Métodos da Física Teórica

Victor Hugo dos Santos Lins

Instituto de Física - Universidade de São Paulo,
R. do Matão 1371,
Cidade Universitária, São Paulo, Brasil.

E-mail: victorlins@usp.br

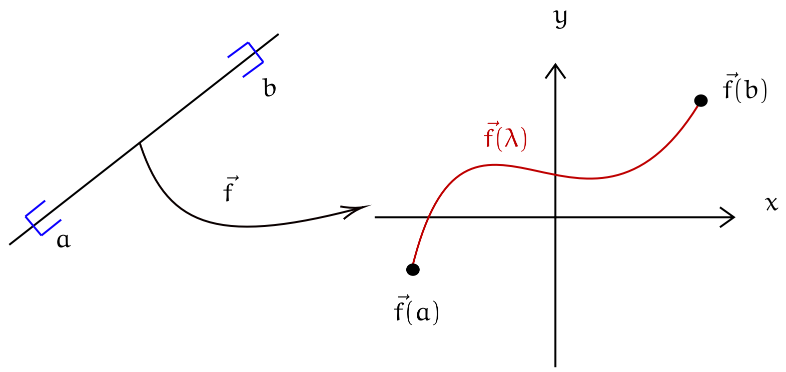
Sumário

1 Cálculo Vetorial

1.1 Aula 11 (14/10/2021)

1.1.1 Caminhos em $\mathbb{R}^2$ em coordenadas cartesianas

Seja $\vec{f}: [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função que leve um parâmetro $\lambda \longrightarrow \vec{f}(\lambda)$. Quando representamos os pontos no plano Oxy, uma curva é revelada. Fisicamente já fazemos isso desde o estudo da cinemática de forma intuitiva, quando levamos $t \longrightarrow \vec{r}(t)$, isto é, usamos o tempo como parâmetro para encontrar a trajetória de uma partícula através da função $\vec{r}$.



Definição: vetor tangente

$$[\vec{f}(t)]' = \frac{d\vec{f}}{dt} \equiv \lim_{h \to 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} \tag{1}$$

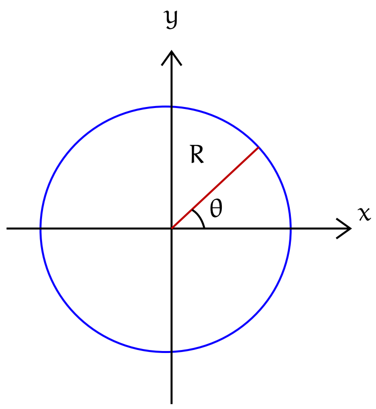
Na física, quando $\vec{f}(t) = \vec{r}(t)$, o vetor tangente é interpretado como a velocidade.

Definição: diferencial

$$d\vec{f}(t) \equiv \lim_{h\to 0} \left(\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)\right) = \frac{d\vec{f}}{dt}dt \tag{2}$$

1.1.2 Exemplos de caminhos em $\mathbb{R}^2$

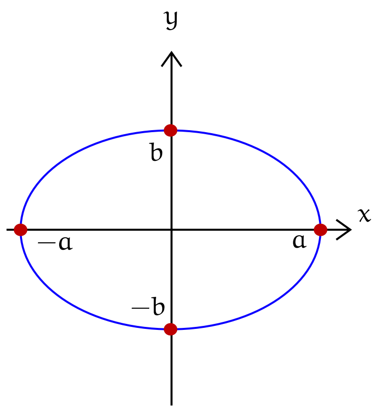
- Círculo



Nesse caso, o parâmetro a ser utilizado é θ, de forma que

$$\theta \longrightarrow \vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \end{pmatrix} = (R\cos\theta)\hat{e}_x + (R\sin\theta)\hat{e}_y \tag{3}$$

- Elipse



Novamente, o parâmetro a ser utilizado é θ, de forma que

$$\theta \longrightarrow (a\cos\theta)\hat{e}_x + (b\sin\theta)\hat{e}_y \tag{4}$$

onde pode-se verificar uma compatibilidade na parametrização quando testamos alguns pontos notáveis $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$.

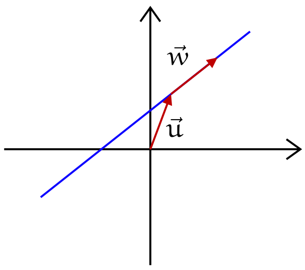
- O plano de Argand-Gauss $\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$

  Tomando $\hat{e}_x \longrightarrow 1$ e $\hat{e}_y \longrightarrow i$, onde i é a unidade imaginária, o círculo se torna

$$\theta \longrightarrow R(\cos\theta + i\sin\theta) = Re^{i\theta} \tag{5}$$

onde no último passo foi utilizado a fórmula de Euler, revelando uma exponencial complexa para parametrizar esse caminho. Essa manipulação é muito útil porque facilita diversos cálculos na física.

- Reta



Dessa vez, suponha um parâmetro t e perceba que

$$t \longrightarrow \vec{u} + t\vec{w} \tag{6}$$

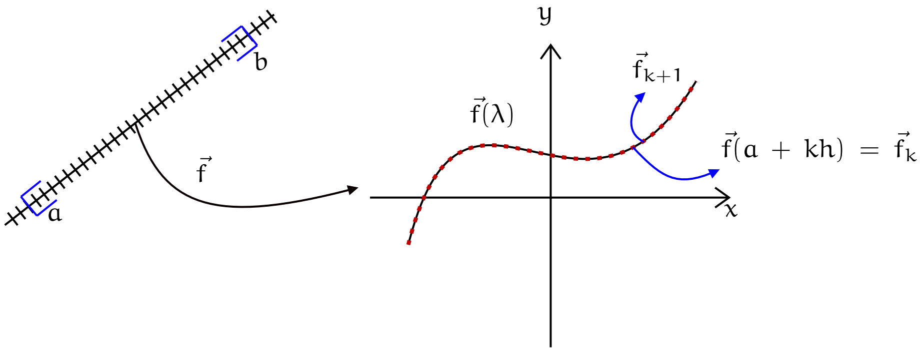
representa todos os pontos da reta, quando fazemos t percorrer $\mathbb{R}$.

1.1.3 Comprimento de um caminho

Vamos considerar uma partição regular $\mathbb{P}$ intervalo real $I = [a, b]$ definida por

$$\mathbb{P} = \{a = t_0, t_1 = a + h, t_2 = a + 2h, \ldots, b = t_n\} \tag{7}$$

com distância h entre dois pontos consecutivos. Esquematicamente, considerando que $k \in \mathbb{Z}$, o que acontece é o seguinte:



Note que a distância entre dois pontos consecutivos no caminho é dada por

$$\left\| \vec{f}_{k+1} - \vec{f}_k \right\| \tag{8}$$

o que implica que o comprimento do caminho pode ser aproximado pelo somatório a seguir:

$$L \approx \sum_{k=0}^{N-1} \left\| \vec{f}_{k+1} - \vec{f}_k \right\| \tag{9}$$

Para calcular o comprimento exato, precisamos tomar o limite em que $N \to \infty$, isto é

$$L = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \left\| \vec{f}_{k+1} - \vec{f}_k \right\| \tag{10}$$

o que equivale a fazer $h \to 0$. Portanto, através da definição de diferencial em (2), temos

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \left\| d\vec{f} \right\| = \int_a^b \left\| [\vec{f}(t)]' \right\| dt \tag{11}$$

portanto, dado $\vec{f}(t)$ podemos encontrar o comprimento do caminho descrito quando t percorre um dado intervalo $[a, b]$ através da integral acima.

- Exemplo: comprimento do círculo

  Consideremos a seguinte parametrização de um círculo com $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$\theta \longrightarrow R\cos\theta\hat{e}_x + R\sin\theta\hat{e}_y \tag{12}$$

  Vamos calcular $[\vec{f}(\theta)]'$ a seguir

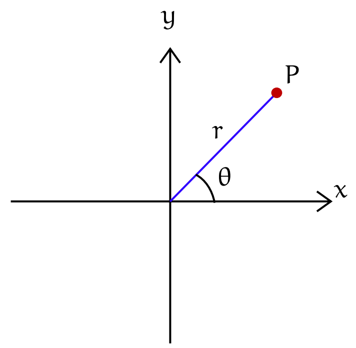
$$[\vec{f}(\theta)]' = -R\sin\theta\hat{e}_x + R\cos\theta\hat{e}_y \implies \left\| [\vec{f}(\theta)]' \right\| = R \tag{13}$$

  Portanto, o comprimento do círculo será determinado pela eq. (11):

$$\int_0^{2\pi} R\, d\theta = 2\pi R \tag{14}$$

1.1.4 Coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$

Desejamos obter uma forma de relacionar o sistema de coordenadas cartesianas com o de coordenadas polares; confira o esquema a seguir:



Utilizando trigonometria, observe que podemos dizer que

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{15}$$

portanto qualquer ponto do plano pode ser dado por $\vec{r}(\theta)$ através de

$$\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \tag{16}$$

uma vez escolhidos r e θ apropriadamente. Dadas as coordenadas (x, y) de um ponto no plano, podemos representar o mesmo ponto através de coordenadas polares verificando através das relações encontradas que

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \tag{17}$$

Além disso, precisamos encontrar quem são os versores para o sistema de coordenadas polares. Para tanto, primeiro traçaremos um análogo com o que acontece no sistema de coordenadas cartesiano, e a partir daí obteremos uma prescrição para obter versores em todos os outros sistemas de coordenadas.

Em primeiro lugar, lembremos que no sistema de coordenadas cartesianas vale

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y \tag{18}$$

de forma que podemos obter os versores através de

$$\hat{e}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}, \quad \hat{e}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \tag{19}$$

e reconhecemos que estes já estão *normalizados*, então não há mais nada para fazer. Note que tudo que precisou ser feito foi calcular a derivada parcial de $\vec{r}$ com respeito a variável associada ao versor desejado. A justificativa para isso dar certo tem a ver com a interpretação geométrica da derivada (obtenção do vetor tangente). Portanto, de forma análoga, reconhecemos que em coordenadas polares vale

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \tag{20}$$

o que implica que

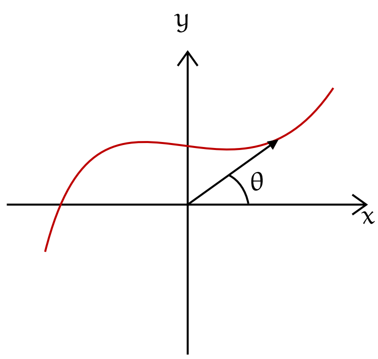
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos\theta\hat{e}_x + \sin\theta\hat{e}_y \equiv \hat{e}_r \tag{21}$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -r\sin\theta\hat{e}_x + r\cos\theta\hat{e}_y \implies \hat{e}_\theta \equiv -\sin\theta\hat{e}_x + \cos\theta\hat{e}_y = \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \tag{22}$$

Neste último passo, dividimos por r para poder normalizar e encontrar o versor.

1.1.5 Caminhos em $\mathbb{R}^2$ em coordenadas polares

Considere o caminho esquematizado a seguir:



Aprendemos que a equivalência entre as coordenadas cartesianas e as polares é de tal forma que podemos dizer que

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r(t)\cos(\theta(t)) \\ r(t)\sin(\theta(t)) \end{pmatrix} = r(t)\cos(\theta(t))\hat{e}_x + r(t)\sin(\theta(t))\hat{e}_y = r(t)\hat{e}_r \tag{23}$$

Então a trajetória da partícula sempre será ditada em coordenadas polares via $\vec{r}(t) = r(t)\hat{e}_r$. Agora precisamos encontrar as outras grandezas relevantes, como velocidade e aceleração.

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\hat{e}}_r \tag{24}$$

mas lembramos que $\hat{e}_r = \cos\theta\hat{e}_x + \sin\theta\hat{e}_y$, então

$$\dot{\hat{e}}_r = (-\sin\theta\hat{e}_x + \cos\theta\hat{e}_y)\dot{\theta} = \dot{\theta}\hat{e}_\theta \tag{25}$$

portanto, $\vec{v}(t)$ simplifica para

$$\vec{v}(t) = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \tag{26}$$

Derivando mais uma vez em relação ao tempo para encontrar a aceleração, temos

$$\dot{\vec{v}}(t) = \vec{a}(t) = \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{e}_\theta \tag{27}$$

Portanto sabemos estudar a cinemática de uma partícula que percorre um caminho no $\mathbb{R}^2$ utilizando coordenadas polares, através das relações desenvolvidas acima.

1.1.6 Generalização ao $\mathbb{R}^3$

As ideias são extremamente análogas ao que foi feito em $\mathbb{R}^2$, embora seja necessário tomar um pouco mais de cuidado com os cálculos porque agora possuímos uma dimensão extra. Escrevemos as parametrizações da seguinte forma:

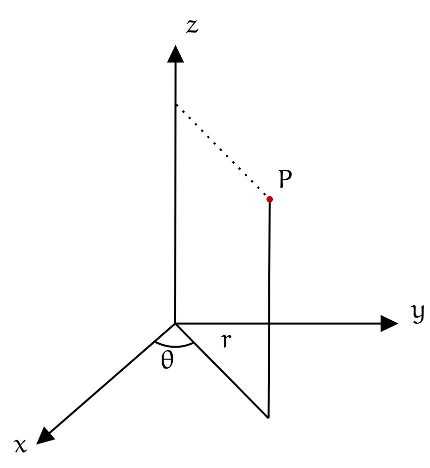
$$t \longrightarrow \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^3 \tag{28}$$

Exemplo da espiral: $t \longrightarrow R\cos\theta\hat{e}_x + R\sin\theta\hat{e}_y + z(t)\hat{e}_z$.

No que se refere a sistemas de coordenadas, estudaremos a seguir as coordenadas cilíndricas e as coordenadas esféricas.

- Coordenadas Cilíndricas

  Nos basearemos na geometria do seguinte esquema:



De modo que podemos afirmar:

$$x = r\cos(\theta(t)), \quad y = r\sin(\theta(t)), \quad z = z(t) \tag{29}$$

Como de costume, podemos ainda definir

$$\hat{e}_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \tag{30}$$

$$\hat{e}_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) = \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \tag{31}$$

$$\hat{e}_z = (0, 0, 1) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \tag{32}$$

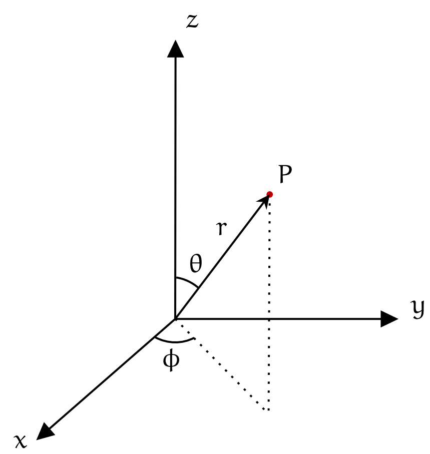
Portanto, conseguimos expressar a trajetória da partícula através de

$$\vec{r}(t) = (r(t)\cos(\theta(t)), r(t)\sin(\theta(t)), z(t)) \tag{33}$$

e reconhecemos que sua velocidade e aceleração podem sempre ser encontradas através da derivação em relação ao tempo de $\vec{r}(t)$.

- Coordenadas Esféricas

Dessa vez o esquema geométrico será este:



Cujas implicações geométricas são:

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta \tag{34}$$

O que nos permite calcular os versores:

$$\hat{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta) \tag{35}$$

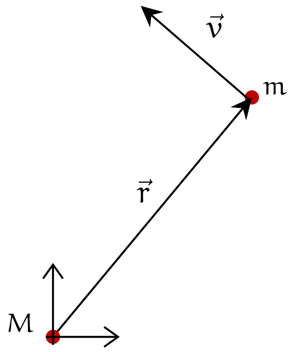
$$\hat{e}_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (\cos\theta\cos\phi, \cos\theta\sin\phi, -\sin\theta) \tag{36}$$

$$\hat{e}_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (-\sin\phi, \cos\phi, 0) \tag{37}$$

mais uma vez, por derivação de $\vec{r}(t)$ encontramos velocidade e aceleração, e pode-se deixar em função dos versores em coordenadas esféricas, analogamente ao que foi feito quando estava sendo analisado o sistema de coordenadas polares ($\mathbb{R}^2$).

Exemplo: [Corpo massivo num campo gravitacional] Considere um sistema binário composto por um corpo de massa m e um corpo de massa $M \gg m$ (de forma que podemos assumir M um ponto fixo). Utilize o sistema de coordenadas mais apropriado para essa situação, mostre que o momento angular do sistema se conserva e esboce o diagrama de fase para o corpo m.

Solução: Observe a ilustração do sistema abaixo:



Por definição, o momento angular é dado por $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\dot{\vec{r}})$, o que implica que a sua derivada é calculada por

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times (m\dot{\vec{r}}) + \vec{r} \times (m\ddot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \left(-\frac{GMm\vec{r}}{r^3}\right) = 0 \tag{38}$$

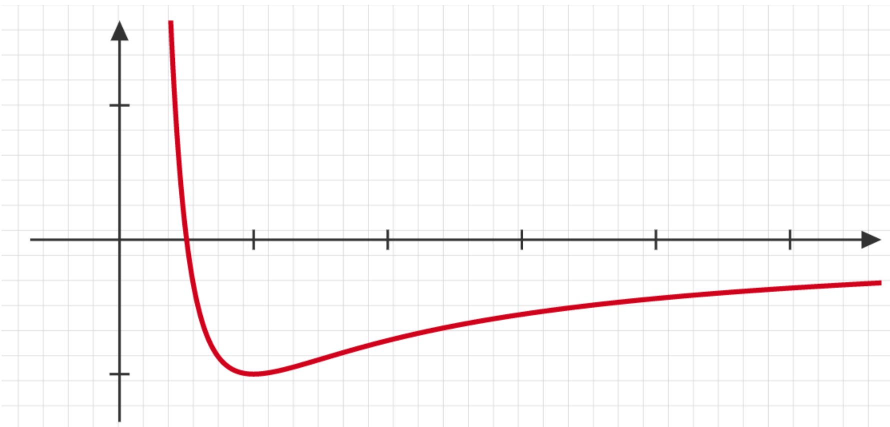
Portanto o momento angular é conservado. A priori poderíamos estar tentados a descrever o movimento conseguinte do corpo através de coordenadas esféricas, mas como o momento angular é conservado o movimento do corpo acontecerá num plano, e será mais simples descrevê-lo através de coordenadas polares. Dessa forma, o momento angular é

$$\vec{L} = m(r\hat{e}_r) \times (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\hat{e}_z \implies \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \tag{39}$$

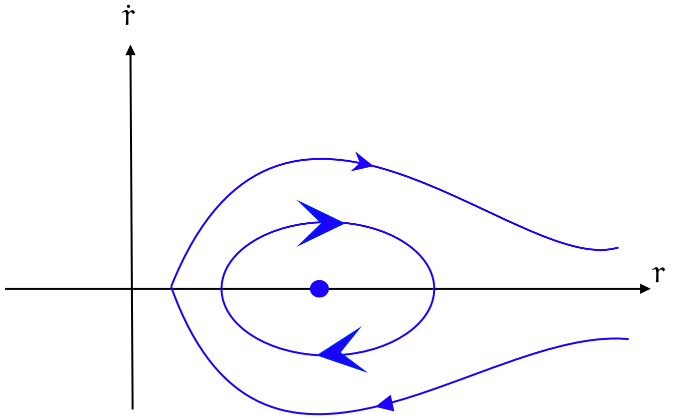
Com essa informação, calculamos agora a energia mecânica do sistema:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\left[\frac{L^2}{2m^2r^2} - \frac{GMm}{r}\right]}_{U_{eff}} \tag{40}$$

Para encontrar o diagrama de fase, é conveniente analisar o o gráfico de $(U_{eff} \times r)$, que será plotado a seguir:



e por conseguinte o seu diagrama de fase é esboçado adiante através do gráfico da energia potencial:



2 Resolução da P1 de 2018

Questão 1. A dinâmica de um sistema quântico é descrita na Mecânica Quântica usando a equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{d\,|\psi\rangle}{dt} = H\,|\psi\rangle$$

onde $|\psi\rangle$ é um vetor que descreve o estado do sistema e H é a matriz que representa a energia do sistema, dada por

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & \alpha \\ \alpha & E_0 \end{pmatrix}$$

com E_0 e α dois números reais.

a) A matriz H é hermitiana? É unitária? Justifique.

b) Calcule os autovalores de H;

c) Calcule os autovetores de H;

d) Se for possível, escreva a decomposição espectral da matriz H;

e) Calcule explicitamente a solução da equação diferencial de Schrödinger para um vetor inicial arbitrário $|\psi(0)\rangle = |\psi_0\rangle$;

f) Considere agora o estado $|\psi_0\rangle = (0, 1)^T$. Calcule depois de quanto tempo é verdade que

$$|\langle\psi_1|\psi(t)\rangle|^2 = 1$$

Solução.

a) Observe que

$$H^\dagger = \begin{pmatrix} E_0 & \alpha \\ \alpha & E_0 \end{pmatrix} = H \tag{41}$$

onde foi tirado o conjugado complexo (das constantes que são reais) e a transposta de H. Portanto, é verdade que H é hermitiana. Por outro lado, calculando $HH^\dagger\}$, temos

$$HH^\dagger = \begin{pmatrix} E_0 & \alpha \\ \alpha & E_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 & \alpha \\ \alpha & E_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0^2 + \alpha^2 & 2E_0\alpha \\ 2E_0\alpha & E_0^2 + \alpha^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{42}$$

Portanto, H não é unitária.

b) Para encontrar os autovalores, resolvemos a equação secular:

$$\det(H - \lambda \mathbb{1}) = 0 \implies (E_0 - \lambda)^2 - \alpha^2 = 0 \therefore \Lambda = \{E_0 - \alpha, E_0 + \alpha\} \tag{43}$$

onde Λ é o conjunto dos autovalores de H.

c) Para encontrar os autovetores, substituímos os autovalores encontrados em b) na seguinte equação:

$$H |\nu\rangle = \lambda |\nu\rangle \tag{44}$$

Utilizando a notação onde o autovetor associado ao autovalor k é $|k\rangle$, temos:

$$H |E_0 - \alpha\rangle = (E_0 - \alpha) |E_0 - \alpha\rangle \implies |E_0 - \alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{45}$$

$$H |E_0 + \alpha\rangle = (E_0 + \alpha) |E_0 + \alpha\rangle \implies |E_0 + \alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{46}$$

d) Como H é hermitiana então ela admite decomposição espectral, e esta, por sua vez, é dada a seguir:

$$(E_0 - \alpha) |E_0 - \alpha\rangle \langle E_0 - \alpha| + (E_0 + \alpha) |E_0 + \alpha\rangle \langle E_0 + \alpha| = \begin{pmatrix} E_0 & \alpha \\ \alpha & E_0 \end{pmatrix} = H \tag{47}$$

e) Considerando que a equação de Schrödinger é dada por

$$i\hbar \frac{d |\psi\rangle}{dt} = H |\psi\rangle \tag{48}$$

é possível reescrevê-la como

$$\frac{d |\psi\rangle}{dt} + \frac{iH}{\hbar} |\psi\rangle = 0 \tag{49}$$

Que é uma EDO homogênea de 1° ordem em $|\psi\rangle$. Portanto, sua solução geral é dada por

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{-iHt}{\hbar}} |\xi\rangle = e^{\frac{-iHt}{\hbar}} |\psi_0\rangle \tag{50}$$

Agora, calcularemos a exponencial de matriz

$$e^{\frac{-iHt}{\hbar}} = Ue^J U^{-1} \tag{51}$$

onde podemos definir U como sendo a matriz dos autokets de H, isto é

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \implies U^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{52}$$

e reconhecemos também que e^J é a exponencial da matriz $\frac{-iHt}{\hbar}$ na forma de Jordan. Para encontrar e^J, podemos lembrar que se a matriz H possui forma diagonal

$$H = \begin{pmatrix} E_0 - \alpha & 0 \\ 0 & E_0 + \alpha \end{pmatrix} \tag{53}$$

então vale que e^J é dado por

$$e^J = \begin{pmatrix} e^{\frac{-i(E_0-\alpha)t}{\hbar}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i(E_0+\alpha)t}{\hbar}} \end{pmatrix} \tag{54}$$

Dessa forma, temos

$$e^{\frac{-iHt}{\hbar}} = Ue^J U^{-1} = e^{\frac{-iE_0 t}{\hbar}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) & -i\sin\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) & \cos\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) \end{pmatrix} \tag{55}$$

Finalmente, concluímos que

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{-iE_0 t}{\hbar}} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) & -i\sin\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) & \cos\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) \end{pmatrix} |\psi_0\rangle \tag{56}$$

f) Sabendo que $|\psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ podemos calcular:

$$|\langle\psi_0|\psi(t)\rangle|^2 = \langle\psi_0|\psi(t)\rangle \langle\psi(t)|\psi_0\rangle \tag{57}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) & -i\sin\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) & \cos\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) & i\sin\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) \\ i\sin\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) & \cos\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{58}$$

Cujo produto resulta em

$$\cos^2\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) = 1 \tag{59}$$

E então segue que

$$\therefore \boxed{t = \frac{\hbar}{\alpha}(k\pi),\ k \in \mathbb{Z}} \tag{60}$$

Questão 3. (P1 - 2018) Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{61}$$

a) Calcule a forma diagonal da matriz ou, se não for possível, a forma de Jordan;

b) Calcule e^A.

Solução.

a) Em primeiro lugar, calculamos os autovalores de A através da equação secular:

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda) + 1 = 0 \implies \Lambda = \{1\} \tag{62}$$

Para encontrar os autovetores, escrevemos:

$$A\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle = |\psi\rangle \tag{63}$$

Onde pode-se definir

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \tag{64}$$

O que resulta em $|\psi\rangle$ da forma

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{65}$$

Como o autovalor $\lambda = 1$ só rendeu um autovetor, para gerarmos uma base do espaço precisamos de um autovetor generalizado, que chamarei de $|\xi\rangle$. Para encontrá-lo, escrevemos:

$$A\,|\xi\rangle = |\xi\rangle + |\psi\rangle\,,\ |\xi\rangle = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \tag{66}$$

O que resulta em

$$|\xi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{67}$$

Com isso podemos construir as matrizes dos autokets de A para passar para a forma de Jordan:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{68}$$

E assim, sabendo que, por definição,

$$A = UJU^{-1} \tag{69}$$

onde J é a forma de Jordan, temos

$$J = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N} \tag{70}$$

b) Note que N é nilpotente (já que $N^2 = 0$). Como $[\mathbb{1}, N] = 0$ pois a identidade comuta com qualquer matriz, então

$$e^J = e^{\mathbb{1}+N} = e^{\mathbb{1}} \cdot e^N \tag{71}$$

E, por definição,

$$e^N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} \tag{72}$$

Mas como para $n \geq 2$ temos $N = \hat{0}$, então

$$e^N = \mathbb{1} + N \tag{73}$$

e, portanto,

$$e^J = e^{\mathbb{1}} (\mathbb{1} + N) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix} \tag{74}$$

Além disso, lembremos que

$$e^A = U e^J U^{-1} \tag{75}$$

então, concluímos que

$$\therefore \boxed{e^A = e \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = eA} \tag{76}$$

3 Resolução da Lista 1 de 2021

Questão 20. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix} \tag{77}$$

que aparece na resolução das equações de movimento do oscilador harmônico amortecido. No caso $\gamma = 2\omega_0$ calcule

a) os autovalores;

b) os autovetores;

c) e^A

Solução.

a) No caso $\gamma = 2\omega_0$, a matriz A simplifica para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\omega_0 \end{pmatrix} \tag{78}$$

Para encontrar seus autovalores, resolvemos a equação secular:

$$\det(A - \lambda\mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\omega_0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(2\omega_0 + \lambda) + \omega_0^2 = 0 \tag{79}$$

$$\therefore \lambda = -\omega_0 \tag{80}$$

é a única raíz dessa equação e portanto o único autovalor de A.

b) Para encontrar os autovetores, substituímos o autovalor calculado na equação a seguir:

$$A\left|\nu\right\rangle = -\omega_0\left|\nu\right\rangle \tag{81}$$

onde definimos

$$\left|\nu\right\rangle = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \tag{82}$$

Dessa forma, resolvendo a equação,

$$\left|\nu\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega_0 \end{pmatrix} \tag{83}$$

c) Precisamos agora de um autovetor generalizado para completar a base do espaço vetorial. Seja esse autovetor $\left|k\right\rangle$, podemos escrever

$$A\left|k\right\rangle = -\omega_0\left|k\right\rangle + \left|\nu\right\rangle \tag{84}$$

Onde podemos definir

$$\left|k\right\rangle = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \tag{85}$$

E então, resolvendo a equação,

$$\left|k\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{86}$$

Agora podemos construir a matriz U que nos levará a calcular a forma de Jordan de A (e posteriormente e^A). Por definição, U é a matriz dos autokets (e os generalizados) de A, isto é

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega_0 & 1 \end{pmatrix} \implies U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega_0 & 1 \end{pmatrix} \tag{87}$$

Por definição, a forma de Jordan de A é dada por

$$J = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} -\omega_0 & 1 \\ 0 & -\omega_0 \end{pmatrix} = -\omega_0 \mathbb{1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{N} \tag{88}$$

Note que N é nilpotente (pois $N^2 = \hat{0}$). Dessa forma, para obter e^A lembremos que

$$e^A = Ue^J U^{-1} \tag{89}$$

e observe que

$$e^J = e^{-\omega_0 \mathbb{1} + N} \tag{90}$$

mas como $[-\omega_0 \mathbb{1}, N] = 0$ então vale

$$e^J = e^{-\omega_0 \mathbb{1}} \cdot e^N \tag{91}$$

Como N é nilpotente, o resultado simplifica para

$$e^J = \begin{pmatrix} e^{-\omega_0} & 0 \\ 0 & e^{-\omega_0} \end{pmatrix} \cdot (\mathbb{1} + N) = e^{-\omega_0} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{92}$$

Com isso, obtemos e^A pela definição,

$$\boxed{e^A = Ue^J U^{-1} = e^{-\omega_0} \begin{pmatrix} \omega_0 + 1 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0 + 1 \end{pmatrix}} \tag{93}$$

4 Resolução da Lista 2 de 2021

Questão 1. Usando as técnicas desenvolvidas nas aulas, resolva a equação do movimento do oscilador harmônico simples.

Solução. A equação do oscilador harmônico simples 1D em seu estado natural (sem amortecimento nem forças externas) é:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{94}$$

Que é uma EDO homogênea de 2° ordem. Portanto, para achar a sua solução geral, podemos primeiro procurar por $x = e^{\lambda t}$, resultando em

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \implies \lambda = \pm i\omega_0 \tag{95}$$

Então, a solução geral é dada por

$$x(t) a e^{i\omega_0 t} + b e^{-i\omega_0 t} \tag{96}$$

O que, utilizando a fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, rende

$$(a + b)\cos\omega_0 t + i(a - b)\sin\omega_0 t \tag{97}$$

Definindo $A = (a + b)$ e $B = i(a - b)$, temos

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \tag{98}$$

Questão 2. A equação diferencial para a carga no capacitor de um circuito RLC em corrente alternada é

$$\ddot{Q}(t) + \gamma\dot{Q}(t) + \omega_0^2 Q(t) = \epsilon\cos\omega t \tag{99}$$

Calcule a solução em função das condições iniciais $Q(0) = Q_0$, $\dot{Q}(0) = I_0$.

Solução. Para encontrar a solução dessa EDO de 2° ordem, utilizaremos a propriedade de que a solução geral dessa EDO é dada pela soma da solução da EDO homogênea associada e de uma solução particular dessa EDO. Para calcular a solução da homogênea associada, escrevemos:

$$\ddot{Q}(t) + \gamma\dot{Q}(t) + \omega_0^2 Q(t) = 0 \tag{100}$$

E procuramos por soluções do tipo $Q(t) = e^{\lambda t}$:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \gamma\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \implies \lambda^2 + \gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \tag{101}$$

Que é uma equação do segundo grau em λ, sendo resolvida pela fórmula de Bhaskara:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \frac{-\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \tag{102}$$

Portanto a solução da homogênea associada é dada por

$$Q_H(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left[a e^{\omega t} + b e^{-\omega t}\right],\ \omega \equiv \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \tag{103}$$

Agora, a fim de encontrar a solução particular da EDO, complexificamos a mesma para obter

$$\ddot{\hat{Q}}(t) + \gamma\dot{\hat{Q}}(t) + \omega_0^2\hat{Q}(t) = \epsilon e^{i\omega t} \tag{104}$$

onde $\hat{Q}(t)$ é a função complexa associada a $Q(t)$. Procuramos por soluções complexas do tipo $\hat{Q}(t) = \rho e^{i\omega t}$:

$$-\rho\omega^2 e^{i\omega t} + i\gamma\omega\rho e^{i\omega t} + \omega_0^2\rho e^{i\omega t} = \epsilon e^{i\omega t} \tag{105}$$

$$\implies \rho = \frac{\epsilon}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \tag{106}$$

Portanto, $\hat{Q}(t) = \dfrac{\epsilon e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$ e segue que $Q(t) = \mathrm{Re}\{\hat{Q}(t)\}$:

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\epsilon e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\frac{\epsilon\left(\cos\omega t + i\sin\omega t\right)\left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega\right)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}\right\} \tag{107}$$

$$\therefore Q_P(t) = \frac{\epsilon((\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + \gamma\omega\sin\omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \tag{108}$$

Dessa forma, a solução total é dada pela soma da solução da homogênea associada com a solução particular:

$$Q(t) = Q_H(t) + Q_P(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left[a e^{\omega t} + b e^{-\omega t}\right] + \frac{\epsilon((\omega_0^2 - \omega^2)\cos\omega t + \gamma\omega\sin\omega t)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \tag{109}$$

Precisamos agora aplicar as condições de contorno: $Q(0) = Q_0$ e $\dot{Q}(0) = I_0$, então

$$Q_0 = [a+b] + \frac{\epsilon(\omega_0^2-\omega^2)^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2} \tag{110}$$

$$I_0 = -\frac{\gamma\omega}{2}[a-b] + \frac{\epsilon\gamma\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2} \tag{111}$$

Escrito de outra forma,

$$\frac{-2I_0}{\gamma\omega} = [a-b] - \frac{2\epsilon\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2} \tag{112}$$

Somando as eqs. (110) e (112), temos:

$$2a + \frac{\epsilon\left((\omega_0^2-\omega^2)^2 - 2\omega\right)}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2} = Q_0 - \frac{2I_0}{\gamma\omega} \tag{113}$$

Isolando o termo a, ficamos com:

$$\therefore \boxed{a = \frac{Q_0}{2} - \frac{I_0}{\gamma\omega} - \frac{\epsilon\left((\omega_0^2-\omega^2)^2 - 2\omega\right)}{2(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}} \tag{114}$$

Substituindo essa informação na eq. (110) para obter o coeficiente b, encontramos:

$$Q_0 = b + \frac{Q_0}{2} - \frac{I_0}{\gamma\omega} - \frac{\epsilon\left((\omega_0^2-\omega^2)^2 - 2\omega\right)}{2(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2} + \frac{\epsilon(\omega_0^2-\omega^2)^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2} \tag{115}$$

$$\therefore b = \frac{Q_0}{2} + \frac{I_0}{\gamma\omega} + \frac{\epsilon}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}\left[\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2 - 2\omega}{2} - (\omega_0^2-\omega^2)^2\right] \tag{116}$$

$$\therefore \boxed{b = \frac{Q_0}{2} + \frac{I_0}{\gamma\omega} - \frac{\epsilon((\omega_0^2-\omega^2)^2 + 2\omega)}{2(\omega_0^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2}} \tag{117}$$

Substituindo a e b na eq. (38), temos a solução completa da EDO em (29).

Questão 3. A força de Lorentz pode ser escrita em forma vetorial como

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v}\times\mathbf{B} \tag{118}$$

onde q é a carga elétrica da partícula, $\mathbf{E}$ o campo elétrico e $\mathbf{B}$ o campo magnético, ambos constantes.

a) Escreva a força de Lorentz em componentes usando a forma com índices e com coordenadas (x, y, z) explicitamente;

b) Resolva a equação do movimento para condições iniciais genéricas;

c) Qual a solução que satisfaz $\mathbf{x}(0) = 0$ e $\mathbf{v}(0) = v_0\hat{e}_x$?

Solução. Em primeiro lugar, reconhecemos que é possível realizar uma mudança no nosso sistema de coordenadas de forma que o vetor do campo magnético coincida com o eixo z, anulando as componentes nas outras direções, enquanto ainda podemos manter **E**, **F** e **v** arbitrários. Dessa forma, prosseguimos com os itens:

a) Vamos dar as denominações para cada um dos vetores relevantes para o problema:

$$|F\rangle = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}, \quad |E\rangle = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad |v\rangle = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad |B\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} \tag{119}$$

O que nos permite escrever a equação para a força de Lorentz em componentes:

$$F_x = qE_x + qv_yB_z, \;\; F_y = qE_y - qv_xB_z, \;\; F_z = qE_z \tag{120}$$

b) Podemos escrever esse sistema de equações lineares em forma matricial:

$$m\,|\ddot{r}\rangle + q\hat{B}\,|\dot{r}\rangle = q\,|E\rangle \tag{121}$$

onde reconhecemos que $|F\rangle = m\,|\ddot{r}\rangle$ vem da segunda lei de Newton, e a matriz $\hat{B}$ é dada por

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & -B_z & 0 \\ B_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{122}$$

Portanto, podemos reescrever a EDO reconhecendo que $|\ddot{r}\rangle = |\dot{v}\rangle$:

$$|\dot{v}\rangle + \frac{q\hat{B}}{m}\,|v\rangle = \frac{q}{m}\,|E\rangle \tag{123}$$

Que é uma EDO de 1° ordem em $|v\rangle$. Sua solução completa é dada pela soma da solução geral da homogenea associada com uma solução particular da não-homogênea, isto é:

$$|v(t)\rangle = |v_H(t)\rangle + |v_P\rangle \tag{124}$$

A fim de encontrar $|v_H(t)\rangle$, escrevemos

$$|\dot{v}_H\rangle + \frac{q\hat{B}}{m}\,|v_H\rangle = 0, \;\; \alpha \equiv \frac{q\hat{B}}{m} \tag{125}$$

O que por separação de variáveis nos rende a solução

$$v_H(t) = e^{-\alpha t}\,|\xi\rangle \tag{126}$$

onde $|\xi\rangle$ é um vetor arbitrário a ser fixado pelas condições inicias a posteriori. Observe que $e^{-\alpha t}$ é uma exponencial de matriz porque o coeficiente α contém uma matriz. Para determinar esse termo, precisamos empregar a relação

$$e^A = Ue^JU^{-1} \tag{127}$$

Onde e^A é a exponencial de alguma matriz A, U é a matriz dos seus autovalores e e^J é a exponencial da matriz A na forma de Jordan. Essa relação é derivada a partir da definição de exponencial de matriz a partir da expansão da mesma utilizando a série de Taylor e das propriedades da forma de Jordan.

Olhando para o termo $\frac{q}{m}\hat{B}$, percebe-se que podemos fatorar o $\frac{q}{m}$ por enquanto e focar em resolver a equação dos autovalores para $\hat{B}$, isto é, encontrar os números λ que satisfazem

$$\hat{B}\left|\psi\right\rangle = \lambda\left|\psi\right\rangle \tag{128}$$

Para tanto, podemos reescrever a eq. (128) e concluir que o $\det\left(\hat{B} - \lambda\mathbb{1}\right) = 0$ para existirem soluções com vetores $\left|\psi\right\rangle$ não-nulos. Dessa forma,

$$\det\left(\hat{B} - \lambda\mathbb{1}\right) = 0 \implies \Lambda = \{0, iB_z, -iB_z\} \tag{129}$$

onde Λ é o conjunto dos autovalores de $\hat{B}$. Substituindo esses autovalores na eq. (128) encontramos os seguintes autovetores:

$$\left|0\right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left|iB_z\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left|-iB_z\right\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \tag{130}$$

O que nos permite construir a matriz U:

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & i/2 & 0 \\ 1/2 & -i/2 & 0 \end{pmatrix} \tag{131}$$

Como a matriz $\hat{B}$ possui 3 autovetores linearmente independentes, então ela é diagonalizável e sua forma diagonal é

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & iB_z & 0 \\ 0 & 0 & -iB_z \end{pmatrix} \tag{132}$$

Lembrando que o que nós queremos calcular é $e^{-\frac{q\hat{B}}{m}t}$, então reconhecemos que

$$e^J = \exp\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\frac{qB_z t}{m} & 0 \\ 0 & 0 & i\frac{qB_z t}{m} \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{iqB_z t}{m}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{iqB_z t}{m}} \end{pmatrix} \tag{133}$$

onde podemos definir $\frac{qB_z t}{m} = \beta$ e a matriz simplifica para

$$e^J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \tag{134}$$

Utilizando U e U^{-1} calculadas anteriormente, podemos finalmente dizer que

$$e^{\frac{-q\hat{B}t}{m}} = Ue^{J}U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv R \tag{135}$$

Questão 4. Um projétil é disparado com um ângulo θ respeito à direção horizontal e com uma velocidade v_0. Considerando a força de resistência do ar,

$$\vec{F}_{res} = -\alpha\vec{v} \tag{136}$$

sendo $\vec{v}$ a velocidade, determine a trajetória de movimento do projétil.

Solução. Dividindo o movimento em dois eixos (x e y), podemos escrever as seguintes EDOs:

$$m\ddot{y} + \alpha\dot{y} = -mg \implies \ddot{y} + \gamma\dot{y} = -g, \;\; \gamma \equiv \frac{\alpha}{m} \tag{137}$$

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} = 0 \implies \ddot{x} + \gamma\dot{x} = 0 \tag{138}$$

Para resolver a eq. (48), vamos reescrever a EDO adotando $\dot{y} = k \implies \ddot{y} = \dot{k}$:

$$\dot{k} + \gamma k = -g \tag{139}$$

Cuja solução é dada pela solução da EDO homogênea associada com uma solução particular (que nesse caso é constante porque a função que está tornando a EDO inomogênea é uma constante). Dessa forma,

$$k_H(t) = \xi e^{-\gamma t} \tag{140}$$

$$k_P = -\frac{g}{\gamma} \tag{141}$$

$$\therefore k(t) = \xi e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \tag{142}$$

Mas note que $k(t) = \dot{y}(t)$ e como condição inicial temos que $\dot{y}(0) = v_0 \sin\theta$, então

$$\xi = v_0 \sin\theta + \frac{g}{\gamma} \tag{143}$$

O que implica em

$$k(t) = \dot{y}(t) = \left[v_0 \sin\theta + \frac{g}{\gamma}\right] e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \tag{144}$$

Integrando uma vez para encontrar $y(t)$, temos

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{\gamma}\left[v_0 \sin\theta + \frac{g}{\gamma}\right] e^{-\gamma t} - \frac{gt}{\gamma} + y_0} \tag{145}$$

Agora que conhecemos a solução para $y(t)$, relembremos a EDO para o eixo x:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} = 0 \implies \ddot{x} + \gamma\dot{x} = 0 \tag{146}$$

Que é um EDO homogênea de 2° ordem, então, sua solução pode ser encontrada procurando por $x(t) = e^{\lambda t}$:

$$\lambda^2 + \lambda\gamma = \lambda(\lambda + \gamma) = 0 \therefore \Lambda = \{0, -\gamma\} \tag{147}$$

Portanto sua solução geral é dada por

$$x(t) = x_0 + Be^{-\gamma t} \tag{148}$$

Para aplicar a condição inicial, calculamos primeiro $\dot{x}$:

$$\dot{x}(t) = -\gamma Be^{-\gamma t} \tag{149}$$

Lembrando que $\dot{x}(0) = v_0 \cos\theta$, então

$$-\gamma B = v_0 \cos\theta \implies B = -\frac{1}{\gamma} v_0 \cos\theta \tag{150}$$

O que implica em

$$\boxed{x(t) = x_0 - \frac{e^{-\gamma t}}{\gamma} v_0 \cos\theta} \tag{151}$$

Questão 5. Considere o plano inclinado da Figura 1, com atrito estático normal. O ângulo do plano muda de acordo com $\theta(t) = \alpha t$, onde α é constante. Encontre a solução das equações de movimento.

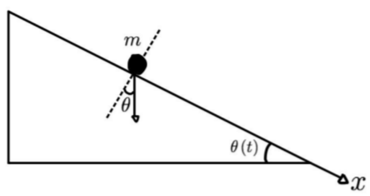


Figura 1: Plano inclinado com ângulo variável.

Solução. Tomando como a origem do sistema de coordenadas polares o extremo direito do plano inclinado, lembremos que a aceleração do corpo é dada por

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})e_\theta \tag{152}$$

Realização a decomposição vetorial das forças que atuam na massa m, podemos escrever as equações do movimento via segunda lei de Newton:

$$ma_r = mg\sin\theta - \mu N \tag{153}$$

$$ma_\theta = N - mg\cos\theta \tag{154}$$

Utilizando as expressões para a_r e a_θ em destaque na eq. (152), temos

$$m(-\ddot{r} + r\alpha^2) = mg\sin\theta - \mu N \tag{155}$$

$$2m\alpha\dot{r} + mg\cos\theta = N \implies m\ddot{r} - mr\alpha^2 = \mu(2m\alpha\dot{r} + mg\cos\theta) - mg\sin\theta \tag{156}$$

$$\therefore \ddot{r} - 2\mu\alpha\dot{r} - \alpha^2 r = g\mu\cos\theta - g\sin\theta \tag{157}$$

Que é uma EDO não-homogênea de 2° ordem na variável r. Para resolvê-la, lembremos que a solução geral dessa EDO é dada pela soma da solução geral da homogênea associada com uma solução particular da não-homogênea. Dessa forma,

$$r(t) = r_H(t) + r_P(t) \tag{158}$$

Para encontrar $r_H(t)$, escrevemos

$$\ddot{r}_H - 2\mu\alpha\dot{r}_H - \alpha^2 r_H = 0 \tag{159}$$

E procuramos por soluções do tipo $r_H = e^{\lambda t}$, de forma que

$$\lambda^2 - 2\mu\alpha\lambda - \alpha^2 = 0 \tag{160}$$

Isto é,

$$\lambda = \mu\alpha \pm \alpha\sqrt{\mu^2+1} \tag{161}$$

Portanto, a solução geral da homogênea associada é dada por

$$r_H(t) = e^{\mu\alpha t}\left[a e^{\alpha t\sqrt{\mu^2+1}} + b e^{-\alpha t\sqrt{\mu^2+1}}\right] \tag{162}$$

Para encontrar a solução particular, como há uma combinação linear de senos e cossenos no termo que torna a EDO não-homogênea, vou procurar por uma solução particular do tipo:

$$r_P = A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t) \tag{163}$$

Então calculamos as derivadas de r_P para substituir na EDO:

$$\dot{r}_P = -\alpha A\sin(\alpha t) + \alpha B\cos(\alpha t) \tag{164}$$

$$\ddot{r}_P = -\alpha^2 A\cos(\alpha t) - \alpha^2 B\sin(\alpha t) \tag{165}$$

O que na equação diferencial rende

$$-\alpha^2 A\cos(\alpha t) - \alpha^2 B\sin(\alpha t) + 2\mu\alpha^2 A\sin(\alpha t) - 2\mu\alpha^2 B\cos(\alpha t)) \tag{166}$$

$$-\alpha^2 A\cos(\alpha t) - \alpha^2 B\sin(\alpha t) = g\mu\cos(\alpha t) - g\sin(\alpha t) \tag{167}$$

$$\implies A + \mu B = -\frac{\mu g}{2\alpha^2}, \ \ B - \mu A = \frac{g}{2\alpha^2} \tag{168}$$

$$\therefore A = -\frac{\mu}{(\mu^2+1)}\cdot\frac{g}{\alpha^2}, \ \ B = \frac{(1-\mu^2)}{(1+\mu^2)}\cdot\frac{g}{2\alpha^2} \tag{169}$$

$$\implies r_P(t) = \left[-\frac{\mu}{(\mu^2+1)}\cdot\frac{g}{\alpha^2}\right]\cos(\alpha t) + \left[\frac{(1-\mu^2)}{(1+\mu^2)}\cdot\frac{g}{2\alpha^2}\right]\sin(\alpha t) \tag{170}$$

Portanto a solução completa da EDO é dada por

$$\boxed{r(t) = e^{-\mu\alpha t}\left[a e^{\alpha t\sqrt{\mu^2+1}} + b e^{-\alpha t\sqrt{\mu^2-1}}\right] - \frac{g}{\alpha^2(\mu^2+1)}\left(\mu\cos(\alpha t) + \frac{(\mu^2-1)}{2}\sin(\alpha t)\right)} \tag{171}$$

Questão 6. Uma partícula em uma dimensão está sujeita a um potencial gravitacional,

$$V(x) = -\frac{k}{x^2} \tag{172}$$

sendo k uma constante com unidades apropriadas. Determine a equação de movimento para a partícula e ache a solução. (Dica: pode ser conveniente usar a conservação da energia).

Solução. A energia mecânica total do sistema é dada por

$$E = T(\dot{x}) + V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{k}{x^2} \tag{173}$$

O que nos permite escrever a equação em função de $\dot{x}^2$, isto é

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}}\left[E + \frac{k}{x^2}\right]^{1/2} \iff \int \frac{dx}{\left(E + \frac{k}{x^2}\right)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\int dt \tag{174}$$

A integral da direita é trivial, enquanto que a integral da esquerda vale a pena ser tratada em detalhes, acompanhe:

$$\int \frac{x\,dx}{(Ex^2 + k)^{1/2}}, \quad u = Ex^2 + k \iff \frac{du}{2E} = x\,dx \tag{175}$$

$$\implies \frac{1}{2E}\int u^{-1/2}\,du = \frac{1}{E}\sqrt{Ex^2 + k} + C \tag{176}$$

Continuando o desenvolvimento,

$$\frac{1}{E}\sqrt{Ex^2 + k} + C = \sqrt{\frac{2}{m}}t \tag{177}$$

O que sucede é uma manipulação da equação para isolar a variável x. Dessa forma,

$$\sqrt{Ex^2 + k} = \sqrt{\frac{2}{m}}Et - EC \implies Ex^2 + k = \frac{2E^2t^2}{m} - 2E^2Ct\sqrt{\frac{2}{m}} + E^2C^2 \tag{178}$$

$$\boxed{x(t) = \sqrt{\frac{2Et^2}{m} - 2ECt\sqrt{\frac{2}{m}} + EC^2 - \frac{k}{E}}} \tag{179}$$

Onde as duas constantes para serem ajustadas pelas condições iniciais são E e C.

Questão 7. Resolva a equação de Airy

$$y''(z) - zy(z) = 0 \tag{180}$$

a qual aparece na resolução do problema de autovalores de uma partícula num potencial linear na Mecânica Quântica. Para quais valores de z ela converge?