

Métodos da Física Teórica

Victor Lins

Instituto de Física - Universidade de São Paulo, R. do Matão 1371, Cidade Universitária, São Paulo, Brasil.

E-mail: victorlins@usp.br

Sumário

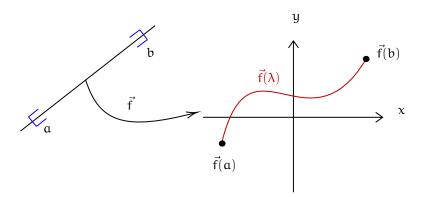
1	Cálculo Vetorial			1
	1.1 Aula 11 (14/10/2021)			1
		1.1.1	Caminhos em \mathbb{R}^2 em coordenadas cartesianas	1
		1.1.2	Exemplos de caminhos em \mathbb{R}^2	2
		1.1.3	Caminhos em \mathbb{R}^2 em coordenadas cartesianas	3
		1.1.4	Coordenadas polares em \mathbb{R}^2	4
		1.1.5	Caminhos em \mathbb{R}^2 em coordenadas polares	5
		1.1.6	Generalização ao \mathbb{R}^3	6
2	2 Resolução da P1 de 2018		9	
3 Resolução da Lista 1 de 2021			13	
4 Resolução da Lista 2 de 2021			15	

1 Cálculo Vetorial

1.1 Aula 11 (14/10/2021)

1.1.1 Caminhos em \mathbb{R}^2 em coordenadas cartesianas

Seja $\vec{f}: [\mathfrak{a},\mathfrak{b}] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função que leve um parâmetro $\lambda \longrightarrow \vec{f}(\lambda)$. Quando representamos os pontos no plano Oxy, uma curva é revelada. Fisicamente já fazemos isso desde o estudo da cinemática de forma intuitiva, quando levamos $t \longrightarrow \vec{r}(t)$, isto é, usamos o tempo como parâmetro para encontrar a trajetória de uma partícula através da função \vec{r} .



Definição: vetor tangente

$$[\vec{f}(t)]' = \frac{d\vec{f}}{dt} \equiv \lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h}$$
 (1)

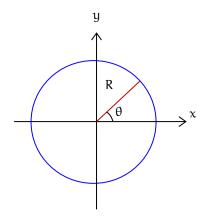
Na física, quando $\vec{f}(t) = \vec{r}(t)$, o vetor tangente é interpretado como a velocidade.

Definição: diferencial

$$d\vec{f}(t) \equiv \lim_{h \to 0} (\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)) = \frac{d\vec{f}}{dt}dt$$
 (2)

1.1.2 Exemplos de caminhos em \mathbb{R}^2

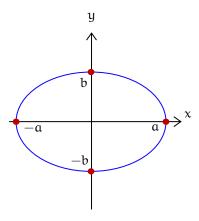
• Círculo



Nesse caso, o parâmetro a ser utilizado é θ , de forma que

$$\theta \longrightarrow \vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{pmatrix} = (R\cos\theta)\hat{e}_x + (R\sin\theta)\hat{e}_y$$
 (3)

• Elipse



Novamente, o parâmetro a ser utilizado é θ , de forma que

$$\theta \longrightarrow (a\cos\theta)\hat{e}_x + (b\sin\theta)\hat{e}_y \tag{4}$$

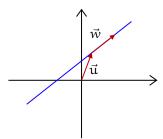
onde pode-se verificar uma compatibilidade na parametrização quando testamos alguns pontos notáveis $\theta=0,\pi/2,\pi,3\pi/2,2\pi$.

• O plano de Argand-Gauss $\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$ Tomando $\hat{e}_x \longrightarrow 1$ e $\hat{e}_y \longrightarrow i$, onde i é a unidade imaginária, o círculo se torna

$$\theta \longrightarrow R(\cos\theta + i\sin\theta) = Re^{i\theta} \tag{5}$$

onde no último passo foi utilizado a fórmula de Euler, revelando uma exponencial complexa para parametrizar esse caminho. Essa manipulação é muito útil porque facilita diversos cálculos na física.

• Reta



Dessa vez, suponha um parâmetro t e perceba que

$$t \longrightarrow \vec{u} + t\vec{w}$$
 (6)

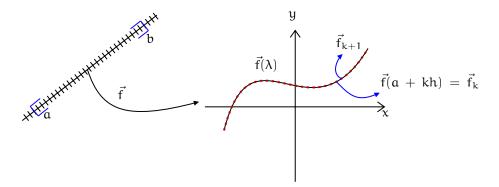
representa todos os pontos da reta, quando fazemos t percorrer \mathbb{R} .

1.1.3 Comprimento de um caminho

Vamos considerar uma partição regular \mathbb{P} intervalo real $I=[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ definida por

$$\mathbb{P} = \{ a = t_0, t_1 = a + h, t_2 = a + 2h, \dots, b = t_n \}$$
 (7)

com distância h entre dois pontos consecutivos. Esquematicamente, considerando que $k \in \mathbb{Z}$, o que acontece é o seguinte:



Note que a distância entre dois pontos consecutivos no caminho é dada por

$$\left\| \vec{\mathsf{f}}_{\mathsf{k}+1} - \vec{\mathsf{f}}_{\mathsf{k}} \right\| \tag{8}$$

o que implica que o comprimento do caminho pode ser aproximado pelo somatório a seguir:

$$L \approx \sum_{k=0}^{N-1} \left\| \vec{f}_{k+1} - \vec{f}_k \right\| \tag{9}$$

Para calcular o comprimento exato, precisamos tomar o limite em que $N \to \infty$, isto é

$$L = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \| \vec{f}_{k+1} - \vec{f}_k \|$$
 (10)

o que equivale a fazer $h \to 0$. Portanto, através da definição de diferencial em (2), temos

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \vec{df} \right\| = \int_{a}^{b} \left\| [\vec{f}(t)]' \right\| dt$$
 (11)

portanto, dado $\vec{f}(t)$ podemos encontrar o comprimento do caminho descrito quando t percorre um dado intervalo [a,b] através da integral acima.

• Exemplo: comprimento do círculo Consideremos a seguinte parametrização de um círculo com $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$\theta \longrightarrow R\cos\theta \hat{e}_x + R\sin\theta \hat{e}_y \tag{12}$$

Vamos calcular $[\vec{f}(\theta)]'$ a seguir

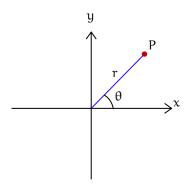
$$[\vec{f}(\theta)]' = -R\sin\theta \hat{e}_x + R\cos\theta \hat{e}_y \implies ||[\vec{f}(\theta)]'|| = R$$
 (13)

Portanto, o comprimento do círculo será determinado pela eq. (11):

$$\int_0^{2\pi} R \, d\theta = 2\pi R \tag{14}$$

1.1.4 Coordenadas polares em \mathbb{R}^2

Desejamos obter uma forma de relacionar o sistema de coordenadas cartesianas com o de coordenadas polares; confira o esquema a seguir:



Utilizando trigonometria, observe que podemos dizer que

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{15}$$

portanto qualquer ponto do plano pode ser dado por $\vec{r}(\theta)$ através de

$$\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\\ r\sin\theta \end{pmatrix} \tag{16}$$

uma vez escolhidos r e θ apropriadamente. Dadas as coordenadas (x,y) de um ponto no plano, podemos representar o mesmo ponto através de coordenadas polares verificando através das relações encontradas que

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$
 (17)

Além disso, precisamos encontrar quem são os versores para o sistema de coordenadas polares. Para tanto, primeiro traçaremos um análogo com o que acontece no sistema de coordenadas cartesiano, e a partir daí obteremos uma prescrição para obter versores em todos os outros sistemas de coordenadas.

Em primeiro lugar, lembremos que no sistema de coordenadas cartesianas vale

$$\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{x}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} + \mathbf{y}\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{y}} \tag{18}$$

de forma que podemos obter os versores através de

$$\hat{e}_{x} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}, \quad \hat{e}_{y} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}$$
 (19)

e reconhecemos que estes já estão *normalizados*, então não há mais nada para fazer. Note que tudo que precisou ser feito foi calcular a derivada parcial de \vec{r} com respeito a variável associada ao versor desejado. A justificativa para isso dar certo tem a ver com a interpretação geométrica da derivada (obtenção do vetor tangente). Portanto, de forma análoga, reconhecemos que em coordenadas polares vale

$$\vec{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}\cos\theta\\\mathbf{r}\sin\theta \end{pmatrix} \tag{20}$$

o que implica que

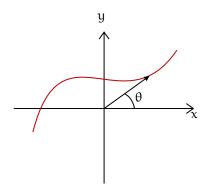
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y \equiv \hat{e}_r \tag{21}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -r \sin \theta \hat{e}_x + r \cos \theta \hat{e}_y \implies \hat{e}_\theta \equiv -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$$
 (22)

Neste último passo, dividimos por r para poder normalizar e encontrar o versor.

1.1.5 Caminhos em \mathbb{R}^2 em coordenadas polares

Considere o caminho esquematizado a seguir:



Aprendemos que a equivalência entre as coordenadas cartesianas e as polares é de tal forma que podemos dizer que

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos\left(\theta(t)\right) \\ r(t)\sin\left(\theta(t)\right) \end{pmatrix} = r(t)\cos\left(\theta(t)\right)\hat{e}_x + r(t)\sin\left(\theta(t)\right)\hat{e}_y = r(t)\hat{e}_r \tag{23}$$

Então a trajetória da partícula sempre será ditada em coordenadas polares via $\vec{r}(t) = r(t)\hat{e}_r$. Agora precisamos encontrar as outras grandezas relevantes, como velocidade e aceleração.

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{\vec{r}}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r \tag{24}$$

mas lembramos que $\hat{e}_r = \cos\theta \hat{e}_x + \sin\theta \hat{e}_y$, então

$$\dot{\hat{\mathbf{e}}}_{r} = (-\sin\theta \hat{\mathbf{e}}_{x} + \cos\theta \hat{\mathbf{e}}_{y})\dot{\theta} = \dot{\theta}\hat{\mathbf{e}}_{\theta} \tag{25}$$

portanto, $\vec{v}(t)$ simplifica para

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\hat{e}_{r} + r\dot{\theta}\hat{e}_{\theta} \tag{26}$$

Derivando mais uma vez em relação ao tempo para encontrar a aceleração, temos

$$\dot{\vec{v}}(t) = \vec{a}(t) = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta \tag{27}$$

Portanto sabemos estudar a cinemática de uma partícula que percorre um caminho no \mathbb{R}^2 utilizando coordenadas polares, através das relações desenvolvidas acima.

1.1.6 Generalização ao \mathbb{R}^3

As ideias são extremamente análogas ao que foi feito em \mathbb{R}^2 , embora seja necessário tomar um pouco mais de cuidado com os cálculos porque agora possuímos uma dimensão extra. Escrevemos as parametrizações da seguinte forma:

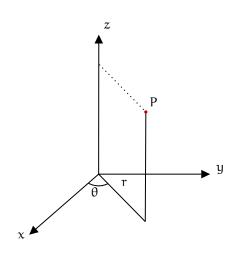
$$\mathbf{t} \longrightarrow \vec{\mathbf{r}}(\mathbf{t}) \in \mathbb{R}^3 \tag{28}$$

Exemplo da espiral: $t \longrightarrow R \cos \theta \hat{e}_x + R \sin \theta \hat{e}_y + z(t) \hat{e}_z$.

No que se refere a sistemas de coordenadas, estudaremos a seguir as coordenadas cilíndricas e as coordenadas esféricas.

• Coordenadas Cilíndricas

Nos basearemos na geometria do seguinte esquema:



De modo que podemos afirmar:

$$x = r\cos(\theta(t)), \quad y = r\sin(\theta(t)), \quad z = z(t)$$
(29)

Como de costume, podemos ainda definir

$$\hat{e}_{r} = (\cos \theta, \sin \theta, 0) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r}$$
 (30)

$$\hat{e}_{\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$$

$$\hat{e}_{z} = (0, 0, 1) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}$$
(31)

$$\hat{e}_z = (0, 0, 1) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \tag{32}$$

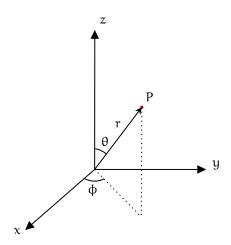
Portanto, conseguimos expressar a trajetória da partícula através de

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = (\mathbf{r}(t)\cos(\theta(t)), \mathbf{r}(t)\sin(\theta(t)), \mathbf{z}(t)) \tag{33}$$

e reconhecemos que sua velocidade e aceleração podem sempre ser encontradas através da derivação em relação ao tempo de $\vec{r}(t)$.

• Coordenadas Esféricas

Dessa vez o esquema geométrico será este:



Cujas implicações geométricas são:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta$$
 (34)

O que nos permite calcular os versores:

$$\hat{\mathbf{e}}_{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \tag{35}$$

$$\hat{e}_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta)$$

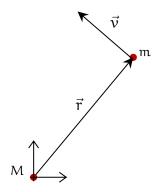
$$\hat{e}_{\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$$
(36)

$$\hat{e}_{\phi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \tag{37}$$

mais uma vez, por derivação de $\vec{r}(t)$ encontramos velocidade e aceleração, e pode-se deixar em função dos versores em coordenadas esféricas, analogamente ao que foi feito quando estava sendo analisado o sistema de coordenadas polares (\mathbb{R}^2).

Exemplo: [Corpo massivo num campo gravitacional] Considere um sistema binário composto por um corpo de massa m e um corpo de massa $M \gg m$ (de forma que podemos assumir M um ponto fixo). Utilize o sistema de coordenadas mais apropriado para essa situação, mostre que o momento angular do sistema se conserva e esboce o diagrama de fase para o corpo m.

Solução: Observe a ilustração do sistema abaixo:



Por definição, o momento angular é dado por $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(m\dot{\vec{r}})$, o que implica que a sua derivada é calculada por

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times (m\dot{\vec{r}}) + \vec{r} \times (m\ddot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \left(-\frac{GMm\vec{r}}{r^3} \right) = 0$$
 (38)

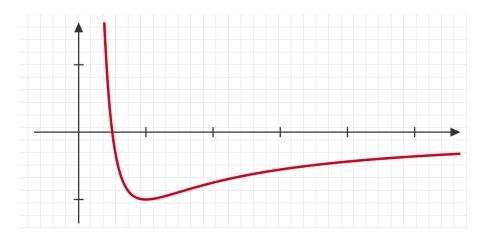
Portanto o momento angular é conservado. A priori poderíamos estar tentados a descrever o movimento conseguinte do corpo através de coordenadas esféricas, mas como o momento angular é conservado o movimento do corpo acontecerá num plano, e será mais simples descrevê-lo através de coordenadas polares. Dessa forma, o momento angular é

$$\vec{L} = m(r\hat{e}_r) \times (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\hat{e}_z \implies \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$
(39)

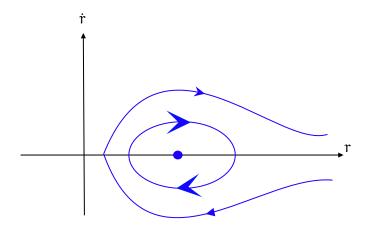
Com essa informação, calculamos agora a energia mecânica do sistema:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\left[\frac{L^2}{2m^2r^2} - \frac{GMm}{r}\right]}_{U_{eff}}$$
(40)

Para encontrar o diagrama de fase, é conveniente analisar o o gráfico de $(U_{eff} \times r)$, que será plotado a seguir:



e por conseguinte o seu diagrama de fase é esboçado adiante através do gráfico da energia potencial:



2 Resolução da P1 de 2018

Questão 1. A dinâmica de um sistema quântico é descrita na Mecânica Quântica usando a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d\ket{\psi}}{dt} = H\ket{\psi}$$

onde $|\psi\rangle$ é um vetor que descreve o estado do sistema e H é a matriz que representa a energia do sistema, dada por

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & \alpha \\ \alpha & E_0 \end{pmatrix}$$

com E_0 e α dois números reais.

- a) A matriz H é hermitiana? É unitária? Justifique.
- b) Calcule os autovalores de H;
- c) Calcule os autovetores de H;
- d) Se for possível, escreva a decomposição espectral da matriz H;
- e) Calcule explicitamente a solução da equação diferencial de Schrödinger para um vetor inicial arbitrário $|\psi(0)\rangle=|\psi_0\rangle$;
- f) Considere agora o estado $|\psi_0\rangle=(0,1)^T$. Calcule depois de quanto tempo é verdade que

$$|\langle \psi_1 | \psi(t) \rangle|^2 = 1$$

Solução.

a) Observe que

$$H^{\dagger} = \begin{pmatrix} E_0 & \alpha \\ \alpha & E_0 \end{pmatrix} = H \tag{41}$$

onde foi tirado o conjugado complexo (das constantes que são reais) e a transposta de H. Portanto, é verdade que H é hermitiana. Por outro lado, calculando HH[†]}, temos

$$HH^{\dagger} = \begin{pmatrix} E_0 & \alpha \\ \alpha & E_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 & \alpha \\ \alpha & E_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0^2 + \alpha^2 & 2E_0\alpha \\ 2E_0\alpha & E_0^2 + \alpha^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
(42)

Portanto, H não é unitária.

b) Para encontrar os autovalores, resolvemos a equação secular:

$$\det(H - \lambda \mathbb{1}) = 0 \implies (E_0 - \lambda)^2 - \alpha^2 = 0 : \Lambda = \{E_0 - \alpha, E_0 + \alpha\}$$
 (43)

onde Λ é o conjunto dos autovalores de H.

c) Para encontrar os autovetores, substituímos os autovalores encontrados em b) na seguinte equação:

$$H|\nu\rangle = \lambda|\nu\rangle \tag{44}$$

Utilizando a notação onde o autovetor associado ao autovalor k é $|k\rangle$, temos:

$$H |E_0 - \alpha\rangle = (E_0 - \alpha) |E_0 - \alpha\rangle \implies |E_0 - \alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
 (45)

$$H|E_0 + \alpha\rangle = (E_0 + \alpha)|E_0 + \alpha\rangle \implies |E_0 + \alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$
 (46)

d) Como H é hermitiana então ela admite decomposição espectral, e esta, por sua vez, é dada a seguir:

$$(E_0 - \alpha) |E_0 - \alpha\rangle \langle E_0 - \alpha| + (E_0 + \alpha) |E_0 + \alpha\rangle \langle E_0 + \alpha| = \begin{pmatrix} E_0 & \alpha \\ \alpha & E_0 \end{pmatrix} = H \qquad (47)$$

e) Considerando que a equação de Schrödinger é dada por

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle \tag{48}$$

é possível reescrevê-la como

$$\frac{d\left|\psi\right\rangle}{dt} + \frac{iH}{\hbar}\left|\psi\right\rangle = 0\tag{49}$$

Que é uma EDO homogênea de 1° ordem em $|\psi\rangle$. Portanto, sua solução geral é dada por

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{-iHt}{\hbar}} |\xi\rangle = e^{\frac{-iHt}{\hbar}} |\psi_0\rangle$$
 (50)

Agora, calcularemos a exponencial de matriz

$$e^{\frac{-iHt}{\hbar}} = Ue^{J}U^{-1}$$
(51)

onde podemos definir U como sendo a matriz dos autokets de H, isto é

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \implies U^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
 (52)

e reconhecemos também que e^J é a exponencial da matriz $\frac{-iHt}{\hbar}$ na forma de Jordan. Para encontrar e^J , podemos lembrar que se a matriz H possui forma diagonal

$$H = \begin{pmatrix} E_0 - \alpha & 0\\ 0 & E_0 + \alpha \end{pmatrix} \tag{53}$$

então vale que e^J é dado por

$$e^{J} = \begin{pmatrix} e^{\frac{-i(E_0 - \alpha)t}{\hbar}} & 0\\ 0 & e^{\frac{-i(E_0 + \alpha)t}{\hbar}} \end{pmatrix}$$
 (54)

Dessa forma, temos

$$e^{\frac{-iHt}{\hbar}} = Ue^{J}U^{-1} = e^{\frac{-iE_{0}t}{\hbar}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) & -i\sin\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) & \cos\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) \end{pmatrix}$$
(55)

Finalmente, concluímos que

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{-iE_0t}{\hbar}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) & -i\sin\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) & \cos\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) \end{pmatrix} |\psi_0\rangle \tag{56}$$

f) Sabendo que $|\psi_0\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ podemos calcular:

$$\left| \langle \psi_0 | \psi(t) \rangle \right|^2 = \left\langle \psi_0 | \psi(t) \rangle \left\langle \psi(t) | \psi_0 \right\rangle \tag{57}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha t}{h}\right) & -i\sin\left(\frac{\alpha t}{h}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\alpha t}{h}\right) & \cos\left(\frac{\alpha t}{h}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha t}{h}\right) & i\sin\left(\frac{\alpha t}{h}\right) \\ i\sin\left(\frac{\alpha t}{h}\right) & \cos\left(\frac{\alpha t}{h}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
 (58)

Cujo produto resulta em

$$\cos^2\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) = 1\tag{59}$$

E então segue que

$$\therefore \boxed{t = \frac{\hbar}{\alpha} (k\pi), \ k \in \mathbb{Z}}$$
 (60)

Questão 3. (P1 - 2018) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{61}$$

- a) Calcule a forma diagonal da matriz ou, se não for possível, a forma de Jordan;
- b) Calcule e^{A} .

Solução.

a) Em primeiro lugar, calculamos os autovalores de A através da equação secular:

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2 - \lambda) + 1 = 0 \implies \Lambda = \{1\}$$
 (62)

Para encontrar os autovetores, escrevemos:

$$A |\psi\rangle = \lambda |\psi\rangle = |\psi\rangle \tag{63}$$

Onde pode-se definir

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{64}$$

O que resulta em $|\psi\rangle$ da forma

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1\\1 \end{pmatrix} \tag{65}$$

Como o autovalor $\lambda=1$ só rendeu um autovetor, para gerarmos uma base do espaço precisamos de um autovetor generalizado, que chamarei de $|\xi\rangle$. Para encontrá-lo, escrevemos:

$$A |\xi\rangle = |\xi\rangle + |\psi\rangle, |\xi\rangle = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$
 (66)

O que resulta em

$$|\xi\rangle = \begin{pmatrix} 1\\0 \end{pmatrix} \tag{67}$$

Com isso podemos construir as matrizes dos autokets de A para passar para a forma de Jordan:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{68}$$

E assim, sabendo que, por definição,

$$A = UJU^{-1} \tag{69}$$

onde J é a forma de Jordan, temos

$$J = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$
 (70)

b) Note que N é nilpotente (já que $N^2=0$). Como $[\mathbb{1},N]=0$ pois a identidade comuta com qualquer matriz, então

$$e^{\mathsf{J}} = e^{\mathbb{1} + \mathsf{N}} = e^{\mathbb{1}} \cdot e^{\mathsf{N}} \tag{71}$$

E, por definição,

$$e^{N} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^{n}}{n!} \tag{72}$$

Mas como para $n \ge 2$ temos $N = \hat{0}$, então

$$e^{N} = 1 + N \tag{73}$$

e, portanto,

$$e^{J} = e^{1} (1 + N) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix}$$
 (74)

Além disso, lembremos que

$$e^{A} = Ue^{J}U^{-1} \tag{75}$$

então, concluímos que

$$\therefore e^{A} = e \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = eA$$
 (76)

3 Resolução da Lista 1 de 2021

Questão 20. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix} \tag{77}$$

que aparece na resolução das equações de movimento do oscilador harmônico amortecido. No caso $\gamma=2\omega_0$ calcule

- a) os autovalores;
- b) os autovetores;
- c) e^A

Solução.

a) No caso $\gamma = 2\omega_0$, a matriz A simplifica para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\omega_0 \end{pmatrix} \tag{78}$$

Para encontrar seus autovalores, resolvemos a equação secular:

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\omega_0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(2\omega_0 + \lambda) + \omega_0^2 = 0 \tag{79}$$

$$\therefore \lambda = -\omega_0 \tag{80}$$

é a única raíz dessa equação e portanto o único autovalor de A.

b) Para encontrar os autovetores, substituímos o autovalor calculado na equação a seguir:

$$A |\nu\rangle = -\omega_0 |\nu\rangle \tag{81}$$

onde definimos

$$|\nu\rangle = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \tag{82}$$

Dessa forma, resolvendo a equação,

$$|\nu\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega_0 \end{pmatrix} \tag{83}$$

c) Precisamos agora de um autovetor generalizado para completar a base do espaço vetorial. Seja esse autovetor $|k\rangle$, podemos escrever

$$A|k\rangle = -\omega_0|k\rangle + |\nu\rangle \tag{84}$$

Onde podemos definir

$$|\mathbf{k}\rangle = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \end{pmatrix} \tag{85}$$

E então, resolvendo a equação,

$$|\mathbf{k}\rangle = \begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix} \tag{86}$$

Agora podemos construir a matriz U que nos levará a calcular a forma de Jordan de A (e posteriormente e^A). Por definição, U é a matriz dos autokets (e os generalizados) de A, isto é

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega_0 & 1 \end{pmatrix} \implies U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega_0 & 1 \end{pmatrix}$$
 (87)

Por definição, a forma de Jordan de A é dada por

$$J = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} -\omega_0 & 1\\ 0 & -\omega_0 \end{pmatrix} = -\omega_0 \mathbb{1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N}$$
(88)

Note que N é nilpotente (pois $N^2 = \hat{0}$). Dessa forma, para obter e^A lembremos que

$$e^{A} = Ue^{J}U^{-1} \tag{89}$$

e observe que

$$e^{J} = e^{-\omega_0 \mathbb{1} + N} \tag{90}$$

mas como $[-\omega_0 \mathbb{1}, \mathbb{N}] = 0$ então vale

$$e^{\mathsf{J}} = e^{-\omega_0 \mathbb{1}} \cdot e^{\mathsf{N}} \tag{91}$$

Como N é nilpotente, o resultado simplifica para

$$e^{J} = \begin{pmatrix} e^{-\omega_0} & 0 \\ 0 & e^{-\omega_0} \end{pmatrix} \cdot (\mathbb{1} + \mathbb{N}) = e^{-\omega_0} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
 (92)

Com isso, obtemos e^A pela definição,

$$e^{A} = Ue^{J}U^{-1} = e^{-\omega_{0}}\begin{pmatrix} \omega_{0} + 1 & 1\\ -\omega_{0}^{2} & -\omega_{0} + 1 \end{pmatrix}$$
(93)

4 Resolução da Lista 2 de 2021

Questão 1. Usando as técnicas desenvolvidas nas aulas, resolva a equação do movimento do oscilador harmônico simples.

Solução. A equação do oscilador harmônico simples 1D em seu estado natural (sem amortecimento nem forças externas) é:

$$\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{\omega}_0^2 \mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{94}$$

Que é uma EDO homogênea de 2° ordem. Portanto, para achar a sua solução geral, podemos primeiro procurar por $x = e^{\lambda t}$, resultando em

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \implies \lambda = \pm i\omega_0 \tag{95}$$

Então, a solução geral é dada por

$$x(t)ae^{i\omega_0t} + be^{-i\omega_0t}$$
 (96)

O que, utilizando a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, rende

$$(a+b)\cos\omega_0 t + i(a-b)\sin\omega_0 t \tag{97}$$

Definindo A = (a + b) e B = i(a - b), temos

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \tag{98}$$

Questão 2. A equação diferencial para a carga no capacitor de um circuito RLC em corrente alternada é

$$\ddot{Q}(t) + \gamma \dot{Q}(t) + \omega_0^2 Q(t) = \epsilon \cos \omega t \tag{99}$$

Calcule a solução em função das condições iniciais $Q(0) = Q_0$, $\dot{Q}(0) = I_0$.

Solução. Para encontrar a solução dessa EDO de 2° ordem, utilizaremos a propriedade de que a solução geral dessa EDO é dada pela soma da solução da EDO homogênea associada e de uma solução particular dessa EDO. Para calcular a solução da homogênea associada, escrevemos:

$$\ddot{\mathbf{Q}}(\mathbf{t}) + \gamma \dot{\mathbf{Q}}(\mathbf{t}) + \omega_0^2 \mathbf{Q}(\mathbf{t}) = \mathbf{0} \tag{100}$$

E procuramos por soluções do tipo $Q(t) = e^{\lambda t}$:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \gamma \lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \implies \lambda^2 + \gamma \lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{101}$$

Que é uma equação do segundo grau em λ, sendo resolvida pela fórmula de Bhaskara:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \frac{-\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}$$
 (102)

Portanto a solução da homogênea associada é dada por

$$Q_{H}(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left[\alpha e^{\omega t} + b e^{-\omega t} \right], \ \omega \equiv \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2} - \omega_{0}^{2}}$$
 (103)

Agora, a fim de encontrar a solução particular da EDO, complexificamos a mesma para obter

$$\ddot{\hat{Q}}(t) + \gamma \dot{\hat{Q}}(t) + \omega_0^2 \hat{Q}(t) = \varepsilon e^{i\omega t}$$
 (104)

onde $\hat{Q}(t)$ é a função complexa associada a Q(t). Procuramos por soluções complexas do tipo $\hat{Q}(t)=\rho e^{i\omega t}$:

$$-\rho\omega^2 e^{i\omega t} + i\gamma\omega\rho e^{i\omega t} + \omega_0^2 \rho e^{i\omega t} = \varepsilon e^{i\omega t}$$
 (105)

$$\implies \rho = \frac{\epsilon}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \tag{106}$$

Portanto, $\hat{Q}(t) = \frac{\varepsilon e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$ e segue que $Q(t) = \text{Re}\{\hat{Q}(t)\}$:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\epsilon e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{\epsilon \left(\cos\omega t + i\sin\omega t\right)\left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega\right)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}\right\}$$
(107)

$$\therefore Q_{P}(t) = \frac{\epsilon((\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + \gamma\omega\sin\omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$
(108)

Dessa forma, a solução total é dada pela soma da solução da homogênea associada com a solução particular:

$$Q(t) = Q_{H}(t) + Q_{P}(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left[\alpha e^{\omega t} + b e^{-\omega t} \right] + \frac{\epsilon((\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + \gamma \omega\sin\omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}$$
(109)

Precisamos agora aplicar as condições de contorno: $Q(0) = Q_0$ e $\dot{Q}(0) = I_0$, então

$$Q_0 = [a + b] + \frac{\epsilon(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}$$
(110)

$$I_0 = -\frac{\gamma \omega}{2} \left[\alpha - b \right] + \frac{\epsilon \gamma \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}$$
 (111)

Escrito de outra forma,

$$\frac{-2I_0}{\gamma\omega} = [a - b] - \frac{2\varepsilon\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$
 (112)

Somando as eqs. (110) e (112), temos:

$$2a + \frac{\epsilon \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 2\omega \right)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} = Q_0 - \frac{2I_0}{\gamma \omega}$$
 (113)

Isolando o termo a, ficamos com:

$$\therefore \boxed{\alpha = \frac{Q_0}{2} - \frac{I_0}{\gamma \omega} - \frac{\varepsilon \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 2\omega \right)}{2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}}$$

$$(114)$$

Substituindo essa informação na eq. (110) para obter o coeficiente b, encontramos:

$$Q_0 = b + \frac{Q_0}{2} - \frac{I_0}{\gamma \omega} - \frac{\varepsilon \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 2\omega \right)}{2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} + \frac{\varepsilon (\omega_0^2 - \omega^2)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}$$
(115)

$$\therefore b = \frac{Q_0}{2} + \frac{I_0}{\gamma \omega} + \frac{\epsilon}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2} \left[\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 2\omega}{2} - (\omega_0^2 - \omega^2)^2 \right]$$
(116)

$$\therefore b = \frac{Q_0}{2} + \frac{I_0}{\gamma \omega} - \frac{\epsilon((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 2\omega)}{2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2}$$
(117)

Substituindo a e b na eq. (38), temos a solução completa da EDO em (29).

Questão 3. A força de Lorentz pode ser escrita em forma vetorial como

$$\mathbf{F} = \mathbf{q}\mathbf{E} + \mathbf{q}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{118}$$

onde q é a carga elétrica da partícula, **E** o campo elétrico e **B** o campo magnético, ambos constantes.

- a) Escreva a força de Lorentz em componentes usando a forma com índices e com coordenadas (x, y, z) explicitamente;
- b) Resolva a equação do movimento para condições iniciais genéricas;
- c) Qual a solução que satisfaz $\mathbf{x}(0) = 0$ e $\mathbf{v}(0) = v_0 \hat{\mathbf{e}}_x$?

Solução. Em primeiro lugar, reconhecemos que é possível realizar uma mudança no nosso sistema de coordenadas de forma que o vetor do campo magnético coincida com o eixo *z*, anulando as componentes nas outras direções, enquanto ainda podemos manter **E**, **F** e **v** arbitrários. Dessa forma, prosseguimos com os itens:

a) Vamos dar as denominações para cada um dos vetores relevantes para o problema:

$$|F\rangle = \begin{pmatrix} F_{x} \\ F_{y} \\ F_{z} \end{pmatrix}, |E\rangle = \begin{pmatrix} E_{x} \\ E_{y} \\ E_{z} \end{pmatrix}, |\nu\rangle = \begin{pmatrix} \nu_{x} \\ \nu_{y} \\ \nu_{z} \end{pmatrix}, |B\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{z} \end{pmatrix}$$
 (119)

O que nos permite escrever a equação para a força de Lorentz em componentes:

$$F_x = qE_x + qv_yB_z, F_y = qE_y - qv_xB_z, F_z = qE_z$$
 (120)

b) Podemos escrever esse sistema de equações lineares em forma matricial:

$$m | \ddot{r} \rangle + q \hat{B} | \dot{r} \rangle = q | E \rangle \tag{121}$$

onde reconhecemos que $|F\rangle=\mathfrak{m}\,|\ddot{r}\rangle$ vem da segunda lei de Newton, e a matriz \hat{B} é dada por

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{B}_z & 0 \\ \mathbf{B}_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{122}$$

Portanto, podemos reescrever a EDO reconhecendo que $|\ddot{r}\rangle = |\dot{v}\rangle$:

$$|\dot{v}\rangle + \frac{q\hat{B}}{m}|v\rangle = \frac{q}{m}|E\rangle$$
 (123)

Que é uma EDO de 1° ordem em $|v\rangle$. Sua solução completa é dada pela soma da solução geral da homogenea associada com uma solução particular da não-homogênea, isto é:

$$|\nu(t)\rangle = |\nu_{H}(t)\rangle + |\nu_{P}\rangle \tag{124}$$

A fim de encontrar $|v_H(t)\rangle$, escrevemos

$$|\dot{v}_{H}\rangle + \frac{q\hat{B}}{m}|v_{H}\rangle = 0, \quad \alpha \equiv \frac{q\hat{B}}{m}$$
 (125)

O que por separação de variáveis nos rende a solução

$$v_{H}(t) = e^{-\alpha t} |\xi\rangle \tag{126}$$

onde $|\xi\rangle$ é um vetor arbitrário a ser fixado pelas condições inicias a posteriori. Observe que $e^{-\alpha t}$ é uma exponencial de matriz porque o coeficiente α contém uma matriz. Para determinar esse termo, precisamos empregar a relação

$$e^{A} = Ue^{J}U^{-1} \tag{127}$$

Onde e^A é a exponencial de alguma matriz A, U é a matriz dos seus autovalores e e^J é a exponencial da matriz A na forma de Jordan. Essa relação é derivada a partir da definição de exponencial de matriz a partir da expansão da mesma utilizando a série de Taylor e das propriedades da forma de Jordan.

Olhando para o termo $\frac{q}{m}\hat{B}$, percebe-se que podemos fatorar o $\frac{q}{m}$ por enquanto e focar em resolver a equação dos autovalores para \hat{B} , isto é, encontrar os números λ que satisfazem

$$\hat{\mathbf{B}} | \psi \rangle = \lambda | \psi \rangle \tag{128}$$

Para tanto, podemos reescrever a eq. (128) e concluir que o $\det(\hat{B} - \lambda \mathbb{1}) = 0$ para existirem soluções com vetores $|\psi\rangle$ não-nulos. Dessa forma,

$$\det(\hat{B} - \lambda \mathbb{1}) = 0 \implies \Lambda = \{0, iB_z, -iB_z\}$$
(129)

onde Λ é o conjunto dos autovalores de \hat{B} . Substituindo esses autovalores na eq. (128) encontramos os seguintes autovetores:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0\\0\\1 \end{pmatrix}, |iB_z\rangle = \begin{pmatrix} 1\\-i\\0 \end{pmatrix}, |-iB_z\rangle = \begin{pmatrix} 1\\i\\0 \end{pmatrix}$$
 (130)

O que nos permite construir a matriz U:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & i/2 & 0 \\ 1/2 & -i/2 & 0 \end{pmatrix}$$
(131)

Como a matriz \hat{B} possui 3 autovetores linearmente independentes, então ela é diagonalizável e sua forma diagonal é

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\mathbf{B}_z & 0 \\ 0 & 0 & -i\mathbf{B}_z \end{pmatrix}$$
 (132)

Lembrando que o que nós queremos calcular é $e^{-\frac{q\hat{B}}{m}t}$, então reconhecemos que

$$e^{J} = \exp \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\frac{qB_{z}t}{m} & 0 \\ 0 & 0 & i\frac{qB_{z}t}{m} \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{iqB_{z}t}{m}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{iqB_{z}t}{m}} \end{pmatrix}$$
(133)

onde podemos definir $\frac{qB_zt}{m}=\beta$ e a matriz simplifica para

$$e^{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \tag{134}$$

Utilizando U e U⁻¹ calculadas anteriormente, podemos finalmente dizer que

$$e^{\frac{-q\hat{B}t}{m}} = Ue^{J}U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0\\ -\sin\beta & \cos\beta & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv R$$
 (135)

Questão 4. Um projétil é disparado com um ângulo θ respeito à direção horizontal e com uma velocidade v_0 . Considerando a força de resistência do ar,

$$\vec{\mathsf{F}}_{\mathsf{res}} = -\alpha \vec{\mathsf{v}} \tag{136}$$

sendo \vec{v} a velocidade, determine a trajetória de movimento do projétil.

Solução. Dividindo o movimento em dois eixos (x e y), podemos escrever as seguintes EDOs:

$$m\ddot{y} + \alpha\dot{y} = -mg \implies \ddot{y} + \gamma\dot{y} = -g, \ \gamma \equiv \frac{\alpha}{m}$$
 (137)

$$m\ddot{x} + \alpha \dot{x} = 0 \implies \ddot{x} + \gamma \dot{x} = 0 \tag{138}$$

Para resolver a eq. (48), vamos reescrever a EDO adotando $\dot{y}=k \implies \ddot{y}=\dot{k}$:

$$\dot{\mathbf{k}} + \gamma \mathbf{k} = -\mathbf{q} \tag{139}$$

Cuja solução é dada pela solução da EDO homogênea associada com uma solução particular (que nesse caso é constante porque a função que está tornando a EDO inomogênea é uma constante). Dessa forma,

$$k_{H}(t) = \xi e^{-\gamma t} \tag{140}$$

$$k_{P} = -\frac{g}{\gamma} \tag{141}$$

$$\therefore k(t) = \xi e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \tag{142}$$

Mas note que $k(t) = \dot{y}(t)$ e como condição inicial temos que $\dot{y}(0) = v_0 \sin \theta$, então

$$\xi = \nu_0 \sin \theta + \frac{g}{\gamma} \tag{143}$$

O que implica em

$$k(t) = \dot{y}(t) = \left[v_0 \sin \theta + \frac{g}{\gamma}\right] e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma}$$
 (144)

Integrando uma vez para encontrar y(t), temos

$$y(t) = -\frac{1}{\gamma} \left[v_0 \sin \theta + \frac{g}{\gamma} \right] e^{-\gamma t} - \frac{gt}{\gamma} + y_0$$
 (145)

Agora que conhecemos a solução para y(t), relembremos a EDO para o eixo x:

$$m\ddot{x} + \alpha \dot{x} = 0 \implies \ddot{x} + \gamma \dot{x} = 0 \tag{146}$$

Que é um EDO homogênea de 2° ordem, então, sua solução pode ser encontrada procurando por $x(t)=e^{\lambda t}$:

$$\lambda^2 + \lambda \gamma = \lambda(\lambda + \gamma) = 0 : \Lambda = \{0, -\gamma\}$$
 (147)

Portanto sua solução geral é dada por

$$x(t) = x_0 + Be^{-\gamma t} \tag{148}$$

Para aplicar a condição inicial, calculamos primeiro x:

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathsf{t}) = -\gamma \mathsf{B} \mathsf{e}^{-\gamma \mathsf{t}} \tag{149}$$

Lembrando que $\dot{x}(0) = v_0 \cos \theta$, então

$$-\gamma B = \nu_0 \cos \theta \implies B = -\frac{1}{\gamma} \nu_0 \cos \theta \tag{150}$$

O que implica em

$$x(t) = x_0 - \frac{e^{-\gamma t}}{\gamma} v_0 \cos \theta$$
 (151)

Questão 5. Considere o plano inclinado da Figura 1, com atrito estático normal. O ângulo do plano muda de acordo com $\theta(t) = \alpha t$, onde α é constante. Encontre a solução das equações de movimento.

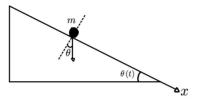


Figura 1: Plano inclinado com ângulo variável.

Solução. Tomando como a origem do sistema de coordenadas polares o extremo direito do plano inclinado, lembremos que a aceleração do corpo é dada por

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})e_{\theta} \tag{152}$$

Realização a decomposição vetorial das forças que atuam na massa m, podemos escrever as equações do movimento via segunda lei de Newton:

$$ma_{r} = mq \sin \theta - \mu N \tag{153}$$

$$ma_{\theta} = N - mg\cos\theta \tag{154}$$

Utilizando as expressões para a_r e a_θ em destaque na eq. (152), temos

$$m(-\ddot{r} + r\alpha^2) = mq \sin \theta - \mu N \tag{155}$$

$$2m\alpha\dot{r} + mg\cos\theta = N \implies m\ddot{r} - mr\alpha^2 = \mu(2m\alpha\dot{r} + mg\cos\theta) - mg\sin\theta$$
 (156)

$$\therefore \ddot{\mathbf{r}} - 2\mu\alpha\dot{\mathbf{r}} - \alpha^2\mathbf{r} = g\mu\cos\theta - g\sin\theta \tag{157}$$

Que é uma EDO não-homogênea de 2° ordem na variável r. Para resolvê-la, lembremos que a solução geral dessa EDO é dada pela soma da solução geral da homogênea associada com uma solução particular da não-homogênea. Dessa forma,

$$r(t) = r_H(t) + r_P(t)$$
 (158)

Para encontrar $r_H(t)$, escrevemos

$$\ddot{\mathbf{r}}_{H} - 2\mu\alpha\dot{\mathbf{r}}_{H} - \alpha^{2}\mathbf{r}_{H} = 0 \tag{159}$$

E procuramos por soluções do tipo $r_H=e^{\lambda t}$, de forma que

$$\lambda^2 - 2\mu\alpha\lambda - \alpha^2 = 0 \tag{160}$$

Isto é,

$$\lambda = \mu \alpha \pm \alpha \sqrt{\mu^2 + 1} \tag{161}$$

Portanto, a solução geral da homogênea associada é dada por

$$r_{H}(t) = e^{\mu \alpha t} \left[a e^{\alpha t \sqrt{\mu^{2} + 1}} + b e^{-\alpha t \sqrt{\mu^{2} + 1}} \right]$$
 (162)

Para encontrar a solução particular, como há uma combinação linear de senos e cossenos no termo que torna a EDO não-homogênea, vou procurar por uma solução particular do tipo:

$$r_{P} = A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t) \tag{163}$$

Então calculamos as derivadas de r_P para substituir na EDO:

$$\dot{\mathbf{r}}_{P} = -\alpha A \sin(\alpha t) + \alpha B \cos(\alpha t) \tag{164}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_{P} = -\alpha^{2} A \cos(\alpha t) - \alpha^{2} B \sin(\alpha t)$$
(165)

O que na equação diferencial rende

$$-\alpha^{2}A\cos\left(\alpha t\right) - \alpha^{2}B\sin\left(\alpha t\right) + 2\mu\alpha^{2}A\sin\left(\alpha t\right) - 2\mu\alpha^{2}B\cos\left(\alpha t\right)$$
 (166)

$$-\alpha^{2}A\cos(\alpha t) - \alpha^{2}B\sin(\alpha t) = g\mu\cos(\alpha t) - g\sin(\alpha t)$$
 (167)

$$\implies A + \mu B = -\frac{\mu g}{2\alpha^2}, \quad B - \mu A = \frac{g}{2\alpha^2}$$
 (168)

$$\therefore A = -\frac{\mu}{(\mu^2 + 1)} \cdot \frac{g}{\alpha^2}, \ B = \frac{(1 - \mu^2)}{(1 + \mu^2)} \cdot \frac{g}{2\alpha^2}$$
 (169)

$$\implies r_P(t) = \left[-\frac{\mu}{(\mu^2 + 1)} \cdot \frac{g}{\alpha^2} \right] \cos(\alpha t) + \left[\frac{(1 - \mu^2)}{(1 + \mu^2)} \cdot \frac{g}{2\alpha^2} \right] \sin(\alpha t) \tag{170}$$

Portanto a solução completa da EDO é dada por

$$r(t) = e^{-\mu\alpha t} \left[\alpha e^{\alpha t \sqrt{\mu^2 + 1}} + b e^{-\alpha t \sqrt{\mu^2 - 1}} \right] - \frac{g}{\alpha^2(\mu^2 + 1)} \left(\mu cos(\alpha t) + \frac{(\mu^2 - 1)}{2} sin(\alpha t) \right) \right] \tag{171}$$

Questão 6. Uma partícula em uma dimensão está sujeita a um potencial gravitacional,

$$V(x) = -\frac{k}{x^2} \tag{172}$$

sendo k uma constante com unidades apropriadas. Determine a equação de movimento para a partícula e ache a solução. (Dica: pode ser conveniente usar a conservação da energia).

Solução. A energia mecânica total do sistema é dada por

$$E = T(\dot{x}) + V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{k}{x^2}$$
 (173)

O que nos permite escrever a equação em função de \dot{x}^2 , isto é

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}} \left[E + \frac{k}{x^2} \right]^{1/2} \iff \int \frac{dx}{\left(E + \frac{k}{x^2} \right)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{m}} \int dt$$
 (174)

A integral da direita é trivial, enquanto que a integral da esquerda vale a pena ser tratada em detalhes, acompanhe:

$$\int \frac{x \, \mathrm{d}x}{(\mathsf{E}x^2 + \mathsf{k})^{1/2}}, \quad \mathsf{u} = \mathsf{E}x^2 + \mathsf{k} \iff \frac{\mathsf{d}\mathsf{u}}{2\mathsf{E}} = x \, \mathsf{d}x \tag{175}$$

$$\implies \frac{1}{2E} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{E} \sqrt{Ex^2 + k} + C \tag{176}$$

Continuando o desenvolvimento,

$$\frac{1}{\mathsf{E}}\sqrt{\mathsf{E}\mathsf{x}^2+\mathsf{k}}+\mathsf{C}=\sqrt{\frac{2}{\mathsf{m}}}\mathsf{t}\tag{177}$$

O que sucede é uma manipulação da equação para isolar a variável x. Dessa forma,

$$\sqrt{Ex^2 + k} = \sqrt{\frac{2}{m}}Et - EC \implies Ex^2 + k = \frac{2E^2t^2}{m} - 2E^2Ct\sqrt{\frac{2}{m}} + E^2C^2$$
 (178)

$$x(t) = \sqrt{\frac{2Et^2}{m} - 2ECt\sqrt{\frac{2}{m}} + EC^2 - \frac{k}{E}}$$
 (179)

Onde as duas constantes para serem ajustadas pelas condições iniciais são E e C.

Questão 7. Resolva a equação de Airy

$$y''(z) - zy(z) = 0 \tag{180}$$

a qual aparece na resolução do problema de autovalores de uma partícula num potencial linear na Mecânica Quântica. Para quais valores de *z* ela converge?