IFUSP
Instituto de Física da USP

Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Física I - 4302111

Profa. Dra. Valentina Martelli

Lista de Problemas II

Victor Hugo dos Santos Lins

Email: victorlins@usp.br

20 de Maio de 2021

Questão 1

Uma criança está brincando com um drone que possui um sistema que registra sua posição, em metros, relativa ao ponto em que foi ligado a cada 0.5 s. Com base nisso, responda às seguintes questões:

(a) Quantos pontos, no mínimo, da posição do drone são necessários para estimar sua velocidade média? E sua aceleração média?

(b) A posição registrada pelo drone em 3 pontos consecutivos foram $\vec{r}_0 = (3, 5, 2)$, $\vec{r}_1 = (5, 6, 4)$ e $\vec{r}_2 = (6, 8, 6)$. Determine a velocidade média do drone em cada um desses intervalos e também no intervalo total.

(c) Na realidade o movimento realizada pelo drone nesse intervalo foi um movimento acelerado. Determine a aceleração média dele nesse intervalo (vetorial e em módulo).

(d) Se ao invés da posição em cada instante, o drone registrasse o módulo da sua velocidade média em cada intervalo, qual seria a aceleração média obtida a partir dos módulos da velocidade média em cada intervalo desses citados no item b?

Solução:

(a) Sabe-se que o sistema registra a posição do drone relativa ao ponto em que foi *ligado* a cada 0.5 s. Com base nisso, já que o drone foi *ligado*, pode-se assumir que sua velocidade inicial era nula, isto é, $\vec{v}_0 = (0, 0, 0)$.

Pela definição de velocidade média, $v_m = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s_f - s_0}{t - \cancelto{0}{t_0}} = \dfrac{s_f - s_0}{t}$, onde consideramos o tempo inicial $t_0 = 0\ s$.

Percebe-se pela definição de velocidade média que precisa-se de **dois pontos** (um *inicial* e um *final*) para poder calcular a mesma. Por exemplo, poderia-se usar a posição inicial do drone e uma outra posição registrada 0.5 s após o início do movimento.

Já a aceleração média, por definição é $a_m = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$, o que significa que precisamos da velocidade em dois instantes de tempo distintos. Como a velocidade em $t = 0$ (relativo ao ponto inicial) é igual a $(0, 0, 0)$ então basta encontrarmos mais um ponto, porque assim podemos calcular a velocidade média relativa a esse ponto, e dessa forma a aceleração fica determinada pois temos as duas velocidades necessárias e também o intervalo de tempo.

É imprescindível notar que isso é uma aproximação possível mediante o *pequeno* intervalo de tempo $\Delta t = 0.5\ s$ em questão. Isso porque a aceleração média é definida em função das velocidades *instantâneas* entre dois pontos, e não médias. Para resolver essa questão, é necessário aproximar a velocidade instantânea como sendo a média.

Além disso, pode-se argumentar que na verdade seriam necessários três pontos para calcular a aceleração média em um contexto em que não consideramos o ponto de partida do drone. Isso realmente é coerente, porque se esse não for o caso então precisamos calcular duas velocidades médias em registros consecutivos, por exemplo, o que demandaria três posições distintas. Entretanto, como a questão pergunta "quantos pontos, *no mínimo*", admitirei que serão **dois pontos** para calcular a aceleração média, sendo um deles o ponto de partida do drone, cuja velocidade inicial é considerada nula.

(b) Seja $\vec{v}_{i,j}$ a velocidade média entre pontos i e j. Calcula-se as velocidades médias desejadas a seguir:

$$\vec{v}_{0,1} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_0}{0,5} = \frac{(5,6,4) - (3,5,2)}{0,5} = \frac{(2,1,2)}{0,5} = (4,2,4)$$

$$\vec{v}_{1,2} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{0,5} = \frac{(6,8,6) - (5,6,4)}{0,5} = \frac{(1,2,2)}{0,5} = (2,4,4)$$

$$\vec{v}_{0,2} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_0}{1} = \frac{(6,8,6) - (3,5,2)}{1} = \frac{(3,3,4)}{1} = (3,3,4)$$

Onde todas as unidades estão no S.I. Note que para o cálculo de $\vec{v}_{0,1}$ utilizou-se como intervalo de tempo 0,5 s, porque o ponto zero e o ponto um são consecutivos, e o drone registra a posição a cada 0,5 s. Já quando foi desenvolvido o cálculo para $\vec{v}_{0,2}$ utilizou-se como intervalo de tempo 1 s, uma vez que entre o ponto zero e o ponto dois foram tomadas duas medições consecutivas do drone, isto é, $0,5 + 0,5 = 1\ s$.

(c) O intervalo total de tempo entre o ponto zero e o ponto dois é de $\Delta t = 1\ s$. Além disso, é necessário assumir que $\vec{r}_0$ é o vetor posição inicial do drone no seu ponto de partida, e assim a velocidade inicial é nula, como argumentado no item anterior. Sem assumir isso, é impossível determinar a aceleração somente com as informações dadas, porque não se saberia a velocidade inicial em $\vec{r}_0$.

Assim, a aceleração média é determinada através de:

$$\Delta\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a}_m \Delta t^2$$

Que é a equação horária do espaço com velocidade inicial nula. Isolando a aceleração, tem-se:

$$\vec{a}_m = \frac{2\Delta\vec{r}}{\Delta t^2} = 2 \cdot ((6,8,6) - (3,5,2)) = (6,6,8) \implies |\vec{a}_m| = \sqrt{136}\ m/s^2$$

onde utilizou-se que a raiz quadrada da soma dos quadrados das componentes é igual ao módulo do vetor.

(d) Nesse contexto, assume-se que $\vec{v}_0 = (3,5,2)$, $\vec{v}_1 = (5,6,4)$ e $\vec{v}_2 = (6,8,6)$, o que implica que $|\vec{v}_0| = \sqrt{38}$, $|\vec{v}_1| = \sqrt{77}$ e $|\vec{v}_2| = \sqrt{136}$. Mais uma vez, o intervalo de tempo entre dois pontos consecutivos (0 e 1 ou 1 e 2) é de 0,5 s e entre 0 e 2 é de 0,5 + 0,5 = 1 s. Dito isso, calcula-se as acelerações médias em cada um dos intervalos:

$$|\vec{a}_{0,1}| = \frac{\sqrt{77} - \sqrt{38}}{0,5} \approx 5\ m/s^2$$

$$|\vec{a}_{1,2}| = \frac{\sqrt{136} - \sqrt{77}}{0,5} \approx 6\ m/s^2$$

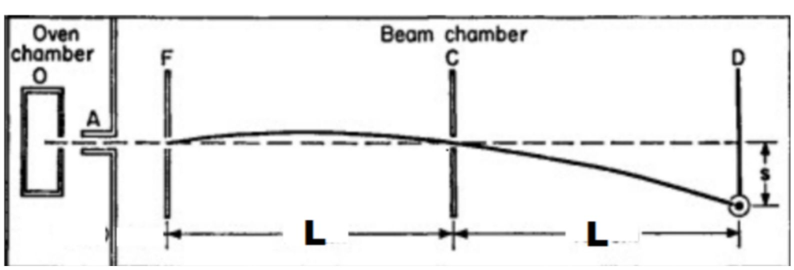
$$|\vec{a}_{0,2}| = \frac{\sqrt{136} - \sqrt{38}}{1} \approx 1 \cdot 10^1\ m/s^2$$

onde usou-se para $a_{i,j}$ a mesma convenção utilizada anteriormente para $v_{i,j}$, isto é, que i e j fazem referência aos pontos. As aproximações realizadas foram feitas de forma a manter apenas um algarismo significativo, pois o intervalo de tempo no denominador só possui um significativo.

Questão 2

O experimento descrito neste problema foi realizado por Estermann, Simpson e Stern para testar a predição teórica da distribuição de velocidades de átomos a uma dada temperatura, que mostrou uma boa concordância com a distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann.

Nesse experimento, átomos são evaporados para fora de um forno dentro de um sistema em vácuo. Uma vez que os átomos são ejetados do forno em várias direções, duas fendas (F e C) são utilizadas para colimar o feixe de átomos. As fendas estão no mesmo nível horizontal e separadas a uma distância L. O feixe de átomos é detectado por um detector D que mede a intensidade do feixe e que está a uma distância L da segunda fenda.



(a) Após uma escolha bem esclarecida de referencial, determine a distância s abaixo do nível das fendas onde os átomos atingem o detector. Considere que os átomos são ejetados do forno com uma componente horizontal v_x da velocidade e que a única força atuando é a da gravidade, como indicado pelo vetor $\vec{g}$.

(b) O detector pode ser movido ao longo da direção vertical, de forma que pode-se obter a intensidade do feixe que atinge o detector em função da deflexão s. Com isso, é possível obter uma curva de distribuição de velocidades, a chamada distribuição de velocidades de Maxwell-Boltzmann. Em uma dada temperatura de 450 K, para um feixe de átomos de Césio a intensidade máxima ocorre com uma deflexão s = 0.11 mm e para um feixe de Potássio a intensidade máxima ocorre em s = 0.05 mm. Calcule a razão entre as componentes horizontais das velocidades dos átomos de Césio e de Potássio. Qual dos dois elementos possuem, com maior probabilidade, átomos ejetados com velocidades maiores?

(c) Calcule o vetor velocidade dos átomos ao atingir o detector em função da velocidade horizontal v_x, do comprimento L e da aceleração gravitacional.

Solução:

(a) Será adotado como referencial um observador cuja origem do sistema de coordenadas coincida com o orifício da fenda F. Afirma-se que os átomos são ejetados do forno com uma componente horizontal v_x, e também sabe-se que as fendas servem para colimar o feixe. Admite-se um ângulo θ de lançamento, e define-se a velocidade inicial como sendo v_0.

Ademais, pode-se *decompor* o movimento em duas componentes, uma sem aceleração e outra com a presença da aceleração da gravidade:

$$x = v_0 \cos(\theta) t \tag{1}$$

$$y = v_o \sin(\theta) - \frac{1}{2} g t^2 \tag{2}$$

Onde na eq. (1) considerou-se a posição inicial em x como zero, e na eq. (2) considerou-se a posição inicial em y como sendo zero, o que é uma consequência do referencial adotado e das condições iniciais do problema.

Isolando o tempo na eq. (1), tem-se:

$$t = \frac{x}{v_x} \tag{3}$$

Ainda, substituindo na eq. (2) a expressão para o tempo encontrada na eq. (3), encontra-se:

$$y = x \tan(\theta) - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2(\theta)} \tag{4}$$

Da figura, sabe-se que $y = 0$ quando $x = 0$ ou $x = L$. Com isso, considerando $x = L$, encontra-se o ângulo de lançamento em função das variáveis do problema. Confira:

$$\theta = \arctan\left(\frac{gL}{2v_x^2}\right) \tag{5}$$

Além disso, utiliza-se a eq. (4) para $x = 2L$, que é a distância horizontal entre a primeira fenda e o detector, e encontra-se $y = s$. Observe:

$$s = 2L\tan(\theta) - \frac{gL^2}{2v_x^2}$$

$$\therefore s = -\frac{gL^2}{v_x^2} \tag{6}$$

(b) Sabendo que s é inversamente proporcional a v_x^2, para mesmos g e L vale a proporção:

$$\frac{s_{Cs}}{s_K} = \frac{11}{5} = \frac{v_{x_K}^2}{v_{x_{Cs}}^2} \iff v_{x_K} = v_{x_{Cs}}\sqrt{\frac{11}{5}} \implies v_{x_K} > v_{x_{Cs}} \tag{7}$$

Onde Cs é o índice que faz referência ao átomo de Césio e K serve para o mesmo em relação ao Potássio. Portanto, da equação acima, verifica-se que o átomo de Potássio possui maior probabilidade de ter átomos ejetados com velocidade maior.

(c) O vetor velocidade total será a soma vetorial do vetor velocidade horizontal v_x com o vetor velocidade vertical v_y. Porém, v_x é constante para todo o tempo. Já $v_y = v_0\sin(\theta) - gt$, irá variar com o tempo por causa da aceleração da gravidade. Escrevendo a velocidade de forma vetorial, sabendo que $v_0\sin(\theta) = v_x\tan(\theta)$ e também que $t = \dfrac{x}{v_x}$, tem-se:

$$v = v_x\hat{i} + \left(v_x\tan(\theta) - \frac{gx}{v_x}\right)\hat{j} \tag{8}$$

Entretanto, deseja-se saber o vetor velocidade para quando o átomo atinge o detector, então, ainda utilizando o referencial adotado no início, e também o valor de θ calculado anteriormente, $x = 2L$ para esse contexto. Logo,

$$v = v_x\hat{i} - \left(\frac{3gL}{2v_x}\right)\hat{j} \tag{9}$$

É o vetor velocidade dos átomos ao atingirem o detector.

Questão 3

Um foguete sendo lançado desprende um de seus motores quando está entrando na troposfera terrestre, 35 km acima da superfície. Neste momento o foguete possui uma velocidade de 8 km/s formando um ângulo de 60° com relação à superfície.

(a) Considere que o foguete mantém essa mesma velocidade desde o seu lançamento, quando deixou a superfície. A que distância da base de lançamento, localizada na superfície terrestre, motor desprendido atinge o solo?

(b) Com qual velocidade o motor desprendido atinge o solo?

(c) Se continuar com uma velocidade constante, onde estará o foguete quando o motor desprendido atinge o solo?

Solução:

(a) Como não há aceleração no eixo horizontal, a velocidade horizontal inicial será constante durante todo o movimento. Portanto, para descobrir a que distância da base de lançamento cai o motor que foi desprendido, basta que seja calculado o tempo total de voo do motor e multiplique esse tempo pela velocidade horizontal do motor. Para tanto, divide-se o movimento em 2 etapas:

1. Subida
   Nesse trajeto, a velocidade do foguete é constante, segundo o enunciado. Logo, a velocidade vertical do motor será constante também durante todo esse percurso de subida, já que este está acoplado ao foguete. Reconhecendo que a velocidade vertical é o produto da velocidade total pelo seno do ângulo de inclinação da mesma em relação à horizontal, tem-se:

   $$v_{0_y} = v_0 \sin(\theta) = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\ km/s$$

   Com isso, o tempo de subida é igual a razão entre a distância percorrida verticalmente e a velocidade de subida, calculada acima. Confira:

   $$t_s = \frac{35}{4\sqrt{3}} \approx 5,0\ s$$

2. Descida
   Já durante a descida, analisando o movimento do motor isoladamente, percebe-se que ele possui velocidade vertical inicial idêntica à do foguete antes do desprendimento, isto é, $4\sqrt{3}$ km/s. Porém, como ele não pertence mais ao conjunto do foguete, será desacelerado pela gravidade, e a trajetória do mesmo será uma parábola característica de lançamento oblíquo.

Dessa forma, trata-se o movimento do motor como sendo um lançamento oblíquo de ângulo 60° com a horizontal, velocidade total inicial igual a 8 km/s, cujas componentes na vertical e horizontal valem, respectivamente, $4\sqrt{3}$ km/s e 4 km/s.

Para avaliar o momento da queda, consideramos um referencial em que a superfície terrestre está em $y = 0$, a posição vertical inicial do motor está em $y_0 = 35 \cdot 10^3$ m e a gravidade é negativa. Assim, segue que

$$y = y_0 + v_{0_y} t - \frac{1}{2} g t^2 \implies 0 = 35 \cdot 10^3 + 4\sqrt{3} \cdot 10^3 t - \frac{1}{2} 9{,}8 t^2$$

Cuja solução resulta em dois instantes de tempo — um representa o instante em que o foguete abandona o solo pela primeira vez, e o segundo representa o instante de tempo em que ele aterrissa. Com efeito, o instante que deseja-se é o segundo, isto é, $t_d \approx 1419$ s.

O tempo total de voo do motor é a soma do tempo de subida com o tempo de descida, isto é

$$T = t_s + t_d = 1424\ s$$

Dessa forma, a distância da base até o ponto em que o motor aterrissa em superfície terrestre é

$$D = v_{0_x} \cdot T = 4\ km/s\ \cdot 1424\ s \approx 6 \cdot 10^3\ km$$

(b) Como se sabe, a velocidade horizontal se mantém durante todo o percurso. Entretanto, para determinar a velocidade total do motor, precisa-se também da sua componente vertical, que pode ser calculada através de

$$v_y = v_{0_y} - g t_d = 4\sqrt{3} \cdot 10^3\ m\ - 9{,}8\ m/s^2\ \cdot 1419\ s\ \approx 7\ km/s$$

Logo, a velocidade com que o motor atinge o solo é

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{4^3 + 7^2} \approx 8\ km/s$$

(c) Mantendo a sua velocidade constante, o foguete terá se deslocado um total de $v_x \cdot T$ na horizontal e $v_{0_y} \cdot T$ na vertical, isto é

$$\Delta x = 4 \cdot 1424 \approx 6 \cdot 10^3\ km$$
$$\Delta y = 4\sqrt{3} \cdot 1424 \approx 1 \cdot 10^4\ km$$

Questão 4

Considere que você é um pirata e está encarregado de efetuar disparos com o canhão de seu navio. Então você identifica um navio inimigo se aproximando. Seu comandante ordena disparos de aviso no mastro do navio inimigo. A posição e velocidade inicial da base do mastro do navio inimigo em relação oa uma ilha próxima, chamada "Ilha dos Peixes Grandes" são dadas respectivamente pelos vetores $\vec{s}_i = (s^x_{i_0}, s^y_{i_0}, s^z_{i_0})$ e $\vec{v}_i = (v^x_{i_0}, v^y_{i_0}, 0)$. A posição e velocidade inicial da boca de canhão, que você usará para disparar, em relação à "Ilha dos Peixes Grandes" são dadas respectivamente pelos vetores $\vec{s}_c = (s^x_{c_0}, s^y_{c_0}, s^z_{c_0})$ e $\vec{v}_c = (v^x_{c_0}, v^y_{c_0}, 0)$. Considerando que a bala possui uma massa m_b e sai da boca do canhão com uma velocidade de módulo v_{b_0} (em relação à própria boca do canhão). Considere a aceleração da gravidade $\vec{g} = (0, 0, -g)$, despreze a resistência do ar e responda as questões:

(a) Determine o vetor que determina a velocidade da base do mastro do navio inimigo em relação à boca do canhão que você usará para efetuar os disparos.

(b) Determine o vetor que determina a posição da base do mastro do navio inimigo em relação à boca do canhão que você usará para efetuar os disparos (em função do tempo).

(c) Determine o vetor na direção no qual você deve apontar o canhão no momento do disparo para atingir a base do mastro inimigo. Suponha que o disparo tenha sido efetuado no instante t_d. Suponha que $s^z_{i_0} - s^z_{c_0} = s^y_{i_0} - s^y_{c_0} = 0$ e $v^y_{i_0} - v^y_{c_0} = 0$.

Solução:

(a) O vetor velocidade da base do mastro do navio inimigo em relação à boca do canhão é exatamente o vetor velocidade relativa entre os mesmos. Ou seja, é o equivalente a colocar o referencial no canhão e avaliar qual é o vetor velocidade do mastro do navio inimigo nesse referencial. Por definição, tem-se

$$\vec{v}_{ci} = \vec{v}_i - \vec{v}_c = (v^x_{i_0} - v^x_{c_0}, v^y_{i_0} - v^y_{c_0}, 0) \tag{10}$$

onde $\vec{v}_{ci}$ indica a velocidade da base do mastro do navio inimigo em relação à boca do canhão.

(b) Analogamente ao item (a), dessa vez precisa-se encontrar a posição relativa. Por definição, escreve-se

$$\vec{r}_{ci} = \vec{r}_i - \vec{r}_c \tag{11}$$

Mas, $\vec{r}_i = \vec{s}_i + \vec{v}_i t$ e $\vec{r}_c = \vec{s}_c + \vec{v}_c t$, então

$$\vec{r}_{ci} = (\vec{s}_i + \vec{v}_i t) - (\vec{s}_c + \vec{v}_c t) = (\vec{s}_i - \vec{s}_c) + (\vec{v}_i - \vec{v}_c)t \tag{12}$$

onde $\vec{v}_i - \vec{v}_c$ foi calculado na eq. (10) e $(\vec{s}_i - \vec{s}_c)$ será calculado a seguir:

$$(\vec{s}_i - \vec{s}_c) = (s^x_{i_0}, s^y_{i_0}, s^z_{i_0}) - (s^x_{c_0}, s^y_{c_0}, s^z_{c_0}) = (s^x_{i_0} - s^x_{c_0}, s^y_{i_0} - s^y_{c_0}, s^z_{i_0} - s^z_{c_0}) \tag{13}$$

Portanto, o vetor que determina a posição da base do mastro do navio inimigo em relação à boca do canhão que é utilizado para efetuar os disparos (em função do tempo) é

$$\vec{r}_{ci} = (s^x_{i_0} - s^x_{c_0}, s^y_{i_0} - s^y_{c_0}, s^z_{i_0} - s^z_{c_0}) + (v^x_{i_0} - v^x_{c_0}, v^y_{i_0} - v^y_{c_0}, 0)t \tag{14}$$

(c) Sabendo que $s^z_{i_0} - s^z_{c_0} = s^y_{i_0} - s^y_{c_0} = 0$ e que $v^y_{i_0} - v^y_{c_0} = 0$, o movimento relativo da base do mastro inimigo em relação à boca do canhão se dará apenas no eixo x, com velocidade relativa $v^x_{i_0} - v^x_{c_0}$, e a distância que os separa inicialmente é simplesmente $s^x_{i_0} - s^x_{c_0}$.

Já que existe gravidade em z, para que o lançamento do projétil do canhão efetivamente aterrisse na base do mastro inimigo será necessário fazê-lo em direção oblíqua ao eixo x, com trajetória pertencente ao plano xOz no referencial relativo à boca do canhão discutido no último parágrafo.

O objetivo é que o tempo que leva para o projétil subir e descer vai implicar em um determinado deslocamento horizontal x_b em relação à boca do canhão, e a intenção é que a base do mastro inimigo esteja localizada na mesma posição x_b no instante de tempo em que o projétil aterrissa em coordenada $z = 0$.

Dito isso, escreve-se as equações do movimento do projétil nos dois eixos

$$z = tv_{0_b} \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2 \tag{15}$$

$$x = tv_{0_b} \cos\theta \tag{16}$$

onde θ é o ângulo de inclinação da boca do canhão em relação ao eixo x, tal que o lançamento do projétil seja de tal forma a cair na base do mastro inimigo.

Nesse contexto, pode-se tomar $z = 0$ e para $t \neq 0$ encontra-se o instante de tempo em que o projétil aterrissa, isto é,

$$t = \frac{2v_{0_b} \sin\theta}{g} \tag{17}$$

Substituindo esse instante de tempo na equação para x, tem-se

$$A = \frac{v_{0_b}^2 \sin 2\theta}{g} \tag{18}$$

onde A é o alcance horizontal máximo do projétil ao aterrissar efetivamente.

Além disso, a posição da base do mastro inimigo em relação à boca do canhão é

$$r_{ci_x} = (s_{i_0}^x - s_{c0}^x) + (v_{i_0}^x - v_{c0}^x)t = \Delta x + t\Delta v$$

onde $\Delta x \equiv (s_{i_0}^x - s_{c0}^x)$ e $\Delta v \equiv (v_{i_0}^x - v_{c0}^x)$.

Em particular, deseja-se que $r_{ci_x} = A$ para $t = \dfrac{2v_{0_b} \sin\theta}{g}$, isto é

$$\frac{v_{0_b}^2 \sin 2\theta}{g} = \Delta x + \frac{2v_{0_b} \sin\theta}{g} \cdot \Delta v$$

$$\therefore v_{0_b}^2 \sin 2\theta - 2v_{0_b} \sin\theta \Delta v - g\Delta x = 0 \tag{19}$$

onde θ, o ângulo desejado, resolve esta equação, o que significa que θ está completamente determinado.

Questão 5

Considere que você esta parado em relação a superfície da terra. Calcule a velocidade linear que você possui devido a rotação da terra em torno de seu eixo (considere a terra como sendo uma esfera de raio 6.371 km). E devido a translação da terra em torno do sol (considere a orbita de translação como sendo um circulo de raio 150 milhões de km). Em cada um dos casos calcule a aceleração centrípeta. Compare com a aceleração da gravidade.

Solução: A velocidade linear de uma pessoa localizada na superfície terrestre é dada pela distância percorrida dividido pelo intervalo de tempo. Pode-se considerar, por exemplo, a passagem de um dia inteiro (24 horas) e, considerando a Terra como uma esfera, a distância percorrida terá sido $2\pi r$. Calculando, tem-se

$$v = \frac{2\pi r}{\Delta t} = \frac{2\pi(6371 \cdot 10^3)}{24 \cdot 3600} \approx 463 m/s$$

Além disso, a aceleração centrípeta pode ser dada por

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{463^2}{6371 \cdot 10^3} = 3,36 \cdot 10^{-2}\ m/s^2$$

Já em relação ao movimento da Terra em torno do Sol (que dura aproximadamente 365 dias), tem-se

$$v' = \frac{2\pi R}{\Delta t'} = \frac{2\pi(150 \cdot 10^6 \cdot 10^3)}{365 \cdot 24 \cdot 3600} \approx 3 \cdot 10^4 \ m/s$$

Enquanto que a aceleração centrípeta para esse movimento é encontrada através de

$$a'_{cp} = \frac{(v')^2}{R} = \frac{(3 \cdot 10^4)^2}{150 \cdot 10^9} = 6 \cdot 10^{-3} \ m/s^2$$

Percebe-se que a aceleração da gravidade é 3 ordens de grandeza maior do que a aceleração centrípeta para o movimento de uma pessoa durante a rotação da Terra em torno do seu próprio eixo, enquanto que é 4 ordens de grandeza maior do que a aceleração centrípeta para o movimento de uma pessoa durante a translação da Terra em torno do Sol.

Questão 6

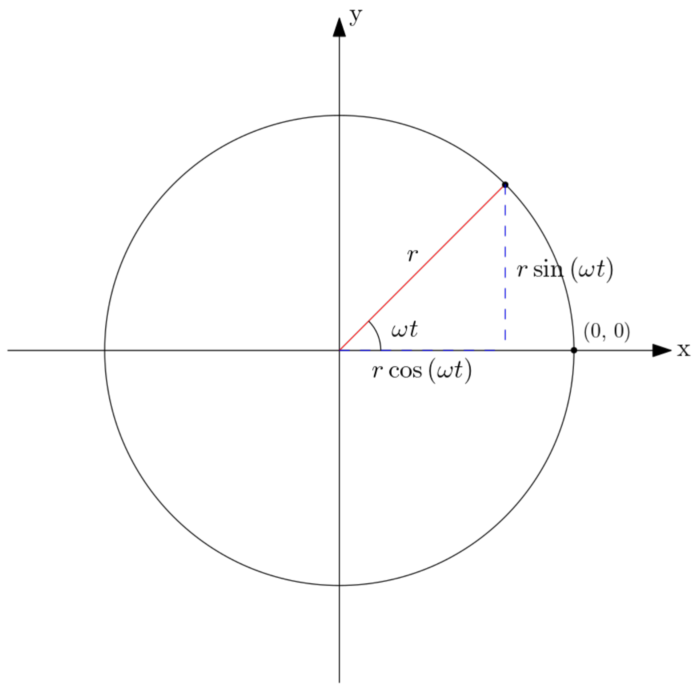
O ponteiro de um cronômetro tem 2.5 cm de comprimento e completa uma volta em 10 segundos.

(a) Qual o vetor deslocamento da ponta do ponteiro entre as marcações de 5 e 7 segundos? Defina um referencial apropriado.

(b) Qual a velocidade e aceleração da ponta do ponteiro quando ele passa pela marcação de 4 segundos? Forneça a resposta tanto em vetores quanto em módulo. Faça um esquema representando esses vetores.

Solução:

(a) O esquema abaixo foi desenhado de forma a estabelecer sem ambiguidade o referencial adotado, e o sistema de coordenadas será o cartesiano. Confira:



onde $r = 2.5\ cm$ e $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{10} = \dfrac{\pi}{5}\ s^{-1}$.
Note que com essa descrição, pode-se dizer que

$$x = r\cos(\omega t) \tag{20}$$

$$y = r\sin(\omega t) \tag{21}$$

E isso nos permite escrever o vetor posição para qualquer instante de tempo, isto é

$$\vec{r} = \left(r\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\hat{i} + \left(r\sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\hat{j} \tag{22}$$

Já que deseja-se saber o vetor deslocamento da ponta do ponteiro entre as marcações de 5 e 7 segundos, substituí-se $t = 5\ s$ e $t = 7\ s$ na equação para o vetor posição e calcula-se a diferença.

$$\vec{r}(5) = (r\cos(\pi))\,\hat{i} + (r\sin(\pi))\,\hat{j} = (-r)\hat{i}$$

$$\vec{r}(7) = \left(r\cos\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right)\hat{i} + \left(r\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right)\hat{j} = (-0,31r)\hat{i} - (0,95r)\hat{j}$$

Portanto, o vetor deslocamento é dado por (substituindo $r = 0,025\ m$):

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(7) - \vec{r}(5) \approx (2 \cdot 10^{-2})\hat{i} - (2 \cdot 10^{-2})\hat{j}$$

(b) Sabendo que $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ e que $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$, encontra-se o vetor velocidade e o vetor aceleração para qualquer instante de tempo a seguir:

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(r\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\hat{i} + \left(r\sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\hat{j}\right)$$

$$\therefore \vec{v} = \left(-\frac{r\pi}{5}\sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\hat{i} + \left(\frac{r\pi}{5}\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\hat{j} \tag{23}$$

Também,

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(-\frac{r\pi}{5}\sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\hat{i} + \left(\frac{r\pi}{5}\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\hat{j}\right)$$

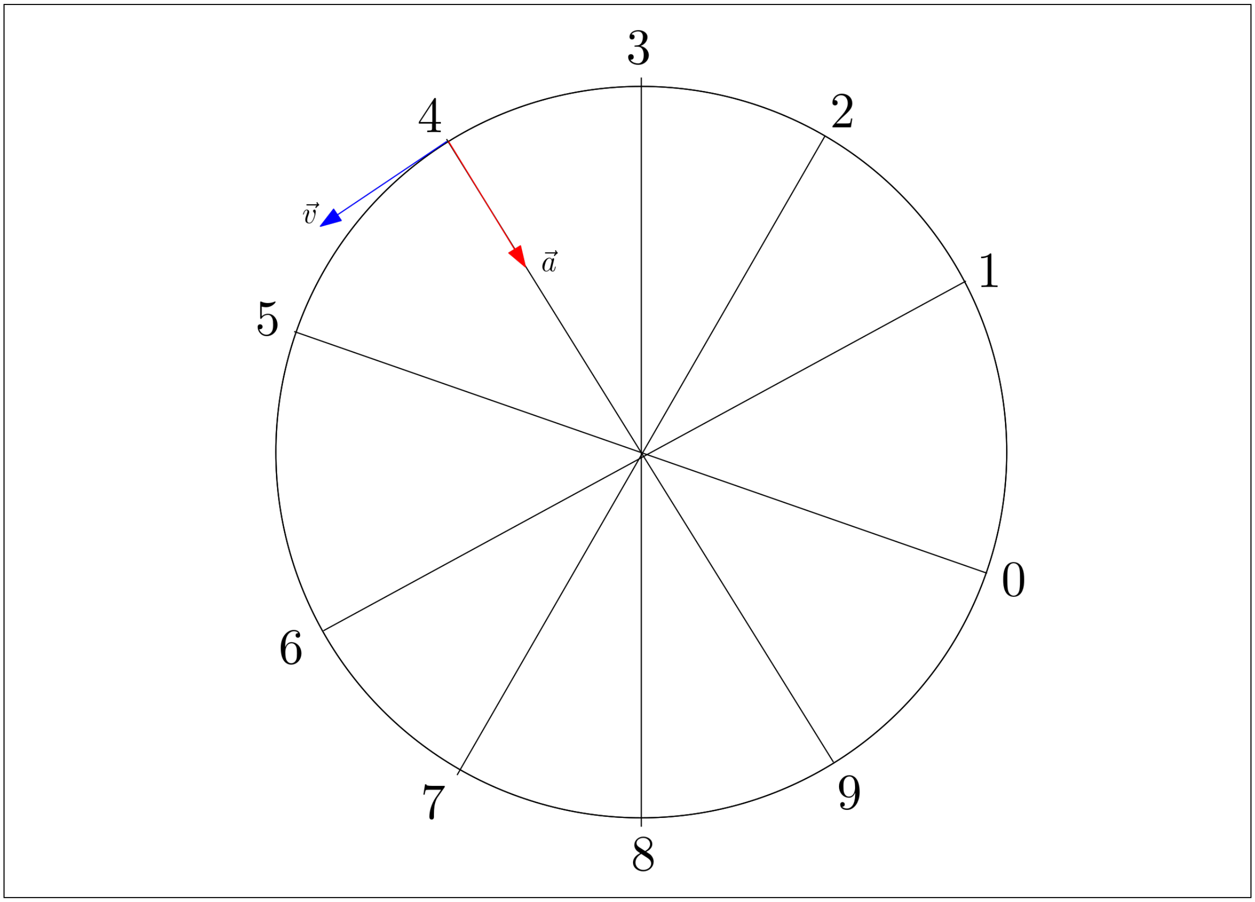
$$\therefore \vec{a} = \left(-\frac{r\pi^2}{25}\cos\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\hat{i} - \left(\frac{r\pi^2}{25}\sin\left(\frac{\pi t}{5}\right)\right)\hat{j} \tag{24}$$

Para $t = 4\ s$ e $r = 0,025\ m$, tem-se

$$\vec{v} \approx (-1 \cdot 10^{-2})\hat{i} - (1 \cdot 10^{-2})\hat{j} \implies |\vec{v}| \approx 1 \cdot 10^{-2}\ m/s \tag{25}$$

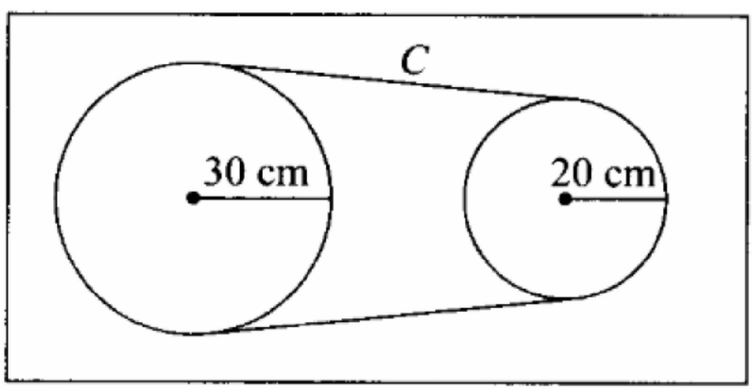
$$\vec{a} \approx (8 \cdot 10^{-3})\hat{i}\ - (6 \cdot 10^{-3})\hat{j} \implies |\vec{a}| \approx 1 \cdot 10^{-2}\ m/s^2 \tag{26}$$

Um esquema da representação dos vetores no relógio é disponibilizado a seguir:



Questão 7

Considere a figura abaixo. Onde a roda maior esta ligada à uma roda menor por uma correia que toca cada uma das rodas sem deslizamento. A roda maior parte do repouso e possui uma aceleração angular dada pela função $a(t) = a_0$.



(a) Quais são as unidades de a_0 em S.I.

(b) Qual a velocidade linear de um ponto da roda maior em relação ao seu eixo de rotação após 3 segundos de aceleração? E angular?

(c) Qual a velocidade linear da roda menor após 3 segundos? E angular?

(d) Quantas voltas a roda menor dará até a roda maior dar uma volta completa?

Solução:

(a) De $a(t) = a_0$ é imediato que $[a_0] = T^{-2}$, uma vez que para a equação estar dimensionalmente correta a_0 deve ter as mesmas dimensões de $a(t)$, que é a aceleração angular e cuja dimensão é T^{-2} por definição.

(b) Em primeiro lugar, calcula-se a velocidade angular a partir da aceleração angular. Confira:

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \implies \int a(t)\,\mathrm{d}t = \int \mathrm{d}\omega \therefore \omega = \omega_0 + a_0 t$$

Porém, como o sistema parte do repouso, tem-se que

$$\omega = a_0 t \implies \omega(3) = 3a_0\ s^{-1} \tag{27}$$

Também, sabe-se que $S = R\theta \implies v = R\omega$. A partir daqui, substituí-se $t = 3\ s$ e utiliza-se para ω a expressão calculada acima. Observe:

$$v = R\omega = \left(\frac{3}{10}\right) \cdot (a_0 \cdot 3) = \frac{9a_0}{10}\ m/s \tag{28}$$

(c) Como a roda maior está ligada à menor por uma correia que não desliza, o movimento é transmitido de forma que a velocidade linear é igual para ambas as rodas. Assim, $v'(3) = v(3) = \dfrac{9a_0}{10}\ m/s$, onde $v'(3)$ é a velocidade linear da roda menor.

Além disso, sendo a velocidade linear igual para ambas as rodas, tem-se

$$\omega \cdot r_1 = \omega' \cdot r_2$$

onde r_1 é o raio da roda maior, r_2 é o raio da roda menor, e ω' é a velocidade angular da roda menor. Utilizando essa relação, encontra-se

$$\omega'(3) = \omega(3) \cdot \frac{3}{2} = \frac{9a_0}{2}\ s^{-1} \tag{29}$$

(d) Sabendo que para um instante de tempo t qualquer tem-se $\omega' = \dfrac{3\omega}{2}$, concluí-se que $\omega' = \dfrac{3a_0 t}{2} \implies \theta' = \dfrac{3a_0 t^2}{4}$ através de integração.

O tempo que demora para a roda maior dar uma volta completa é obtido através de $\omega = a_0 t \implies \theta = \frac{a_0 t^2}{2}$ para $\theta = 2\pi$ e isolando t, isto é

$$T = \sqrt{\frac{4\pi}{a_0}} \tag{30}$$

Utilizando $t = T$ na equação para θ', tem-se

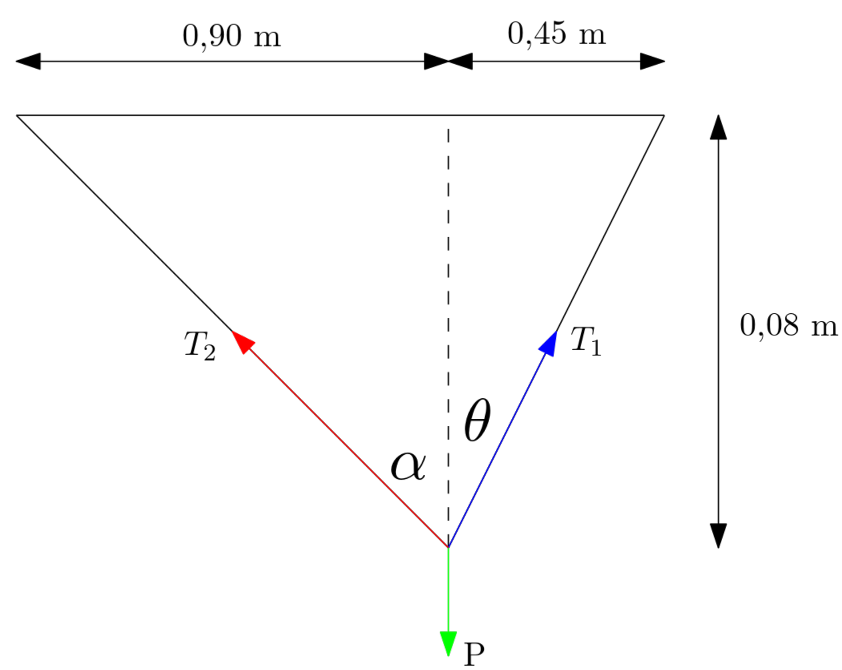
$$\theta' = 3\pi \tag{31}$$

O que significa que a roda menor dá 1 volta e meia quando a roda maior dá uma volta completa.

Questão 8

Uma peça de roupa é estendida num varal cujo a corda possui 1.35 m de comprimento e inicialmente está totalmente esticada. A roupa é presa por um prendedor num ponto que está localizado a 2/3 de uma das extremidades da corda e com o peso da roupa este ponto do varal desloca-se 8 cm para baixo. A roupa molhada possui uma massa de 300 g. Determine os vetores tração da corda do varal para manter a peça de roupa estendida em equilíbrio.

Solução: Disponibilizo o seguinte diagrama para auxiliar no desenvolvimento da solução do problema:



Decompondo T_1 e T_2 na horizontal e vertical utilizando os ângulos α e θ, tem-se o seguinte sistema para manter a peça de roupa estendida em equilíbrio:

$$T_2 \sin(\alpha) = T_1 \sin(\theta)$$
$$T_2 \cos(\alpha) + T_1 \cos(\theta) = P$$

Considero que o comprimento do varal é $L = 1,35\, m$ e que o deslocamento vertical da roupa foi de $h = 0,08\, m$.

A hipotenusa cuja direção coincide com a direção de T_1 e a hipotenusa cuja direção coincide com a direção de T_2 podem ser calculadas através do teorema de pitágoras, o que possibilita determinar o seno e o cosseno dos ângulos α e θ. Com efeito, definindo $\gamma \equiv \dfrac{3h}{L}$, tem-se

$$\sin\alpha = \frac{2L}{3\sqrt{\dfrac{4L^2}{9} + h^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\gamma}{2}\right)^2}}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{\gamma}{2}(\sin\alpha)$$

$$\sin\theta = \frac{L}{3\sqrt{\dfrac{L^2}{9} + h^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}}$$

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \gamma(\sin\theta)$$

O que permite reescrever o sistema encontrado para T_1, T_2 e P da seguinte maneira:

$$T_2 \sin(\alpha) = T_1 \sin(\theta)$$
$$T_2 \cdot \frac{\gamma}{2}(\sin\alpha) + T_1 \cdot \gamma(\sin\theta) = P$$

$$\implies T_1 \sin\theta \left(\frac{3\gamma}{2}\right) = P \therefore T_1 = \frac{2mg}{3\cos\theta} \approx 1 \cdot 10^1\ N$$

$$\implies T_2 = T_1 \cdot \frac{\sin\theta}{\sin\alpha} = T_1 \cdot \sqrt{\frac{1 + \left(\dfrac{\gamma}{2}\right)^2}{1 + \gamma^2}} \approx 1 \cdot 10^1\ N$$

Reiterando que $\gamma = \dfrac{3h}{L}$ e $\cos\theta = \dfrac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}}$. Sabe-se, também, que $m = 0,3\, kg$, $g = 9,81\, m/s^2$, $h = 0,08\, m$ e $L = 1,35\, m$.

Portanto, tem-se T_1 e T_2 em função de todos os valores dados no enunciado e a solução está finalizada.

Questão 9

Uma partícula se movimenta descrevendo uma espiral no sentido anti-horário. Sua trajetória é dada por $r = A\theta$, onde $A = (1/\pi)$ m/rad é constante. O ângulo θ aumenta com o tempo seguindo a equação $\theta = \dfrac{\alpha t^2}{2}$, onde α é constante.

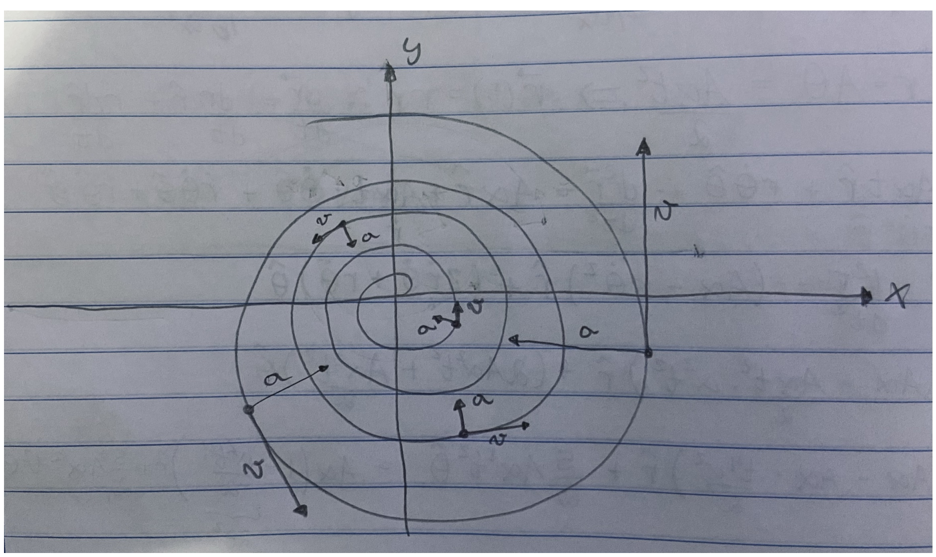
(a) Desenhe a trajetória, assim como os vetores velocidade e aceleração em vários pontos da trajetória.

(b) Mostre que a aceleração radial é zero quando $\theta = 1/\sqrt{2}$ rad.

(c) Para que ângulos as componentes radial e tangencial da aceleração têm a mesma magnitude?

Solução:

(a) A seguir disponibilizo o desenho da trajetória feito à mão com os vetores velocidade e aceleração em vários pontos da trajetória.



Convém notar que o comprimento dos vetores vai aumentando com o tempo, o que é de se esperar por causa das informações mencionadas a respeito de r e θ no enunciado.

(b) Partindo de $r = A\theta = \dfrac{A\alpha t^2}{2}$ tem-se que

$$\vec{r}(t) = r\hat{r} = \frac{A\alpha t^2}{2}\hat{r}$$

$$\implies \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} = (A\alpha t)\hat{r} + \left(r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)\hat{\theta} = (A\alpha t)\hat{r} + \left(\frac{A\alpha^2 t^3}{2}\right)\hat{\theta}$$

$$\implies \vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}(A\alpha t)}{\mathrm{d}t}\hat{r} + (A\alpha t)\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}(A\alpha^2 t^3)}{\mathrm{d}t}\hat{\theta} + \left(\frac{A\alpha^2 t^3}{2}\right)\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \left(A\alpha - \frac{(A\alpha^3 t^4)}{2}\right)\hat{r} + \left(A\alpha^2 t^2 + \frac{3}{2}A\alpha^2 t^2\right)\hat{\theta}$$

A partir daqui note que a componente radial da aceleração é

$$\left(A\alpha - \frac{(A\alpha^3 t^4)}{2}\right)$$

E também que t^4 pode ser obtido através de $\theta = \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \implies t^4 = \dfrac{4\theta^2}{\alpha^2}$. Com isso, a componente radial da aceleração torna-se

$$\left(A\alpha - 2A\alpha\theta^2\right)$$

Quando faz-se $\theta = 1/\sqrt{2}$ resta

$$A\alpha - A\alpha = 0 \quad Q.E.D.$$

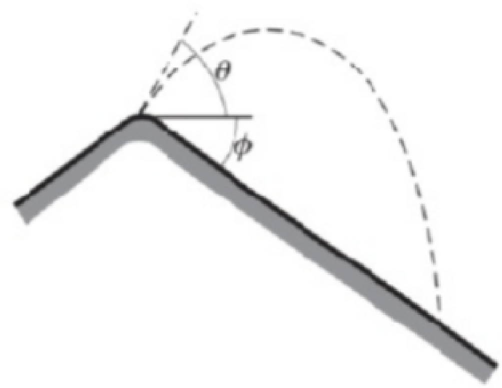
(c) Igualando as componentes radial e tangencial da aceleração, tem-se

$$\left(A\alpha - 2A\alpha\theta^2\right) = 5A\alpha\theta \implies 2\theta^2 + 5\theta - 1 = 0$$

$$\theta = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4} \implies \theta \approx -154^\circ \text{ ou } 10^\circ$$

Questão 10

Uma pedra está no topo de uma montanha que tem uma inclinação descendente de ângulo ϕ como mostrado na figura. A que ângulo θ com a horizontal a pedra tem que ser lançada para que o alcance seja máximo?



Solução:

Seja $\theta + \phi = \beta$, e v_0 a velocidade inicial da pedra. As equações para o movimento da pedra em y e em x, adotando um referencial cujo y é perpendicular à montanha, x é solidário à mesma e cuja origem está no topo, são escritas a seguir:

$$y = tv_0 \sin\beta - \frac{g\cos\phi}{2}t^2$$
$$x = tv_0 \cos\beta + \frac{g\sin\phi}{2}t^2$$

Para o instante de tempo em que a pedra aterrissa na montanha, considera-se $y = 0$ e $t \neq 0$, o que permite determinar o tempo na equação para y acima. Confira:

$$0 = tv_0 \sin\beta - \frac{g\cos\phi}{2}t^2 \implies t = \frac{2v_0\sin\beta}{g\cos\phi}$$

Substituindo esse instante de tempo na equação para y, tem-se

$$x = \left(\frac{2v_0\sin\beta}{g\cos\phi}\right) v_o \cos\beta + \frac{g\sin\phi}{2}\left(\frac{2v_0\sin\beta}{g\cos\phi}\right)^2$$

$$\implies x = \frac{v_0^2 \sin 2\beta}{g\cos\phi} + \frac{2v_0^2\sin^2\beta\sin\phi}{g\cos^2\phi}$$

Como ϕ é fixo a priori, para que obtenha-se o alcance máximo é necessário que $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\beta} = 0$. Logo,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\beta} = 2cos2\beta + 2\sin 2\beta \tan\phi = 0 \implies \tan 2\beta \cdot \tan\phi = -1$$

Da trigonometria, sabe-se que $\tan 2\beta \cdot \tan\phi = -1 \iff 2\beta - \phi = \dfrac{\pi}{2}$. Portanto,

$$\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$$

Como $\theta + \phi = \beta$, então

$$\theta + \phi = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$$

Portanto, o ângulo θ que maximiza o alcance é $\theta = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\phi}{2}$.