, apesar de que iremos nos concentrar em $n = m = 3$.

1.3.2 Derivadas de campos vetoriais

O objeto central será o “*nabla*”, o operador diferencial visto anteriormente. Recordando sua definição:

$$\vec{\nabla} = \sum_i \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.73)$$

Podemos aplicar $\vec{\nabla}$ em campos vetoriais das seguintes formas:

(1) Divergência

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \left(\sum_i \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \left(\sum_k \hat{e}_k F_k \right) = \sum_{i,k} \delta_{ik} \frac{\partial F_k}{\partial x_i} = \sum_i \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \quad (1.74)$$

(2) Rotacional (apenas em \mathbb{R}^3)

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\sum_i \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \times \left(\sum_j \hat{e}_j F_j \right) = \sum_{i,j,k} \hat{e}_k \epsilon_{ijk} \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad (1.75)$$

Podemos ainda aplicar $\vec{\nabla}$ novamente para obter operadores diferenciais de segunda ordem aplicados a campos vetoriais:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \sum_i \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i^2} \equiv \vec{\nabla}^2 \phi \text{ (Laplaciano)} \quad (1.76)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) = \sum_{ijk} \hat{e}_k \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j \phi \stackrel{*}{=} 0 \quad (1.77)$$

* Como ϕ é contínuo, então vale o *Teorema de Schwarz* e as derivadas mistas produzem resultados idênticos independente da ordem, o que faz com que o termo $\partial_i \partial_j$ seja simétrico, ao passo de que o símbolo de Levi-Civita ϵ_{ijk} é antisimétrico, o que implica no anulamento do somatório.

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) = \left(\sum_i \hat{e}_i \partial_i \right) \left(\sum_j \partial_j F_j \right) = \sum_{i,j} \hat{e}_i \partial_i \partial_j F_j \neq \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \vec{\nabla}^2 \phi = \sum_i \partial_i^2 \phi \quad (1.78)$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \left(\sum_i \hat{e}_i \partial_i \right) \times \left[\left(\sum_j \hat{e}_j \partial_j \right) \times \left(\sum_k F_k \hat{e}_k \right) \right] \quad (1.79)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_i \hat{e}_i \partial_i \right) \times \left[\sum_{j,k} \hat{e}_m \epsilon_{jkm} \partial_j F_k \right] = \sum_{i,j,k} \hat{e}_n \epsilon_{nim} \epsilon_{jkm} \partial_i \partial_j F_k \\ &= \sum_{i,j,k} \hat{e}_n (\delta_{nj} \delta_{ik} - \delta_{nk} \delta_{ij}) \partial_i \partial_j F_k \\ &= \sum_{i,j,k} \hat{e}_n \delta_{nj} \delta_{ik} \partial_i \partial_j F_k - \sum_{i,j,k} \hat{e}_n \delta_{nk} \delta_{ij} \partial_i \partial_j F_k \\ &= \sum_i \hat{e}_n \partial_n \partial_i F_i - \sum_i \partial_i^2 F_n \hat{e}_n \\ &= \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla}^2 \vec{F} \end{aligned}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = \left(\sum_i \hat{e}_i \partial_i \right) \cdot \left[\left(\sum_j \hat{e}_j \partial_j \right) \times \left(\sum_k \hat{e}_k F_k \right) \right] = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j F_k = 0 \quad (1.80)$$

Exemplo. Aplicação do divergente e rotacional no campo gravitacional de uma partícula pontual $\vec{F} = -GM \frac{\vec{r}}{r^3}$. Observação: daqui em diante poderá utilizado a notação somatório de Einstein (isto é, sempre que aparecerem índices repetidos haverá um somatório implícito).

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -GM \sum_k \partial_k \left(r_k \left(\sum_i r_i^2 \right)^{-3/2} \right) = -GM \sum_k \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3r_k^2}{r^5} \right) = -GM \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right) = 0 \quad (1.81)$$

O que a priori significaria que o campo gravitacional possui divergente nulo (absurdo, mas será comentado a seguir).

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \sum_i \hat{e}_i \epsilon_{ijk} \partial_j F_k \quad (1.82)$$

Note que se provarmos que $\partial_j F_k$ é simétrico, então $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ é nulo porque engloba um somatório com o símbolo de Levi-Civita (antisimétrico) em conjunto com um termo simétrico. Com efeito,

$$\begin{aligned} \partial_j F_k &= -GM \partial_j \left(\frac{r_k}{r^3} \right) = \left[\frac{\delta_{jk}}{r^3} + r_k \partial_j r^{-3} \right] = \left[\frac{\delta_{jk}}{r^3} + r_k (-3r^{-4}) \partial_j r \right] = \left[\frac{\delta_{jk}}{r^3} + r_k (-3r^{-4}) \cdot \frac{2r_j}{2r} \right] \\ &= \left[\frac{\delta_{jk}}{r^3} - 3 \frac{r_j r_k}{r^5} \right] \quad (\text{Simétrico}) \end{aligned} \quad (1.83)$$

Portanto, $\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$. Em resumo,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \implies \text{motivará a introdução do delta de Dirac.} \quad (1.84)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \implies \text{o campo gravitacional é conservativo!} \quad (1.85)$$

1.3.3 Integrales em campos vetoriais

Estudaremos três tipos de integrais: escalares, de linha e de superfície.

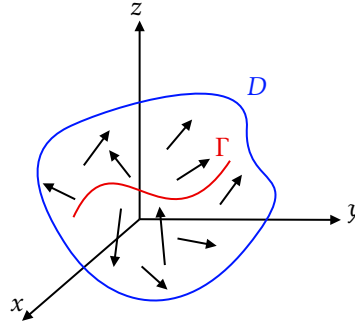
(1) Integrais escalares

São integrais do tipo

$$\begin{aligned} \int_V \vec{F}(\vec{r}) dV &= \int_V \left(\sum_i F_i(\vec{r}) \hat{e}_i \right) dV = \sum_i \int_V F_i(\vec{r}) \hat{e}_i dV \\ &= \int_V F_x(\vec{r}) \hat{e}_x dV + \int_V F_y(\vec{r}) \hat{e}_y dV + \int_V F_z(\vec{r}) \hat{e}_z dV \end{aligned} \quad (1.86)$$

Como cada componente é um número, irá funcionar exatamente como as integrais de campos escalares que vimos anteriormente.

(2) Integrais de linha



Precisamos de duas coisas para calcular uma integral de linha: um caminho Γ diferenciável (nesse caso, em $D \subseteq \mathbb{R}^3$), e \vec{F} contínuo (em $D \subseteq \mathbb{R}^3$). A integral de linha é

$$\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma} \vec{F}(\vec{\Gamma}(t)) d\vec{\Gamma} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\Gamma}(t)) \vec{\Gamma}'(t) dt \quad (1.87)$$

Exemplo. Calcular $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l}$ com $\vec{\Gamma}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 1]$, e $\vec{F}(x, y, z) = (xy, yz, zx)$.

Precisamos de $\vec{\Gamma}'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, além de $\vec{F}(\vec{\Gamma}(t)) = \vec{F}(t, t^2, t^3) = (t^3, t^5, t^4)$, o que implica em

$$\vec{\Gamma}'(t) \cdot \vec{F}(\vec{\Gamma}(t)) = t^3 + 2t^6 + 3t^6 = t^3 + 5t^6 \quad (1.88)$$

$$\therefore \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_0^1 (t^3 + 5t^6) dt = \frac{27}{28} \quad (1.89)$$

Existe um teorema muito importante para as integrais de linha:

Teorema Fundamental para integrais de linha

Se $\vec{\Gamma}(t)$ = curva diferenciável e ϕ = campo escalar tal que $\vec{\nabla}\phi$ = contínuo, então

$$\int_{\Gamma} (\vec{\nabla}\phi) \cdot d\vec{l} = \phi(\vec{\Gamma}(b)) - \phi(\vec{\Gamma}(a)) \quad (1.90)$$

ou seja, a integral de linha é o mesmo que a diferença entre o campo escalar avaliado nas extremidades do caminho $\vec{\Gamma}(t)$.

Demonstração.

$$\int_{\Gamma} \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{l} = \int_a^b [\vec{\nabla}\phi(\vec{\Gamma}(t))] \cdot \vec{\Gamma}'(t) dt = \int_a^b \left[\frac{\partial\phi(\vec{\Gamma})}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi(\vec{\Gamma})}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi(\vec{\Gamma})}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right] dt \quad (1.91)$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma} \vec{\nabla}\phi \cdot d\vec{l} = \int_a^b \frac{d}{dt} \phi(\vec{\Gamma}(t)) dt = \phi(\vec{\Gamma}(b)) - \phi(\vec{\Gamma}(a)) \quad (1.92)$$

Integrais de linha são fundamentais pois entram na definição de *trabalho*:

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} \quad (1.93)$$

Podemos definir um campo conservativo \vec{F} , de forma que vale:

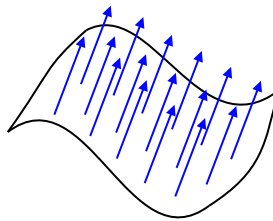
- (a) $\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l} = \text{independente do caminho entre A e B}$
- (b) $\oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$
- (c) \exists campo escalar ϕ tal que $\vec{F} = -\vec{\nabla}\phi$

Note que (a) \implies (b) \iff (c). Caso não hajam buracos no domínio (simplesmente conexo), vale (a) \iff (b).

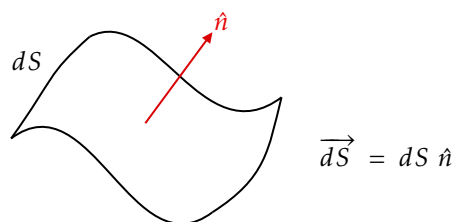
(3) Integrais de superfície

Ideia: determinar quanto um campo vetorial passa através de alguma superfície.

$$\int_S \vec{F}(r) \cdot d\vec{S} \quad (1.94)$$



Na prática, associamos um vetor com o elemento de superfície infinitesimal:



Observação. Para superfícies fechadas, é convencional que \hat{n} aponta para o exterior da superfície.

Elementos de superfície mais utilizados na física:

- (a) Cubo (coordenadas cartesianas)

$$d\vec{S} = dx dy \hat{e}_z \quad (1.95)$$

(b) Cilindro (coordenadas cilíndricas)

$$d\vec{S} = r d\theta dz \hat{e}_r \quad (1.96)$$

(c) Esfera (coordenadas esféricas)

$$d\vec{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{e}_r \quad (1.97)$$

Cujas demonstrações são feitas geometricamente utilizando as figuras da aula anterior para as coordenadas respectivas.

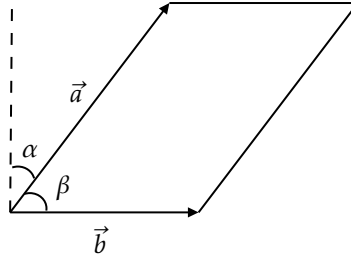
1.4 Aula 14 (04/11/2021)

1.4.1 Integrais de superfície

Vimos anteriormente que a integral de superfície é do tipo

$$\int_S \vec{F}(r) \cdot d\vec{S} \quad (1.98)$$

e também aprendemos a calcular os elementos infinitesimais de área em coordenadas cilíndricas e esféricas utilizando argumentos geométricos. Vamos aprender como calcular esses elementos, em qualquer sistema de coordenadas e através de uma prescrição analítica (em vez de geométrica). Consideremos, em primeiro lugar, a área de um plano:



Analiticamente, podemos dizer que

$$A = \|\vec{b}\| \|\vec{a}\| \cos \alpha = \|\vec{b}\| \|\vec{a}\| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = \|\vec{b}\| \|\vec{a}\| \sin \beta = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \quad (1.99)$$

Então a área delimitada pelo plano será sempre igual ao módulo do produto vetorial dos vetores que delimitam o plano (essa é uma conclusão importante). Tendo isso em mente, consideremos uma superfície $\mathcal{M} = (x, y, z(x, y))$. Vamos considerar dois caminhos:

(i) Caminho 1 (fixamos $y = y_p$)

Nesse caso, o vetor posição que descreve o caminho é

$$\vec{r} = (x, y_p, z(x, y_p)) \quad (1.100)$$

Para encontrar o vetor tangente, por definição basta tomarmos a derivada:

$$\frac{d\vec{r}}{dx} = \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x} \right) \Rightarrow d\vec{r}_1 \equiv \left(1, 0, \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx \quad (1.101)$$

(ii) Caminho 2 (fixamos $x = x_p$)

Dessa vez, como x está fixado, o vetor posição que descreverá o caminho é

$$\vec{r} = (x_p, y, z(x_p, y)) \quad (1.102)$$

O que significa que o vetor tangente ao caminho será

$$\frac{d\vec{r}}{dy} = \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \Rightarrow d\vec{r}_2 \equiv \left(0, 1, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dy \quad (1.103)$$

Dessa forma, o elemento de área infinitesimal será dado por

$$d\vec{S} = d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2 \quad (1.104)$$

onde utilizamos a equação para a área do plano que aprendemos anteriormente.

Exemplo em coordenadas cilíndricas.

Nesse sistema de coordenadas, o vetor posição é dado por

$$\vec{r} = (R \cos \theta, R \sin \theta, z) \quad (1.105)$$

Seguindo a prescrição, encontramos $d\vec{r}_1$ e $d\vec{r}_2$ calculando as derivadas com respeito as variáveis respectivas:

$$d\vec{r}_1 = \frac{d\vec{r}}{d\theta} d\theta = (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0) d\theta \quad (1.106)$$

$$d\vec{r}_2 = \frac{d\vec{r}}{dz} dz = (0, 0, 1) dz \quad (1.107)$$

$$d\vec{S} = d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2 = R d\theta dz \hat{e}_r \quad (1.108)$$

como queríamos demonstrar.

Exemplo em coordenadas esféricas.

Nesse outro sistema de coordenadas, o vetor posição é dado por

$$\vec{r} = (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta) \quad (1.109)$$

Assim como da última vez, seguimos a prescrição analítica:

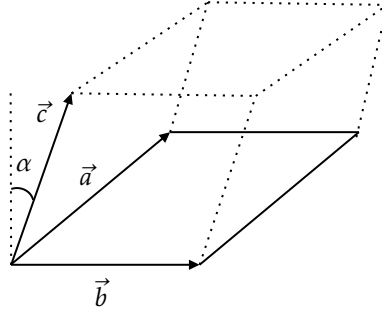
$$d\vec{r}_1 = \frac{d\vec{r}}{d\theta} d\theta = (R \cos \theta \cos \phi, R \cos \theta \sin \phi, -R \sin \theta) d\theta \quad (1.110)$$

$$d\vec{r}_2 = \frac{d\vec{r}}{d\phi} d\phi = (-R \sin \theta \sin \phi, R \sin \theta \cos \phi, 0) d\phi \quad (1.111)$$

$$d\vec{S} = d\vec{r}_1 \times d\vec{r}_2 = R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{e}_r \quad (1.112)$$

como queríamos demonstrar.

Assim como trabalhamos com a prescrição analítica para encontrar o elemento infinitesimal de área, podemos fazer o mesmo para o elemento infinitesimal de volume, usando técnicas muito parecidas. Dessa vez, consideraremos o volume de um cubo:



$$V = \|\vec{a} \times \vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\| \cos \alpha = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (1.113)$$

Em notação de Einstein,

$$V = c_i (\vec{a} \times \vec{b})_i = c_i \epsilon_{ijk} a_j b_k = \epsilon_{ijk} c_i a_j b_k = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \\ c_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} \quad (1.114)$$

Em conclusão, dados três vetores que delimitam um cubo, o volume desse cubo será o determinante de entradas idênticas às componentes dos vetores em cada coluna.

Exemplo em coordenadas cilíndricas.

Nesse caso, lembremos que o vetor posição é dado por

$$\vec{r} = (R \cos \theta, R \sin \theta, z) \implies d\vec{r} = \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} dr}_{d\vec{r}_1} + \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} d\theta}_{d\vec{r}_2} + \underbrace{\frac{\partial \vec{r}}{\partial z} dz}_{d\vec{r}_3} \quad (1.115)$$

Dessa forma,

$$d\vec{r}_1 = (\cos \theta, \sin \theta, 0) dr \quad (1.116)$$

$$d\vec{r}_2 = (-R \sin \theta, R \cos \theta, 0) d\theta \quad (1.117)$$

$$d\vec{r}_3 = (0, 0, 1) dz \quad (1.118)$$

E assim,

$$dV = \begin{vmatrix} \cos \theta dr & -R \sin \theta d\theta & 0 \\ \sin \theta dr & R \cos \theta d\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = R dr d\theta dz \quad (1.119)$$

como queríamos demonstrar. Exatamente a mesma prescrição se aplicará para o sistema de coordenadas esféricas, se você quiser pode tomar como exercício mostrar isso.

1.4.2 Teoremas de Gauss, Stokes e Helmholtz

Teorema de Gauss

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV \quad (1.120)$$

onde V é o volume delimitado por S.

Teorema de Stokes

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \quad (1.121)$$

onde S é a superfície delimitada pelo caminho Γ fechado.

Aplicação do teorema de Stokes: campos conservativos.

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0 = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} \implies \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad (1.122)$$

Teorema de Helmholtz

\vec{F} é completamente determinado dados $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$, $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ num volume e \vec{F}_{\perp} na superfície que delimita o volume.

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\Psi + \vec{\nabla} \times \vec{T} \quad (1.123)$$

onde o potencial escalar $\Psi(\vec{x})$ e o potencial vetor $\vec{T}(\vec{x})$ são dados por

$$\Psi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{F}(\vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} d^3x' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \hat{n}' \cdot \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} d^2x' \quad (1.124)$$

$$\vec{T}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{F}(\vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} d^3x' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \hat{n}' \times \frac{\vec{F}(\vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|} d^2x' \quad (1.125)$$

1.4.3 Nabla em coordenadas curvilíneas

Por definição, o $\vec{\nabla}$ em coordenadas cartesianas é dado por

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.126)$$

Estamos interessados em obter a sua forma em outros sistemas de coordenadas, em particular no cilíndrico e esférico.

Sistema de coordenadas cilíndrico.

Sabemos expressar os versores desse sistema de coordenadas da seguinte forma:

$$\hat{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0) = \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y \quad (1.127)$$

$$\hat{e}_{\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) = -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y \quad (1.128)$$

Escrito em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_{\theta} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}}_{R, \text{ ortogonal}} \begin{bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \end{bmatrix} \quad (1.129)$$

Dito de outra forma,

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \end{bmatrix} = R^T \begin{bmatrix} \hat{e}_r \\ \hat{e}_\theta \end{bmatrix} \quad (1.130)$$

Além disso, sabemos que $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$. Com isso em mente, escrevemos, através da regra da cadeia,

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.131)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial y} = -r \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \implies \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} = -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \quad (1.132)$$

Em notação matricial,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (1.133)$$

Além disso, note que

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} = \begin{bmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.134)$$

Utilizando as eqs. (1.130) e (1.133), reescrevemos

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta \end{bmatrix} \underbrace{RR^T}_{\mathbb{1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{bmatrix} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.135)$$

Finalmente, podemos dizer que

$$\vec{\nabla}_{\text{CIL}} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.136)$$

de modo que, por exemplo, se possuímos um campo vetorial em coordenadas cilíndricas e desejamos avaliar o seu divergente, fazemos

$$\begin{aligned} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F})_{\text{CIL}} &= \vec{\nabla}_{\text{CIL}} \cdot \vec{F}_{\text{CIL}} = \left(\hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (F_r \hat{e}_r + F_\theta \hat{e}_\theta + F_z \hat{e}_z) \\ &\therefore \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(F_r + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial F_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.137)$$

Nota 1. Não se esqueça que dessa vez não estamos trabalhando mais com coordenadas cartesianas, o que significa que, em geral, as derivadas com respeito a r de termos que envolvem θ (inclusive os versores) e vice-versa não podem ser desprezadas. ♣

Um raciocínio precisamente análogo pode ser empregado para as coordenadas esféricas (se quiser, pode tomar como exercício fazê-lo), e obtemos o nabla nestas coordenadas:

$$\vec{\nabla}_{\text{ESF}} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (1.138)$$

1.4.4 Aplicação ao campo gravitacional

Lembremos que na última aula, em particular na eq. (1.84) nós havíamos chegado a conclusão que o divergente do campo gravitacional era nulo, e comentamos que isto levaria à introdução do delta de Dirac. Com efeito, se avaliamos a integral de superfície, lembrando que $\vec{G} = -G_N M \frac{\vec{r}}{r^3}$ é o campo gravitacional, onde G_N é a constante da gravitação universal de Newton,

$$\Phi = \int_S \vec{G} \cdot d\vec{S} \quad (1.139)$$

onde a superfície de interesse é a esfera de raio R em torno do corpo pontual de massa M . Pela simetria do sistema, adotaremos coordenadas esféricas de modo que

$$\Phi = \int_S R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{e}_r \cdot \left(-\frac{G_N M \hat{e}_r}{R^2} \right) = -G_N M \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = -4\pi G_N M \quad (1.140)$$

Por outro lado, pelo teorema de Gauss, essa integral de superfície é equivalente a

$$\Psi = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G} dV \quad (1.141)$$

mas se o divergente do campo gravitacional é nulo, então $\Psi = 0$ (absurdo!). A experiência nos diz que o fluxo do campo gravitacional não pode ser nulo (e, de fato, ele é igual a $-4\pi G_N M$). A mudança brusca de comportamento nos leva a introduzir o delta de Dirac:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \quad (1.142)$$

Através dessa definição, podemos dizer que

$$\int \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad (1.143)$$

$$\delta(x - a) f(x) dx = f(a) \quad (1.144)$$

No caso tridimensional,

$$\int \delta^3(\vec{x} - \vec{a}) f(\vec{x}) d^3x = f(\vec{a}) \quad (1.145)$$

onde $\delta^3(\vec{x} - \vec{a}) = \delta(x - a_x) \delta(y - a_y) \delta(z - a_z)$. Vamos ver o porquê da introdução do delta de Dirac solucionar o problema da divergência do campo gravitacional. O que queremos verificar é que, pelo teorema de Gauss,

$$\Phi = -4\pi G_N M = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{G} d^3x = \int \vec{\nabla} \cdot \left(-G_N M \frac{\vec{r}}{r^3} \right) d^3x = -G_N M \int \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) d^3x \quad (1.146)$$

Contudo, o divergente em questão não está definido quando $r = 0$ (explode para o infinito), ao passo de que é nulo para outros r (pela argumentação empregada para chegar na eq. (1.84)), se tratando justamente de um delta de Dirac:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \alpha \delta^3(\vec{r}) \quad (1.147)$$

$$\Rightarrow \int \alpha \delta^3(\vec{r})(-G_N M) d^3x = -4\pi G_N M \therefore \alpha = 4\pi \quad (1.148)$$

e então

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \alpha \delta^3(\vec{r}) = 4\pi \delta^3 \vec{r} \quad (1.149)$$

o que nos leva a concluir

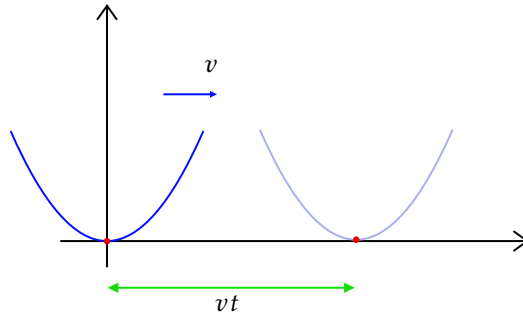
$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{G} d^3x = -G_N M \int 4\pi \delta^3(\vec{r}) d^3x = -4\pi G_N M \quad (1.150)$$

como queríamos demonstrar.

1.5 Aula 15 (09/11/2021)

1.5.1 Equação de Onda 1D

Ondas em uma dimensão são caracterizadas por funções do tipo $f(x, t)$. Para analisar de forma mais específica uma propriedade que essa função precisa satisfazer para ser considerada uma função de onda, vamos supor como um primeiro exemplo uma onda tal que $f(x, t = 0) = x^2$. Digamos que esta onda se propague com uma velocidade v , durante um intervalo de tempo t (considerando o tempo inicial como zero). Uma representação do que acontece de forma gráfica é o seguinte:



Observe que, no segundo caso, $f(x, t) = (x - vt)^2$. Pensando alguns passos à frente, essa forma $f(x, t) = f(x - vt)$ é necessária para termos a onda se comportando desse modo durante a sua propagação. O sinal negativo em $x - vt$ só quer dizer que a onda se propaga para a direita, mas poderíamos estudar o movimento de forma análoga para a esquerda, e concluir que a forma seria do tipo $x + vt$. Com efeito, em geral, podemos afirmar que a função de onda unidimensional satisfaz

$$f(x, t) = f(x \pm vt) \quad (1.151)$$

Estamos interessados em obter uma equação diferencial para as ondas, que satisfaça (1.151). Começamos calculando as derivadas parciais de f com respeito a x e a t , que são as duas variáveis de interesse. Para facilitar, vamos denominar $u = x \pm vt$, e prosseguir com os cálculos usando a regra da cadeia:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right) = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} \quad (1.152)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \implies \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\pm v \frac{\partial f}{\partial u} \right) = \pm v \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) = v^2 \frac{\partial f}{\partial u} \quad (1.153)$$

Nesse momento, a primeira coisa interessante de se perceber é que o que garantiu que não precisaríamos abrir a equação em casos é que ao tirarmos a derivada segunda de f com relação ao tempo, a ambiguidade do “ \pm ” é cessada, porque se fosse $-v$, então $(-v)(-v) = v^2$, e caso se fosse v , então $(v)(v) = v^2$, ou seja, dá no mesmo. Analisando as duas equações acima, podemos perceber que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad (1.154)$$

que é a equação diferencial parcial de ondas unidimensionais.

1.5.2 Solução da equação de onda 1D

Para resolver essa equação e encontrar $f(x, t)$ de forma mais específica, uma das abordagens possíveis é a separação de variáveis. A ideia central reside em assumir que f pode ser decomposta na forma

$$f(x, t) = f_x(x) \cdot f_t(t) \quad (1.155)$$

Ou seja, no produto de funções que sejam exclusivamente nas variáveis x e t , respectivamente. Sendo este o caso,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = f_x(x) \cdot f_t''(t) \quad (1.156)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_x''(x) \cdot f_t(t) \quad (1.157)$$

o que, segundo a equação de ondas, implica que

$$\frac{1}{v^2} f_x f_t'' = f_x'' f_t \implies \frac{1}{v^2} \cdot \frac{f_t''}{f_t} = \frac{f_x''}{f_x} \quad (1.158)$$

A partir daqui, podemos obter duas equações diferenciais *ordinárias* (note o ênfase em ordinárias, e não mais parciais) caso derivarmos de ambos os lados com relação ao tempo ou com relação ao espaço, confira:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{v^2} \cdot \frac{df_t''}{dt} \right] = 0 \implies \frac{1}{v^2} \cdot \frac{df_t''}{dt} = \text{constante} = \lambda_1 \quad (1.159)$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f_x''}{f_x} \right] = 0 \implies \frac{f_x''}{f_x} = \text{constante} = \lambda_2 \quad (1.160)$$

porém, como $\frac{1}{v^2} \cdot \frac{f_t''}{f_t} = \frac{f_x''}{f_x}$, então $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Dessa forma, o que a separação de variáveis nos forneceu foi transformar uma equação diferencial parcial em duas equações diferenciais ordinárias, que sabemos resolver:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \implies \begin{cases} \frac{1}{v^2} \frac{f_t''}{f_t} = \lambda \\ \frac{f_x''}{f_x} = \lambda \end{cases} \quad (1.161)$$

portanto,

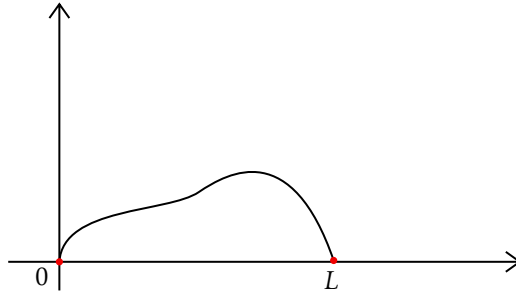
$$f_t'' = f_t \cdot \lambda v^2 \quad (1.162)$$

$$f_x'' = f_x \cdot \lambda \quad (1.163)$$

Isto é, se trata do problema de Sturm-Liouville para $\frac{d^2}{dt^2}$ e $\frac{d^2}{dx^2}$. Isso significa que as autofunções serão *base completa* do espaço de funções, isto é, que conseguimos expressar qualquer função $g(x)$ como uma série em termos das autofunções:

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n f_n(x) \quad (1.164)$$

Precisamos ser um pouco mais particulares daqui para frente se quisermos fazer progresso, então vamos contextualizar com um exemplo físico: uma *corda vinculada nas extremidades*.



A condição de contorno é:

- $f(0, t) = f(L, t) = 0, \forall t$

além disso, as condições iniciais são:

- $f(x, 0) = u(x)$
- $\frac{\partial f(x, 0)}{\partial t} = g(x)$

Para resolvermos as EDO's, utilizamos as técnicas aprendidas no módulo anterior, de forma que

$$f_x'' = \lambda f_x \implies f_x = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \quad (1.165)$$

$$f_t'' = \lambda v^2 f_t \implies f_t = Ce^{\sqrt{\lambda}vt} + De^{-\sqrt{\lambda}vt} \quad (1.166)$$

logo,

$$f = f_x f_t = \left(Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} \right) \left(Ce^{\sqrt{\lambda}vt} + De^{-\sqrt{\lambda}vt} \right) \quad (1.167)$$

Precisamos, agora, aplicar primeiro a condição de contorno:

$$f(0, t) = 0 \forall t \implies f_x(0) = 0 \quad (1.168)$$

$$f(L, t) = 0 \forall t \implies f_x(L) = 0 \quad (1.169)$$

mas então, se essas duas condições precisam ser impostas sobre f_x , concluímos que

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ Ae^{\sqrt{\lambda}L} + Be^{-\sqrt{\lambda}L} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} B = -A \\ e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L} = 0 \end{cases} \quad (1.170)$$

se queremos encontrar uma solução não-trivial (isto é, com $L \neq 0$), escrevemos da seguinte forma:

$$e^{2\sqrt{\lambda}L} = 1 \implies 2\sqrt{\lambda}L = i2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (1.171)$$

onde i é a unidade imaginária e, para chegar na implicação utilizada, utilizamos a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$. Isso tudo nos permite dizer, então, que

$$\sqrt{\lambda} = \frac{i\pi n}{L} \quad (1.172)$$

De forma perfeitamente análoga, ao analisarmos também f_t chegamos a conclusão que as autofunções do problema de Sturm-Liouville são do tipo

$$\begin{cases} f_x^{(n)} \equiv e^{\frac{i\pi n}{L}x} \\ f_t^{(n)} \equiv e^{\frac{i\pi n}{L}vt} \end{cases} \quad (1.173)$$

assim, a solução mais geral (aqui note que f_n absorve as constantes A e $B = -A$) é dada por

$$f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \underbrace{\left(e^{\frac{i\pi n}{L}x} - e^{-\frac{i\pi n}{L}x} \right)}_{2i \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)} (C_n e^{\frac{i\pi n}{L}vt} + D_n e^{-\frac{i\pi n}{L}vt}) \quad (1.174)$$

$$\implies f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{f}_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \left(C_n e^{\frac{i\pi n}{L}vt} + D_n e^{-\frac{i\pi n}{L}vt} \right) \quad (1.175)$$

onde denotamos $\bar{f}_n = 2if_n$. Podemos, agora, impor as condições iniciais:

$$f(x, 0) = u(x), \quad \frac{\partial f}{\partial t} = g(x) \quad (1.176)$$

Como $u(x)$ e $g(x)$ são definidas em $x \in [0, L]$, podemos decompor nas autofunções achadas:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (1.177)$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (1.178)$$

Logo,

$$f(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{f}_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) (C_n + D_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \implies \bar{f}_n (C_n + D_n) = u_n \quad (1.179)$$

e também,

$$\frac{\partial f(x, 0)}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{f}_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \frac{i\pi n v}{L} [C_n - D_n] = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \quad (1.180)$$

$$\therefore \overline{f_n}(C_n - D_n) \frac{i\pi n v}{L} = g_n \quad (1.181)$$

Juntando todas as informações:

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{f_n} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \left[C_n \cos\left(\frac{\pi n}{L} v t\right) + i C_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} v t\right) + D_n \cos\left(\frac{\pi n}{L} v t\right) - i D_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} v t\right) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \left[\overline{f_n}(C_n + D_n) \cos\left(\frac{\pi n}{L} v t\right) + i \overline{f_n}(C_n - D_n) \sin\left(\frac{\pi n}{L} v t\right) \right] \\ &\implies f(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n}{L} x\right) \left[u_n \cos\left(\frac{\pi n}{L} v t\right) + \frac{L}{\pi n v} g_n \sin\left(\frac{\pi n}{L} v t\right) \right] \quad (1.182) \end{aligned}$$

2 Resolução da P1 de 2018

2.1 Equação de Schrödinger

A dinâmica de um sistema quântico é descrita na Mecânica Quântica usando a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle$$

onde $|\psi\rangle$ é um vetor que descreve o estado do sistema e H é a matriz que representa a energia do sistema, dada por

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & \alpha \\ \alpha & E_0 \end{pmatrix}$$

com E_0 e α dois números reais.

- a) A matriz H é hermitiana? É unitária? Justifique.
- b) Calcule os autovalores de H ;
- c) Calcule os autovetores de H ;
- d) Se for possível, escreva a decomposição espectral da matriz H ;
- e) Calcule explicitamente a solução da equação diferencial de Schrödinger para um vetor inicial arbitrário $|\psi(0)\rangle = |\psi_0\rangle$;
- f) Considere agora o estado $|\psi_0\rangle = (0, 1)^T$. Calcule depois de quanto tempo é verdade que

$$|\langle\psi_1|\psi(t)\rangle|^2 = 1$$

Solução.

- a) Observe que

$$H^\dagger = \begin{pmatrix} E_0 & \alpha \\ \alpha & E_0 \end{pmatrix} = H \quad (2.1)$$

onde foi tirado o conjugado complexo (das constantes que são reais) e a transposta de H . Portanto, é verdade que H é hermitiana. Por outro lado, calculando HH^\dagger , temos

$$HH^\dagger = \begin{pmatrix} E_0 & \alpha \\ \alpha & E_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 & \alpha \\ \alpha & E_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0^2 + \alpha^2 & 2E_0\alpha \\ 2E_0\alpha & E_0^2 + \alpha^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Portanto, H não é unitária.

- b) Para encontrar os autovalores, resolvemos a equação secular:

$$\det(H - \lambda \mathbb{1}) = 0 \implies (E_0 - \lambda)^2 - \alpha^2 = 0 \therefore \Lambda = \{E_0 - \alpha, E_0 + \alpha\} \quad (2.3)$$

onde Λ é o conjunto dos autovalores de H .

- c) Para encontrar os autovetores, substituímos os autovalores encontrados em b) na seguinte equação:

$$H|v\rangle = \lambda|v\rangle \quad (2.4)$$

Utilizando a notação onde o autovetor associado ao autovalor k é $|k\rangle$, temos:

$$H|E_0 - \alpha\rangle = (E_0 - \alpha)|E_0 - \alpha\rangle \implies |E_0 - \alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$H|E_0 + \alpha\rangle = (E_0 + \alpha)|E_0 + \alpha\rangle \implies |E_0 + \alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

- d) Como H é hermitiana então ela admite decomposição espectral, e esta, por sua vez, é dada a seguir:

$$(E_0 - \alpha)|E_0 - \alpha\rangle\langle E_0 - \alpha| + (E_0 + \alpha)|E_0 + \alpha\rangle\langle E_0 + \alpha| = \begin{pmatrix} E_0 & \alpha \\ \alpha & E_0 \end{pmatrix} = H \quad (2.7)$$

- e) Considerando que a equação de Schrödinger é dada por

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle \quad (2.8)$$

é possível reescrevê-la como

$$\frac{d|\psi\rangle}{dt} + \frac{iH}{\hbar}|\psi\rangle = 0 \quad (2.9)$$

Que é uma EDO homogênea de 1º ordem em $|\psi\rangle$. Portanto, sua solução geral é dada por

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{-iHt}{\hbar}} |\xi\rangle = e^{\frac{-iHt}{\hbar}} |\psi_0\rangle \quad (2.10)$$

Agora, calcularemos a exponencial de matriz

$$e^{\frac{-iHt}{\hbar}} = U e^J U^{-1} \quad (2.11)$$

onde podemos definir U como sendo a matriz dos autokets de H , isto é

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \implies U^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

e reconhecemos também que e^J é a exponencial da matriz $\frac{-iHt}{\hbar}$ na forma de Jordan. Para encontrar e^J , podemos lembrar que se a matriz H possui forma diagonal

$$H = \begin{pmatrix} E_0 - \alpha & 0 \\ 0 & E_0 + \alpha \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

então vale que e^J é dado por

$$e^J = \begin{pmatrix} e^{\frac{-i(E_0-\alpha)t}{\hbar}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i(E_0+\alpha)t}{\hbar}} \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Dessa forma, temos

$$e^{\frac{-iHt}{\hbar}} = U e^J U^{-1} = e^{\frac{-iE_0 t}{\hbar}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) & -i \sin\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) \\ -i \sin\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) & \cos\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Finalmente, concluimos que

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{-iE_0 t}{\hbar}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) & -i \sin\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) \\ -i \sin\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) & \cos\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) \end{pmatrix} |\psi_0\rangle \quad (2.16)$$

f) Sabendo que $|\psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ podemos calcular:

$$|\langle\psi_0|\psi(t)\rangle|^2 = \langle\psi_0|\psi(t)\rangle \langle\psi(t)|\psi_0\rangle \quad (2.17)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) & -i \sin\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) \\ -i \sin\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) & \cos\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) & i \sin\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) \\ i \sin\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) & \cos\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Cujo produto resulta em

$$\cos^2\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) = 1 \quad (2.19)$$

E então segue que

$$\therefore t = \frac{\hbar}{\alpha} (k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.20)$$

2.2 Exponencial de Matriz

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

a) Calcule a forma diagonal da matriz ou, se não for possível, a forma de Jordan;

b) Calcule e^A .

Solução.

a) Em primeiro lugar, calculamos os autovalores de A através da equação secular:

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda) + 1 = 0 \implies \Lambda = \{1\} \quad (2.22)$$

Para encontrar os autovetores, escrevemos:

$$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad (2.23)$$

Onde pode-se definir

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

O que resulta em $|\psi\rangle$ da forma

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

Como o autovalor $\lambda = 1$ só rendeu um autovetor, para gerarmos uma base do espaço precisamos de um autovetor generalizado, que chamarei de $|\xi\rangle$. Para encontrá-lo, escrevemos:

$$A|\xi\rangle = |\xi\rangle + |\psi\rangle, \quad |\xi\rangle = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

O que resulta em

$$|\xi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Com isso podemos construir as matrizes dos autokets de A para passar para a forma de Jordan:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

E assim, sabendo que, por definição,

$$A = UJU^{-1} \quad (2.29)$$

onde J é a forma de Jordan, temos

$$J = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_N \quad (2.30)$$

b) Note que N é nilpotente (já que $N^2 = 0$). Como $[\mathbb{1}, N] = 0$ pois a identidade comuta com qualquer matriz, então

$$e^J = e^{\mathbb{1}+N} = e^{\mathbb{1}} \cdot e^N \quad (2.31)$$

E, por definição,

$$e^N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} \quad (2.32)$$

Mas como para $n \geq 2$ temos $N = \hat{0}$, então

$$e^N = \mathbb{1} + N \quad (2.33)$$

e, portanto,

$$e^J = e^{\mathbb{1}} (\mathbb{1} + N) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Além disso, lembremos que

$$e^A = U e^J U^{-1} \quad (2.35)$$

então, concluimos que

$$\therefore \boxed{e^A = e \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = eA} \quad (2.36)$$

3 Resolução da Lista 1 de 2021

3.1 Autovalores, autovetores e exponencial de matriz

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

que aparece na resolução das equações de movimento do oscilador harmônico amortecido. No caso $\gamma = 2\omega_0$ calcule

- a) os autovalores;
- b) os autovetores;
- c) e^A

Solução.

- a) No caso $\gamma = 2\omega_0$, a matriz A simplifica para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\omega_0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Para encontrar seus autovalores, resolvemos a equação secular:

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\omega_0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(2\omega_0 + \lambda) + \omega_0^2 = 0 \quad (3.3)$$

$$\therefore \lambda = -\omega_0 \quad (3.4)$$

é a única raiz dessa equação e portanto o único autovalor de A .

b) Para encontrar os autovetores, substituímos o autovalor calculado na equação a seguir:

$$A|v\rangle = -\omega_0|v\rangle \quad (3.5)$$

onde definimos

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Dessa forma, resolvendo a equação,

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega_0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

c) Precisamos agora de um autovetor generalizado para completar a base do espaço vetorial. Seja esse autovetor $|k\rangle$, podemos escrever

$$A|k\rangle = -\omega_0|k\rangle + |v\rangle \quad (3.8)$$

Onde podemos definir

$$|k\rangle = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

E então, resolvendo a equação,

$$|k\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Agora podemos construir a matriz U que nos levará a calcular a forma de Jordan de A (e posteriormente e^A). Por definição, U é a matriz dos autokets (e os generalizados) de A , isto é

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega_0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega_0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Por definição, a forma de Jordan de A é dada por

$$J = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} -\omega_0 & 1 \\ 0 & -\omega_0 \end{pmatrix} = -\omega_0 \mathbb{1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_N \quad (3.12)$$

Note que N é nilpotente (pois $N^2 = \hat{0}$). Dessa forma, para obter e^A lembremos que

$$e^A = Ue^J U^{-1} \quad (3.13)$$

e observe que

$$e^J = e^{-\omega_0 \mathbb{1} + N} \quad (3.14)$$

mas como $[-\omega_0 \mathbb{1}, N] = 0$ então vale

$$e^J = e^{-\omega_0 \mathbb{1}} \cdot e^N \quad (3.15)$$

Como N é nilpotente, o resultado simplifica para

$$e^J = \begin{pmatrix} e^{-\omega_0} & 0 \\ 0 & e^{-\omega_0} \end{pmatrix} \cdot (\mathbb{1} + N) = e^{-\omega_0} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Com isso, obtemos e^A pela definição,

$$e^A = U e^J U^{-1} = e^{-\omega_0} \begin{pmatrix} \omega_0 + 1 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0 + 1 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

4 Resolução da Lista 2 de 2021

4.1 Oscilador harmônico simples

Usando as técnicas desenvolvidas nas aulas, resolva a equação do movimento do oscilador harmônico simples.

Solução. A equação do oscilador harmônico simples 1D em seu estado natural (sem amortecimento nem forças externas) é:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (4.1)$$

Que é uma EDO homogênea de 2º ordem. Portanto, para achar a sua solução geral, podemos primeiro procurar por $x = e^{\lambda t}$, resultando em

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \implies \lambda = \pm i\omega_0 \quad (4.2)$$

Então, a solução geral é dada por

$$x(t) = ae^{i\omega_0 t} + be^{-i\omega_0 t} \quad (4.3)$$

O que, utilizando a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, rende

$$(a + b) \cos \omega_0 t + i(a - b) \sin \omega_0 t \quad (4.4)$$

Definindo $A = (a + b)$ e $B = i(a - b)$, temos

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (4.5)$$

4.2 Capacitor, circuito RLC e corrente alternada

A equação diferencial para a carga no capacitor de um circuito RLC em corrente alternada é

$$\ddot{Q}(t) + \gamma \dot{Q}(t) + \omega_0^2 Q(t) = \epsilon \cos \omega t \quad (4.6)$$

Calcule a solução em função das condições iniciais $Q(0) = Q_0$, $\dot{Q}(0) = I_0$.

Solução. Para encontrar a solução dessa EDO de 2º ordem, utilizaremos a propriedade de que a solução geral dessa EDO é dada pela soma da solução da EDO homogênea associada e de uma solução particular dessa EDO. Para calcular a solução da homogênea associada, escrevemos:

$$\ddot{Q}(t) + \gamma \dot{Q}(t) + \omega_0^2 Q(t) = 0 \quad (4.7)$$

E procuramos por soluções do tipo $Q(t) = e^{\lambda t}$:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \gamma \lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \implies \lambda^2 + \gamma \lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (4.8)$$

Que é uma equação do segundo grau em λ , sendo resolvida pela fórmula de Bhaskara:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \frac{-\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \quad (4.9)$$

Portanto a solução da homogênea associada é dada por

$$Q_H(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} [ae^{\omega t} + be^{-\omega t}], \quad \omega \equiv \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \quad (4.10)$$

Agora, a fim de encontrar a solução particular da EDO, complexificamos a mesma para obter

$$\ddot{\hat{Q}}(t) + \gamma \dot{\hat{Q}}(t) + \omega_0^2 \hat{Q}(t) = \epsilon e^{i\omega t} \quad (4.11)$$

onde $\hat{Q}(t)$ é a função complexa associada a $Q(t)$. Procuramos por soluções complexas do tipo $\hat{Q}(t) = \rho e^{i\omega t}$:

$$-\rho \omega^2 e^{i\omega t} + i\gamma \omega \rho e^{i\omega t} + \omega_0^2 \rho e^{i\omega t} = \epsilon e^{i\omega t} \quad (4.12)$$

$$\implies \rho = \frac{\epsilon}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (4.13)$$

Portanto, $\hat{Q}(t) = \frac{\epsilon e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$ e segue que $Q(t) = \text{Re}\{\hat{Q}(t)\}$:

$$\text{Re}\left\{\frac{\epsilon e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}\right\} = \text{Re}\left\{\frac{\epsilon (\cos \omega t + i \sin \omega t)(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}\right\} \quad (4.14)$$

$$\therefore Q_P(t) = \frac{\epsilon((\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + \gamma\omega \sin \omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (4.15)$$

Dessa forma, a solução total é dada pela soma da solução da homogênea associada com a solução particular:

$$Q(t) = Q_H(t) + Q_P(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left[a e^{\omega t} + b e^{-\omega t} \right] + \frac{\epsilon((\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + \gamma \omega \sin \omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} \quad (4.16)$$

Precisamos agora aplicar as condições de contorno: $Q(0) = Q_0$ e $\dot{Q}(0) = I_0$, então

$$Q_0 = [a + b] + \frac{\epsilon(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} \quad (4.17)$$

$$I_0 = -\frac{\gamma \omega}{2} [a - b] + \frac{\epsilon \gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} \quad (4.18)$$

Escrito de outra forma,

$$\frac{-2I_0}{\gamma \omega} = [a - b] - \frac{2\epsilon \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} \quad (4.19)$$

Somando as eqs. (4.17) e (4.19), temos:

$$2a + \frac{\epsilon((\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 2\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} = Q_0 - \frac{2I_0}{\gamma \omega} \quad (4.20)$$

Isolando o termo a , ficamos com:

$$\therefore a = \frac{Q_0}{2} - \frac{I_0}{\gamma \omega} - \frac{\epsilon((\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 2\omega)}{2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} \quad (4.21)$$

Substituindo essa informação na eq. (4.17) para obter o coeficiente b , encontramos:

$$Q_0 = b + \frac{Q_0}{2} - \frac{I_0}{\gamma \omega} - \frac{\epsilon((\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 2\omega)}{2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} + \frac{\epsilon(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} \quad (4.22)$$

$$\therefore b = \frac{Q_0}{2} + \frac{I_0}{\gamma \omega} + \frac{\epsilon}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} \left[\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 2\omega}{2} - (\omega_0^2 - \omega^2)^2 \right] \quad (4.23)$$

$$\therefore b = \frac{Q_0}{2} + \frac{I_0}{\gamma \omega} - \frac{\epsilon((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 2\omega)}{2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} \quad (4.24)$$

Substituindo a e b na eq. (38), temos a solução completa da EDO em (29).

4.3 Força de Lorentz

A força de Lorentz pode ser escrita em forma vetorial como

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (4.25)$$

onde q é a carga elétrica da partícula, \mathbf{E} o campo elétrico e \mathbf{B} o campo magnético, ambos constantes.

- a) Escreva a força de Lorentz em componentes usando a forma com índices e com coordenadas (x, y, z) explicitamente;

- b) Resolva a equação do movimento para condições iniciais genéricas;
c) Qual a solução que satisfaz $\mathbf{x}(0) = 0$ e $\mathbf{v}(0) = v_0 \hat{e}_x$?

Solução. Em primeiro lugar, reconhecemos que é possível realizar uma mudança no nosso sistema de coordenadas de forma que o vetor do campo magnético coincida com o eixo z , anulando as componentes nas outras direções, enquanto ainda podemos manter \mathbf{E} , \mathbf{F} e \mathbf{v} arbitrários. Dessa forma, prosseguimos com os itens:

- a) Vamos dar as denominações para cada um dos vetores relevantes para o problema:

$$|F\rangle = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}, \quad |E\rangle = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad |v\rangle = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad |B\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

O que nos permite escrever a equação para a força de Lorentz em componentes:

$$F_x = qE_x + qv_y B_z, \quad F_y = qE_y - qv_x B_z, \quad F_z = qE_z \quad (4.27)$$

- b) Podemos escrever esse sistema de equações lineares em forma matricial:

$$m|\ddot{\mathbf{r}}\rangle + q\hat{B}|\dot{\mathbf{r}}\rangle = q|E\rangle \quad (4.28)$$

onde reconhecemos que $|F\rangle = m|\ddot{\mathbf{r}}\rangle$ vem da segunda lei de Newton, e a matriz \hat{B} é dada por

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & -B_z & 0 \\ B_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Portanto, podemos reescrever a EDO reconhecendo que $|\ddot{\mathbf{r}}\rangle = |\dot{v}\rangle$:

$$|\dot{v}\rangle + \frac{q\hat{B}}{m}|v\rangle = \frac{q}{m}|E\rangle \quad (4.30)$$

Que é uma EDO de 1º ordem em $|v\rangle$. Sua solução completa é dada pela soma da solução geral da homogênea associada com uma solução particular da não-homogênea, isto é:

$$|v(t)\rangle = |v_H(t)\rangle + |v_P\rangle \quad (4.31)$$

A fim de encontrar $|v_H(t)\rangle$, escrevemos

$$|\dot{v}_H\rangle + \frac{q\hat{B}}{m}|v_H\rangle = 0, \quad \alpha \equiv \frac{q\hat{B}}{m} \quad (4.32)$$

O que por separação de variáveis nos rende a solução

$$v_H(t) = e^{-\alpha t} |\xi\rangle \quad (4.33)$$

onde $|\xi\rangle$ é um vetor arbitrário a ser fixado pelas condições iniciais a posteriori. Observe que $e^{-\alpha t}$ é uma exponencial de matriz porque o coeficiente α contém uma matriz. Para determinar esse termo, precisamos empregar a relação

$$e^A = U e^J U^{-1} \quad (4.34)$$

Onde e^A é a exponencial de alguma matriz A , U é a matriz dos seus autovalores e e^J é a exponencial da matriz A na forma de Jordan. Essa relação é derivada a partir da definição de exponencial de matriz a partir da expansão da mesma utilizando a série de Taylor e das propriedades da forma de Jordan.

Olhando para o termo $\frac{q}{m}\hat{B}$, percebe-se que podemos fatorar o $\frac{q}{m}$ por enquanto e focar em resolver a equação dos autovalores para \hat{B} , isto é, encontrar os números λ que satisfazem

$$\hat{B}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \quad (4.35)$$

Para tanto, podemos reescrever a eq. (4.35) e concluir que o $\det(\hat{B} - \lambda\mathbb{1}) = 0$ para existirem soluções com vetores $|\psi\rangle$ não-nulos. Dessa forma,

$$\det(\hat{B} - \lambda\mathbb{1}) = 0 \implies \Lambda = \{0, iB_z, -iB_z\} \quad (4.36)$$

onde Λ é o conjunto dos autovalores de \hat{B} . Substituindo esses autovalores na eq. (4.35) encontramos os seguintes autovetores:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |iB_z\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-iB_z\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

O que nos permite construir a matriz U :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & i/2 & 0 \\ 1/2 & -i/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

Como a matriz \hat{B} possui 3 autovetores linearmente independentes, então ela é diagonalizável e sua forma diagonal é

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & iB_z & 0 \\ 0 & 0 & -iB_z \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

Lembrando que o que nós queremos calcular é $e^{-\frac{q\hat{B}}{m}t}$, então reconhecemos que

$$e^J = \exp \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\frac{qB_z t}{m} & 0 \\ 0 & 0 & i\frac{qB_z t}{m} \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{iqB_z t}{m}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{iqB_z t}{m}} \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

onde podemos definir $\frac{qB_z t}{m} = \beta$ e a matriz simplifica para

$$e^J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Utilizando U e U^{-1} calculadas anteriormente, podemos finalmente dizer que

$$e^{\frac{-q\hat{B}t}{m}} = U e^J U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv R \quad (4.42)$$

4.4 Cinemática do projétil com resistência do ar

Um projétil é disparado com um ângulo θ respeito à direção horizontal e com uma velocidade v_0 . Considerando a força de resistência do ar,

$$\vec{F}_{res} = -\alpha \vec{v} \quad (4.43)$$

sendo \vec{v} a velocidade, determine a trajetória de movimento do projétil.

Solução. Dividindo o movimento em dois eixos (x e y), podemos escrever as seguintes EDOs:

$$m\ddot{y} + \alpha\dot{y} = -mg \implies \ddot{y} + \gamma\dot{y} = -g, \quad \gamma \equiv \frac{\alpha}{m} \quad (4.44)$$

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} = 0 \implies \ddot{x} + \gamma\dot{x} = 0 \quad (4.45)$$

Para resolver a eq. (48), vamos reescrever a EDO adotando $\dot{y} = k \implies \ddot{y} = \dot{k}$:

$$\dot{k} + \gamma k = -g \quad (4.46)$$

Cuja solução é dada pela solução da EDO homogênea associada com uma solução particular (que nesse caso é constante porque a função que está tornando a EDO inhomogênea é uma constante). Dessa forma,

$$k_H(t) = \xi e^{-\gamma t} \quad (4.47)$$

$$k_P = -\frac{g}{\gamma} \quad (4.48)$$

$$\therefore k(t) = \xi e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \quad (4.49)$$

Mas note que $k(t) = \dot{y}(t)$ e como condição inicial temos que $\dot{y}(0) = v_0 \sin \theta$, então

$$\xi = v_0 \sin \theta + \frac{g}{\gamma} \quad (4.50)$$

O que implica em

$$k(t) = \dot{y}(t) = \left[v_0 \sin \theta + \frac{g}{\gamma} \right] e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \quad (4.51)$$

Integrando uma vez para encontrar $y(t)$, temos

$$y(t) = -\frac{1}{\gamma} \left[v_0 \sin \theta + \frac{g}{\gamma} \right] e^{-\gamma t} - \frac{gt}{\gamma} + y_0 \quad (4.52)$$

Agora que conhecemos a solução para $y(t)$, relembremos a EDO para o eixo x :

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} = 0 \implies \ddot{x} + \gamma\dot{x} = 0 \quad (4.53)$$

Que é um EDO homogênea de 2º ordem, então, sua solução pode ser encontrada procurando por $x(t) = e^{\lambda t}$:

$$\lambda^2 + \lambda\gamma = \lambda(\lambda + \gamma) = 0 \therefore \Lambda = \{0, -\gamma\} \quad (4.54)$$

Portanto sua solução geral é dada por

$$x(t) = x_0 + Be^{-\gamma t} \quad (4.55)$$

Para aplicar a condição inicial, calculamos primeiro \dot{x} :

$$\dot{x}(t) = -\gamma Be^{-\gamma t} \quad (4.56)$$

Lembrando que $\dot{x}(0) = v_0 \cos \theta$, então

$$-\gamma B = v_0 \cos \theta \implies B = -\frac{1}{\gamma} v_0 \cos \theta \quad (4.57)$$

O que implica em

$$x(t) = x_0 - \frac{e^{-\gamma t}}{\gamma} v_0 \cos \theta \quad (4.58)$$

4.5 Plano com inclinação temporalmente variável

Considere o plano inclinado da Figura 1, com atrito estático normal. O ângulo do plano muda de acordo com $\theta(t) = \alpha t$, onde α é constante. Encontre a solução das equações de movimento.

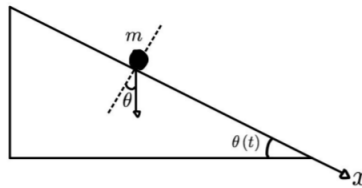


Figura 1: Plano inclinado com ângulo variável.

Solução. Tomando como a origem do sistema de coordenadas polares o extremo direito do plano inclinado, lembremos que a aceleração do corpo é dada por

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta \quad (4.59)$$

Realizando a decomposição vetorial das forças que atuam na massa m , podemos escrever as equações do movimento via segunda lei de Newton:

$$ma_r = mg \sin \theta - \mu N \quad (4.60)$$

$$ma_\theta = N - mg \cos \theta \quad (4.61)$$

Utilizando as expressões para a_r e a_θ em destaque na eq. (4.59), temos

$$m(-\ddot{r} + r\alpha^2) = mg \sin \theta - \mu N \quad (4.62)$$

$$2m\alpha\dot{r} + mg \cos \theta = N \implies m\ddot{r} - mr\alpha^2 = \mu(2m\alpha\dot{r} + mg \cos \theta) - mg \sin \theta \quad (4.63)$$

$$\therefore \ddot{r} - 2\mu\alpha\dot{r} - \alpha^2 r = g\mu \cos \theta - g \sin \theta \quad (4.64)$$

Que é uma EDO não-homogênea de 2º ordem na variável r . Para resolvê-la, lembremos que a solução geral dessa EDO é dada pela soma da solução geral da homogênea associada com uma solução particular da não-homogênea. Dessa forma,

$$r(t) = r_H(t) + r_P(t) \quad (4.65)$$

Para encontrar $r_H(t)$, escrevemos

$$\ddot{r}_H - 2\mu\alpha\dot{r}_H - \alpha^2 r_H = 0 \quad (4.66)$$

E procuramos por soluções do tipo $r_H = e^{\lambda t}$, de forma que

$$\lambda^2 - 2\mu\alpha\lambda - \alpha^2 = 0 \quad (4.67)$$

Isto é,

$$\lambda = \mu\alpha \pm \alpha\sqrt{\mu^2 + 1} \quad (4.68)$$

Portanto, a solução geral da homogênea associada é dada por

$$r_H(t) = e^{\mu\alpha t} \left[ae^{\alpha t\sqrt{\mu^2+1}} + be^{-\alpha t\sqrt{\mu^2+1}} \right] \quad (4.69)$$

Para encontrar a solução particular, como há uma combinação linear de senos e cossenos no termo que torna a EDO não-homogênea, vou procurar por uma solução particular do tipo:

$$r_P = A \cos(\alpha t) + B \sin(\alpha t) \quad (4.70)$$

Então calculamos as derivadas de r_P para substituir na EDO:

$$\dot{r}_P = -\alpha A \sin(\alpha t) + \alpha B \cos(\alpha t) \quad (4.71)$$

$$\ddot{r}_P = -\alpha^2 A \cos(\alpha t) - \alpha^2 B \sin(\alpha t) \quad (4.72)$$

O que na equação diferencial rende

$$-\alpha^2 A \cos(\alpha t) - \alpha^2 B \sin(\alpha t) + 2\mu\alpha^2 A \sin(\alpha t) - 2\mu\alpha^2 B \cos(\alpha t) \quad (4.73)$$

$$-\alpha^2 A \cos(\alpha t) - \alpha^2 B \sin(\alpha t) = g\mu \cos(\alpha t) - g \sin(\alpha t) \quad (4.74)$$

$$\implies A + \mu B = -\frac{\mu g}{2\alpha^2}, \quad B - \mu A = \frac{g}{2\alpha^2} \quad (4.75)$$

$$\therefore A = -\frac{\mu}{(\mu^2 + 1)} \cdot \frac{g}{\alpha^2}, \quad B = \frac{(1 - \mu^2)}{(1 + \mu^2)} \cdot \frac{g}{2\alpha^2} \quad (4.76)$$

$$\Rightarrow r_P(t) = \left[-\frac{\mu}{(\mu^2 + 1)} \cdot \frac{g}{\alpha^2} \right] \cos(\alpha t) + \left[\frac{(1 - \mu^2)}{(1 + \mu^2)} \cdot \frac{g}{2\alpha^2} \right] \sin(\alpha t) \quad (4.77)$$

Portanto a solução completa da EDO é dada por

$$r(t) = e^{-\mu\alpha t} \left[a e^{\alpha t \sqrt{\mu^2 + 1}} + b e^{-\alpha t \sqrt{\mu^2 - 1}} \right] - \frac{g}{\alpha^2(\mu^2 + 1)} \left(\mu \cos(\alpha t) + \frac{(\mu^2 - 1)}{2} \sin(\alpha t) \right) \quad (4.78)$$

4.6 Partícula em um potencial inversamente quadrático

Uma partícula em uma dimensão está sujeita a um potencial gravitacional,

$$V(x) = -\frac{k}{x^2} \quad (4.79)$$

sendo k uma constante com unidades apropriadas. Determine a equação de movimento para a partícula e ache a solução. (Dica: pode ser conveniente usar a conservação da energia).

Solução. A energia mecânica total do sistema é dada por

$$E = T(\dot{x}) + V(x) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{k}{x^2} \quad (4.80)$$

O que nos permite escrever a equação em função de \dot{x}^2 , isto é

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m} \left[E + \frac{k}{x^2} \right]}^{1/2} \iff \int \frac{dx}{\left(E + \frac{k}{x^2} \right)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{m}} \int dt \quad (4.81)$$

A integral da direita é trivial, enquanto que a integral da esquerda vale a pena ser tratada em detalhes, acompanhe:

$$\int \frac{x dx}{(Ex^2 + k)^{1/2}}, \quad u = Ex^2 + k \iff \frac{du}{2E} = x dx \quad (4.82)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2E} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{E} \sqrt{Ex^2 + k} + C \quad (4.83)$$

Continuando o desenvolvimento,

$$\frac{1}{E} \sqrt{Ex^2 + k} + C = \sqrt{\frac{2}{m}} t \quad (4.84)$$

O que sucede é uma manipulação da equação para isolar a variável x . Dessa forma,

$$\sqrt{Ex^2 + k} = \sqrt{\frac{2}{m}} Et - EC \Rightarrow Ex^2 + k = \frac{2E^2 t^2}{m} - 2E^2 C t \sqrt{\frac{2}{m}} + E^2 C^2 \quad (4.85)$$

$$x(t) = \sqrt{\frac{2Et^2}{m} - 2ECt\sqrt{\frac{2}{m}} + EC^2 - \frac{k}{E}} \quad (4.86)$$

Onde as duas constantes para serem ajustadas pelas condições iniciais são E e C .

5 Resolução da Lista 3 de 2021

5.1 Cinemática de uma partícula em um caminho

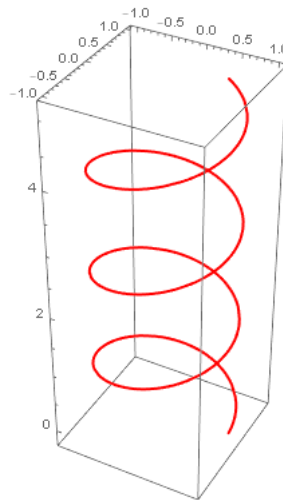
Considere o caminho

$$t \rightarrow R \cos \omega t \hat{e}_x + R \sin \omega t \hat{e}_y + \omega t \hat{e}_z \quad (5.1)$$

- a) Desenhe a forma geométrica do caminho;
- b) Quanto vale o vetor velocidade? E o vetor aceleração?;
- c) Quais as coordenadas melhores para respeitar a simetria do sistema? Escreva os vetores posição, velocidade e aceleração nessas coordenadas e usando os versores oportunos.

Solução.

- a) O caminho é representado na figura a seguir:



- b) O vetor posição é dado por

$$\vec{r} = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, \omega t) \quad (5.2)$$

O que implica que o vetor velocidade e o vetor aceleração (em coordenadas cartesianas) são encontrados através das derivadas com respeito ao tempo do vetor posição.

$$\vec{v} = (-\omega R \sin \omega t, \omega R \cos \omega t, \omega) \quad (5.3)$$

$$\vec{a} = (-\omega^2 R \cos \omega t, -\omega^2 R \sin \omega t, 0) \quad (5.4)$$

- c) O melhor sistema de coordenadas é o cilindro, posto que a espiral funciona como se uma partícula estivesse percorrendo a superfície de um cilindro (há uma simetria geométrica evidente). Nesse sistema de coordenadas, lembremos que vale

$$\hat{e}_r = \cos \omega t \hat{e}_x + \sin \omega t \hat{e}_y \quad (5.5)$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin \omega t \hat{e}_x + \cos \omega t \hat{e}_y \quad (5.6)$$

Portanto, o vetor posição em coordenadas cilíndricas é dado por

$$\vec{r} = R\hat{e}_r + \omega t \hat{e}_z \quad (5.7)$$

Para encontrar o vetor velocidade e aceleração, derivamos \vec{r} com relação ao tempo mais uma vez:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (R\hat{e}_r + \omega t \hat{e}_z) = R \frac{d\hat{e}_r}{dt} + \omega \hat{e}_z = \omega R \hat{e}_\theta + \omega \hat{e}_z \quad (5.8)$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (\omega R \hat{e}_\theta + \omega \hat{e}_z) = -\omega^2 R \hat{e}_r \quad (5.9)$$

5.2 Corpo em movimento vinculado a uma esfera

Considere um ponto vinculado a se movimentar apenas na superfície de uma esfera de raio R . Escreva os vetores posição, velocidade e aceleração em função do tempo usando os versores que respeitam a simetria do sistema. Quanto vale a energia cinética do corpo?

Solução. Como a partícula se movimenta apenas na superfície de uma esfera, nada mais natural do que utilizar o sistema de coordenadas esféricas para resolver este problema. Lembremos que a conversão de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas é dada pela geometria da esfera, fornecendo:

$$x = R \sin \theta \cos \phi \quad (5.10)$$

$$y = R \sin \theta \sin \phi \quad (5.11)$$

$$z = R \cos \theta \quad (5.12)$$

Ou seja, o vetor posição é dado por

$$\vec{r} = (x, y, z) = (R \sin \theta \cos \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \theta) = R \hat{e}_r \quad (5.13)$$

onde reconhecemos que

$$\hat{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \sin \theta \cos \phi \hat{e}_x + \sin \theta \sin \phi \hat{e}_y + \cos \theta \hat{e}_z \quad (5.14)$$

permitindo também obtermos os outros versores em coordenadas esféricas

$$\hat{e}_\theta = \frac{1}{R} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{e}_x + \cos \theta \sin \phi \hat{e}_y - \sin \theta \hat{e}_z \quad (5.15)$$

$$\hat{e}_\phi = \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = -\sin \theta \sin \phi \hat{e}_x + \sin \theta \cos \phi \hat{e}_y \quad (5.16)$$

Ademais, para encontrar o vetor velocidade e o vetor aceleração da partícula, basta calcularmos as derivadas temporais do vetor posição, isto é,

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\dot{\hat{e}}_r = R(\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi, \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi, -\dot{\theta} \sin \theta) \quad (5.17)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R\ddot{\hat{e}}_r \quad (5.18)$$

Por definição, a energia cinética é dada por

$$T = \frac{1}{2}m(\vec{v})^2 = \frac{1}{2}m[\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta]R^2 \quad (5.19)$$

5.3 Modelagem da temperatura de um quarto

A temperatura em um quarto é dada pelo campo escalar $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$T(\vec{x}) = F(x^2 + y^2) + Gz \quad (5.20)$$

onde F e G são constantes com dimensões oportunas.

- (a) Quais são as dimensões de F e G ?
- (b) Calcule o gradiente e o diferencial de $T(\vec{x})$.

Solução.

- (a) Considerando as unidades do sistema internacional (com temperatura em K), é imediato que

$$[F] = \frac{K}{L^2}, \quad [G] = \frac{K}{L} \quad (5.21)$$

onde K denota a temperatura em kelvin e L a unidade de comprimento (metro).

- (b)

$$\nabla T(\vec{x}) = \frac{\partial T}{\partial x}\hat{e}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\hat{e}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\hat{e}_z = 2Fx\hat{e}_x + 2Fy\hat{e}_y + G\hat{e}_z \quad (5.22)$$

$$dT(\vec{x}) = 2Fx dx + 2Fy dy + G dz \quad (5.23)$$

5.4 Área de uma superfície em \mathbb{R}^3

Considere a região do plano

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq b \right\} \quad (5.24)$$

Calcule a área da região usando as regras de integração vistas na aula.

Solução. Para calcular a área dessa região, admitiremos a função $\phi(x, y)$ tal que

$$\begin{aligned} \phi(x, y) : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow 1 \end{aligned} \quad (5.25)$$

além disso, observando a definição da região R pode-se perceber que se trata de uma coroa circular, portanto calcularemos a integral usando coordenadas polares

$$A = \int_R r \, d\theta \, dr = \int_a^b r \, dr \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \cdot 2\pi = \pi(b^2 - a^2) \quad (5.26)$$

5.5 Integral em duas dimensões

Calcule

$$\int_T (x^2 + y) \, d^2x \quad (5.27)$$

onde T é o triângulo delimitado por $y = x$, $y = 1$ e $x = 0$.

Solução. Por definição,

$$\int_T (x^2 + y) \, d^2x = \int_0^1 dy \int_0^1 (x^2 + y) \, dx \quad (5.28)$$

Mas no triângulo T definido, vale $y = x$ no intervalo de interesse, então

$$\int_T (x^2 + y) \, d^2x = \int_0^1 dx \int_0^x (x^2 + y) \, dy = \frac{5}{12} \quad (5.29)$$

5.6 Integrais em três dimensões

Usando o $T(\vec{x})$ do exercício, calcular as seguintes integrais

$$\int_{C_1} T(\vec{x}) \, d^3x, \quad \int_{C_2} T(\vec{x}) \, d^3x \quad (5.30)$$

onde C_1 corresponde à região interna de um cubo de lado a e C_2 à região interna de um cilindro de raio R e altura h . Escolha coordenadas oportunas para simplificar o cálculo.

Solução.

$$\int_{C_1} T(\vec{x}) \, d^3x = \int_0^a \int_0^a \int_0^a [F(x^2 + y^2) + Gz] \, dx \, dy \, dz \quad (5.31)$$

$$= \int_0^a \int_0^a \left[F\left(\frac{x^3}{3} + y^2x\right) + Gzx \right]_0^a \, dy \, dz \quad (5.32)$$

$$= \int_0^a \int_0^a \left[F\left(\frac{a^3}{3} + ay^2\right) + Gaz \right] \, dy \, dz \quad (5.33)$$

$$= \int_0^a \left[F\left(\frac{ya^3}{3} + \frac{ay^3}{3}\right) + Gazy \right]_0^a \, dz \quad (5.34)$$

$$= \int_0^a \left[F\left(\frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{3}\right) + Ga^2z \right] \, dz \quad (5.35)$$

$$= \left[2F\left(\frac{za^4}{3}\right) + Ga^2 \frac{z^2}{2} \right]_0^a \quad (5.36)$$

$$= \frac{2}{3}Fa^5 + \frac{1}{2}Ga^4 \quad (5.37)$$

$$\int_{C_2} T(\vec{x}) d^3x = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R [Fr^2 + Gz] r dr d\theta dz \quad (5.38)$$

$$= \int_0^h \int_0^{2\pi} \left[\frac{Fr^4}{4} + \frac{Gzr^2}{2} \right]_0^R d\theta dz \quad (5.39)$$

$$= \int_0^h \int_0^{2\pi} \left[\frac{FR^4}{4} + \frac{GzR^2}{2} \right] d\theta dz \quad (5.40)$$

$$= \int_0^h 2\pi \left[\frac{FR^4}{4} + \frac{GzR^2}{2} \right] dz \quad (5.41)$$

$$= \frac{\pi R^2 h}{2} (FR^2 + Gh) \quad (5.42)$$