

# MAT 111 - Cálculo Diferencial e Integral I - Bacharelado em Física

Docente: Prof. Dr. Pierluigi Benevieri

1º semestre de 2021 – Registro das aulas e exercícios sugeridos

## 1. Segunda-feira, 19 de abril de 2021

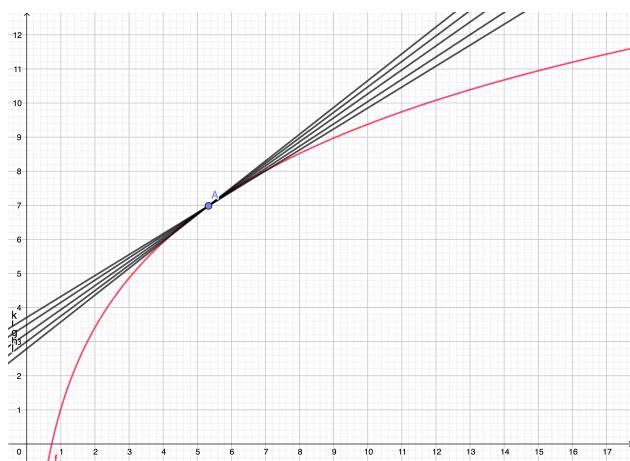
Apresentação do curso.

## 2. sexta-feira, 23 de abril de 2021

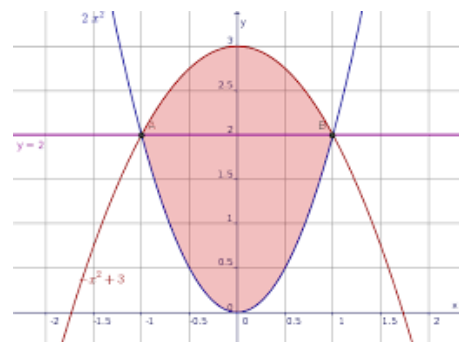
O curso de cálculo diferencial consiste principalmente no estudo das propriedades básicas das funções de uma variável real. Central no curso será o conceito de *derivada* que, por sua vez, será introduzida por meio do conceito de *limite* de uma função. A noção de limite é provavelmente a mais complicada deste curso (talvez do inteiro cálculo diferencial).

Os conceitos derivada e de integral (este segundo será tratado no próximo semestre, no curso de Cálculo Diferencial e Integral II ) foram inventados por **Gottfried Leibniz** e **Isaac Newton** no final do século XVII, depois de um longo caminho de estudos e tentativas, feitos a partir da metade do século anterior.

A derivada e a integral respondem aos problemas, respectivamente, do cálculo das tangentes a uma curva e da área de uma região do plano.



Qual é a reta tangente?



É possível calcular a área da região colorida?

Os dois problemas ocuparam os estudos dos filósofos e dos matemáticos da antiguidade (naquelas épocas, não tinha separação nos estudos das várias disciplinas). Depois de períodos de profunda crise da matemática ao longo dos séculos centrais do primeiro milênio, devido a fatores históricos, a matemática ocidental voltou a crescer entre o VIII e o XIII século, a época de ouro da civilização arabe. Em seguida, o fator crucial para o desenvolvimento das pesquisas a partir de 1500 na Europa foi a invenção da imprensa por **Johannes Gutenberg** em 1455.<sup>1</sup>

A construção da derivada de Leibniz e Newton tinha uma particularidade curiosa: o método levava a resultados corretos, mas matematicamente era errado. Em particular, eram usados números *infinitésimos*

<sup>1</sup>Formas de impressão mecânicas eram realizadas na China bem antes, a partir do ano 1000, mais ou menos.

que não se sabia bem o que queriam dizer. Não eram zero, mas... o que eram? O fato de ter obtida, por outro lado, a verdadeira noção de derivada, ou seja, independentemente da palavra usada, “derivada”, o conceito de velocidade, de tangente, de área, de taxa de variação, permitiu no século de 1700 resultados enormes, em particular nas aplicações da Física. Os nomes de **Johann Bernoulli**, **Jakob Bernoulli**, **Leonhard Euler**, **Joseph Louis Lagrange**, **Carl Friedrich Gauss**, entre outros, protagonizaram cem anos de descobertas sensacionais. O começo da revolução industrial, geralmente colocado por volta de 1750, tem muito a ver com isso.

A ambiguidade da construção de Leibniz e Newton foi enfrentada no começo do século de 1800 por **Augustin Cauchy**. Em 1821 ele publicou o livro *Cours d'Analyse*, o livro em que ele resumiu suas aulas, uma espécie de Guidorizzi daquela época. No livro, Cauchy introduziu um conceito novo: o limite. Usando o limite, a definição de derivada (e de integral) pôde finalmente ser enunciada sem as ambiguidades de Newton e Leibniz. Em tal forma chega aos nossos dias de hoje. Cauchy operou uma escolha que poderíamos definir “brutal”, eliminando drasticamente os números infinitesimos que desde então foram “banidos” da matemática.

A noção de número infinitesimo foi exilada, mas não cancelada. O matemático **Abraham Robinson**, que nasceu alemão e viveu em vários países, publicou em 1960 o livro *Nonstandard Analysis*. Nesta obra a análise matemática é completamente reformulada *sem* o uso dos limites, porém recuperando e definindo rigorosamente os números infinitesimos. Na análise não standard todos os resultados do cálculo diferencial continuam valendo e são redemonstrados. A invenção deste tipo de abordagem ao cálculo diferencial é não menos extraordinária daquela que historicamente se consolidou. K. Goedel acreditava que este tipo de matemática ia substituir a abordagem tradicional (eliminando portanto o conceito de limite). Esta previsão não se realizou, por enquanto. Seria interessante investigar porque. Eu não tenho conhecimento de debates sobre a questão.

\* \* \*

Antes de entrar no coração do curso, que começa pelo conceito de função, lembramos algumas noções básicas de lógica elementar, teoria dos conjuntos, números reais.

A demonstração é talvez o conceito mais complicado ou delicado que a matemática tem. Demonstrar uma proposição (o um teorema, que é a mesma coisa) significa verificar que *a partir de uma hipótese A segue uma tese B*. Por exemplo, vamos ver o seguinte

**Teorema 1.** *Se amanhã chover, irei levar o guardachuva.*

O dia seguinte podem se verificar quatro situações:

<i>chove</i>	<i>levo o guardachuva</i>
<i>chove</i>	<i>não levo o guardachuva</i>
<i>não chove</i>	<i>levo o guardachuva</i>
<i>não chove</i>	<i>não levo o guardachuva</i>

Se acontecer a primeira situação, o teorema é verdadeiro, porque da hipótese segue a tese. No segundo caso, o teorema seria falso, porque da hipótese não segue a tese. Caso se verifiquem a terceira ou a quarta situação, o teorema é verdadeiro. Porque aquilo que é importante não é se eu levo ou não o guardachuva, mas se a hipótese provoca a tese. Se hipótese não é verificada, a tese está liberada de qualquer obrigação. Em outras palavras, o seguinte é um teorema substancialmente diferente do teorema 1.

**Teorema 2.** *Amanhã irei levar o guardachuva.*

Fica claro entender se o teorema acima é verdadeiro ou falso (dependendo do meu comportamento amanhã). No primeiro teorema, **não se trata de provar se B é verdadeira, mas se A implica B**. A diferença é profunda.

**Exercício 1.** Observe os dois teoremas seguintes e comente se eles dizem as mesmas coisas (ou seja, se são verificados nos mesmos casos). **Teorema 1:** *Se Maria joga, nosso time de futebol ganha.* **Teorema 2:** *Se Maria não joga, nosso time de futebol não ganha.*

**Exercício 2.** Escreva a negação da frase seguinte: *Antônio e José são altos acima de 1mt e 80.*

O conceito de *conjunto* será pensado como conceito primitivo, ou seja, coleção de objetos. Não iremos aprofundar a teoria dos conjuntos. Essa maneira de tratar os conjuntos não é correta, mas é prática e ao nível dos nossos objetivos funciona. Quero somente deixar para vocês a observação seguinte: imaginem o conjunto formado pela turma de vocês. Depois imaginem o conjunto de todas as turmas da USP. A turma de vocês é ao mesmo tempo um conjunto e um elemento de um outro conjunto. E assim podemos continuar: o conjunto de todas as turmas da USP é um elemento do conjunto que contém, como elementos, o conjunto de todas as turmas da USP, da UFABC, da UNICAM. Este último conjunto possui portanto três elementos. Parece tudo tranquilo, mas considere

o conjunto de todos os conjuntos.

Este conjunto não existe. Sua definição leva a uma contradição não resolvível. Leiam por exemplo [este texto](#). O problema é também conhecido como [Paradoxo de Bertrand Russell](#).

**Definição 3.** Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , definimos

*interseção de  $A$  e  $B$  o conjunto*       $A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$

*união de  $A$  e  $B$  o conjunto*       $A \cup B = \{x : x \in A \text{ ou } x \in B\}$

Do ponto de vista da notação,  $\{x : x \in A \text{ e } x \in B\}$  significa o conjunto dos elementos  $x$  tais que  $x$  pertence a  $A$  e  $x$  pertence a  $B$

**Definição 4.** Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que  $A$  é contido em  $B$  se cada elemento de  $A$  é um elemento de  $B$ . Dizemos também que  $A$  é um *subconjunto* de  $B$ , com o símbolo  $A \subseteq B$ .

Por exemplo o conjunto dos alunos do curso de MAT111 é um subconjunto dos alunos da USP. É importante saber que todo conjunto possui um subconjunto abstrato, chamado *conjunto vazio* e denotado pelo símbolo  $\emptyset$ .

Atenção ao exemplo seguinte que coloco para esclarecer o uso correto dos conceitos acima: o número 1 não é um subconjunto de  $\mathbb{N}$ , pois é um *elemento* de  $\mathbb{N}$ . Existe ao mesmo tempo o conjunto formado pelo número 1, denotado por  $\{1\}$ . Este sim é um subconjunto de  $\mathbb{N}$ . Portanto é correto dizer que 1 e  $\{1\}$  são duas “entidades” diferentes.

**Exercício 3.** Seja dado o conjunto  $\{1, 2, 3\}$ . Determine explicitamente todos seus subconjuntos.

**Exercício 4.** Prove as propriedades distributivas: dados três conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$ ,

$$1) A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$

$$2) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

e as *Leis de De Morgan*: dados três conjuntos  $A$ ,  $B$  e  $C$  contidos num conjunto  $U$ ,

$$3) \mathcal{C}_U(A \cup B) = \mathcal{C}_U A \cap \mathcal{C}_U B,$$

$$4) \mathcal{C}_U(A \cap B) = \mathcal{C}_U A \cup \mathcal{C}_U B.$$

Nos itens 3) e 4) acima o símbolo  $\mathcal{C}_U A$  (pego ele como exemplo para todos os outros) denota o conjunto dos elementos que estão em  $U$ , e não estão em  $A$ .  $\mathcal{C}_U A$  é chamado *complementar* de  $A$  em  $U$ .

**Muito importante:** o que significa provar que dois conjuntos  $E$  e  $F$  são iguais. Significa provar que possuem exatamente os mesmos elementos. Dessa forma, o método para provar que  $E = F$  é o seguinte: primeiramente, se deve-se provar que cada elemento de  $E$  é também um elemento de  $F$ . Depois, deve-se provar que cada elemento de  $F$  é também um elemento de  $E$ . Desta forma, no primeiro passo se prova que  $E \subseteq F$ , no segundo que  $F \subseteq E$ . A consequência é  $E = F$ .

**Exercício 5.** Escreva a união e a interseção dos conjuntos  $A$  e  $B$  da lista seguinte. Diga se vale  $A \subseteq B$  ou  $B \subseteq A$ . Determine  $A \setminus B$  e  $B \setminus A$ .

O conjunto  $A \setminus B$  – chamado *diferença entre  $A$  e  $B$*  – é definido como o conjunto dos elementos que pertencem a  $A$  e não pertencem a  $B$ . É um conceito diverso do conceito de complementar. Aqui não é necessário assumir que  $B$  esteja contido em  $A$ .

$$1. A = (0, 1), B = [0, 1]$$

$$2. A = (-\infty, 0), B = [-1, 5]$$

$$3. A = \left\{ \frac{2n}{2n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}, B = \left\{ \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$4. A = (0, 2) \cup (3, 4), B = [2, 3]$$

$$5. A = (-3, 0], B = [-2, 2]$$

Nos exercícios acima, estamos considerando alguns “intervalos”. O leitor que não conhece a definição de intervalo, pode pular os relativos itens do exercício.

**Exercício 6.** Invente alguns pares de conjuntos  $A$  e  $B$  e responda às mesmas questões do exercício 5.

O sistema numérico que será utilizado no curso será o conjunto dos números reais,  $\mathbb{R}$  é o símbolo. Nos objetivos do curso não entram a definição ou a construção aprofundadas dos conjuntos dos números reais. Portanto nos limitaremos aos conceitos intuitivos e simplificados.

Consideramos como conhecidos os conjuntos

- $\mathbb{N}$ , dos números inteiros não negativos, incluindo zero. Não todos os livros incluem 0 em  $\mathbb{N}$ .

- $\mathbb{Z}$ , dos números inteiros negativos, positivos, incluindo zero.
- $\mathbb{Q}$ , dos números racionais, ou seja, os quocientes dos números inteiros, que podem ser também representados como decimais limitados ou ilimitados periódicos.

Em  $\mathbb{Q}$  são definidas duas operações, *soma* e *produto* e uma *relação de ordem* ou *ordenamento*. Essas operações verificam algumas propriedades importantes, que são bem conhecidas e que não vamos demonstrar.

- S1) *Propriedade comutativa da soma*:  $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a + b = b + a$ ;  
 S2) *Propriedade associativa da soma*:  $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}, (a + b) + c = a + (b + c)$ ;  
 S3) *Existência do elemento neutro da soma*:  $\forall a \in \mathbb{Q}, a + 0 = a$  e 0 é dito *elemento neutro da soma*;  
 S4) *Existência do oposto*:  $\forall a \in \mathbb{Q}$  existe um elemento de  $\mathbb{Q}$ ,  $b$ , dito *oposto* de  $a$ , tal que  $a + b = 0$ .  
 Este oposto  $b$  pode ser denotado por  $-a$  e a operação  $a + (-a) = 0$  pode ser escrita simplesmente  $a - a = 0$ .

- P1) *Propriedade comutativa do produto*:  $\forall a, b \in \mathbb{Q}, ab = ba$ ;  
 P2) *Propriedade associativa do produto*:  $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}, (ab)c = a(bc)$ ;  
 P3) *Existência do elemento neutro do produto*:  $\forall a \in \mathbb{Q}, a \cdot 1 = a$  e 1 é dito *elemento neutro do produto*;  
 P4) *Existência do inverso*:  $\forall a \in \mathbb{Q}, a \neq 0$ , existe um elemento de  $\mathbb{Q}$ ,  $b$  tal que  $a \cdot b = 1$ ;  $b$  é dito *inverso* de  $a$  e pode ser escrito como  $1/a$ .

A *propriedade distributiva* liga soma e produto:

$$\text{SP)} \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Q}, (a + b)c = ac + bc.$$

Em  $\mathbb{Q}$  é definida uma relação de ordem. Em geral, uma *relação de ordem* em um conjunto (também chamada *ordenamento*) é uma relação binária, ou seja, uma lei que associa uma informação a cada par de elementos do conjunto. No caso da relação de ordem, a cada par de elementos  $a$  e  $b$  do conjunto  $C$  investigado o ordenamento associa a informação  $a \leq b$ , ou seja  $a$  é menor ou igual a  $b$ , ou também *escrevo  $a$  à esquerda de  $b$* . O que significa na prática? Pego um conjunto  $C$  de três elementos: uma banana, uma pera, uma laranja. Defino um ordenamento em  $C$  dizendo que banana  $\leq$  pera, pera  $\leq$  laranja, laranja  $\leq$  banana. Esta relação tem uma utilidade? Não sabemos por enquanto.

Não todas as relações binárias são ordenamentos. Uma relação de ordem é corretamente definida, num conjunto  $C$ , se verifica as três propriedades seguintes:

- O1) (propriedade reflexiva)  $a \leq a$ , para todo  $a \in C$ ;  
 O2) (propriedade antisimétrica) se  $a \leq b$  e  $b \leq a$ , então,  $a = b$ ;  
 O3) (propriedade transitiva) se  $a \leq b$  e  $b \leq c$ , então,  $a \leq c$ .

Voltando a  $\mathbb{Q}$ , a relação  $a \leq b$  é uma relação de ordem. O leitor pode verificar usando simplesmente (sem muita sofisticação) o conhecimento básico sobre “ $\leq$ ”.

O ordenamento em  $\mathbb{Q}$  se relaciona às operações de soma e produto graças às duas propriedades seguintes:

- OS)  $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ , se  $a \leq b$ , então  $a + c \leq b + c$ ;  
 OP)  $\forall a, b, c \in \mathbb{Q}$ , com  $c > 0$ , se  $a \leq b$ , então  $ac \leq bc$ .

**Exercício 7.** A OP acima é muito importante. Esquecer ela leva a erros ingênuos. Como exercício, mostre com um ou dois exemplos que a OP é falsa se  $c$  for negativo.

O símbolo  $a < b$  deve ser pensado como  $a \leq b$  e  $a \neq b$ .

**Exercício 8.** Dê exemplos, da vida real, de relações de ordem e de relações que não são de ordem.

O conjunto  $\mathbb{Q}$  possui portanto duas operações, soma e produto, e uma relação de ordem, com as várias propriedades enunciadas acima que podem verificadas (nos não o faremos). Por isso  $\mathbb{Q}$  foi uma base numérica para a matemática antiga de toda a área do Mediterrâneo, da região babilônica até a Índia. Infelizmente a **escola pitagórica** descobriu que a medida da diagonal do quadrado de lado 1 não pode ser calculada em  $\mathbb{Q}$ . Em outras palavras *não existe nenhum número em  $\mathbb{Q}$  cujo quadrado seja 2*.

A demonstração será feita na próxima aula.

### 3. segunda-feira, 26 de abril de 2021

Para a demonstração do último fato mencionado na aula anterior, veja-se o pdf da lousa da aula.

Um *número real* é definido como um *alinhamento decimal, limitado ou não, periódico ou não, com sinal*. O leitor poderá usar também as operações conhecidas de soma e produto nos números reais, assim como a relação de ordenamento que tal sistema possui, e trabalhar sem particular problema com as propriedades algébricas das operações e do ordenamento, que são geralmente conhecidas.

Em particular, conjunto dos números reais, denotado por  $\mathbb{R}$ , verifica todas as propriedades de soma, produto e ordenamento que foram enunciadas para os números racionais.

**Exercício 9.** Prove as propriedades seguintes, usando unicamente as 11 propriedades de soma produto e ordenamento, aplicadas agora aos números reais e não somente aos racionais:

- 1)  $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 0 = 0$ ;
- 2)  $\forall a \in \mathbb{R}, a > 0 \Rightarrow -a < 0$  (onde  $-a$  denota o oposto de  $a$ );
- 3)  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , se  $a > 0$  e  $b < 0$ , então  $ab < 0$ ;
- 3b)  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , se  $a > 0$  e  $b > 0$ , então  $ab > 0$ ;
- 3c)  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , se  $a < 0$  e  $b < 0$ , então  $ab > 0$ ;
- 4)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ , se  $c < 0$ , se  $a \leq b$ , então  $ac \geq bc$ ;
- 5)  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , com  $a > 0, b > 0$ ,  $a \leq b$  se e somente se  $a^2 \leq b^2$ .
- 6)  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , com  $a > 0, b > 0$ ,  $a \leq b$  se e somente se  $1/a \geq 1/b$ ;
- 7) nos itens 4,5,6 vale a desigualdade estrita na tese se for verificada na hipótese?
- 8) dado  $a \in \mathbb{R}$ , prove que  $-1 \cdot a$  é o oposto de  $a$  (onde  $-1$  denota o oposto de 1).

O que exatamente pede o exercício acima? Parece estranho provar que  $a \cdot 0 = 0$ , sendo que todo mundo sabe este fato. A questão é: prove os itens acima sem nenhuma abordagem intuitiva, mas usando como ferramenta as 11 propriedades. Dito de outra forma: imagine que  $\mathbb{R}$  seja um conjunto absolutamente abstrato em que existem duas operações chamadas soma e produto e uma relação de ordem, que verificam as 11 propriedades. Assim imagine que 0 e 1 sejam dois números abstratos (que poderiam ser chamados Mnica e Magali) que são os elementos neutros de soma e produto. Suponha também (importante) que os elementos neutros de soma e produto seja únicos. A partir daí, faça o exercício acima.

Voltando a  $\mathbb{R}$ , principal diferença entre  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{Q}$  é uma propriedade importante que  $\mathbb{R}$  verifica e  $\mathbb{Q}$  não. Se chama propriedade ou axioma de continuidade. Têm várias possibilidades equivalentes para apresentar a propriedade de continuidade. Nós iremos escolher a seguinte.

**Definição 5.** Precisamos das definições seguintes:

- (1) Seja  $E$  um subconjunto de  $\mathbb{R}$ . Um número real  $M$  é dito *majorante* de  $E$  se  $x \leq M$  para todo  $x \in E$ .
- (2) Um número real  $m$  é dito *minorante* de  $E$  se  $x \geq m$  para todo  $x \in E$ .
- (3) O *máximo* de um conjunto  $E$  é o elemento maior, se existe, enquanto o *mínimo* é o elemento menor, se existe.
- (4) Um conjunto  $E$  é dito *limitado superiormente* se admite pelo menos um majorante.
- (5) É dito *limitado inferiormente* se admite pelo menos um minorante.
- (6) É dito *limitado* se é limitado superiormente e inferiormente.

Agora colocamos dois conceitos entre os mais importantes de toda a análise matemática.

**Definição 6.** Se  $E$  é limitado superiormente, definimos *supremo* de  $E$ ,  $\sup E$ , o mínimo dos majorantes; se  $E$  é limitado inferiormente definimos *ínfimo* de  $E$ ,  $\inf E$ , o máximo dos minorantes. Se  $E$  é ilimitado superiormente escrevemos  $\sup E = +\infty$ , se  $E$  é ilimitado inferiormente escrevemos  $\inf E = -\infty$ .

**Observação 7.** Cuidado:  $+\infty$  e  $-\infty$  não devem ser tratados como números (ainda menos como os números maiores e menores de todos). Se trata de símbolos usados para encurtar a redação. Em alguns casos,  $+\infty$  e  $-\infty$  podem sim ser considerados números, mas se trata de áreas avançadas da matemática, que vocês podem procurar se tiverem curiosidade, mas não nesse curso.

Nos exercícios sobre a determinação de supremo e ínfimo de conjuntos é muito útil usar a caracterização da noção de supremo e ínfimo tratada no teorema aqui em baixo. A demonstração do resultado seguinte foi feita em sala de aula.

**Teorema 8.** *Dado um subconjunto  $E$  de  $\mathbb{R}$ , um número  $M$  é o supremo de  $E$  se e somente se satisfaz as duas propriedades seguintes:*

- (1)  $M$  é majorante de  $E$ ,
- (2) para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $a \in E$  tal que  $M - \varepsilon < a$ .

**Observação 9.** Na matemática, palavras semelhantes podem ter significados muito distantes. Um conjunto é dito *finito* se possui um número finito de elementos. Portanto, conjunto finito e conjunto limitado são duas coisas bem diferentes.

Chegamos finalmente à propriedade que fundamenta toda a análise matemática moderna.

**Propriedade (ou axioma) de continuidade:** *um conjunto de números reais, limitado superiormente (inferiormente) admite supremo (ínfimo) em  $\mathbb{R}$ .*

A demonstração, não trivial, não é um objetivo do nosso curso.

$\mathbb{Q}$  não verifica a propriedade de continuidade. Prove este fato como exercício. É uma consequência do fato de que, por exemplo, não existe nenhum racional cujo quadrado seja 2.

Uma consequência da propriedade de continuidade é o seguinte importantíssimo resultado.

**Teorema 10. (Propriedade – ou Axioma – de Arquimédes.)** *Dados dois números positivos  $a$  e  $b$ , existe um inteiro  $N$  tal que  $a \cdot N > b$ .*

A demonstração foi feita em sala de aula.

**Exercício 10.** Determine o supremo e o ínfimo dos conjuntos seguintes e, se existem, o máximo e o mínimo

$$\begin{array}{ll}
 (2, 3) & [0, +\infty) \\
 [-5, 1) \cup (1, 4] & (0, 3] \cup [3, 5] \\
 \left\{1 - \frac{1}{n}, n \geq 1\right\} \cup \left\{1 + \frac{1}{n}, n \geq 1\right\} & \bigcup_{n \geq 2} \left(-\frac{1}{2n}, 1 - \frac{1}{n}\right] \\
 \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} & \left\{\frac{2n}{n^2 + 1}, n \in \mathbb{N}\right\} \\
 \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\} & \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1\right\} \cup \{0\}
 \end{array}$$

**Observação 11.** O leitor que já conhece o conceito de limite poderia perguntar (e em sala de aula às vezes acontece) se é possível abordar alguns desses exercícios usando o conceito de limite. A resposta é: absolutamente não. A razão é a seguinte: se eu digo que por exemplo no caso dos dois últimos itens do exercício 10  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ , a objeção é imediata: qual é a definição de limite? e porque  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$ ? A demonstração da validade do limite acima é, de fato, filha da resolução do exercício pela definição de majorante/minorante, supremo/ínfimo. Usar o limite seria como usar um fato  $\mathcal{A}$  para provar o mesmo  $\mathcal{A}$  (círculo vicioso).

**Exercício 11.** (a) O leitor prove, como feito em sala de aula, que não existe nenhum número racional cujo quadrado é 2 (ou seja, refaça autonomamente a demonstração). (b) Prove que não existe nenhum número racional cujo quadrado é 3.

**Exercício 12.** Suponhamos de trabalhar somente em  $\mathbb{Q}$ , ou seja, suponhamos que  $\mathbb{R}$  não exista. Seja  $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$ . Prove que  $\inf A$  não existe.

**Exercício 13.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ . Prove que entre  $a$  e  $b$  existem pelo menos um número racional e um número irracional. O significado do exercício é observar que entre dois números reais, distintos mas “muito próximos” (apesar do fato de que “muito próximos” não é claro o que significa) temos infinitos irracionais e infinitos racionais.

**Exercício 14.** Prove que, dados dois números racionais  $r$  e  $s$  a soma  $r + s$ , é racional. Usando este simples fato, prove que, se  $r \in \mathbb{Q}$  e  $a \notin \mathbb{Q}$ ,  $a + r$  não é racional. Se  $a$  e  $b$  são irracionais, que podemos dizer sobre a soma deles? É sempre irracional?

**Observação final.** A construção dos números reais, que tem em [Georg Cantor](#) e [Richard Dedekind](#) seus maiores, mas não únicos, protagonistas, pode ser feita de duas formas: a via construtiva e a via axiomática. A via construtiva parte da definição dos números naturais, tudo menos que fácil<sup>2</sup>, se estende aos inteiros relativos, aos racionais e termina com os reais com a difícil tarefa de definir rigorosamente os números que

---

<sup>2</sup>Veja-se , em particular o trabalho de Giuseppe Peano



“tampam os infinitos buracos” deixados por  $\mathbb{Q}$  que não sabe resolver a equação  $x^2 = 2$  e muitas muitas outras.

Alguns exercícios sobre os temas tratados até agora.

**Exercício 15.** Escreva a negação das frases seguintes (não é importante se elas são verdadeiras ou falsas):

- a). Para todo  $x$  existe  $y$  tal que para todo  $z$  temos  $x + y = z$ .
- b). Existe  $x$  tal que para todo  $y$  há  $y^2 > x$  ou existe  $z$  tal que  $x < z$ .
- c). Para todo  $x$  que verifica  $x^2 > 2$  existe  $y$  tal que para todo  $z$  há  $y^2 < x + z$ .

O exercício acima é importante porque ajuda a ter mais confiança com os processos lógicos. Quando se tratará de provar que um limite não existe ou uma função é descontínua, será muitas vezes necessário negar a definição de limite ou a de continuidade.

**Exercício 16.** Dados os pares  $A, B$ , de conjuntos em baixo, determine  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$  e  $B \setminus A$ .

1.  $(0, 2); \quad (1, 3)$

4.  $[-1, 1); \quad (0, 1]$

2.  $(-\infty, 3]; \quad (-\infty, 1)$

5.  $(-1, +\infty); \quad (1, 3)$

3.  $[-1, 0]; \quad (0, 1]$

6.  $\{x \in \mathbb{R} : x^2 > 4\}; \quad (1, 3).$

**Exercício 17.** Um outro tipo de relação em um conjunto, tão importante quanto um (possível) ordenamento é uma *relação de equivalência*. Uma relação entre os elementos de um conjunto  $E$ , que podemos denotar por  $a \sim b$ , é de equivalência se verifica as três propriedades seguintes:

- Reflexiva:  $a \sim a$ ,
- Simétrica: se  $a \sim b$ , então  $b \sim a$ ,
- Transitiva: se  $a \sim b$  e  $b \sim c$ , então  $a \sim c$ .

Verifique se as seguintes são relações de equivalência em  $\mathbb{R}$ .

$$xy \leq 0$$

$$xy \geq 0$$

$$xy > 0$$

$$x^2 = y^2$$

$$x \geq y$$

$$x = y$$

$$x - y \text{ é inteiro}$$

$$x + y \text{ é inteiro}$$

$$x(1 + y^2) = y(1 + x^2)$$

$$x(1 - y^2) = y(1 - x^2)$$

$$x - y \in \mathbb{Q}$$

$$x - y \notin \mathbb{Q}.$$

**Exercício 18.** Determine supremo e ínfimo do conjunto seguinte:

$$\left\{ x \in \left[ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right] : x = \frac{m}{2^n}, m \text{ e } n \text{ inteiros positivos} \right\}.$$

**Exercício 19.** Determine supremo e ínfimo dos conjuntos seguintes e diga se o supremo e o ínfimo pertencem aos conjuntos (neste caso seriam também máximo e mínimo):

$$\begin{array}{ll}
\left\{ \frac{3n-2}{2n}, \text{ onde } n \in \mathbb{N} \right\} & \{-n^2 + 22n + 10, \text{ onde } n \in \mathbb{N}\} \\
\{n^2 - 5n + 3, \text{ onde } n \in \mathbb{N}\} & \left\{ \frac{t+1}{t-2}, \text{ onde } t \in \mathbb{R}, t > 2 \right\} \\
\mathbb{N} \cup \left\{ -\frac{1}{n}, \text{ onde } n \in \mathbb{N} \right\} & \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, \text{ onde } n \in \mathbb{N} \right\} \\
\left\{ \frac{n^2}{n+3}, \text{ onde } n \in \mathbb{N} \right\} &
\end{array}$$

Na apêndice seguinte, fora da ementa do nosso curso (fiquem tranquilos), coloco um resumo da abordagem axiomática. Acho que possa despertar uma curiosidade.

intermezzo: abordagem axiomática para definir  $\mathbb{R}$

Na definição seguinte, o leitor deve fazer um esforço: “esquecer” os conhecimentos que tem sobre os números e pensar no  $\mathbb{R}$  como num conjunto “abstrato”, encontrado aqui pela primeira vez. Ele será definido pelas propriedades que são aqui dadas como axiomas.

**Definição axiomática de  $\mathbb{R}$ .** O conjunto  $\mathbb{R}$ , dito dos “números reais”, é um conjunto onde são definidas duas operações, *soma* e *produto*, uma *relação de ordem* e um *axioma de continuidade*. A soma é uma correspondência que a cada par de elementos  $a$  e  $b$  de  $\mathbb{R}$  associa um elemento de  $\mathbb{R}$ , denotado pelo símbolo  $a + b$ , e que deve verificar as propriedades seguintes:

- S1) *Propriedade comutativa da soma:*  $\forall a, b \in \mathbb{R}, a + b = b + a$ ;
- S2) *Propriedade associativa da soma:*  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b) + c = a + (b + c)$ ;
- S3) *Existência do elemento neutro da soma:* existe um único elemento de  $\mathbb{R}$ , denotado por 0, tal que,  $\forall a \in \mathbb{R}, a + 0 = a$  e 0 é dito *elemento neutro da soma*;
- S4) *Existência do oposto:*  $\forall a \in \mathbb{R}$  existe um elemento de  $\mathbb{R}$ ,  $b$ , dito *oposto* de  $a$ , tal que  $a + b = 0$ . Este oposto  $b$  pode ser denotado por  $-a$  e a operação  $a + (-a) = 0$  pode ser escrita simplesmente  $a - a = 0$ .

Analogamente, o produto é uma correspondência que a cada par de elementos  $a$  e  $b$  de  $\mathbb{R}$  associa um elemento de  $\mathbb{R}$ , denotado pelo símbolo  $a \cdot b$ , e que deve verificar as propriedades seguintes:

- P1) *Propriedade comutativa do produto:*  $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab = ba$ ;
- P2) *Propriedade associativa do produto:*  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, (ab)c = a(bc)$ ;
- P3) *Existência do elemento neutro do produto:* existe um único elemento de  $\mathbb{R}$ , denotado por 1, tal que,  $\forall a \in \mathbb{R}, a \cdot 1 = a$  e 1 é dito *elemento neutro do produto*;
- P4) *Existência do inverso:*  $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ , existe um elemento de  $\mathbb{R}$ ,  $b$  tal que  $a \cdot b = 1$ ;  $b$  é dito *inverso* de  $a$  e pode ser escrito como  $1/a$ .

A *propriedade distributiva* liga soma e produto:

$$\text{SP)} \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}, (a + b)c = ac + bc.$$

Em  $\mathbb{R}$  é definida uma relação de ordem. Em geral, uma *relação de ordem* em um conjunto (também chamada *ordenamento*) é uma relação binária, ou seja, uma lei que associa uma informação a cada par de elementos do conjunto. No caso da relação de ordem, a cada par de elementos  $a$  e  $b$  do conjunto  $C$  investigado associa a informação  $a \leq b$ , ou seja  $a$  é menor o igual a  $b$ , ou também *escrevo  $a$  à esquerda de  $b$* . O que significa na prática? Pegu um conjunto  $C$  de

três elementos: uma banana, uma pera, uma laranja. Defino um ordenamento em  $C$  dizendo que banana  $\leq$  pera, pera  $\leq$  laranja, laranja  $\leq$  banana. Esta relação tem uma utilidade? Não sabemos por enquanto. É um ordenamento?<sup>3</sup>

Não todas as relações binárias são ordenamentos. Uma relação de ordem é corretamente definida, num conjunto  $C$ , se verifica as três propriedades seguintes:

- (1) (propriedade reflexiva)  $a \leq a$ , para todo  $a \in C$ ;
- (2) (propriedade antisimétrica) se  $a \leq b$  e  $b \leq a$ , então,  $a = b$ ;
- (3) (propriedade transitiva) se  $a \leq b$  e  $b \leq c$ , então,  $a \leq c$ .

Voltando a  $\mathbb{R}$ , ele é um conjunto onde é definido um ordenamento que se relaciona às operações de soma e produto graças às duas propriedades seguintes:

- OS)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ , se  $a \leq b$ , então  $a + c \leq b + c$ ;  
 OP)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ , com  $c > 0$ , se  $a \leq b$ , então  $ac \leq bc$ .

O símbolo  $a < b$  deve ser pensado como  $a \leq b$  e  $a \neq b$ .

**Exercício 20.** Dê exemplos, da vida real, de relações de ordem e de relações que não são de ordem.

**Exercício 21.** Provar, usando as propriedades acima dos números reais, as propriedades seguintes:

- 1)  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,  $a \cdot 0 = 0$ ;
- 2)  $\forall a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0 \Rightarrow -a < 0$ ;
- 3)  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , se  $a > 0$  e  $b < 0$ , então  $ab < 0$ ;
- 3b)  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , se  $a > 0$  e  $b > 0$ , então  $ab > 0$ ;
- 3c)  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , se  $a < 0$  e  $b < 0$ , então  $ab > 0$ ;
- 4)  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ , se  $c < 0$ , se  $a \leq b$ , então  $ac \geq bc$ ;
- 5)  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , com  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a \leq b$  se e somente se  $a^2 \leq b^2$ .
- 6)  $\forall a, b \in \mathbb{R}$ , com  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a \leq b$  se e somente se  $1/a \geq 1/b$ ;
- 7) nos itens 4,5,6 vale a desigualdade estrita na tese se é verificada na hipótese?
- 8) dado  $a \in \mathbb{R}$ , prove que  $-1 \cdot a$  é o oposto de  $a$ .

O leitor pode observar que se trata do mesmo exercício colocado nas páginas anteriores.

O exercício acima pode desorientar, parecendo óbvio. De fato, queremos que as propriedades acima sejam provadas *só usando as 11 propriedades algébricas introduzidas acima em  $\mathbb{R}$ , que deve ser pensado, como já foi dito, como um conjunto abstrato*.

**Exercício 22.** Dado um conjunto abstrato que admite as duas operações de soma e produto e uma relação de ordem tal que as 11 propriedades acima sejam verificadas, prove que 0 e 1 são necessariamente diferentes. Prove que a soma e o produto não podem ser a mesma operação. Prove que não podemos ter dois elementos neutros da soma e prove que não podemos ter dois elementos neutros do produto. Este inteligente exercício foi sugerido por alguns alunos do curso de Análise Real de 2018.

Pode ser provado que  $\mathbb{Q}$  é um conjunto onde podem ser introduzidas as operações de soma e produto e a relação de ordem tais que as onze propriedades acima sejam verificadas. A demonstração disso levaria um tempo.

Vamos agora introduzir o axioma de continuidade, aquilo que diz que  $\mathbb{R}$  (se existir) não pode ser  $\mathbb{Q}$ . Ou seja, se existir um conjunto abstrato, que estamos chamando de  $\mathbb{R}$  que admite uma soma, um produto e um ordenamento com as onze propriedades acima e que verifica também o próximo axioma de continuidade, ele não pode ser  $\mathbb{Q}$ .

---

<sup>3</sup>Não.

**Definição 12.** Dados dois números reais  $a$  e  $b$ , é dito *intervalo* de *extremos*  $a$  e  $b$  cada um dos conjuntos seguintes:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}.$$

O primeiro e o quarto dos intervalos anteriores são ditos respectivamente *fechado* e *aberto*. Não esquecemos os intervalos

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\},$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\},$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}.$$

O primeiro e o terceiro são *fechados*, enquanto o segundo e o quarto são *abertos*.

Como o leitor sabe desde os cursos de Cálculo, os símbolos  $+\infty$  e  $-\infty$  não denotam elementos do conjunto  $\mathbb{R}$ , mas o símbolo  $(-\infty, b)$ , por exemplo, denota o intervalo dos números de  $\mathbb{R}$  menores de  $b$ .

**Exercício 23.** Prove que o conjunto  $\mathbb{R}$  possui infinitos números maiores de zero (que podemos chamar *positivos*). Use unicamente as 11 propriedades que definem  $\mathbb{R}$  e eventualmente consequências delas.

**Exercício 24.** Dado qualquer  $b \in \mathbb{R}$ , prove que o intervalo  $(-\infty, b)$  possui infinitos elementos.

Consideramos agora uma sequência (infinita) de intervalos fechados,  $I_k = [a_k, b_k]$  tais que  $I_k \subseteq I_{k-1}$  e  $b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2}$ . Na igualdade anterior, o número 2, que aparece pela primeira vez, é definido por  $2 = 1 + 1$ , assim como todos os números inteiros usados para “contar” os intervalos são definidos como somas de 1. Observe que, acima, se o primeiro intervalo da sequência é denotado por  $I_0 = [a_0, b_0]$  temos  $b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k}$ .

Uma família de intervalos  $I_k$  como acima é chamada *família de intervalos encaixantes*.

**Axioma de continuidade.** Dada uma sequência (infinita) de intervalos encaixantes  $I_k$  como acima, existe e é único um elemento de  $\mathbb{R}$  que pertence a todos os  $I_k$ .

**Definição 13.** Dado  $a > 0$ , se existe um número real  $b > 0$  tal que  $b^2 = a$ , chamamos  $b$  de *raiz quadrada* de  $a$ .

Usando o axioma de continuidade poderíamos provar que cada  $a$  positivo (ou seja  $> 0$ ) possui raiz quadrada. Porém a prova será feita depois da introdução das funções contínuas.

**Exercício 25.** Usando as propriedades algébricas dos números reais, prove que a raiz quadrada de  $a > 0$ , se existir, é única.

O Axioma de Arquimédes pode ser não dificilmente provado usando o Axioma de continuidade também nesta versão.

Não tudo é resolvido. Três problemas interessantes, que não tenho o tempo material agora de aprofundar, aparecem. O primeiro é: se  $\mathbb{R}$  for definido dessa forma abstrata, quem garante que de fato existe? Segunda questão: posto que  $\mathbb{R}$  exista, é o único sistema numérico que verifica os 11 axiomas algébricos e o Axioma de Continuidade? E finalmente: posto que às duas questões acima seja possível dar resposta afirmativa, como eu consigo identificar em  $\mathbb{R}$  os números inteiros positivos? Se consigo isso obtenho automaticamente  $\mathbb{Z}$  e  $\mathbb{Q}$ . E portanto os números irracionais. Mas como defino  $\mathbb{N}$ ? Eu poderia talvez tentar dizer que 1 é natural (1 é identificado como neutro do produto, portanto se sabe quem é).  $1+1$  é natural e continuando assim. Agora o “continuando assim” não é tão óbvio. E todas essas perguntas são interessantes e não simples e mereceriam o tempo que eu gostaria ter e não tenho para responder aqui.

fim do intermezzo

#### 4. Quarta-feira, 28 de abril de 2021

**Definição 14.** Dados  $A$  e  $B$  conjuntos quaisquer, uma *função*  $f : A \rightarrow B$  é uma lei que a cada elemento de  $A$  associa um e só um elemento de  $B$ .

**Definição 15.**  $A$  se chama *domínio* da função,  $B$  é dito *contradomínio*. O conjunto dos valores atingidos por  $f$  se chama *imagem* de  $f$ , denotado por  $\text{Im}(f)$  ou  $f(A)$ . Ou seja:

$$\text{Im}(f) = \{y \in B : \text{existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y\}.$$

$\text{Im}(f)$  é um subconjunto do contradomínio (pode ser igual). Se  $C \subseteq A$ , definimos a imagem de  $C$  por meio de  $f$  como o conjunto

$$f(C) = \{y \in B : \text{existe } x \in C \text{ tal que } f(x) = y\}.$$

Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , o *produto cartesiano* entre  $A$  e  $B$  é um novo conjunto, que denotamos pelo símbolo  $A \times B$  definido por

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Agora podemos definir o *gráfico* de  $f : A \rightarrow B$ ,  $G(f)$ , como

$$\{(a, b) \in A \times B : f(a) = b\}.$$

**Observação 16.** O leitor deve perceber que a definição de gráfico é uma definição técnica: um gráfico não é um genérico desenho, mas é um conjunto, definido com precisão e que depende de uma função dada. Outra coisa é tentar desenhar o gráfico (coisa, em princípio, que pode ser interessante para entender o comportamento de uma função).

Consideramos como conhecidas pelo leitor as funções polinomiais e os quocientes de polinômios. Se, em um exercício, aparece uma função sem que seja denotado explicitamente o domínio, consideramos implicitamente que o domínio é o maior conjunto possível onde a função pode ser definida. Por exemplo, se encontramos  $f(x) = x^2$ , entendemos que o domínio é  $\mathbb{R}$ . Por outro lado, a notação  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2$  indica uma função definida somente em  $[0, 1]$ . O leitor deve perceber que estas  $f$  e  $g$  são duas funções diferentes.

**Definição 17. (de raiz  $n$ -ésima.)** Dados um número inteiro  $n \geq 1$  e um número real não negativo  $x$ , a raiz  $n$ -ésima de  $x$ , em símbolos  $\sqrt[n]{x}$ , é o número não negativo  $y$  tal que  $y^n = x$ .

**Exercício 26.** Prove que, dado  $x > 0$ , a raiz quadrada de  $x$  é única (sugestão: usar a propriedade que liga o ordenamento e o produto). O que significa este exercício? Pegamos  $\pi$  por exemplo (conhecemos  $\pi$  como o valor da área do disco de raio 1, por exemplo). Temos certeza de que existe um número real (e positivo)  $a$  tal que  $a^2 = \pi$ ? a resposta é sim, mas a prova não é óbvia. Iremos provar este fato mais para frente, usando propriedades das funções contínuas. Este exercício é muito mais simples: pede ao leitor provar que, se existem  $a$  e  $b$  reais e positivos tais que  $a^2 = b^2$ , então deve ser  $a = b$ . O exercício quer unicamente o uso da propriedade OP que relaciona o ordenamento com o produto.

Vamos resumir a questão da existência da raiz no teorema que vem. Que será provado, como dito no exercício acima, depois da introdução do conceito de função contínua. Entretanto, iremos usar a raiz  $n$ -ésima aceitando sua existência.

**Teorema 18.** *Dados um número inteiro  $n \geq 1$  e um número real não negativo  $x$ , existe um número não negativo  $y$  tal que  $y^n = x$ .*

Graças ao exercício 26 e ao teorema 18 é corretamente definida a função raiz  $n$ -ésima.

A raiz  $n$ -ésima de  $x$ , no caso em que  $n$  seja ímpar, pode ser estendida aos números reais negativos. Se  $n$  é ímpar e  $x < 0$ , podemos dar duas definições equivalentes: (a) a raiz  $n$ -ésima de  $x$  será aquele número negativo  $y$  tal que  $y^n = x$ ; (b) a raiz  $n$ -ésima de  $x$  será aquele número negativo  $y$  obtido como  $y = -\sqrt[n]{-x}$ , onde o valor  $\sqrt[n]{-x}$  é obtido pela definição 17 (observe que  $-x$  é positivo).

Assim a raiz  $n$ -ésima de  $x$  será uma função definida em todo  $\mathbb{R}$  se  $n$  for ímpar.

**Definição 19.** Dado um número real  $a$ , definimos *módulo* (ou *valor absoluto*) de  $a$  número não negativo

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

**Exercício 27.** Prove as *desigualdades triangulares* seguintes: para todos  $a, b \in \mathbb{R}$ , temos

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad |a - b| \geq |a| - |b|.$$

As funções trigonométricas seno, cosseno e tangente são definidas intuitivamente a partir da construção clássica que se baseia na circunferência de  $\mathbb{R}^2$  centrada na origem e de raio 1. Assim o domínio de  $\sin x$  e  $\cos x$  será  $\mathbb{R}$ , o domínio de  $\tan x$  será  $\{x \in \mathbb{R} : x \neq k + \pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$ . Além disso, cabe lembrar que  $\sin x$  e  $\cos x$  são periódicas de período  $2\pi$ , ou seja

$$\sin x = \sin(x + 2\pi), \quad \cos x = \cos(x + 2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

A tangente é periódica de período  $\pi$ . Além disso, sempre devido à construção geométrica que aqui não vamos aprofundar, é possível provar que seno e tangente são ímpares, ou seja:

$$\sin x = -\sin(-x), \quad \tan x = -\tan(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

equanto cosseno é par, ou seja

$$\cos x = \cos(-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Será importante lembrar os valores de seno, cosseno e tangente de alguns arcos importantes:  $0$ ,  $\pi/6$ ,  $\pi/4$ ,  $\pi/3$ ,  $\pi/2$  e os correspondentes deles nos outros quadrantes. Inclusive, as fórmulas de soma (e as imediatas consequências delas) serão importantes:  $\sin(a + b)$  e  $\cos(a + b)$ .

Concluimos lembrando a fórmula mais importante de toda a trigonometria:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

que depende diretamente da definição de seno e cosseno.

**Exercício 28.** A partir das fórmulas (que o leitor provavelmente conhece)

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a, \quad \text{e} \quad \cos(a - b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

calcule  $\sin(a - b)$  e  $\cos(a + b)$ .

Vamos lembrar aqui, sem dar a prova que pode ser obtida usando a ferramenta clássica da geometria euclidiana, as assim chamadas *fórmulas de prostaferese* (que o leitor não precisa minimamente lembrar). Serão utilizadas para calcular os limites das funções seno e cosseno.

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}.$$

Alguns exercícios.

**Exercício 29.** Escrever a união e a interseção do seguinte par de conjuntos  $A$  e  $B$ . Dizer se vale a relação  $A \subseteq B$  ou  $B \subseteq A$ . Determinar enfim  $A \setminus B$  e  $B \setminus A$ .

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^2 - 4} \geq 0\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \geq 0\}.$$

**Exercício 30.** Resolver as inequações seguintes.

- |   |  |
|---|--|
| 1. $x^2 - 2x - 1 \leq 0$                | 2. $3x^2 - x + 2 > 0$                          |
| 3. $\frac{x-2}{x+1} > \frac{1}{x-1}$    | 4. $\frac{x^2+x-1}{x^2-2x+1} \leq \frac{1}{2}$ |
| 5. $x^4 - \frac{3}{4}x^2 > \frac{1}{4}$ | 6. $x^2 \leq 1$                                |
| 7. $\frac{2}{x} + 3 < \frac{4}{x} - 1$  | 8. $\frac{3}{x^2} + 1 \leq x^2 - 1$            |
| 9. $\sqrt{x-1} < x-3$                   | 10. $\sqrt{x^2+2x-1} > 3-x$                    |
| 11. $\sqrt{x-1} < \sqrt{x}$             | 12. $ x^2-4x-5  > -x$                          |
| 13. $\sqrt{-x} < 5+x$                   | 14. $ -6x+3  > -x+2$                           |

**Exercício 31.** Sejam  $A$  e  $B$  dois subconjuntos de  $\mathbb{R}$  tais que  $A \subseteq B$ . Prove que  $\sup A \leq \sup B$  e  $\inf A \geq \inf B$ .

**Exercício 32.** Seja  $A = \bigcup_{n \geq 2} A_n$ , onde, para cada  $n$ ,  $A_n = \left(-1 - \frac{1}{2n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$ . Determine supremo, ínfimo, e (se existem) máximo e mínimo.

Concluo com um esclarecimento sobre o conceito de intervalo (não vou tratar na aula em detalhes). Dados  $a$  e  $b$  reais, temos quatro tipos de *intervalos de extremos*  $a$  e  $b$ :

$$\begin{aligned} [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, & [a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \\ (a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, & (a, b) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}. \end{aligned}$$

O primeiro é dito fechado, o quarto é dito aberto. Os *intervalos ilimitados* são os seguintes:

$$\begin{aligned} [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}, & (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\}, \\ (-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}, & (-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}. \end{aligned}$$

**Exercício 33.** Considere a seguinte definição de intervalo:  $I$  é um intervalo de  $\mathbb{R}$  se (e somente se) para todo  $x, y \in I$ , com  $x < y$  e para todo  $z$  tal que  $x < z < y$ , então  $z \in I$ . Essa definição é equivalente à definição acima, mais detalhadas, que coloca os vários casos?

### 5. Sexta-feira, 30 de abril de 2021

Sejam duas funções  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $\text{Im}(f) \subseteq B$ . Definimos *função composta*  $g \circ f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , a função

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Analogamente, se  $\text{Im } g \subseteq A$ , definimos  $f \circ g : B \rightarrow \mathbb{R}$  como  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ .

**Exercício 34.** Escreva as composições  $f \circ g$  e  $g \circ f$  das funções seguintes, determinando os domínios das funções obtidas.

- |   |  |
|---|--|
| 1. $f(x) = x + x^3, \quad g(x) = 3 - x$                   | 2. $f(x) = x^2, \quad g(x) = \sqrt{x}$               |
| 3. $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - \frac{1}{2}}$ | 4. $f(x) = \cos x, \quad g(x) = x^2 + 1$             |
| 5. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad g(x) = 2 - x^2$         | 6. $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = (\tan x)^2$   |
| 7. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad g(x) = 2 - x^2$         | 8. $f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad g(x) = (\sqrt{x})^2$ |
| 9. $f(x) = \frac{1+x}{x}, \quad g(x) = 2 - x$             | 10. $f(x) = 2^{[x]}, \quad g(x) = 3x - 1$            |

No item 10 acima, o símbolo  $[x]$  se chama *parte inteira* de  $x$  e significa o maior inteiro relativo que não ultrapassa  $x$ . Por exemplo:  $[4] = 4$ ,  $[5/2] = 2$ ,  $[\sqrt{2}] = 1$ ,  $[-1/3] = -1$ , etc.

**Exercício 35.** Escreva as funções seguintes como composição de funções. (As composições obtidas podem não ser as únicas possíveis.)

- |                               |                 |
|-------------------------------|-----------------|
| 1. $x^2 \sin x^2$             | 2. $\sqrt{1+x}$ |
| 3. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ | 4. $x^4$        |

**Definição 20.** Uma função é dita *limitada* (*superiormente*, *inferiormente*) se a imagem dela é limitada (superiormente, inferiormente). Neste caso o *supremo* (*ínfimo*) de  $f$ ,  $\sup f$  ( $\inf f$ ) é, por definição, o supremo (ínfimo) de  $\text{Im}(f)$ .

**Definição 21.** Uma função  $f : A \rightarrow B$  é dita *injetora* se, para todos  $a, b \in A$ , tais que  $a \neq b$ , temos  $f(a) \neq f(b)$ . É dita *sobrejetora* se  $\text{Im}(f) = B$ . Se  $f$  é injetora e sobrejetora é chamada *bijetora* (ou *correspondência biunívoca*).

Uma função injetora é também chamada *inversível*. Não interessa que seja sobrejetora.



**Definição 22.** Se  $f : A \rightarrow B$  é injetora, definimos a *função inversa* de  $f$  como a função  $g : \text{Im}(f) \rightarrow A$  que associa a cada  $y \in \text{Im}(f)$  o único  $x \in A$  tal que  $f(x) = y$ . A função inversa é denotada, em geral, por  $f^{-1}$ . Em outras palavras, a função inversa, denotada por  $f^{-1}$  é definida em  $\text{Im}(f)$  e verifica  $(f \circ f^{-1})(x) = x$  para todo  $x \in \text{Im}(f)$  e  $(f^{-1} \circ f)(x) = x$  para todo  $x \in A$ .

**Definição 23.** Sejam  $A, B$  dois conjuntos, e  $f : A \rightarrow B$  uma função dada. Dado um subconjunto  $C$  de  $B$ , o conjunto  $\{x \in A : f(x) \in C\}$  é chamado *imagem inversa* de  $C$ .

**Observação 24.** Cuidado em não fazer confusão entre a imagem inversa (de um conjunto) que sempre é um conjunto e a função inversa, quando existe, que é uma função. A notação não ajuda, sendo  $f^{-1}$  o mesmo símbolo para os dois conceitos.

**Exercício 36.** Dadas as funções seguintes, calcule a imagem inversa dos conjuntos indicados ao lado

- |                                      |   |
|--------------------------------------|---|
| 1. $2 - x, \quad (-10, 3]$           | 2. $x^2 - x + 3, \quad (0, 5)$            |
| 3. $\frac{x}{x-2}, \quad \mathbb{R}$ | 4. $\sqrt{ x-1 }, \quad [0, 1]$           |
| 5. $[1 + x^2], \quad (1, 4)$         | 6. $\text{sign}(x^2 - 2), \quad (1/2, 2)$ |

#### Alguns exemplos e observações.

- (1)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \sqrt{x}$ , não é uma função. De fato, para cada  $x < 0$ ,  $\sqrt{x}$  não existe.
- (2) Pelo contrário, é bem definida a função  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$ .
- (3)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ .  $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$ .
- (4)  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . O domínio e a imagem desta função são diferentes dos aqueles do exemplo anterior. Se duas funções têm domínios diferentes são duas funções, mesmo possuindo a mesma lei.
- (5)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Esta função é uma *extensão* de  $1/x$  a tudo  $\mathbb{R}$ . Para obter uma extensão, precisa assinar um valor  $f(0)$ . Tal valor será necessariamente uma escolha e não poderá ser dado por  $1/0$ .

$$(6) f : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 5 & \text{se } 3 < x < 4 \\ -3 & \text{se } x = 4 \end{cases}$$

A  $f$  acima é uma função e não três funções. O leitor reflita sobre este fato. O leitor também discuta como exercício uma afirmação que várias vezes se encontra em sala de aula, “ $f$  é constante em  $x = 4$ ”. Diga porque tal afirmação não faz nenhum sentido.

**Exercício 37.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada *par* se  $f(x) = f(-x)$ , para todo  $x$ . É chamada *ímpar* se  $f(x) = -f(-x)$ , para todo  $x$ . Prove que  $x^2 + 1$  é par e que  $\frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$  é ímpar.

**Exercício 38.** Uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é chamada *par* se  $f(x) = f(-x)$ , para todo  $x$ . É chamada *ímpar* se  $f(x) = -f(-x)$ , para todo  $x$ . Prove que  $x^2 + 1$  é par e que  $\frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$  é ímpar.

**Exercício 39.** Complete a terceira coluna da tabela dizendo se o resultado é uma função par, ímpar, ou nenhuma das duas coisas.

$f$ par	$g$ par	$f + g?$	$f \cdot g?$	$f \circ g?$	$g \circ f?$
$f$ ímpar	$g$ par	$f + g?$	$f \cdot g?$	$f \circ g?$	$g \circ f?$
$f$ ímpar	$g$ ímpar	$f + g?$	$f \cdot g?$	$f \circ g?$	$g \circ f?$
$f$ ímpar		$1/f?$	$f^{-1}?$		
$f$ par		$1/f?$	$f^{-1}?$		

**Exercício 40.** A soma de duas funções inversíveis é inversível? o produto? a composição?

Dada  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  e dado um suconjunto  $B$  de  $E$ , a função  $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = f(x)$  para todo  $x \in B$  é dita *restrição* de  $f$  em  $B$ , o símbolo é  $f|_B$ .

**Definição 25.** Dada uma função  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ :

- (1)  $f$  é dita *monótona crescente* se, para cada  $x_1, x_2$  em  $E$ , com  $x_1 \leq x_2$ , temos  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .
- (2)  $f$  é dita *estritamente crescente* se para cada  $x_1, x_2$  em  $E$ , com  $x_1 < x_2$ , temos  $f(x_1) < f(x_2)$ .
- (3)  $f$  é dita *monótona decrescente* se, para cada  $x_1, x_2$  em  $E$ , com  $x_1 \leq x_2$ , temos  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .
- (4)  $f$  é dita *estritamente decrescente* se para cada  $x_1, x_2$  em  $E$ , com  $x_1 < x_2$ , temos  $f(x_1) > f(x_2)$ .

**Exercício 41.** Estudar a monotonia das funções seguintes:

- (1)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ,
- (2)  $f : [2, 6] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4$ ,
- (3)  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x}$ ,
- (4)  $f : (-\infty, -2), f(x) = \sqrt{-x}$ ,
- (5)  $f[-5, -4] \cup [1, 2], f(x) = 1/x$ .

**Exercício 42.** Desenhar intuitivamente os gráficos das funções acima.

**Exercício 43.** Provar que a soma e de duas funções crescentes é uma função crescente. A composição de duas funções crescentes é uma função crescente? E o produto?

**Exercício 44.** Determine, para cada função seguinte, o maior domínio onde é inversível.

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } 0 < x < 1 \\ x + 1 & \text{se } 2 < x < 3 \end{cases} \quad 2. \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 < x \leq 0 \\ x - 1 & \text{se } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

**Exercício 45.** Prove que uma função estritamente crescente ou decrescente é inversível. Se  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é inversível, necessariamente é estritamente monótona? Procure exemplos.

**Exercício 46.** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $f(x) = x^2$  é inversível?

**Exercício 47.** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $f(x) = x^3$  é inversível?

**Exercício 48.** A função  $f : [-3, -2] \cup [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $f(x) = x^2$  é inversível?

**Exercício 49.** A função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $f(x) = \sqrt{|x|}$  é inversível?

**Exercício 50.** A função  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como  $f(x) = \sqrt{x^3 + x^4 + 2}$  é inversível?

**Exercício 51.** Determine  $\sin 2x$  e  $\cos 2x$  em função de  $\sin x$  e  $\cos x$  (fórmulas de duplicação). Determine  $\sin \frac{x}{2}$  e  $\cos \frac{x}{2}$  em função de  $\sin x$  e  $\cos x$  (fórmulas de divisão).

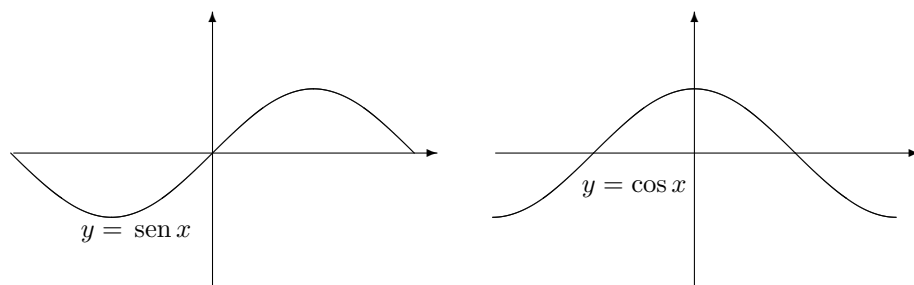
**Exercício 52.** Provar que a tangente é periódica com período  $\pi$ . Dica: use as fórmulas de duplicação, sabendo também que seno e cosseno são periódicas de período  $2\pi$ .

## 6. Segunda-feira, 3 de maio de 2021

A funções trigonométricas não são invertíveis (porque são periódicas e portanto não são injetoras). Porém, observamos por meio da construção geométrica das funções trigonométricas, feita através da circunferência trigonométrica, que  $\sin x$  é estritamente crescente em  $[-\pi/2, \pi/2]$ . Então, a restrição de  $\sin x$  a  $[-\pi/2, \pi/2]$  é invertível. A sua função inversa se chama *arcosseno*,  $\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ . A imagem de  $\arcsin$  é  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

Analogamente,  $\cos x$  é invertível em  $[0, \pi]$ . A sua função inversa se chama *arcocosseno*,  $\arccos : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , com imagem  $[0, \pi]$ .

A tangente é invertível em  $(-\pi/2, \pi/2)$ . A sua função inversa se chama *arcotangente*,  $\arctg : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , e tem imagem  $(-\pi/2, \pi/2)$ .



graficos de  $f(x) = \sin x$  e  $f(x) = \cos x$ .

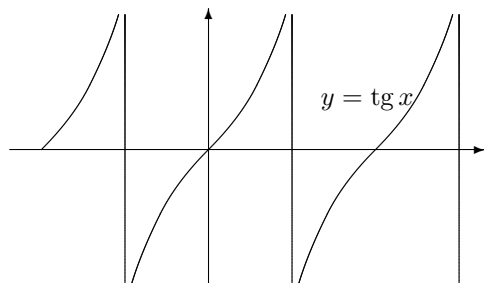
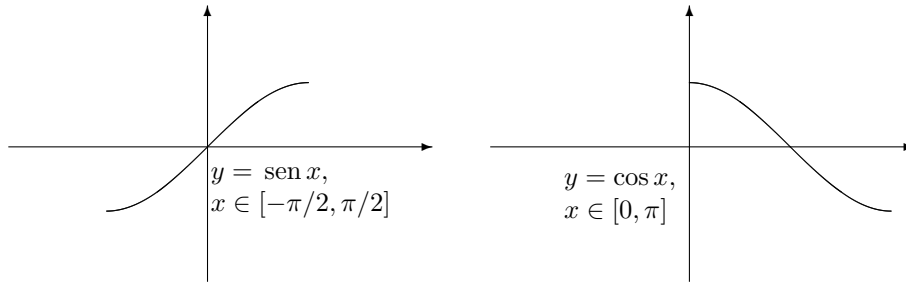


gráfico de  $f(x) = \operatorname{tg} x$ .

Aqui em baixo os gráficos das restrições inversíveis de seno, cosseno e tangente. O leitor poderia observar que os domínios escolhidos não são os únicos onde as funções são inversíveis. Seno, por exemplo, é inversível também em  $[2\pi, 2\pi + \pi/2]$ . É verdade. A escolha dos domínios acima é feita para unicamente para simplificar.



gráficos de  $f(x) = \text{sen } x$  e  $f(x) = \text{cos } x$  restringidos.

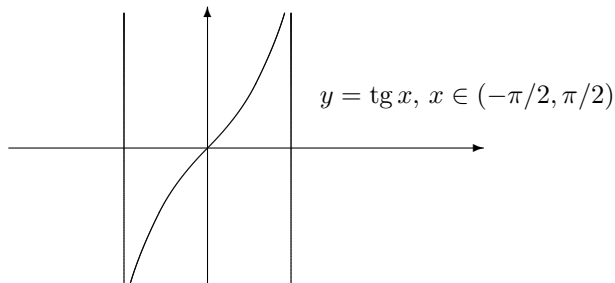
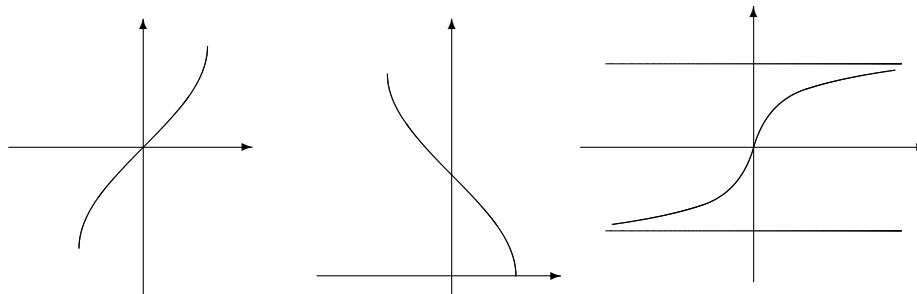


gráfico de  $f(x) = \text{tg } x$  restringida.

Agora os gráficos das funções trigonométricas inversas.



gráficos de  $f(x) = \text{arcsen } x$ ,  $f(x) = \text{arccos } x$  e  $f(x) = \text{arctg } x$ .

**Exercício 53.** Considere  $f : [\pi/2, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \text{sen } x$ . Verifique (sempre empiricamente, trabalhando na circunferência trigonométrica) que é inversível. Assim determine a inversa de  $f$ . Não esqueça determinar  $\text{Im}(f)$  que será o domínio da inversa. Observe que tal inversa será uma função *do tipo arcsen*, mas não poderá ser exatamente arcsen. Diga porque.

**Exercício 54.** Faça o mesmo exercício com  $f : [-\pi/2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \text{cos } x$ .

**Exercício 55.** Desenhe o gráfico de  $f(x) = [2x + 1]$  (parte inteira).

**Exercício 56. (difícil)** Desenhe o gráfico de  $f(x) = 1 + 2 \left[ \frac{x}{1+x^2} \right]$  (parte inteira).

**Exercício 57.** Diga se as funções seguintes são periódicas. Se sim, encontre o período (uma função  $f$  é periódica de período  $T \in \mathbb{R}$  se  $f(x) = f(x+T)$  para todo  $x$ ).

- |                                |                   |
|--------------------------------|-------------------|
| 1. $x \cos x$ ,                | 2. $6 \sin^2 x$ , |
| 3. $1 + \operatorname{tg} x$ , | 4. $\sin(x^2)$ ,  |
| 5. $4$ ,                       | 6. $[x]$ ,        |
| 7. $\cos 4x$ ,                 | 8. $\sin(3x)$ .   |

**Exercício 58.** Diga se as funções seguintes são pares ou ímpares.

- |                                |                         |
|--------------------------------|-------------------------|
| 1. $x^2 + 1$ ,                 | 2. $\frac{\sin x}{x}$ , |
| 3. $\frac{x^3 - x}{x^2 + 1}$ , | 4. $[x]$ ,              |
| 5. $\sin x^2$ ,                | 6. $\cos 3x$ .          |

Uma outra família importante de funções é formada pelas potências com expoente não necessariamente natural. Se  $n$  é inteiro,  $n \geq 1$ , sabemos que existe e é única a raiz  $n$ -ésima de  $x$  (veja-se o teorema 18). Inclusive, tal raiz é única (exercício 26). Portanto é definida a função  $\sqrt[n]{x}$ . Se  $n$  é par, o domínio é  $[0, +\infty)$ , se  $n$  é ímpar, o domínio é  $\mathbb{R}$ . A raiz  $\sqrt[n]{x}$  pode ser denotada pelo símbolo  $x^{\frac{1}{n}}$ .

Dado um racional positivo qualquer,  $m/n$ , onde  $m$  e  $n$  são primos entre si, é definida a função  $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$ , cujo domínio é  $[0, +\infty)$  se  $n$  é par, enquanto é  $\mathbb{R}$  se  $n$  é ímpar.

Dado um racional negativo,  $m/n$ , onde  $m, n \in \mathbb{Z}$  são primos entre si, é definida a função  $x^{m/n} = \frac{1}{x^{-m/n}}$ , cujo domínio é  $(0, +\infty)$  se  $n$  é par, enquanto é  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  se  $n$  é ímpar.

**Exercício 59.** Escreva em detalhes o processo resumido acima. Ou seja, a construção das potências com expoente racional a partir das potências com expoente inteiro e positivo, passando por: (a) a definição da potência com expoente zero, (b) a definição da potência com expoente inteiro negativo, (c) a definição da potência com expoente racional, positivo ou negativo.

**Exercício 60.** Determine para quais valores do expoente  $r$  racional a função  $x^r$  pode ser definida em todo  $\mathbb{R}$ .

**Exercício 61.** Explique quais problemas provocaria a definição  $0^0 = 1$ .

**Exercício 62.** Seja  $a$  positivo, real, fixado e diferente de 1. Considere a função  $f(r) = a^r$ , definida em  $\mathbb{Q}$ . Prove que

- (1)  $f$  é estritamente crescente se  $a > 1$ ;
- (2)  $f$  é estritamente decrescente se  $a < 1$ .

Como pode ser abordado o exercício? Se trata de provar que, dados  $r_1 = p/q$ ,  $r_2 = m/n$ , com  $r_1 < r_2$  e  $a > 1$ , então temos  $a^{r_1} < a^{r_2}$ . Essa desigualdade se baseia na propriedade OP (ordenamento com produto).

Agora, continuando a construção feita até agora e usando o exercício precedente, podemos finalmente dar a definição das potências com expoente real (de fato, irracional, porque se o expoente for racional, acabamos de fazer a construção). Ou seja podemos definir  $2^\pi$ , por exemplo. O método é o seguinte. Sejam  $a > 0$  e  $b \in \mathbb{R}$ , fixados. Suponhamos primeiramente que  $a$  seja maior de 1. Definimos

$$a^b = \sup\{a^r : r \in \mathbb{Q} \text{ e } r \leq b\}.$$

Se for  $0 < a < 1$ , definimos analogamente

$$a^b = \inf\{a^r : r \in \mathbb{Q} \text{ e } r \leq b\}.$$

**Exercício 63.** Porque é importante o exercício 62 para as definições acima?

**Exercício 64.** Definições muito muito parecidas poderiam ser dadas. Quais?

Podemos provar, mas é um exercício longo e cansativo, que as potências com expoente real verificam as clássicas propriedades das potências, que daqui para frente serão normalmente usadas quando for necessário.

**Exercício 65.** O leitor prove que  $f(x) = a^x$  (domínio =  $\mathbb{R}$ ) é:

- (1) estritamente crescente se  $a > 1$ ,
- (2) estritamente decrescente se  $0 < a < 1$ .

O exercício acima é difícil. O leitor tente explicitar as dificuldades.

**Exercício 66.** Prove que, dada uma constante real  $\alpha$ , a função  $g(x) = x^\alpha$  (domínio =  $(0, +\infty)$ ) é:

- (1) estritamente crescente se  $\alpha > 0$ ,
- (2) estritamente decrescente se  $\alpha < 0$ .

O exercício acima também é difícil. Fica um pouco mais acessível se limitamos a investigação aos expoentes racionais. Neste caso, ajuda começar por uma função bem simples como  $x^2$  limitada a  $(0, +\infty)$ . Se trata de provar que ela é crescente, usando a propriedade OP (ordenamento com produto).

Assim, deve-se provar que a inversa de uma função crescente também é crescente. Em particular,  $\sqrt{x}$  é crescente. Um outro passo consiste em estudar crescimento ou decrescimento de  $x^k$ , quando  $k$  é inteiro relativo. E finalmente concluir o exercício com o caso do expoente racional. Resumindo, a propriedade OP é a base de tudo e precisa somente um pouco de paciência.

**Exercício 67.** Seja  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função inversível. Suponha que  $f$  seja estritamente crescente. Prove que a inversa também é estritamente crescente.

Como dito acima, a função exponencial  $a^x$  é inversível, onde (sempre ajuda repetir, para não fazer confusão)  $a$  deve ser positivo e  $x$  pode ser real qualquer, e portanto a exponencial é definida em todo  $\mathbb{R}$ . A função inversa se chama *logaritmo*. Em particular, dado  $a$ , o símbolo da inversa é  $\log_a x$  que deve ser lida como “logaritmo em base  $a$  de  $x$ ”. Existe um número muito particular, chamado  $e$ , que é uma constante matemática que foi destacada a partir do começo do século de 1600, com os primeiros estudos sobre os logaritmos, e que se tornou de enorme importância a partir do século seguinte. Se trata de um número

transcendente, que significa que não pode ser raiz de nenhum polinômio com coeficientes inteiros, e portanto irracional. Se coloca entre 2,71 e 2,72. Existem várias definições equivalentes de  $e$ . Além daquela vista em sala de aula, uma outra, talvez a mais famosa é a seguinte: considere a sequência de números racionais

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Qual é o comportamento da sequência quando  $n$  cresce? a resposta não é tão fácil. Observe o seguinte: a base da potência é sempre maior de 1, mas si torna próxima de 1 enquanto  $n$  cresce. Se o expoente fosse fixado, o resultado da potência tenderia a 1. Por outro lado o expoente cresce e, se a base fosse fixada, sendo maior de 1, o resultado da potência tenderia a crescer indefinidamente. Em outras palavras, é como se tivesse um conflito entre bases e expoentes. Os dois empurram em direções muito diferentes. Tem um ponto de equilíbrio? Sim.

Primeiro, pode-se provar que a sequência cresce estritamente enquanto  $n$  cresce (a prova não é fácil). Segundo pode-se provar que o conjunto dos valores da sequência é limitado (a prova também não é fácil). Portanto a sequência não tem máximo, mas tem supremo finito. Tal supremo é um número que está entre 2 e 3 e que é chamado de  $e$ .

A função exponencial  $e^x$  tem propriedades muito particulares, a respeito das outras exponenciais. A inversa é denotada pelo símbolo  $\log x$ , sem necessidade de escrever a base  $e$  ao lado de  $\log$ .

**Observação 26.** *Eu uso o símbolo  $\log x$  no lugar de  $\ln x$ . O aluno que prefere está mais acostumado com o símbolo  $\ln x$ , pode continuar assim sem problemas.*

## 7. Quarta-feira, 5 de maio de 2021

Em sala de aula foi discutida de forma intuitiva uma possível introdução ao conceito de limite de uma função. A seguinte é a definição rigorosa no caso de limite finito em um ponto (que será apresentada na aula so dia 7 e que antecipo aqui).

Primeiro tipo de limite: limite finito.

**Definição 27** (limite finito). Seja  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $c \in I$ . Seja  $f : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada. O número real  $l$  é dito *limite* de  $f(x)$  para  $x$  que tende a  $c$ , em símbolos escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l,$$

se, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - l| < \varepsilon$  para cada  $x \in I$ , tal que  $0 < |x - c| < \delta$ .

**Observação 28.** Quando dizemos, acima, que  $f$  é definida em  $I \setminus \{c\}$ , não significa necessariamente que  $f$  não é definida em  $c$ . Significa que consideramos  $f$  como definida *pelo menos* em  $I \setminus \{c\}$ . Em outras palavras: *o conceito de limite nasce para esclarecer a ideia intuitiva de analisar o comportamento de  $f(x)$  quando  $x$  se aproxima de um valor  $c$  sem levar em conta quanto a função vale em  $c$ , nem se ela é ali definida. Em outras palavras, este ponto  $c$  pode não pertencer ao domínio, ou pode ser que  $f(c)$  seja muito diferente do comportamento de  $f(x)$  avaliada “nos pontos próximos de  $c$ ”.*

**Exercício 68.** Prove, usando a definição 27, que os limites seguintes são corretos. Os exercícios seguintes são muitos. Resolva somente um ou dois; já é um bom resultado.

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} 3x = 6$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$
3.  $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$
4.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 1) = -1$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  não existe
6.  $\lim_{x \rightarrow 1} x^3 = 1$
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$
8.  $\lim_{x \rightarrow 2} [x]$  não existe
9.  $\lim_{x \rightarrow -1^-} [x] = -2$
10.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2/|x| = 0$

**Exercício 69.** Considere a função

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 < x < 2 \\ x + 3 & \text{se } x \geq 2. \end{cases}$$

Prove que o limite de  $g(x)$  quando  $x \rightarrow 2$  não é 4.

Geralmente é complicado usar a definição de limite para provar que uma função  $f(x)$  não possui limite para  $x \rightarrow c$ , porque se trata de verificar que nenhum real  $l$  é limite de  $f$  quando  $x \rightarrow c$ . Um exercício mais simples é provar que é um certo valor considerado não é limite de  $f$  quando  $x \rightarrow c$ , como no exercício 69.

**Exercício 70.** Considere a função  $f(x) = \cos(1/x)$ , definida para todo  $x$  real e não nulo. Estude o comportamento dela e prove que o limite de  $f(x)$  para  $x$  que tende a zero não pode ser zero. Tente provar que nenhum número entre  $-1$  e  $1$  pode ser limite.

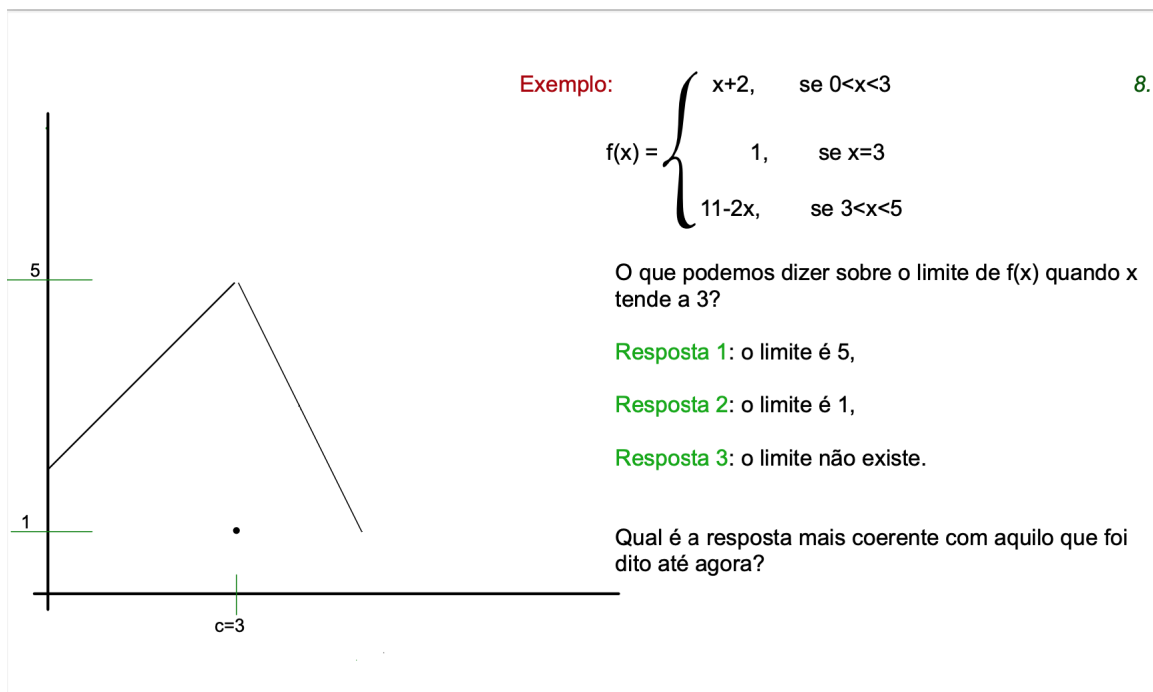
**Exercício 71.** Pegue a frase que define o limite (na definição 27): *para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - l| < \varepsilon$  para cada  $x \in I$ , tal que  $0 < |x - c| < \delta$* . Escreva a negação lógica dessa frase. A negação lógica da frase é aquilo que serve para fazer o exercício 74. Lembre que alguns exercícios das aulas anteriores trataram a negação lógica de frases.

Em uma das próximas aulas serão apresentados os conceitos de limite lateral direito e esquerdo. Eles se usam, entre outras coisas, para provar que um limite não existe.

**Exercício 72.** Considere a função  $f(x) = 1/x^2$ , definida para todo  $x$  real e não nulo. Prove que para todo  $M \in \mathbb{R}$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > M$  para cada  $x$  tal que  $0 < |x| < \delta$ . Este exercício antecipa um outro tipo de limite que será tratado mais para frente.

**Exercício 73.** Relate a discussão feita em sala de aula a respeito da função seguinte.





**Exercício 74.** Seja

$$f(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{se } 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Prove, usando a definição de limite, que o  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  não é 0 e prove que não é 1. *Observação: se por um lado sabemos usar  $\varepsilon$  e  $\delta$  a direita de 1, ou seja, quando  $f(x) = x$ , o mesmo não conseguimos ainda fazer a respeito de  $\cos(\pi x)$ , porque ainda não abordamos os limites das funções trigonométricas. Mesmo assim, propriedades mais básicas da função cosseno são suficientes para resolver o exercício.*

### 8. Sexta-feira, 7 de maio de 2021

Se torna bastante intuitivo imaginar que, se uma função tem limite igual a um valor real  $l$ , quando  $x$  tende a  $c$ , a mesma  $f$  não possa ter um outro limite  $m \neq l$ , quando  $x$  tende ao mesmo  $c$ . Contudo, a definição não diz isso. Precisa o teorema seguinte.

**Teorema 29** (unicidade do limite). *Seja  $f(x)$  uma função dada. Se ela possui limite para  $x \rightarrow c$ , ele é único*

**Demonstração.** Suponhamos  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \in \mathbb{R}$ . Seja agora  $m \in \mathbb{R}$ , diferente de  $l$ , tal que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = m$ . Sem perder em generalidade, suponhamos  $l > m$ . Seja agora  $\varepsilon > 0$  menor de  $(l - m)/2$ . Por exemplo  $\varepsilon = (l - m)/3$ . Assim,  $l - \varepsilon > m + \varepsilon$ . Pela definição de limite, valem os seguintes fatos (A) e (B):

- (A) existe  $\bar{\delta}' > 0$  tal que, para todo  $x \in I$ , tal que  $0 < |x - c| < \bar{\delta}'$ , temos  $f(x) > l - \varepsilon$ .
- (B) existe  $\bar{\delta}'' > 0$  tal que, para todo  $x \in I$ , tal que  $0 < |x - c| < \bar{\delta}''$ , temos  $f(x) < m + \varepsilon$ .

Escolhendo  $\delta = \min\{\bar{\delta}', \bar{\delta}''\}$ , as condições (A) e (B) acima, são satisfeitas para todo  $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap I \setminus \{c\}$ . Consequência delas é

$$l - \varepsilon < f(x) < m + \varepsilon,$$

para os mesmos valores de  $x$ . Isso implica  $l - \varepsilon < m + \varepsilon$  que é contraditório com a escolha inicial de  $\varepsilon$ .  $\square$

As próximas páginas são dedicadas ao cálculo dos limites de algumas das mais importantes funções elementares. Começamos pela proposição seguinte

**Proposição 30.** *Seguem diretamente da definição os limites seguintes:*

$$\lim_{x \rightarrow c} x = c, \quad \lim_{x \rightarrow c} a = a,$$

onde  $a$  é a função constante  $f(x) = a$ .

**Exercício 75.** Prove a proposição anterior usando apenas a definição de limite.

O seguinte resultado é uma ferramenta importante que permite obter muitos resultados. A partir dos resultados da proposição acima e do teorema seguinte, todos os limites de polinômios e funções racionais (quocientes de polinômios) podem ser obtidos usando a álgebra dos limites, com a única exceção dos casos em que o limite do quociente é zero. Estes casos precisam ser tratados a parte. Veremos nas próximas aulas.

**Teorema 31** (álgebra dos limites - formas finitas). *Seja  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $c \in I$  dado. Sejam  $f, g : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções dadas. Sejam dados os limites*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \in \mathbb{R}, \quad e \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = m \in \mathbb{R}.$$

Então,

- (1)  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x)) = l + m$  (soma);
- (2)  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - g(x)) = l - m$  (diferença);
- (3)  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = l \cdot m$  (produto);
- (4)  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)/g(x)) = l/m$ , se  $m \neq 0$  (quociente).

**Demonstração.** Vamos dar a demonstração do caso (1) do teorema, conforme feito em sala de aula. O caso (2) é praticamente idêntico. Para os casos 3 e 4 veja os exercícios 78 e 107, respectivamente. Seja  $\varepsilon > 0$  fixado. Queremos provar que existe  $\delta > 0$  tal que, se  $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap I$  e  $x \neq c$ , então,

$$l + m - \varepsilon < f(x) + g(x) < l + m + \varepsilon.$$

Vamos usar as hipóteses. O número  $\varepsilon > 0$  acima é fixado. Então, existem  $\delta_1$  e  $\delta_2$  positivos tais que,

$$\text{se } x \in (c - \delta_1, c + \delta_1) \cap I \text{ e } x \neq c, \text{ então } l - \varepsilon/2 < f(x) < l + \varepsilon/2, \quad (1)$$

$$\text{se } x \in (c - \delta_2, c + \delta_2) \cap I \text{ e } x \neq c, \text{ então } m - \varepsilon/2 < g(x) < m + \varepsilon/2. \quad (2)$$

Se pegamos  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ , então, as desigualdades acima são ambas verificadas se  $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap I$  e  $x \neq c$ , e portanto, somando, há

$$l + m - \varepsilon < f(x) + g(x) < l + m + \varepsilon.$$

$\square$

**Exercício 76.** O leitor tente replicar sozinho a demonstração acima. Tente explicar porque é correta a colocação de  $\varepsilon/2$  nas (1) e (2) no lugar de  $\varepsilon$ .

**Exercício 77.** O método para provar a (2) do teorema, a diferença, é muito parecido. Pode tentar sem particular dificuldade.

**Exercício 78.** Tente verificar a fórmula do teorema relativa ao limite do produto. Neste caso é bom usar a sugestão colocada nos slides da aula.

**Exercício 79.** Calcule os limites seguintes (se existem).

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+1}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x - 3}$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x + 3}{4x^2 - 2x + 1}$$

$$4. \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x + x^2}{2x^2 + x - 1}$$

**Exercício 80.** Nos três limites seguintes (que não sabemos se existem) a álgebra dos limites não pode ser diretamente aplicada. Reflita sobre as dificuldades de abordar os três casos e pense em qual poderia ser uma saída.

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x}{x - 1},$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4},$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}.$$

**Observação 32.** Quero lembrar uma observação feita em sala de aula. Vamos pegar o exercício seguinte: calcule

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^3+2)}{(x-3)(2-3x)}.$$

O denominador tende a zero quando  $x \rightarrow 3$  (de fato, também o numerador) e a álgebra dos limites não pode ser aplicada. Por outro lado é imediato ver que

$$\frac{(x-3)(x^3+2)}{(x-3)(2-3x)} = \frac{x^3+2}{2-3x}, \quad \text{se } x \neq 3.$$

Parece natural escrever

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x^3+2)}{(x-3)(2-3x)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3+2}{2-3x}. \quad (3)$$

O segundo limite é fácil. Alí a álgebra dos limites funciona sem problemas e tal limite é  $-29/7$ . E portanto parece claro concluir que o limite inicial é  $-29/7$ . Porém, este raciocínio é viciado de um passo incorreto e não é aceitável. A questão é a seguinte. Se o limite inicial é o nosso problema a ser resolvido, não sabemos se ele existe. Não sabendo se o limite existe, a igualdade (3) não pode ser colocada. O raciocínio correto é *confrontar as funções, não os limites*. Iremos escrever portanto

$$\frac{(x-3)(x^3+2)}{(x-3)(2-3x)} = \frac{x^3+2}{2-3x}, \quad \text{se } x \neq 3.$$

Como sabemos calcular o limite

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3+2}{2-3x},$$

que vale  $-29/7$ , portanto o limite inicial também vale  $-29/7$ , porque as duas funções são iguais. A diferença entre os dois métodos não é trivial. Sobretudo, não uma questão formal, mas sim substancial.

## 9. Segunda-feira, 10 de maio de 2021

No caso dos limites que envolvem a raiz quadrada, vale o resultado seguinte. A demonstração foi feita em sala de aula.

**Proposição 33.** *Seja  $f(x)$  uma função tal que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ . Então,  $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$ .*

Fica implícito que, no resultado anterior,  $l$  deve ser não negativo e  $f(x)$  deve ser não negativa para  $x$  em um conveniente intervalo que inclui  $c$  (desconsiderando, como sempre,  $f(c)$ ).

**Exercício 81.** Prove que o resultado acima vale para a raiz com qualquer índice inteiro maior ou igual de 3.

Um outro limite importante que foi provado em sala de aula é o seguinte.

$$\lim_{x \rightarrow c} a^x = a^c, \quad a > 0, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

**Exercício 82.** Replique a demonstração feita em sala de aula. Em particular, estude primeiramente o caso  $c = 0$  e depois o caso  $c$  genérico. Analise os casos  $a > 1$  e  $0 < a < 1$ .

**Exercício 83.** O caso com  $c$  genérico usa o resultado seguinte:

- *Seja  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $c \in I$ . Seja  $f : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada. Suponhamos que*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l.$$

*Seja agora  $d \neq c$  e considere o intervalo  $J = \{x \in \mathbb{R} : x + c - d \in I\}$ . Seja  $g : J \setminus \{d\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = f(x + c - d)$ . Então, temos*

$$\lim_{x \rightarrow d} g(x) = l.$$

Demonstre esse resultado e observe que vale também o vice-versa.

Observe, em conclusão, que a prova do limite (4) usa o exercício 67. Diga em qual ponto.

Um resultado clássico da teoria dos limites é o seguinte.

**Teorema 34** (confronto dos limites). *Seja  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $c \in I$ . Sejam  $f, g, h : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$  funções dadas. Suponhamos  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  para cada  $x$ . Sejam satisfeitos os limites*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow c} h(x) = l, \quad \text{onde } l \in \mathbb{R}.$$

*Então,*

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = l.$$

A demonstração foi feita em sala de aula.

**Exercício 84.** Dê a demonstração do teorema.

**Exercício 85.** Demonstre, usando o teorema do confronto, que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ . Prove também que  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ .

**Exercício 86.** Prove, usando o exercício acima, que  $\lim_{x \rightarrow c} \sin x = \sin c$  e  $\lim_{x \rightarrow c} \cos x = \cos c$ . Use as fórmulas de prostaférese, que podem ser provadas de forma geométrica (euclidiana), que foram colocadas depois do exercício 28 acima.

**Observação 35.** O leitor tome cuidado: o enunciado seguinte parece ser uma possível outra versão do teorema do confronto, mas é errado.

- Seja  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $c \in I$ . Sejam  $f, g, h : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$  funções dadas. Suponhamos  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  para cada  $x$ . Sejam dados os limites

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \quad e \quad \lim_{x \rightarrow c} h(x) = m, \quad e \text{ suponha } l, m \in \mathbb{R}, l \leq m.$$

Então,

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = p, \quad e \quad l \leq p \leq m.$$

De fato, se  $l < m$  (estritamente), não podemos saber se o limite de  $g$  existe. Veja por exemplo o caso em que  $f(x) = 0$ ,  $h(x) = 1$  e  $g(x) = [x]$ , a parte inteira. As hipóteses são todas respeitadas, mas  $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$  não existe.

**Observação 36.** Um resultado que, diversamente, é correto é o seguinte:

- Seja  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $c \in I$ . Sejam  $f, g, h : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$  funções dadas. Suponhamos que  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  para cada  $x$ . Sejam dados os limites

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l, \quad e \quad \lim_{x \rightarrow c} h(x) = m, \quad e \text{ suponha } l, m \in \mathbb{R}, l \leq m.$$

Se existe o limite

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = p,$$

então  $l \leq p \leq m$ .

**Exercício 87.** Tente entender a diferença profunda entre os dois enunciados. Depois dê uma demonstração do segundo dos dois, aquele correto.

Agora, alguns exercícios de vária natureza.

**Exercício 88.** Estude a inequação  $\sqrt{x-1} < x-3$ .

**Exercício 89.** Prove as fórmulas de prostaférese, enunciadas logo depois do exercício 28.

**Exercício 90.** Prove que a soma de dois números racionais é racional. Prove que a soma de um número racional e um número irracional é irracional.

Em geral: uma propriedade  $\mathcal{P}$  é chamada aditiva se, toda vez que duas entidades  $a$  e  $b$  verificam  $\mathcal{P}$ , também a soma  $a+b$  verifica  $\mathcal{P}$ . O leitor escreva algumas propriedades aditivas que encontrou no curso até agora.

**Exercício 91.** Prove que  $[x] + [y] \leq [x+y]$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$  ( $[x]$  denota a parte inteira de  $x$ ).

**Exercício 92.** Determine a imagem do intervalo  $(-1, 1)$  através da função  $x^3 + 2$ . Para abordar o exercício uma técnica possível é a seguinte: use a propriedade do ordenamento dos números reais segundo a qual  $ac \leq bc$  se  $a \leq b$  e  $c > 0$ . Use para provar que  $x^3$  (e consequentemente  $x^3 + 2$ ) é uma função crescente.

**Exercício 93.** Determine as inversas das funções seguintes. Não esqueça de determinar o domínio das inversas obtidas.

$$a.) -\sin x, \quad -\pi < x \leq -\pi/4; \quad b.) \cos(-x), \quad \pi \leq x < 11\pi/6; \quad a.) \operatorname{tg} x, \quad 5\pi/4 < x \leq 7\pi/4.$$

**Exercício 94.** Determine a imagem do intervalo  $(-2, 1]$  através da função  $[x - 2]^2$  (de novo  $[\cdot]$  denota a parte inteira).

**Exercício 95.** Determine a imagem inversa de  $(0, 5)$  através da função  $x^2 - x + 3$ .

**Exercício 96.** Escreva  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$  como soma de uma função par e de uma impar.

**Exercício 97.** Desenhe o gráfico da função  $f(x) = \max\{x, x^2\}$  e da função  $g(x) = \max\{|x|, x^2\}$ .

**Exercício 98.** Calcule o domínio de  $\arccos \frac{x}{x+1}$ .

**Exercício 99.** Usando o comportamento de  $\sin x$ , tente entender (e desenhar o gráfico) o comportamento de  $\sin(1/x)$  quando, em particular,  $x$  é próximo de zero. Tente justificar intuitivamente porque  $\sin(1/x)$  não admite limite quando  $x$  tende a zero.

**Exercício 100.** Uma função famosa (que o leitor irá encontrar de novo em MAT121 como função não integrável) é a *função de Dirichlet*:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Prove que  $f$  não admite limite em nenhum ponto.

**Exercício 101.** Prove, usando a definição de limite que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \sin \frac{1}{x} \right) = 0.$$

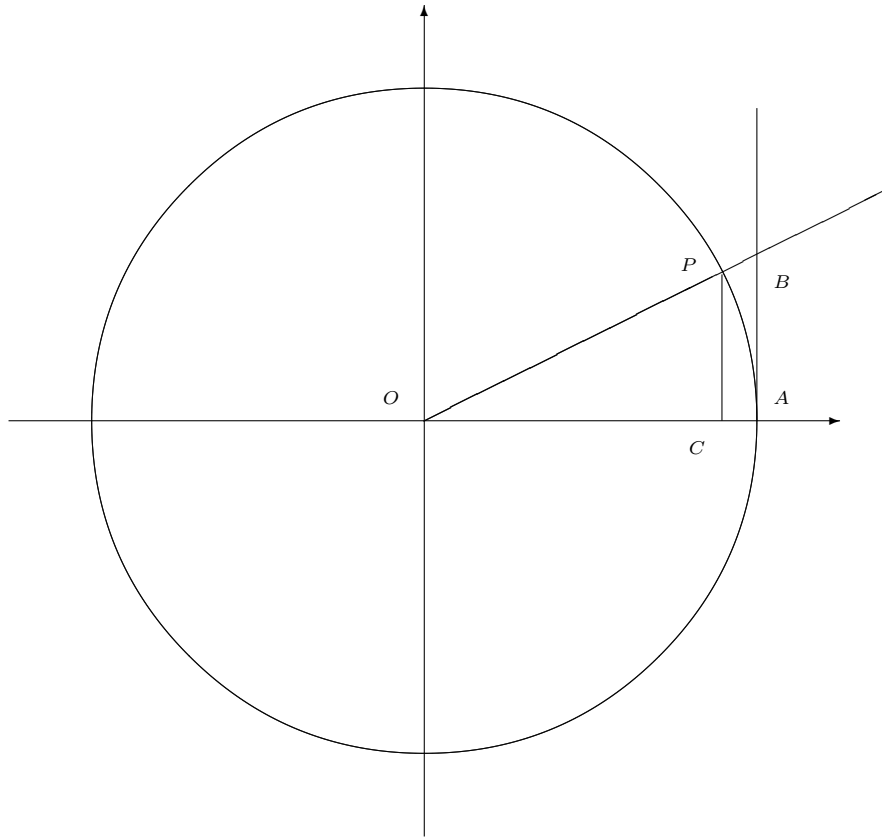
**Exercício 102.** O resultado acima é um caso particular do resultado seguinte: se  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$  e  $g(x)$  é limitada, então  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x)) = 0$ . Dê a demonstração deste fato.

## 10. Sexta-feira, 14 de maio de 2021

O teorema do confronto tem uma primeira aplicação para provar um limite importante e difícil:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (5)$$

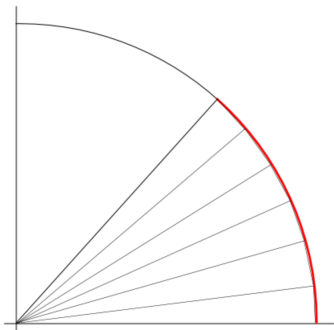
O limite acima não pode ser obtido a partir do teorema 31 porque  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ . Assim, a fórmula do quociente não pode ser aplicada. Irei mostrar uma prova baseada numa abordagem geométrica/euclidiana, e portanto não completamente satisfatória, que contém aspectos que somente em MAT121 serão claros.



Começamos considerando  $x \in (0, \pi/2)$ . Chamo  $T_1$  o triângulo  $OPA$ ,  $S$  o setor circular  $OPA$  e  $T_2$  o triângulo  $OAB$ . Vale a pena destacar, para evitar confusão, que no triângulo  $OPA$ ,  $\overline{PA}$  é o segmento, enquanto no setor  $S$ ,  $\widehat{PA}$  é o arco. Sendo  $T_1 \subseteq S \subseteq T_2$ , as áreas estão numa relação consequente:  $A(T_1) < A(S) < A(T_2)$ . Calculando as áreas, há:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}. \quad (6)$$

Precisa observar o seguinte: as desigualdades acima estão sendo obtidas pressupondo o conhecimento da área de  $S$ . Aqui temos dois problemas: (a) a área de um setor circular não é um conceito tão óbvio, assim como a área de qualquer conjunto do plano que não seja um polígono. Para definí-la precisa da integral de Riemann que é argumento de MAT121. (b) Mesmo tendo clareza sobre o conceito de área, não é imediato dizer que a área de  $S$  é  $x/2$ . Este fato poderia ser intuitivamente justificado dizendo que é proporcional à área do disco, que é  $\pi/2$ , ou observando que a área de  $S$  é resultado de um processo de aproximação da soma das áreas dos triângulos com vértices na origem e em pontos do arco. Veja a figura aqui.



Resumindo: as duas desigualdades acima precisam de uma demonstração analítica que usa fortemente o conceito de integral, do qual não temos conhecimento agora e que não cabe ao programa desse curso tratar.

Divido os termos da (6) por  $\sin x$  e multiplico por 2:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Faço a inversão:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1. \quad (7)$$

**Exercício 103.** A desigualdade acima é consequência da propriedade OP dos números reais, já usada várias vezes. Em geral, prove que, se  $a < b$  e *eles têm o mesmo sinal*, então, segue  $1/a > 1/b$ . No caso em que  $a, b$  sejam negativos, deve ser usada a seguinte consequência da OP: *se  $a < b$ ,  $a, b$  têm o mesmo sinal e  $c < 0$ , então  $ac > bc$* . Prove também este último fato.

Seja agora  $x \in (-\pi/2, 0)$ . As desigualdades (7) valem também para estes valores de  $x$ . No caso da relação entre  $\sin x$  e  $x$ , sabemos que  $\sin(-x) < -x$ , se  $x \in (-\pi/2, 0)$ . Usando o exercício anterior, temos imediatamente  $-\sin(-x) > x$  (estou multiplicando por  $-1$ ). Sendo seno ímpar, há  $-\sin(-x) = \sin x$ . Portanto,  $\sin x > x$ . Dividindo por  $\sin x$ , que é negativo, voltamos a inverter a desigualdade obtendo  $1 < x/\sin x$ . A relação com  $\tan x$  é análoga e é deixada por exercício.

Em conclusão desta parte, as desigualdades (7) valem para todo  $x \in (-\pi/2, \pi/2) \setminus \{0\}$ .

Podemos finalmente aplicar o teorema do confronto, lembrando que  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$  (exercício 85) e obter o limite (5).

**Exercício 104.** O leitor refaça a demonstração do resultado.

**Exercício 105.** Prove que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Use o limite (5). Não precisa uma construção geométrica.

Um importante resultado da teoria dos limites o seguinte.

**Teorema 37** (conservação do sinal). *Seja  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $c \in I$ . Sejam  $f, g, h : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$  funções dadas. Suponhamos que  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  para cada  $x$ . Seja*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l > 0.$$

*Então existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > 0$  para cada  $x \in (c - \delta, c + \delta) \cap I \setminus c$ .*



**Exercício 106.** Obviamente o teorema vale igualmente no caso de limite negativo. Enuncie ele.

**Exercício 107.** O teorema da conservação do sinal pode ser usado para provar o item (4) da álgebra dos limites (Teorema 31). Tente dar a não simples demonstração dela usando um truque do tipo daquele usado para provar o item (3). Veja o exercício 78.

Nas páginas anteriores foram provados os limites das funções trigonométricas e da exponencial. Os limites seguintes são relativos as funções inversas. A demonstração é adiada porque se torna bem mais simples usando as propriedades das funções contínuas.

**Proposição 38.** *Valem os limites seguintes:*

- (1)  $\lim_{x \rightarrow c} \arcsen x = \arcsen c$ , onde  $c \in [-1, 1]$ .
- (2)  $\lim_{x \rightarrow c} \arccos x = \arccos c$ , onde  $c \in [-1, 1]$ .
- (3)  $\lim_{x \rightarrow c} \arctg x = \arctg c$ , onde  $c \in \mathbb{R}$ .
- (4)  $\lim_{x \rightarrow c} \log_a x = \log_a c$ , onde  $c > 0$  e  $a > 0$ .

**Teorema 39** (limite de funções compostas). *Seja  $f(x)$  dada e suponhamos que exista o limite*

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \quad \text{onde } l \in \mathbb{R}.$$

*Seja  $g(y)$  uma outra função dada e suponhamos que exista o limite*

$$\lim_{y \rightarrow l} g(y) = g(l).$$

*Suponhamos que a composição  $g(f(x))$  seja bem definida. Então,*

$$\lim_{x \rightarrow c} g(f(x)) = g(l).$$

**Exercício 108.** A demonstração foi feita em sala de aula. Tente fazer ela de novo.

**Observação 40.** Se o limite de  $g(y)$ , no teorema acima, não fosse  $g(l)$  o teorema é falso, como podemos ver pelo contraexemplo seguinte:

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

É fácil ver que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(f(x)) = 1$ , enquanto  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ .

Na verdade, com uma hipótese específica (mas um pouco sofisticada e por isso eu não a tratei na aula) o teorema acima é verificado *também* no caso em que  $\lim_{y \rightarrow l} g(y) \neq g(l)$ . Neste caso a condição suficiente é:

- suponhamos que exista  $\delta > 0$  tal que  $f(x) \neq l$  para todo  $x \neq c$  e  $x \in (c - \delta, c + \delta)$ .

**Exercício 109.** Tente demonstrar o teorema do limite das funções compostas nessa versão. A demonstração não é imediata e se não conseguir não tem problema.

**Exercício 110.** Se  $x > 0$  e  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , o teorema 39 pode ser facilmente aplicado para provar que

$$\lim_{x \rightarrow c} x^\alpha = c^\alpha. \quad (8)$$

Se  $\alpha$  for irracional, fica mais complicado. Prove o limite acima no caso do expoente racional.

**Exemplo 41.** Em sala de aula foram tratados os exemplos seguintes que mostram a aplicação do teorema 39 e apresentam algumas dificuldades.

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \sin \left( \sqrt{x^2 + 1} \right) \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{x}}{x}$$

Aqui queremos destacar alguns fatos a respeito do segundo limite, o mais difícil dos três:

- o denominador tende a zero e isso impossibilita a aplicação da álgebra dos limites. O numerador também tende a zero e este fato é consequência do teorema 39. Como podemos tratar o exercício? Um resultado algébrico ajuda: dados  $a, b$  reais, existe uma relação simples entre  $a^3 - b^3$  e  $a - b$ :

$$a^3 - b^3 = (a^2 + ab + b^2)(a - b).$$

E analogamente temos

$$a^3 + b^3 = (a^2 - ab + b^2)(a + b).$$

Esta relação vale para qualquer  $n$  inteiro positivo:

$$a^n - b^n = (a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})(a - b),$$

que pode ser representada com o símbolo de somatória:

$$a^n - b^n = \sum_{k=1}^n a^{n-k} b^{k-1} (a - b).$$

A fórmula é intuitiva, mas sua demonstração precisa de um processo indutivo. Analogamente, se  $n$  for ímpar, temos:

$$a^n + b^n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a^{n-k} b^{k-1} (a + b).$$

Como exercício: se a fórmula acima fosse escrita também no caso de  $n$  par, qual consequência errada apareceria? Além disso, porque uma fórmula análoga à acima não pode ser obtida no caso de  $n$  par?

- Como visto em sala de aula, para resolver o limite 2.) acima, a fração é manipulada de forma conveniente para obter um quociente cujo denominador não tende a zero, e a álgebra dos limites pode ser aplicada. Em geral, imagine que um exercício peça calcular

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)},$$

e suponha

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 \quad 0 \quad \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0.$$

Para apresentar esta dificuldade é correto escrever algo tipo “ $\lim_{x \rightarrow c} (f(x)/g(x))$  é do tipo  $0/0$ ” ou “se apresenta na forma indeterminada  $0/0$ ”, ou algo do mesmo teor. *Em nenhum caso* deve ser escrita uma das duas coisas seguintes:

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}, \quad \text{ou} \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}.$$

São duas coisas diferentes e igualmente erradas. O problema é que o símbolo “=” é usado, no nosso curso, para dizer que dois números são iguais. No primeiro caso a igualdade é sem sentido porque o número  $0/0$  não existe. No segundo a igualdade é sem sentido seja porque o número  $0/0$  não existe,

seja porque  $f(x)/g(x)$  muito provavelmente é uma quantidade bem definida que varia com  $x$  e que não tem nada a ver com  $0/0$  (justamente porque  $0/0$  não existe).

## 11. Sexta-feira, 14 de maio de 2021

Um limite importante, que ainda não foi visto, é o das potências.

**Exercício 111.** Se  $x > 0$  e  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , o teorema 39 pode ser facilmente aplicado para provar que

$$\lim_{x \rightarrow c} x^\alpha = c^\alpha. \quad (9)$$

Se  $\alpha$  for irracional, fica mais complicado. Prove o limite acima no caso do expoente racional. Se tentar provar também para o caso do expoente racional, use fortemente a definição de  $a^b$  quando  $b$  é real. Veja em particular os exercícios 59 e 66 e a parte de texto contida entre eles.

Vamos ver agora os limites laterais.

**Definição 42** (limites direito e esquerdo). Sejam  $I = (a, b)$  um intervalo aberto,  $c \in I$  e  $f : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada. Denotamos por

$$g : (c, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x)$$

a restrição de  $f$  a  $(c, b)$ . Dizemos que  $l \in \mathbb{R}$  é o *limite direito* de  $f(x)$  para  $x$  que tende a  $c$ , em símbolos é

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l,$$

se

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = l.$$

Analogamente, denotamos por

$$h : (a, c) \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x)$$

a restrição de  $f$  a  $(a, c)$ . Dizemos que  $m \in \mathbb{R}$  é o *limite esquerdo* de  $f(x)$  para  $x$  que tende a  $c$ , em símbolos é

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = m,$$

se

$$\lim_{x \rightarrow c} h(x) = m.$$

**Exercício 112.** Considere  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{se } x \geq 3 \\ x^2 - 1 & \text{se } x < 3. \end{cases}$$

Calcule os limites laterais de  $f$  quando  $x \rightarrow 3$  e verifique, usando a definição de limite, que  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  não existe.

**Teorema 43.** Sejam  $I = (a, b)$  um intervalo aberto,  $c \in I$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada. Então,

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l \quad \text{se e somente se} \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x).$$

**Exercício 113.** Dê a demonstração do teorema anterior.

**Exercício 114.** O teorema anterior é um clássico teorema do tipo "se e somente se". Podemos escrevê-lo como  $A \iff B$ , ou (é a mesma coisa)  $A \Rightarrow B$  e  $B \Rightarrow A$ . Suponha que  $A$  seja a afirmação " $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$ " e  $B$  seja " $\lim_{x \rightarrow \bar{x}^+} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow \bar{x}^-} f(x)$ ". Para provar que um limite não existe, como por exemplo no exercício 112, qual implicação do teorema acima é usada?  $A \Rightarrow B$  ou  $B \Rightarrow A$ ? Justifique a resposta.

**Exercício 115.** Diga se existe  $\lim_{x \rightarrow 1} x - [x]$ .

Foi visto até agora o primeiro tipo de limite, o limite finito para  $x$  tendendo a um ponto  $c$ . Agora vamos ver outros três tipos de limites (não têm mais além deles) que tratam os limites infinitos e para  $x$  tendendo a infinito.

Segundo tipo de limite: limite infinito.

**Definição 44** (limite infinito in um ponto). Sejam  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $c \in I$  fixado. Seja  $f : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada. Dizemos que  $+\infty$  é o *limite* de  $f(x)$  para  $x$  que tende a  $c$ , em símbolos escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty,$$

se, para cada  $m \in \mathbb{R}$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x) > m$  para cada  $x \in I$ , tal que  $0 < |x - c| < \delta$ .

**Exercício 116.** Escreva a definição acima no caso análogo onde  $x$  tende para  $-\infty$

**Exercício 117.** Prove, usando a definição acima, que  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x^2 = +\infty$ .

**Exercício 118.** Prove, usando a definição acima, que  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/|x| = +\infty$ .

**Exercício 119.** Prove, usando a definição acima (de fato, usando sua negação), que  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$  não pode ser  $+\infty$ . Mais em geral, prove que  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/x$  não existe.

**Exercício 120.** Prove, usando a definição 27, que  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ .

**Observação 45.** Em alguns textos se encontra um resultado do tipo

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1/x = \infty.$$

Como  $+\infty$  e  $-\infty$  não são números (não são números neste curso de MAT111, seja claro!), mas representam conceitos, o símbolo  $\infty$  sem especificação de sinal poderia ser usado, com uma conveniente definição. No caso particular da teoria dos limites, poderíamos definir assim:

- Dada  $f : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dizemos que  $\infty$  é o limite de  $f(x)$  para  $x$  que tende a  $c$ , em símbolos

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty,$$

se, para cada  $m$  real e positivo, existe  $\delta > 0$  tal que  $|f(x)| > m$  para cada  $x \in I$ , tal que  $0 < |x - c| < \delta$ .

Esta definição é correta e permite provar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1/x = \infty \quad \text{prove como exercício.}$$

Eu, como muitos outros livros e colegas, prefiro não us-la, pela simples razão que tal definição não leva em conta a variação de sinal da função, sendo tudo colocado dentro do módulo. Assim, na nossa disciplina iremos sempre dizer que  $1/x$  **não tem limite quando  $x$  tende a zero**. Em outras e conclusivas palavras, a definição de limite  $\infty$  sem sinal é correta, mas não é prática e é portanto descartada.

**Exercício 121.** Prove que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/x^3 = +\infty$  e que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/x^3 = -\infty$ .

**Exercício 122.** Prove que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1/x)}{x}$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1/x)}{x^2}$  não existem. Os limites laterais existem?

**Exercício 123.** Prove que  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{|x-5|} = +\infty$

## 12. Quarta-feira, 19 de maio de 2021

Terceiro tipo de limite: quando  $x$  tende a infinito

**Definição 46** (limite finito quando  $x \rightarrow \pm\infty$ ). Seja  $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada. O número real  $l$  é dito *limite* de  $f(x)$  para  $x$  que tende a  $+\infty$ , em símbolos escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l,$$

se, para cada  $\varepsilon > 0$ , existe  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $|f(x) - l| < \varepsilon$  para cada  $x \in (a, +\infty)$ , tal que  $x > r$ .

**Exercício 124.** Escreva a definição acima no caso análogo onde o limite é  $-\infty$ .

**Exercício 125.** Prove, usando a definição de limite, que os limites seguintes são corretos.

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad 2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

**Exercício 126.** Prove que, dada uma função qualquer  $f(x)$ , ela pode ser escrita como  $g + h$  onde  $g$  é par e  $h$  é ímpar (dica: as duas funções são obtidas através de operações algébricas oportunas sobre  $f$ ).

Quarto tipo de limite: limite infinito quando  $x$  tende a infinito

**Definição 47** (limite infinito quando  $x \rightarrow \pm\infty$ ). Seja  $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada. Dizemos que  $+\infty$  é o *limite* de  $f(x)$  para  $x$  que tende para  $+\infty$ , em símbolos escreve-se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

se, para cada  $m \in \mathbb{R}$ , existe  $r \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) > m$  para cada  $x \in (a, +\infty)$ , tal que  $x > r$ .

**Exercício 127.** Escreva a definição acima nos casos análogos onde  $x$  tende para  $-\infty$  e o limite é  $-\infty$  (quantos são os casos?)

**Exercício 128.** Prove, usando a definição de limite, que os limites seguintes são corretos.

$$\begin{array}{ll} 1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = +\infty & 2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ 3. \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty & 4. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \end{array}$$

**Exercício 129.** Dê exemplos de funções crescentes em intervalos de tipo  $(a, +\infty)$  que não têm limite infinito quando  $x \rightarrow +\infty$ .

**Exercício 130.** Diga se é verdadeiro o fato seguinte:

- se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é tal que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , então, existe  $b$  tal que  $f$  é crescente em  $(b, +\infty)$ .

Se o leitor achar que o fato é verdadeiro, precisa dar a demonstração. Se achar que for falso, precisa encontrar contraexemplos.

A álgebra dos limites (Teorema 31) relativa ao primeiro tipo de limite pode ser estendida aos três tipos de limite que incluem os casos não finitos. Os limites das tabelas seguintes podem ser repetidos integralmente quando  $x \rightarrow +\infty$  ou  $x \rightarrow -\infty$ . Aqui foi colocado  $x \rightarrow c$  unicamente para agilizar a notação.

### 1. Soma

$\lim_{x \rightarrow c} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow c} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x))$
$l$	$+\infty$	$+\infty$
$l$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

### 2. Produto

$\lim_{x \rightarrow c} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow c} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) \cdot g(x))$
$l > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l < 0$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$

3. Quociente (na tabela, as desigualdades “ $g(x) > 0$ ” e “ $g(x) < 0$ ” é suficiente que sejam verificadas em um conveniente conjunto do tipo  $(c - \delta, c) \cup (c, c + \delta)$ , não necessariamente em todo o domínio).

$\lim_{x \rightarrow c} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow c} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$
$l$	$+\infty$ ou $-\infty$	$0$
$+\infty$	$l > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$l < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l > 0$	$-\infty$
$-\infty$	$l < 0$	$+\infty$
$l > 0$	$0$	$+\infty$ se $g(x) > 0$
$l > 0$	$0$	$-\infty$ se $g(x) < 0$
$l < 0$	$0$	$-\infty$ se $g(x) > 0$
$l < 0$	$0$	$+\infty$ se $g(x) < 0$
$l \neq 0$	$0$	não existe se $g(x) > 0$ ou $g(x) < 0$ não são verificadas

#### 4. Potência

$\lim_{x \rightarrow c} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow c} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow c} (f(x)^{g(x)})$
$l > 0$	$m \in \mathbb{R}$	$l^m$
$0 \leq l < 1$	$+\infty$	$0$
$0 \leq l < 1$	$-\infty$	$+\infty$
$l > 1$	$+\infty$	$+\infty$
$l > 1$	$-\infty$	$0$
$+\infty$	$m > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$m < 0$	$0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$0$

As tabelas acima não contemplam todas as possibilidades. Por exemplo, no caso da soma, imagine duas funções  $f(x)$  e  $g(x)$  tais que  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = -\infty$ . Este caso não aparece na tabela. O que podemos dizer sobre  $\lim_{x \rightarrow c} (f(x) + g(x))$ ? Veja os três casos seguintes:

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x) = +\infty, \quad 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - x^3) = -\infty \quad 3. \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - \sqrt{9x+1}) = 0.$$

**Exercício 131.** O leitor prove os limites anteriores transformando adequadamente as funções em formas que permitam o uso da álgebra dos limites (porque não é poss). Mostre todos os detalhes.

O que dizem os três casos acima? Que não existe uma regra geral para um limite da forma  $+\infty - \infty$ . Cada exercício tem um tratamento específico. Por isso o tipo  $+\infty - \infty$  não pode ser contemplado na álgebra dos limites. Ele é chamado de *forma indeterminada*.

As formas indeterminadas na teoria dos limites são as seguintes:

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad +\infty^0, \quad 1^{\pm\infty}, \quad 0^0.$$

Uma forma indeterminada que foi tratada é aquela do limite  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x/x)$ . Neste caso é correto dizer algo do tipo “o limite se apresenta na forma indeterminada  $0/0$ ” ou “o limite é do tipo  $0/0$ ”. Em nenhum caso escreva  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x/x) = 0/0$  porque tal igualdade é sem nenhum significado sendo que o limite não sabemos que existe, mas sabemos que  $0/0$  não existe. Pior ainda seria escrever  $\sin x/x = 0/0$ , porque  $\sin x/x$  é uma função definida para todo  $x \neq 0$  que assume valores diferentes dependendo da variação de  $x$  enquanto  $0/0$  não existe (como já dito).

Aquilo que vale a pena destacar é o seguinte “*forma indeterminada*” não significa que o limite não existe, mas que cada exercício de ser tratado a parte sem uma regra geral.

Vamos ver agora uma lista de limites que damos sem entrar em detalhes:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \text{ se } a > 1; & \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \text{ se } 0 < a < 1; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \text{ se } a > 1; & \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \text{ se } 0 < a < 1; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, \text{ se } a > 1; & \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty, \text{ se } 0 < a < 1; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = -\infty, \text{ se } a > 1; & \lim_{x \rightarrow 0} \log_a x = +\infty, \text{ se } 0 < a < 1; \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = +\infty, \text{ se } \alpha > 0; & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha = 0, \text{ se } \alpha < 0. \end{array}$$

**Exercício 132.** Em relação aos limites anteriores, as demonstrações em detalhes têm uma certa complicação. Todavia, o leitor pode ter pelo menos uma ideia, observando que  $a^x$  é estritamente crescente se  $a > 1$  e estritamente decrescente se  $0 < a < 1$  como foi observado nas aulas anteriores. O comportamento da potência é análogo.

### 13. Sábado, 22 de maio de 2021

Vamos colocar aqui um limite fundamental, sem demonstração. O resultado é o seguinte:

**Teorema 48.** *Existe um número  $l > 0$  tal que*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Como dito, a demonstração dos dois limites acima é omitida porque difícil. Pegando o primeiro dos dois, de fato se prova que a função

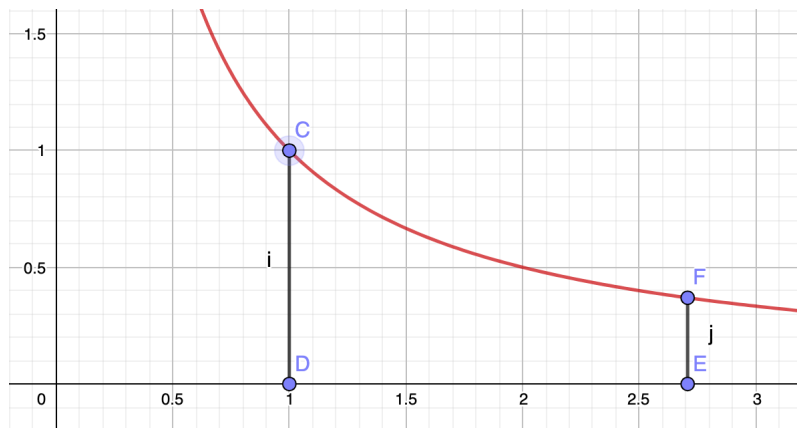
$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

é estritamente crescente e limitada e portanto converge, quando  $x \rightarrow +\infty$ , a um número positivo real. Este número é chamado  $e$ . Sendo  $f(1) = 2$ , segue que  $e > 2$ . Com outras técnicas de cálculo pode se provar que  $e < 3$ . Também pode ser provado que  $e$  é irracional. Estas duas coisas serão provadas na parte final do curso.



Se  $x$  for negativo,  $f(x)$  é definida quando  $x < -1$  porque a base da potência tem que ser positiva. E, curiosamente, o limite quando  $x \rightarrow -\infty$  existe e é o mesmo valor  $e$ .

Nas aulas anteriores foi dada uma outra definição do número  $e$ , que é a seguinte:



Considerando a área<sup>4</sup> da região do plano delimitada pela hipérbole  $xy = 1$ , pelo eixo  $X$ , pela reta  $x = 1$  e por uma reta  $x = x_0$ , onde  $x_0 > 1$ , essa área é intuitivamente crescente quando  $x_0$  cresce. É possível provar que tal área tende a  $+\infty$  quando  $x \rightarrow +\infty$ <sup>5</sup>. Portanto existe um número real tal que aquela área seja igual a 1. Este número é chamado de  $e$ .

Em geral, na literatura,  $e$  não é definido desta forma, mas como o valor dos limites que aparecem no teorema 48.

**Exercício 133.** Calcule, como feito em sala de aula, o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x^3}.$$

Observe que se apresenta na forma indeterminada  $0/0$ .

**Exercício 134.** Prove, como feito em sala de aula, que limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log |x| = -\infty.$$

Em sala de aula foi usada a definição de limite e foi usado o comportamento de  $e^x$ , dando como conhecidos o estrito crescimento dela e os limites quando  $x \rightarrow \pm\infty$ .

**Exercício 135.** A respeito do limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \log x)$$

não temos nenhum “norte” que possa nos ajudar. Este limite vale zero e para ser provado precisa de uma técnica chamada “método de De l’Hôpital”, que será vista daqui a algumas semanas. Consequência deste limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x = 1.$$

<sup>4</sup>Na verdade precisaria definir o que é a área dessa figura que não é um polígono. Isso é consequência do conceito de *Integral de Riemann*, tratado em Cálculo 2.

<sup>5</sup>Cuidado: isso é tudo menos que óbvio. Se no lugar de  $xy = 1$  fosse  $x^2y = 1$  o limite seria um número.

Prove isso.

**Exercício 136.** Calcule, como feito em sala de aula, o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right).$$

Observe que se apresenta na forma indeterminada  $+\infty - \infty$ .

**Exercício 137.** Calcule, como feito em sala de aula, o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{3x}.$$

Use o limite de  $\operatorname{sen} x/x$ .

**Exercício 138.** Calcule, como feito em sala de aula, os limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{2x^4 + x^3 + 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 2x - 3}.$$

Em particular:

- (1) lembre que precisa trabalhar e manipular as funções e **não** os limites. Escreva o raciocínio que foi dito em sala de aula.
- (2) em sala de aula foi dedicado um certo tempo para discutir qual fosse a potência melhor para ser colocada em evidência. Faça as várias tentativas para tomar mais familiaridade com estes tipos de limites. Também as tentativas que não conduzem ao resultado ajudam para entender.
- (3) Conclua com o critério que foi descoberto sobre a escolha da potência a ser colocada em evidência. Os dois exercícios dão, em um certo sentido, êxitos “opostos”.

O teorema de confronto sobre os limites, teorema 34, pode ser generalizado aos limites infinitos e aos limites quando  $x$  tende a  $\pm\infty$ .

**Teorema 49** (confronto dos limites - novos casos). *Sejam  $f, g, h : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  três funções dadas. Suponhamos  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  para cada  $x$ . Sejam satisfeitos os limites*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \quad e \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l, \quad \text{onde } l \in \mathbb{R}.$$

Então,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l.$$

**Exercício 139.** A demonstração é bem parecida com aquela do teorema 34 e pode ser feita como exercício. Enuncie também o teorema no caso  $x \rightarrow -\infty$ .

**Teorema 50** (confronto dos limites - novos casos). *Sejam  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $c \in I$  dado. Ou, consideramos  $I$  um intervalo não limitado. Sejam  $f, g : I \setminus \{c\} \rightarrow \mathbb{R}$  funções dadas. Suponhamos que  $f(x) \leq g(x)$  para cada  $x$ . Se*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ (\text{ou } x \rightarrow \pm\infty)}} f(x) = +\infty, \quad \text{então,} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ (\text{ou } x \rightarrow \pm\infty)}} g(x) = +\infty.$$

Se, por outro lado

$$\lim_{\substack{x \rightarrow c \\ (\text{ou } x \rightarrow \pm\infty)}} g(x) = -\infty, \text{ então, } \lim_{\substack{x \rightarrow c \\ (\text{ou } x \rightarrow \pm\infty)}} f(x) = -\infty.$$

**Exercício 140.** A demonstração não é difícil.

**Observação 51.** O teorema 39 que trata do limite de uma função composta se estende a todos os casos que incluem limites infinitos ou quando  $x$  tende a  $\pm\infty$ . O leitor pode enunciar alguns desses casos e escrever a relativa demonstração.

**Exercício 141.** O teorema do confronto nos casos estendidos bem se aplica ao limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

Refaça as contas como feito em sala de aula. Observe que a álgebra dos limites aqui não funciona. O fato de  $\operatorname{sen} x$  não ter limite não significa que a função do exercício não tenha limite.

**Exercício 142.** Aplique uma conveniente extensão do teorema 39 para estudar o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{x} \right).$$

Enuncie e demonstre tal extensão.

**Exercício 143.** calcule os limites seguintes (se existem)

1.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x+1}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x-1}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+x+3}{4x^2-2x+1}$

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+x^2}{2x^2+x-1}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x-1)\sqrt{x^2+1}$

6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\operatorname{sen} x + x)$

7.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x-1}$

8.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} ([x] + x)$

9.  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+1+\operatorname{sen}(x-1)}{x-1}$

10.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{[x]-x}{2}$

11.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-2x}+x)$

12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x^2+1)}{x}$

13.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3+3x-2}{x^2-2x+1}$

14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x-4}{2x^2}$

15.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x(x^2-1)}{3x^2-2x-1}$

16.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x}{\sqrt{x^2+2}}$

17.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-1}{x^2-1}$

18.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-5}{x^2-4x+4}$

19.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x(x^2-1)}{3x^2-2x-1}$

20.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - x$

21.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x(x^2-1)}{3x^2-2x-1}$

22.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} ((\sqrt{x^2+1} - x) \operatorname{sen}(1/x))$

$$23. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-4} - \sqrt{x+5}) \qquad 24. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2-x} - \sqrt{3-x})$$

**Exercício 144.** Calcule os limites seguintes (se existem)

$$\begin{array}{ll} 1. \lim_{x \rightarrow 0} (x-1)\sqrt{x^2+1} & 2. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin x + x) \\ 3. \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1}{x-1} & 4. \lim_{x \rightarrow -\infty} ([x] + x) \\ 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x-1} & 6. \lim_{x \rightarrow 2} x(x+2)(x-3) \\ 7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} & 8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x} \\ 9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{2}}{x} & 10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{3x-2}{2x+3} - \frac{3x+2}{2x-3} \right) \\ 11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x} & 12. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1+\cos x}{\pi-x} \\ 13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1-\cos x} & 14. \lim_{x \rightarrow 0} 2/|x| \\ 15. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+3}{4x^2+x} & 16. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-x^3-x}{1-2x^2} \\ 17. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x+1} - x \right) & 18. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sin x}{2x + x^2 + 3} \\ 19. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{x}}{\sqrt{x}-x} & 20. \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{1+x^4} - x^2) \end{array}$$

**Exercício 145.** Diga qual é, entre as seguintes, a definição correta do limite  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 7$ .

a) Para cada  $\lambda$  e  $\mu$  positivos, se  $|x-4| < \mu$  e  $x \neq 4$  então,  $|f(x)-7| < \lambda$ .  
 b) Para cada  $\lambda > 0$  e para cada  $\mu > 0$ , se  $|x-4| < \mu$  então,  $|f(x)-7| < \lambda$ .

c) Para cada  $\mu > 0$  existe  $\lambda > 0$  e existe  $x$  tal que  $|x-4| < \lambda$  e  $|f(x)-7| < \mu$ .  
 d) Para cada  $\mu > 0$  existe  $\lambda > 0$  tal que se  $|x-4| < \lambda$  e  $x \neq 4$  então,  $|f(x)-7| < \mu$ .

e) Para cada  $\mu > 0$  existe  $\lambda > 0$  tal que se  $|x-4| < \lambda$  e  $x \neq 4$  então  $|f(x)-7| < \mu$ .  
 f) Nenhuma das respostas acima é correta.

**Exercício 146.** Suponhamos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Diga qual, entre as afirmações seguintes, é correta .

- a) Se  $x > 0$  então  $f(x) < 0$ .  
 b) Existe  $\varepsilon > 0$  tal que  $f(x) < 0$  para cada  $x > \varepsilon$ .  
 c) Para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\eta > 0$  tal que para  $x > \eta$  temos  $f(x) > \varepsilon > 0$ .  
 d) Nenhuma das respostas acima é correta.

**Exercício 147.** Consideramos a proposição seguinte: *dadas  $f$  e  $g$  definidas em um intervalo  $I$ , seja  $x_0 \in I$  fixado. Suponhamos que  $f(x) \geq g(x)$  para cada  $x$  e que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ . Então,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ .* A proposição é:

- a) Verdadeira se colocamos a hipótese suplementar  $g(x) \leq 0, \forall x \in I$ .  
 b) Verdadeira se colocamos a hipótese suplementar  $g(x) \geq 0, \forall x \in I$ .  
 c) Verdadeira sem necessidade de outras hipóteses suplementares.  
 d) Verdadeira se colocamos a hipótese suplementar  $f(x_0) = g(x_0) = 0$ .  
 e) Falsa, também colocando as hipóteses suplementares acima.

**Exercício 148.** Dada  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , suponhamos que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ . Então:

- a)  $f$  é decrescente.  
 b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x^2) = +\infty$ .  
 c)  $\forall m \geq 0$ , temos  $f(x) \leq 0$  se  $x \geq m$ .  
 d)  $\forall m \geq 0$  e  $\forall k \geq 0$   $f(x) \leq k$  se  $x \geq m$ .  
 e)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$   
 f) Nenhuma das respostas acima é correta.

**Exercício 149.** Dada  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $f(x) = x + 1$  diga quais (podem ser mais que uma) das afirmações são corretas.

- a)  $f$  é injetora.  
 b)  $f$  é sobrejetora.  
 c)  $f$  é limitada inferiormente.  
 d) A notação  $f(x) = x + 1$  non faz sentido porque o domínio é  $\mathbb{N}$  e a variável a ser usada deve ser denotada por  $n$ .

**Exercício 150.** Procure uma  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que não seja crescente, mas que verifique  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Esta função deve ser definitivamente crescente? Isto é, existe  $r$  tal que  $f$  é crescente em  $(r, +\infty)$ ?

Em conclusão, o exercício seguinte é particularmente importante

**Exercício 151** (Limites das funções monótonas). Prove o resultado seguinte: *Seja  $I$  um intervalo e seja  $c$  o supremo de  $I$ . No caso em que  $\sup I = +\infty$ , continuo usando a letra  $c$  para obter um enunciado mais compacto. Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  monótona. Então:*

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \sup f && \text{se } f \text{ é crescente} \\ \lim_{x \rightarrow c} f(x) &= \inf f && \text{se } f \text{ é decrescente.}\end{aligned}$$

Prove esse resultado. Em seguida, enuncie e prove o análogo resultado no caso em que  $c = \inf I$ .

#### 14. Segunda-feira, 24 de maio de 2021

##### As funções contínuas.

**Definição 52.** Sejam  $I$  intervalo de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada e  $\bar{x} \in I$  dado.  $f$  é dita *contínua em  $\bar{x}$*  se

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = f(\bar{x}).$$

Em outras palavras,  $f$  é dita *contínua em  $\bar{x}$*  se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \cap I$  temos  $f(x) \in (f(\bar{x}) - \varepsilon, f(\bar{x}) + \varepsilon)$ .  $f$  é dita *contínua em  $I$*  (ou, simplesmente, *contínua*) se é contínua em todos os pontos de  $I$ .

O conceito de continuidade de uma função é pontual. Ou seja, dizemos que uma função é *contínua em um ponto*. Outros conceitos, já encontrados, são só globais: invertibilidade, limitação de uma função, monotonia. Não faz sentido, por exemplo, dizer que uma função é limitada (ou inversível, ou crescente) em um ponto.

**Definição 53.** Dada  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e dado  $\bar{x} \in I$ , se  $f$  não for contínua em  $\bar{x}$ , dizemos que  $f$  é *descontínua em  $x \in I$*  e que  $x$  é um *ponto de descontinuidade*.

Portanto não faz sentido dizer que  $x$  é um ponto de descontinuidade para  $f$  se  $x$  não pertence ao domínio da função. Por exemplo, **não é correto dizer que  $1/x$  é descontínua em zero ou que  $x = 0$  é ponto de descontinuidade de  $1/x$ .**

**Exercício 152.** Determine em quais pontos são contínuas as funções seguintes (determine, inclusive, os pontos de descontinuidade):

$$\begin{aligned}f(x) &= 1/x, & f(x) &= \begin{cases} 1/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases} & g(x) &= \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{se } x \geq 2 \\ 1 - 2x & \text{se } x < 2. \end{cases} & f(x) &= \frac{\sin x}{x} \\ g(x) &= \begin{cases} \cos x & \text{se } x > \pi \\ -1 & \text{se } x < \pi. \end{cases} & f(x) &= \begin{cases} x + 3 & \text{se } x > 1 \\ 2 - x^2 & \text{se } x < 1. \end{cases} & g(x) &= \begin{cases} x^2 & \text{se } x > 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ x^2 & \text{se } x < 1. \end{cases}\end{aligned}$$

**Exercício 153.** Determine em quais pontos são contínuas a função sinal e a função parte inteira (determine, inclusive, os pontos de descontinuidade).

**Exercício 154.** A função seguinte, muito famosa, é conhecida como **função de Dirichlet** (veja também **Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)**):

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Prove que  $f$  é descontínua em todos os pontos do domínio.

**Exercício 155.** Dada a função de Dirichlet  $f(x)$ , considere  $g(x) = x \cdot f(x)$ . Em quais pontos é contínua?

**Exercício 156. (difícil).** Seja  $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1/n & \text{se } x = m/n, \text{ } m \text{ e } n \text{ inteiros } m \geq 0, n > 0 \text{ e primos entre si } (m \leq n) \\ 0 & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases}$$

Determine os pontos onde  $f$  é contínua, e os pontos onde é descontínua.

Vamos ver agora a continuidade das funções elementares.

**Proposição 54.** *São contínuas em todos os pontos do domínio:*

- Os polinômios e os quocientes de polinômios.
- As funções trigonométricas.
- A exponencial  $a^x$ .
- A potência  $x^\alpha$ .

A demonstração é consequência imediata do comportamento das funções acima colocadas a respeito dos limites, como visto nas aulas anteriores. Vale a pena lembrar que os limites das funções potências foram mencionados, nas aulas anteriores, mas não provados porque não particularmente simples. Mais precisamente:  $\lim_{x \rightarrow c} x^\alpha = c^\alpha$  é relativamente fácil se  $\alpha \in \mathbb{Q}$ . Mais complicado se  $\alpha$  é irracional.

Analogamente ao caso dos limites, aqui também temos uma álgebra das funções contínuas.

**Teorema 55** (Álgebra das funções contínuas – sem prova). *Sejam  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas em um ponto  $\bar{x} \in I$ . Então, são contínuas em  $\bar{x}$ :  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$ ,  $f/g$  se  $\bar{x} \neq 0$ ,  $f(x)^{g(x)}$ .*

A demonstração do primeiros dois casos é fácil, do terceiro é média, dos outros três é complicada.

**Exercício 157.** Dê a prova da continuidade da soma e do produto no teorema anterior, usando com cuidado  $\varepsilon$  e  $\delta$ .

**Teorema 56** (Continuidade das funções compostas). *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em  $\bar{x} \in I$ . Seja  $J$  um intervalo que contém  $Im f$  e seja  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em  $\bar{y} = f(\bar{x})$ . Então,  $g \circ f$  é contínua em  $\bar{x}$ .*

**Exercício 158.** Prove o teorema anterior. O leitor pode verificar que se trata de um caso particular do teorema 39. Diga em qual sentido este teorema é um caso particular do teorema 39.

**Exercício 159.** Determine em quais pontos são contínuas as funções seguintes (determine, inclusive, os pontos de descontinuidade):

$$f(x) = \begin{cases} x/|x| & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{|x|+1} & \text{se } x \geq 0 \\ 2-x & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} \sin(1/x) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+|x|}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases} \quad f(x) = [x]^2 - x^2$$

**Exercício 160.** Determine as soluções de  $\frac{x^2 - 2x}{|x - 1|} \geq 1$ . Em seguida, determine a imagem da função  $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 1}$ , definida em  $[0, +\infty)$ .

**Exercício 161.** Determine o domínio de  $\sqrt{2\sin x + 1}$ . A função é crescente? responda usando a definição de função crescente.

**Exercício 162.** Calcule, se existem, os limites seguintes:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1+x^2}-1}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{x+1+x^2}-1}{\sqrt{x}} \cdot \sin \frac{1}{x} \right)$

**Exercício 163.** Determine  $n \in \mathbb{N}$  tal que o limite seguinte seja finito e não nulo:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^n x (\sqrt{1+x^2}-1)}{x^3+x^4}$ .

**Teorema 57** (da conservação do sinal para as funções contínuas – com prova feita na sala de aula e que pode ser cobrada nos exercícios das provas). *Sejam  $I$  intervalo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  contínua em  $\bar{x} \in I$ . Suponhamos  $f(\bar{x}) \neq 0$ . Então existe  $\delta > 0$  tal que  $f(x)$  tem o mesmo sinal de  $f(\bar{x})$  para todo  $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \cap I$ .*

**Exercício 164.** Dê a demonstração do teorema anterior.

## 15. Quarta-feira, 26 de maio de 2021

O teorema seguinte é um clássico da teoria das funções contínuas e tem importantes consequências.

**Teorema 58** (do anulamento para as funções contínuas). *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua (em todo o domínio). Suponhamos que  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Então, existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .*

**Exercício 165.** Dê a demonstração do teorema acima.

**Exercício 166.** Todas as hipóteses do enunciado acima são importantes para a demonstração (geralmente é assim: se um teorema é corretamente expresso, não tem hipóteses supérfluas). O leitor procure exemplos de funções contínuas em conjuntos que não são intervalos para as quais o teorema de anulamento não vale.



**Exercício 167.** O teorema de anulamento é um teorema de existência e não fornece diretamente uma técnica para encontrar a solução de uma equação  $f(x) = 0$ . Todavia, um algoritmo para aproximar soluções de equações  $f(x) = 0$  é fácil para ser determinado. Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e tal que  $f(a) \cdot f(b) < 0$ . Seja  $c_1 = \frac{a+b}{2}$  o ponto médio do intervalo. Se  $f(c_1) = 0$ , o problema é resolvido. Senão, o novo intervalo  $[a_1, b_1]$  é obtido escolhendo aquela metade de  $[a, b]$  tal que  $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$ . Continuando o processo, não temos nenhuma certeza de encontrar uma solução, mas sim uma sua aproximação. Se, digamos, ao passo  $n$ , observamos que  $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ , o ponto médio  $c$  do  $n$ -ésimo intervalo tem uma distância menor de  $\frac{b-a}{2^{n+1}}$  de uma solução da equação (embora não tenhamos a menor ideia de quem seja a solução exata).

Uma consequência do teorema do anulamento é o resultado seguinte.

**Teorema 59** (dos valores intermediários para as funções contínuas – com prova feita na sala de aula e que pode ser cobrada nos exercícios das provas). *Seja  $I$  intervalo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Então, a imagem de  $f$  é um intervalo. Um enunciado equivalente é o seguinte: sejam  $a, b \in I$  e seja  $l$  um número qualquer entre  $f(a)$  e  $f(b)$ . Então,  $y \in \text{Im}(f)$ , ou seja, existe  $x$  entre  $a$  e  $b$  tal que  $f(x) = l$ .*

**Exercício 168.** Dê a demonstração do teorema dos valores intermediários.

**Exercício 169.** Dadas as funções seguintes, calcule a imagem dos conjuntos indicados ao lado (em todos os itens seguintes, verifiquem com cuidado todos os detalhes e também use o comportamento crescente ou decrescente das funções nos conjuntos indicados ou em parte deles, como foi visto nos exemplos em sala de aula).

- |                               |   |
|-------------------------------|---|
| 1. $x^2 + 2, \quad (-3, 4)$   | 2. $2^x, \quad [0, 5]$                          |
| 3. $x^3 + x, \quad (-2, 0]$   | 4. $(1/2)^x, \quad [-1, 3]$                     |
| 5. $x^3 + 2, \quad (-1, 1)$   | 6. $x + 3, \quad [0, 5]$                        |
| 7. $2 x , \quad (-1, 3)$      | 8. $x^2 +  x , \quad (-3, 2)$                   |
| 9. $[x - 2]^2, \quad (-2, 2]$ | 10. (difícil) $x(x - [x]), \quad (-1, +\infty)$ |

No exercício acima  $[x - 2]$  é a parte inteira de  $x - 2$ . A parte inteira de um número real  $x$ , denotada pelo símbolo  $[x]$ , é o maior inteiro que não ultrapassa  $x$ . Por exemplo:  $[1] = 1$ ,  $[9/4] = 2$ ,  $[-1/2] = -1$ , etc.

**Exercício 170.** Uma aplicação importante do teorema dos valores intermediários é a existência da raiz quadrada de um número positivo qualquer. Para prova-lo, aplique o teorema à função  $x^2$  definida em  $(0, +\infty)$  (lembrando a definição correta de raiz quadrada).

**Exercício 171.** Uma outra aplicação é a existência de, pelo menos, uma solução real de qualquer equação polinomial de grau ímpar. Devido ao fato que, se  $P(x)$  é um polinômio de grau ímpar,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = +\infty$  se o coeficiente da potência de grau máximo é positivo ( $-\infty$ , se negativo) e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\infty$  ( $+\infty$ , se aquele coeficiente é negativo).

Podemos construir algoritmos para aproximar a raiz quadrada de um número positivo, como para aproximar as soluções reais de equações polinomiais ou de equações mais complicadas (ex.  $x \operatorname{tg} x = p$ , onde  $p$  é dado).

**Exercício 172.** Construa algoritmos para aproximar a raiz quadrada de um número positivo e para determinar uma solução (aproximada) de uma equação polinomial de grau ímpar (escolha o polinômio e o erro na aproximação)

**Exercício 173.** Prove que a equação  $x^3 + x = a$  possui uma e só uma solução real para cada  $a \in \mathbb{R}$  dado.

**Exercício 174.** Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Suponhamos que  $x - 5 < f(x) < x + 1$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ . Prove que a equação  $f(x) = 0$  possui pelo menos uma solução.

**Exercício 175.** Procure  $\operatorname{Im} f$ , onde  $f$  é a função do exercício acima.

**Exercício 176.** Prove que a equação  $x^8 + 5x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 3x - 1 = 0$  possui pelo menos uma solução real.

## 16. Sexta-feira, 28 de maio de 2021

É interessante a relação entre continuidade e invertibilidade de uma função. É importante lembrar (ou observar, se não lembra) que é óbvio que uma função estritamente monótona é inversível. O vice-versa é falso.

**Exercício 177.** Consideramos as funções seguintes:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1) \\ x - 1 & \text{se } x \in [2, 3] \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1) \\ 3 - x & \text{se } x \in [1, 2] \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1) \\ 5 - x & \text{se } x \in [2, 3] \end{cases}$$

Desenhe o gráfico de  $f$ ,  $g$  e  $h$ . Determine se são contínuas, inversíveis, monótonas, e se o domínio é um intervalo. Se são inversíveis (ou algumas delas), determine as inversas, dizendo se as inversas são contínuas, monótonas, e se o domínio é um intervalo.

Em particular, a função  $f$  do exercício é contínua e inversível, mas a inversa é descontínua. A  $h$  é contínua e inversível, mas não é monótona. Esta falta de propriedade acontece porque o domínio não é um intervalo.

**Teorema 60** (monotonia de uma função inversível). *(Sem prova) Seja  $I$  intervalo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e inversível. Então é monótona.*

**Exercício 178.** Em sala de aula somente foi dada a ideia da prova. Tente aqui reproduzir os detalhes. A prova é fortemente baseada no teorema dos valores intermediários. Observe uma outra coisa: se eu quero provar que uma função **não** é monótona, bastam quatro pontos (eventualmente três):  $a, b, c, d$  tais que  $a < b$  e  $f(a) > f(b)$ , e isso diz que  $f$  não é decrescente,  $c < d$  e  $f(c) < f(d)$  e isso diz que  $f$  não é decrescente.

O resultado mais importante é o seguinte (cuja prova é baseada no teorema acima)

**Teorema 61** (continuidade da função inversa). *(Sem prova) Seja  $I$  intervalo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  contínua e inversível. Então a função inversa  $f^{-1}$  é contínua.*

**Exercício 179.** Pode tentar provar o teorema. Precisa usar o teorema 60 e aplicar a definição com  $\varepsilon$  e  $\delta$ .

A continuidade da função  $\sqrt[n]{x}$ , definida em  $[0, +\infty)$  se  $n$  é par, e em  $\mathbb{R}$  se  $n$  é ímpar, é uma consequência do teorema acima, embora tenha sido provado em uma aula anterior, diretamente com  $\varepsilon$  e  $\delta$ , que  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{\bar{x}}$ .

São contínuas as funções trigonométricas inversas: arctg, arccos e arcsen.

## 17. Quarta-feira, 2 de junho de 2021

Concluimos a parte da continuidade com o teorema seguinte, um dos mais importantes do curso.

**Definição 62.** Dada  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $A$  é um conjunto qualquer, o *máximo* de  $f$  é definido como o máximo da imagem de  $f$ , se existe. O *mínimo* de  $f$  é definido como o mínimo da imagem de  $f$  (se existe).

O termos acima são algumas vezes chamados de máximo e mínimo absolutos, para não confundí-lo com os máximo e os mínimo relativos. Aqui não tem risco de confusão. Os máximo e os mínimo relativos serão apresentados nas próximas aulas.

**Teorema 63** (de Weierstrass). *Uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua possui máximo e mínimo. Ou seja, existem  $x_1$  e  $x_2$  in  $[a, b]$  tais que, para todo  $x \in [a, b]$ , há  $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ .*

O teorema deve seu nome a **Karl Weierstrass (1815-1897)**, que foi o matemático considerado o “pai da moderna análise matemática”. Com a única exceção do Teorema da Função Implícita, os cursos de análise matemáticas atuais coincidem com o curso elaborado por Weierstrass na sua carreira de professor.

Um aluno, não lembro agora se da turma da matemática ou da física, mencionou em sala de aula a existência de uma função contínua em todo o domínio, mas não derivável em nenhum ponto. Tal função, que eu não lembrava, é conhecida como **função de Weierstrass**, efetivamente definida por ele.

A demonstração de Weierstrass foi dada em sala de aula numa versão da qual resumo aqui os passos principais.

- Se considera o conjunto  $E$  dos pontos  $x \in [a, b]$  tais que  $f$  é limitada em  $[a, x]$ .
- Se prova que o supremo,  $S$ , de  $E$  pertence a  $E$ .
- Se prova que  $S = b$ , obtendo que  $f$  é limitada em  $E$ .
- Se prova por contradição que o supremo  $M$  de  $f$  é máximo. Porque, se não fosse assim,  $1/(M - f(x))$  seria bem definida. Portanto limitada, sendo contínua.
- A contradição aparece aqui: a limitação de  $1/(M - f(x))$  não combina com  $M = \sup f$

**Exercício 180.** O leitor apresente os detalhes da prova.

**Exercício 181.** Seja  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - [x]$  ( $[x]$  é a parte inteira de  $x$ ). Prove que  $f$  não possui máximo. Qual hipótese do Teorema de Weierstrass não é respeitada?

**Exercício 182.** Seja  $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ . Prove que  $f$  não possui máximo. Qual hipótese do Teorema de Weierstrass não é respeitada?

**Exercício 183.** Seja  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x$ . Prove que  $f$  não possui máximo. Qual hipótese do Teorema de Weierstrass não é respeitada?

**Exercício 184.** Procure exmplos de funções que não respeitam algumas das hipóteses do Teorema de Weierstrass, mas que possuem máximo e mínimo.

## 18. Sexta-feira, 4 de junho de 2021

### A derivada de uma função

Seja  $I$  um intervalo de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada e  $x_0 \in I$  dado. Variando  $m \in \mathbb{R}$ , as equações

$$y = f(x_0) + m(x - x_0) \quad (10)$$

representam todas as retas secantes ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, f(x_0))$  com a única exceção da reta vertical que tem equação  $x = x_0$  não está na forma (10).

Seja agora  $x \in I$  e o correspondente ponto no gráfico de  $f$ ,  $(x, f(x))$ . O quociente

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se chama *razão incremental* de  $f$ , relativa a  $x_0$  e  $x$  e é o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de  $f$  por  $(x_0, f(x_0))$  e  $(x, f(x))$ . Se existe e é finito o limite desta razão quando  $x \rightarrow x_0$ , este limite dá, intuitivamente, o coeficiente angular de uma “reta posição limite” das secantes (quando  $x \rightarrow x_0$ ).

**Definição 64.** Sejam  $I$  intervalo de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada e  $x_0 \in I$  fixado. Se existe e é finito o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l,$$

então dizemos que  $f$  é *derivável* em  $x_0$  e o número  $l$  se chama *derivada* de  $f$  em  $x_0$ .

A derivada de  $f$  em  $x_0$  (se existe) é denotada, normalmente, por um dos símbolos seguintes:

$$f'(x_0), \quad \frac{df}{dx}(x_0), \quad Df(x_0), \quad Df(x)|_{x=x_0}.$$

O primeiro é aquele mais comum.

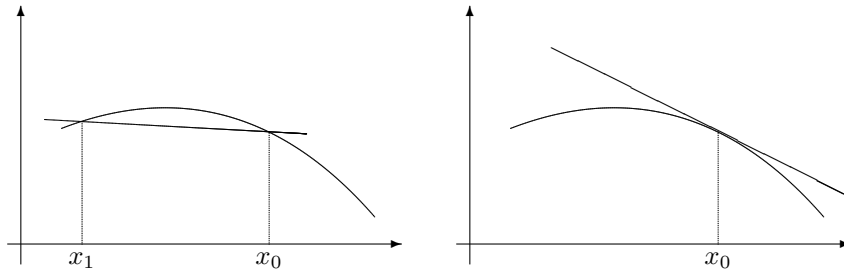
Uma outra forma de escrever a razão incremental e portanto o limite acima é obtida pondo  $x - x_0 = h$ . Temos

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{e} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

A noção de derivada é pontual (como a de continuidade), ou seja derivada de uma função em um ponto. Dada  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , se  $f$  é derivável em todos os pontos de  $I$ , dizemos que  $f$  é derivável e fica bem definida uma nova função, a derivada de  $f$ ,  $x \mapsto f'(x)$ , definida em  $I$ .

Se  $f$  é derivável  $x_0$ , a reta de equação  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  é definida como sendo a *reta tangente* ao gráfico de  $f$  no ponto  $(x_0, f(x_0))$ .

*Atenção: a precedente é a verdadeira definição de reta tangente; outras possíveis definições, como “a reta que encosta o gráfico só em um ponto”, são corretas só em casos muito particulares, por exemplo a circunferência.*



Reta secante e reta tangente em  $(x_0, f(x_0))$ .

**Exercício 185.** Na parábola de equação  $y = x^2$  procure um ponto onde a reta tangente à parábola forma um ângulo de  $\pi/4$  com o eixo  $x$ .

**Exercício 186.** Um corpo cai de uma altura de 15 mt, sujeito só à força peso (desconsiderando o atrito do ar). A função espaço dependendo do tempo é  $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$ , onde  $g$  é a constante gravitacional terrestre, e vale cerca  $9,8 \text{ mt/sec}^2$ . Calcule a velocidade com que ele chega ao solo.

**Exercício 187.** Entre todas as retas tangentes ao gráfico de  $(x-1)^4$  determine quais passam por um ponto do tipo  $(-1, x)$  com  $x \leq -3$ .

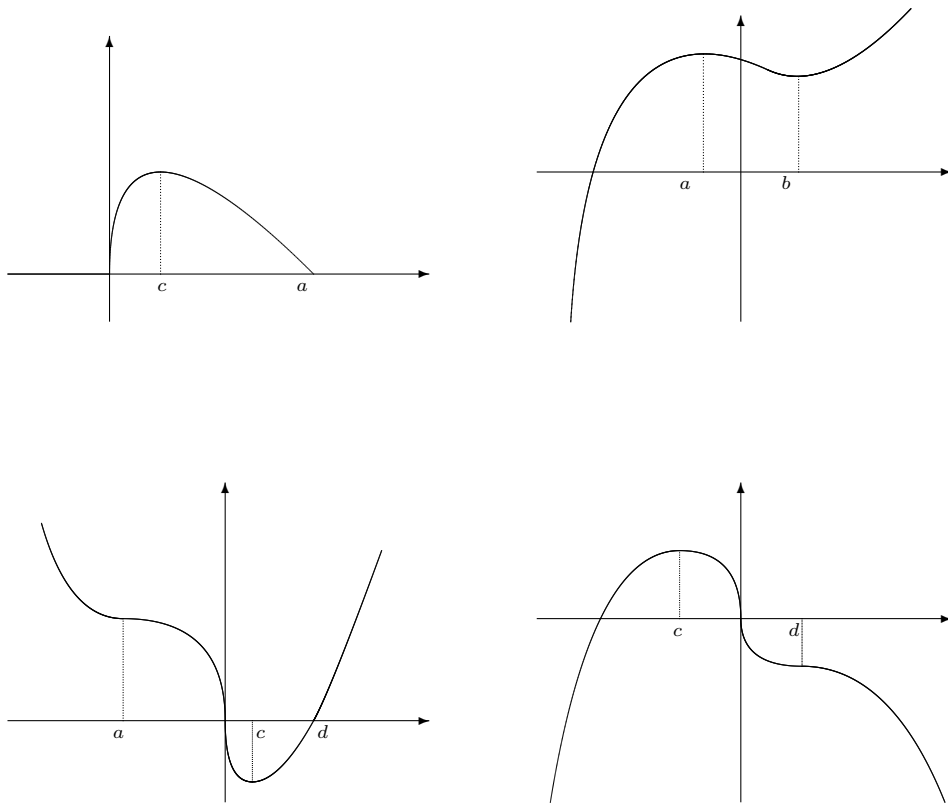
Na tabela seguinte coloco as derivadas das principais funções elementares. Os resultados da tabela serão provados nesta e nas próximas aulas.

Derivadas das funções elementares.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
1. $c$ (função constante)	0	2. $x$	1
3. $x^n$	$nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1$	4. $\sin x$	$\cos x$
5. $\cos x$	$-\sin x$	6. $\operatorname{tg} x$	$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
7. $\log x$	$\frac{1}{x}$	8. $e^x$	$e^x$
9. $a^x$	$a^x \log a, \quad a > 0$	10. $\log_a x$	$\frac{1}{x \log a}$
11. $x^\beta$	$\beta x^{\beta-1}, \quad \beta \in \mathbb{R}$	12. $\arcsen x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14. $\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

**Exercício 188.** Prove os primeiros três resultados da tabela acima.

**Exercício 189.** Dados os gráficos seguintes, desenhe (intuitivamente) os gráficos das derivadas.



**Exercício 190.** Calcule, usando a definição, a derivadas das funções seguintes:  $3x - 2$ ,  $x^2 - x$ ,  $x^7 + 1$ ,  $\sqrt{x}$ , escolhendo os pontos do domínio onde fazer o cálculo.

**Exercício 191.** Prove que  $|x|$  não é derivável em zero enquanto  $|x|^3$  é derivável em zero. Calcule a derivada de  $|x|$  e de  $|x|^3$  (nos pontos onde as funções são deriváveis).

**Exercício 192.** Seja  $f(x) = x^3$ . Calcule  $f'(0)$ ,  $f'(-2)$ ,  $f(1/2)$ .

**Exercício 193.** Prove que a derivada de uma função par é uma função impar. Lembre que uma função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é dita *par* se  $f(x) = f(-x)$  para todo  $x$  e é dita *impar* se  $f(x) = -f(-x)$  para todo  $x$ .

**Exercício 194.** Prove, usando unicamente a definição de derivada, que  $\sqrt{x}$  não é derivável em zero.

**Exercício 195.** Prove que a derivada de uma função impar é uma função par.

**19. Sábado, 5 de junho de 2021**

**Exercício 196.** A prova da fórmula das derivadas de seno e cosseno e uma fácil consequência das fórmulas da soma das duas funções trigonométricas. Faça a prova como feito em sala de aula.

**Exercício 197.** Replique o exercício feito em sala de aula para provar que  $D(\log x) = 1/x$  e que  $D(e^x) = e^x$ . Neste exercício uma parte fundamental é provar os limites

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Os dois são consequência dos limites

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e, \quad 4. \lim_{x \rightarrow -\infty} \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e,$$

que, como já dito, são dados sem demonstração porque têm uma certa complexidade. Verifique, *aplicando em todos os detalhes o teorema sobre o limite de funções compostas*, que os limites 1. e 2. implicam o limite 3. e que este implica o limite 4.

**Exercício 198.** Calcule os limites seguintes.

$$\begin{array}{ll} 1. \lim_{x \rightarrow +\infty} \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2} & 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x)}{x} \\ 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2}{x} & 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x^2} \\ 5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{a}{x} \right)^x & 6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)^x \end{array}$$

No item 5,  $a \in \mathbb{R}$  é fixado.

**Exercício 199.** Diga em quais pontos são deriváveis as funções seguintes:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

**Proposição 65** (Continuidade de uma função derivável). *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável em um ponto  $x_0 \in I$ . Então,  $f$  é contínua em  $x_0$ .*

**Observação 66.** Não se faça confusão: o resultado acima diz que uma função derivável em um ponto é também contínua naquele ponto. O viceversa não vale. Pense como contra-exemplo na função  $|x|$  ou  $\sqrt{x}$ . Um enunciado equivalente à proposição é o seguinte: *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função descontínua em um ponto  $x_0 \in I$ . Então,  $f$  não é derivável em  $x_0$ .*

**Exercício 200.** Seja

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ x-1 & x < 0 \end{cases}$$

Prove usando a definição que  $f$  não é derivável em  $x = 0$  (usando a proposição acima seria fácil). Calcule a derivada de  $f$  em todo outro ponto ( $x \neq 0$ ). Verifique se  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  existe. (o limite da derivada não é o limite da razão incremental)

## 20. Segunda-feira, 7 de junho de 2021

Até agora o único instrumento que permitiu o cálculo das derivadas foi a aplicação da definição. Que se torna quase inviável para funções até não complicadas:  $D\left(\frac{\sin x^2}{x}\right)$  em  $x = 1$  é extremamente complicada com a definição. A seguinte proposição, assim como os próximos resultados relativos à derivação de uma função composta e da inversa de uma função, ajudam muito nas contas.

**Proposição 67** (Algebra das derivadas ou regras de derivação). *Sejam  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções deriváveis em um ponto  $x_0 \in I$ . Então são deriváveis em  $x_0$  as funções  $f \pm g$ ,  $f \cdot g$ ,  $1/g$  e  $f/g$  (nestes últimos dois casos se  $g(x_0) \neq 0$ ) e temos as fórmulas:*

- (1)  $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$
- (2)  $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0),$
- (3)  $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$
- (4)  $(1/g)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2},$
- (5)  $(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Como exemplo, se  $n$  é inteiro positivo e  $x \neq 0$ ,  $D \frac{1}{x^n} = -n \frac{1}{x^{n+1}}$

Do item (5) segue que a tangente é derivável:  $D \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ .

**Exercício 201.** Prove todos os itens da proposição, conforme feito em sala de aula.

**Proposição 68** (Derivada da função composta, também chamada regra da cadeia). *Sejam dadas duas funções  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que  $\operatorname{Im}(f) \subseteq J$ . Sejam  $f$  derivável em um ponto  $x_0 \in I$  e  $g$  derivável em  $y_0 = f(x_0)$ . Então  $g \circ f$  é derivável em  $x_0$  e  $(g \circ f)'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0)$ .*

**Exercício 202.** Prove a proposição acima. Lembre as dificuldades que foram mencionadas em sala de aula e veja que a demonstração se apoia neste resultado intermediário que coloco aqui: *sejam  $I$  intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada. Suponha  $f$  derivável em um ponto  $x \in I$  fixado. Suponha também que para todo  $\delta > 0$  exista  $z \in I$ ,  $|z - x| < \delta$  tal que  $f(z) = f(x)$ . Então,  $f'(x) = 0$ .* Prove este resultado e tente oferecer dele um enunciado mais geral. De fato, não precisa “incomodar” a derivação. Se trata de um resultado geral sobre os limites.

**Exercício 203.** Calcule as derivadas de  $\sin^2 x$  e  $\cos x^2$ .

**Exercício 204.** Calcule as derivadas de  $\sin(x^2 + \operatorname{tg} x)$  e  $\log(x^3 + 1)$ .

**Exercício 205** (Derivada de  $f(x)^{g(x)}$ ). A proposição 68 pode ser usada para calcular a derivada de uma função do tipo  $f(x)^{g(x)}$ , onde  $f$  e  $g$  são deriváveis. Claramente precisa que  $f(x) > 0$  para todo  $x$ . Neste caso, se trata de observar que

$$f(x)^{g(x)} = e^{\log f(x)^{g(x)}} = e^{g(x) \log f(x)}.$$

Aplique agora a proposição 68 para concluir o exercício.



**Exercício 206.** Calcule a derivada de  $(\sin x + 2)^{\cos x}$ .

**Exercício 207.** Usando o “truque” do exercício 205 e a proposição 68 pode calcular as derivadas de  $a^x$  e  $x^b$  e verificar os resultados da tabela de derivadas apresentada na aula 19.

**Exercício 208.** Calcule a derivada de  $\sqrt[n]{x}$ .

**21. Quarta-feira, 9 de junho de 2021 e**

**22. Sexta-feira, 11 de junho de 2021**

A prova do próximo resultado foi dada em sala de aula.

**Proposição 69** (Derivada da função inversa). *Sejam  $I$  intervalo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  inversível e contínua e chamamos  $g : \text{Im}(f) \rightarrow \mathbb{R}$  a função inversa de  $f$ . Se  $f$  é derivável em um ponto  $x_0$  e  $f'(x_0) \neq 0$ , então,  $g$  é derivável em  $y_0 = f(x_0)$  e temos  $g'(y_0) = 1/f'(x_0)$ .*

**Exercício 209.** Prove a proposição acima. Lembre que é fundamental o resultado que diz que se  $f$  é contínua num intervalo e inversível, então é monótona.

**Exercício 210.** Da proposição anterior vale em um certo sentido o viceversa: *Seja  $I$  intervalo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  inversível e contínua,  $g : \text{Im}(f) \rightarrow \mathbb{R}$  a função inversa de  $f$ . Se  $f$  é derivável em  $x_0$  e  $f'(x_0) = 0$ , então,  $g$  não é derivável em  $y_0 = f(x_0)$*

**Exercício 211.** Prove as fórmulas 10, 12, 13 e 14 da tabela das derivadas apresentada na aula do dia 4.

Exercícios variados.

**Exercício 212.** Calcule as derivadas das funções seguintes: a)  $\frac{x^2 - 1}{x(x + 2)}$ , b)  $\sin x \cdot \arccos x$ , c)  $\sqrt{1 + x^2}$ ,  
d)  $\arcsen x - \sin x$ , e)  $x\sqrt{1 + x^2}$ , f)  $\arctg \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}$ , g)  $\arctg(2x - x^2)$  h)  $\log \sqrt[3]{x^2 + 1}$  i)  $e^{\sin x}$ .

**Exercício 213.** Encontre um ponto P na hipérbole de equação  $y = \frac{1}{1 + x}$  tal que a tangente por P encontre a origem do plano.

**Exercício 214.** Calcule a área do triângulo formado pelos eixos do plano e pela tangente à curva  $y = \sin x$  no ponto  $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

**Exercício 215.** Encontre as equações das tangentes à parábola  $y = x^2 - 4x + 3$  que passam pela origem.

**Exercício 216.** Calcule a área do triângulo que tem como vertices os pontos comuns das parábolas  $y = x^2$  e  $y = x - x^2$  e o ponto de interseção entre o eixo das abscissas e a tangente à parábola  $2y = x^2$  em  $(-2, 2)$ .

**Exercício 217.** Determine em quais pontos são deriváveis as funções seguintes e calcule as derivadas.

1.  $\operatorname{sign} x \cdot x^2$
2.  $\frac{1}{\operatorname{tg} x}$
3.  $\sqrt{|x|}$
4.  $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$
5.  $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases}$
6.  $f(x) = \begin{cases} e^x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
7.  $\operatorname{sen} |x|$
8.  $[x]$

**Exercício 218.** Calcule as derivadas das funções seguintes.

1.  $x \operatorname{sen}^2 x$
2.  $\cos(\operatorname{sen} x)$
3.  $\frac{x^2 + 2}{x^3 - 3x}$
4.  $\cos\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$
5.  $\arctg \sqrt{x}$
6.  $\sqrt{\arctg x}$
7.  $\frac{\operatorname{sen} x^2}{\operatorname{tg}(x+2)}$
8.  $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^4 + 1}}$

**Exercício 219.** Escreva a equação da reta tangente ao gráfico em  $(x_0, f(x_0))$  das funções seguintes.

$$x^3 + 2x + 3, \quad x_0 = -1/2 \qquad \operatorname{tg} x^2, \quad x = \sqrt{\pi}$$

**Exercício 220.** Diga em quais pontos as funções seguintes são deriváveis e calcule a derivada (nos pontos onde existe). Depois, diga se as derivadas são contínuas.

1.  $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
2.  $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$
3.  $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$
4.  $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 1 & x > 0 \\ \operatorname{sen} x & x \leq 0 \end{cases}$
5.  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{x^2 + 2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{x}{-x^2 - 3} & x < 0 \end{cases}$
6.  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ \operatorname{sen} x & x < 0 \end{cases}$

### Máximos e mínimos, absolutos e relativos

Vamos introduzir o conceito de ponto de máximo ou mínimo relativo.

**Definição 70.** Seja  $A$  um subconjunto de  $\mathbb{R}$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função.

- a) O *máximo absoluto* de  $f$  é o máximo (se existe) da imagem de  $f$ . O *mínimo absoluto* de  $f$  é o mínimo (se existe) da imagem de  $f$ .
- b) Um ponto  $x_0 \in A$  é dito *ponto de máximo absoluto* se  $f(x_0)$  é o máximo absoluto de  $f$ . Um ponto  $x_0 \in A$  é dito *ponto de mínimo absoluto* se  $f(x_0)$  é o mínimo absoluto de  $f$ .
- c) Um ponto  $x_0 \in A$  é dito *ponto de máximo relativo* se existe um intervalo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , tal que  $f(x) \leq f(x_0)$ , para cada  $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . Um ponto  $x_0 \in A$  é dito *ponto de mínimo relativo* se existe um intervalo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ , tal que  $f(x) \geq f(x_0)$ , para cada  $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ .

**Exercício 221.** Seja a função  $f(x) = 2x$ ,  $x \in [1, 2] \cup [3, 4]$ . Determine, justificando a resposta, o máximo e o mínimo de  $f$  (porque existem?) e os pontos de máximo e mínimo relativos.

**Exercício 222.** Seja a função  $f(x) = 2x$ ,  $x \in [1, 2] \cup [3, 4]$ . Determine, justificando a resposta, o máximo e o mínimo de  $f$  (porque existem?) e os pontos de máximo e mínimo relativos.

**Exercício 223.** Determine, justificando a resposta, os pontos de máximo e mínimo absolutos de  $\sin x$ .

**Exercício 224.** Determine, justificando a resposta, os pontos de máximo e mínimo absolutos e relativo de

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \\ 3 - x & \text{se } 0 < x \leq 3 \end{cases}$$

As definições acima envolvem funções quaisquer, ou seja, que podem não ser contínuas nem deriváveis. Contudo, se a função estudada é contínua num intervalo limitado e fechado, o Teorema de Weierstrass (teorema 63) diz que ela possui máximo e mínimo absolutos. Este teorema é importante, porém, por outro lado, não dá nenhuma ajuda prática para determinar máximo e mínimo absolutos (nem relativos) de uma função. Se uma  $f$  é derivável, sua derivada nos dá informações sobre os máximos e os mínimos. O primeiro teorema importante é o seguinte.

**Teorema 71** (de Fermat). (*Condição necessária para a existência dos pontos de máximo ou de mínimo relativo.*) Seja  $I$  intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada. Seja  $x_0$  um ponto interno de  $I$  (ou seja um ponto que pertence a  $I$ , mas não é extremo) e seja ao mesmo tempo um ponto de máximo ou de mínimo relativo de  $f$ . Suponhamos que  $f$  seja derivável em  $x_0$ . Então,  $f'(x_0) = 0$ .

**Exercício 225.** Prove o teorema de Fermat.

Dada uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , um ponto  $x_0$  tal que  $f'(x_0) = 0$  se chama *ponto crítico* ou *ponto estacionário*.

Exemplo:  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Todos os pontos do domínio são internos e  $f$  é derivável. Sabemos que  $x = 0$  é ponto de máximo absoluto (e portanto relativo) de  $f$ . O teorema de Fermat nos diz que  $f'(0) = 0$ , coisa que pode ser calculada facilmente.

O vice-versa do teorema não vale. Dada uma função  $f$ , se  $f'(x_0) = 0$ , não sabemos se  $x_0$  é ponto de máximo ou mínimo relativo.  $x = 0$  é ponto crítico de  $f(x) = x^3$ , mas não é ponto de máximo nem de mínimo relativo.

O teorema de Fermat é usado só para estudar pontos internos ao domínio. Se, por exemplo, consideramos  $f(x) = x$ ,  $x \in [0, 1]$ , sabemos que 0 é ponto de mínimo e 1 é ponto de máximo. Porém,  $f'(x) = 1$ , para

todo  $x$ . Neste caso os pontos de máximo e de mínimo são os extremos do domínio; o teorema de Fermat não pode ser aplicado.

A seguinte é uma versão do Teorema de Fermat que é equivalente e de fato mais utilizada nas aplicações.

**Teorema 72** (de Fermat – versão equivalente). *Seja  $I$  intervalo de  $\mathbb{R}$  e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada. Seja  $x_0$  um ponto interno de  $I$  (ou seja um ponto que pertence a  $I$ , mas não é extremo) e seja ao mesmo tempo um ponto de máximo ou de mínimo relativo de  $f$ . Suponhamos que  $f$  seja derivável em  $x_0$  e que  $f'(x_0) \neq 0$ . Então,  $x_0$  não é um ponto nem de máximo nem de mínimo relativo.*

**Observação 73.** Resumindo, os pontos de máximo ou de mínimo relativo de uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , devem ser procurados entre os três grupos de pontos seguintes:

- (1) os pontos internos do domínio onde  $f$  é derivável e a derivada é zero;
- (2) os extremos de  $I$ ;
- (3) os pontos onde  $f$  não é derivável.

Exemplo:  $f(x) = x^3/3 - x^2/2 - 3$ ; a função é definida em  $\mathbb{R}$ , que é aberto (todos os pontos são interiores), é derivável em  $\mathbb{R}$  a derivada se anula em 0 e 1. Este dois pontos são candidatos a ser pontos de máximo ou de mínimo relativo, mas ainda não temos condições suficientes para dizer se de fato são.

**Exercício 226.** (*exercício útil*): analise a observação acima. Procure exemplos de funções onde pontos de máximo ou mínimo são pontos críticos internos, outros exemplos de funções onde pontos de máximo ou mínimo são pontos extremos do domínio onde a função é derivável mas a derivada não é zero, e exemplos de funções onde pontos de máximo ou mínimo são pontos onde a derivada não existe.

**Exercício 227.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável. Prove (pelo menos) uma das relações seguintes:

- (1) se  $f'(a) > 0$ , então  $a$  é ponto de mínimo relativo;
- (2) se  $f'(a) < 0$ , então  $a$  é ponto de máximo relativo;
- (3) se  $f'(b) > 0$ , então  $a$  é ponto de máximo relativo;
- (4) se  $f'(b) < 0$ , então  $a$  é ponto de mínimo relativo.

Observe que teorema de Fermat dá uma condição necessária para a existência dos pontos de máximo ou de mínimo relativo de uma função, enquanto as condições (1)–(4) deste exercício fornecem uma condição suficiente.

**Exercício 228.** Entre todos os retângulos inscritos em uma circunferência, determine aquele de perímetro máximo.

### 23. Segunda-feira, 14 de junho de 2021

**Exercício 229.** Seja  $p > 1$  fixado. Diga se existe o máximo de  $f(x) = x - \frac{x^p}{p}$  em  $[0, +\infty)$ . Para abordar o exercício, observe primeiramente algumas coisas:

- (1) a potência  $g(x) = x^p$ , não conhecendo  $p$ , é definida para  $x > 0$ . Todavia, sabemos que  $p > 1$  e por isso  $\lim_{x \rightarrow 0} x^p = 0$ . Assim, tal potência pode ser estendida com continuidade em zero definindo  $g(0)$  igual ao limite acima, ou seja, zero.
- (2) O teorema de Weierstrass não pode ser aplicado porque o domínio não é limitado. Observe contudo o seguinte:
- $f(x)$  é positiva para alguns valores de  $x$ . Por exemplo  $f(1) = 1$ .
  - Como já visto,  $f(0) = 0$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$  (veja nos detalhes este último fato).
- Isso implica que  $f$  possui máximo. Prove nos detalhes isso, como extensão do teorema de Weierstrass.

Resumindo, no exercício acima se aplicam seja o teorema de Weierstrass, eventualmente reajustado, seja o de Fermat. Isso vale também para alguns dos exercícios seguintes.

**Exercício 230.** Entre todos os cilindros circulares retos de volume fixado, determine aquele de área mínimo.

**Exercício 231.** Entre todos os números não negativos  $x$  e  $y$ , tais que  $x + y = 1$ , determine aqueles tais que o produto  $xy$  é máximo.

**Exercício 232.** Entre todos os números não negativos  $x$  e  $y$ , tais que  $x^2 + y^2 = 1$ , determine aqueles tais que a soma  $x + y$  é máxima.

**Exercício 233.** Entre todos os retângulos inscritos em uma circunferência, determine aquele de perímetro máximo.

**Exercício 234.** Determine os pontos críticos das funções seguintes, nos domínios associados. Mais em geral, determine os pontos candidatos a serem pontos de máximo ou mínimo relativo. Enfim, diga quais funções possuem máximo ou mínimo absolutos.

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\sin x - \cos x, \quad [0, 2\pi]$      | 2. $\frac{x}{1+x^2}, \quad [-2, 3]$          |
| 3. $x(x-2)^2, \quad [0, 3]$                | 4. $\sin x +  \cos x , \quad [0, \pi]$       |
| 5. $x^2 + \frac{2}{x}, \quad (0, +\infty)$ | 6. $\frac{x}{1+x^2}, \quad \mathbb{R}$       |
| 7. $x - \arctg x, \quad \mathbb{R}$        | 8. $\frac{x^2}{1+x^2}, \quad \mathbb{R}$     |
| 9. $x \log x, \quad (0, +\infty)$          | 10. $\log x - 3\arctg x, \quad (0, +\infty)$ |

**Exercício 235.** Divida 8 em duas partes tais que seja mínima a soma dos cubos delas.

**Exercício 236.** Seja  $V$  o volume de um prisma reto, cuja base é um triângulo equilátero. Determine o lado do triângulo tal que a área total seja mínima.

**Exercício 237.** Entre todos os cilindros inscritos na esfera de raio 1 determine:

- a) aquele de área lateral máxima;
- b) aquele de área total máxima.

**Exercício 238.** Entre todos os cones inscritos na esfera de raio 1 determine:

- a) aquele de volume máximo;
- b) aquele de área lateral máxima;
- c) aquele de área total máxima.

**Exemplo.** Consideramos  $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{5}{9}x^3 - \frac{x^2}{3} + 1$ . A função é contínua, porém está definida em  $\mathbb{R}$ , que não é limitado. Portanto não podemos aplicar o Teorema de Weierstrass, ou seja, não sabemos, *a priori*, se  $f$  possui máximo e mínimo. Podemos ver que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$  (prove como exercício). Portanto  $f$  não possui máximo absoluto. Por outro lado, possui mínimo absoluto. Para prova-lo, vamos utilizar o limite acima na maneira seguinte.

Primeiramente pegamos, a caso, um valor do domínio, por exemplo  $x = 0$ . Temos  $f(0) = 1$ . Portanto o mínimo absoluto, se existir, será  $\leq 1$ . Seja  $M = 2$ . Pela definição de limite e pelo fato de que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ , existem  $a$  e  $b$  reais,  $a < 0 < b$ , tais que  $f(x) \geq 2$  se  $x \leq a$  e se  $x \geq b$ . Portanto, o mínimo absoluto, se existir, será atingido no intervalo  $[a, b]$ . Neste intervalo podemos aplicar o Teorema de Weierstrass e dizer que possui mínimo  $m$  a função  $f$  restrita ao intervalo  $[a, b]$ . Por outro lado, sendo  $m \leq 1$  e sendo  $f(x) \geq 2$  se  $x \leq a$  e se  $x \geq b$ , o valor  $m$  se torna necessariamente mínimo de  $f$  em todo o domínio  $\mathbb{R}$ .

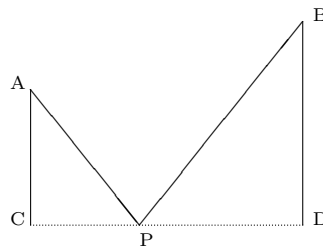
**Exercício 239.** De fato, o argumento anterior pode ser traduzido neste teorema seguinte:

seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Suponhamos que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ . Então,  $f$  possui máximo absoluto.

Dê em todos os detalhes a demonstração deste fato, usando o teorema de Weierstrass como ferramenta.

Voltando à função do exemplo, a derivada é  $f'(x) = x^3 - 5x^2/3 - 2x/3 = x(x + 1/3)(x - 2)$ . Como  $f$  é derivável em  $\mathbb{R}$  e o domínio não tem pontos extremos, os únicos candidatos a serem de máximo ou mínimo relativo (e mínimo absoluto, que sabemos existir) são os pontos críticos de  $f$ ,  $0, -1/3, 2$ . O problema é que não temos ferramentas para prosseguir a investigação. As ferramentas são fornecidas por um teorema, o Teorema valor médio (ou de Lagrange), que é um dos mais importantes do curso. Iremos ver esse teorema em breve.

**Exercício 240.** No desenho seguinte temos duas torres de altura  $a$  e  $b$ , respectivamente, e distância  $d$ . Um passaro voa da cima da primeira torre, encosta o chão em  $P$  e vai para cima da segunda torre. Determine  $P$  tal que o caminho percorrido seja mínimo. O exercício dá a possibilidade de obter a lei de reflexão da luz e a lei dos senos de Snell sobre a refração.

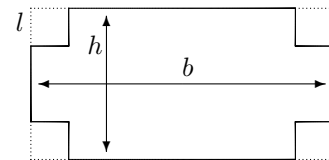


**Exercício 241.** Entre todos os retângulos de perímetro fixado determine aquele de área máxima. Existe aquele de área mínima positiva?

**Exercício 242.** Entre todos os retângulos de área fixada determine aquele de perímetro mínimo. Existe aquele de perímetro máximo?

**Exercício 243.** Seja dado um triângulo retângulo  $T$ . Denotamos por  $a$  e  $b$  as medidas dos catetos. Seja dada a definição seguinte: *um retângulo é dito inscrito em  $T$  se dois dos seus lados estão sobre os catetos do triângulo e um dos seus vértices  $h$  está na hipotenusa*. Determine, entre todos os retângulos inscritos em  $T$ , aquele de área máxima.

**Exercício 244.** Seja dado um retângulo de papelão, cujos lados medem  $h$  e  $b$  respectivamente. Queremos construir uma caixa cortando, nos cantos, quatro quadrados de lado  $l$  e levantando os pedaços que sobram. Determine  $l$  tal que o volume seja máximo. Resposta:  $l = \frac{b + h - \sqrt{b^2 + h^2 - bh}}{6}$ .



**Exercício 245.** Queremos produzir latas de bebida gastando a menor quantidade possível de alumínio. Supondo que uma lata de bebida seja um cilindro circular reto, com a capacidade de  $V$  dada (por exemplo 350 ml), determine o raio da base e a altura que rendem a área total mínima.

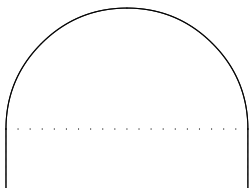
Resposta:  $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$

**Exercício 246.** Entre todas as pirâmides retas de base quadrada e de área total fixada determine aquela de volume máximo.

**Exercício 247.** Determine em quais pontos a função seguinte é derivável e calcule a derivada:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \sin x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

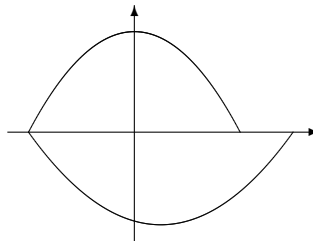
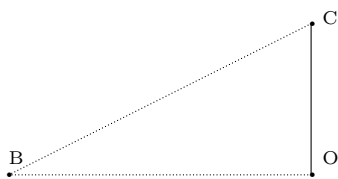
**Exercício 248.** No desenho abaixo o arco acima do retângulo é a semicircunferência de diâmetro igual à base do retângulo. Entre todas as figuras de perímetro fixado  $P$ , determine a medida dos lados que rendem a área máxima.



**Exercício 249.** Imagine que o desenho a esquerda represente uma praia. Em  $B$  temos o nosso guarda-sol. Queremos ir ao bar que está em  $C$ . No ponto  $O$  começa uma calçada de madeira que chega até o bar, e onde imos mais rapidamente do que na areia. Suponhamos que a velocidade na areia seja 1 metro ao segundo, enquanto na calçada  $2 \text{ m/sec}$ . Suponhamos que os segmentos  $OB$  e  $OC$  sejam perpendiculares. Além disso,

a calçada tem 10 metros de comprimento, enquanto  $OB$  é 15 m. Partindo de  $B$ , determine em qual ponto della calçada precisa entrar (continuando daí até o bar) para render mínimo o tempo para chegar ao bar.

**Exercício 250.** Olhando o desenho a direita, entre todos os segmentos verticais entre as parábolas de equações  $2y = 4 - x^2$ , onde  $y \geq 0$ , e  $3y = x^2 - x - 6$ , determine aquele de comprimento máximo.



**Exercício 251.** Se uma função é contínua em  $\mathbb{R}$ , não sabemos se ela possui máximo e mínimo absolutos, porque o domínio não é limitado e o teorema de Weierstrass não pode ser aplicado. Todavia, com uma hipótese mais forte podemos chegar à conclusão seguinte: se  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e verifica

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = -\infty,$$

então  $f$  possui máximo absoluto. Prove este fato. A ideia da prova é a seguinte: aplique a definição de limite; assim, fixado  $L \in \mathbb{R}$ , existem  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , tais que  $f(x) < L$  se  $x < a$  e  $x > b$ . No intervalo  $[a, b]$   $f$  é obviamente contínua, podemos aplicar o teorema de Weierstrass e  $f$ , em  $[a, b]$ , possui máximo absoluto. Pequeno problema: o máximo absoluto de  $f$  em  $[a, b]$ , chamo ele de  $M$ , pode ser menor de  $L$  e assim não temos certeza de que  $M$  seja máximo absoluto de  $f$  em todo  $\mathbb{R}$ . Todavia, temos um truque para resolver esta complicação: escolha um ponto qualquer de  $\mathbb{R}$ , por exemplo 0. Agora aplique a definição de limite: existem  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , tais que  $f(x) < f(0) - 1$  se  $x < a$  e  $x > b$ . Prove que pode escolher  $a < 0$  e  $b > 0$ . E continue a demonstração até o final.

### Os teoremas fundamentais do cálculo diferencial: Rolle, Lagrange e Cauchy

**Teorema 74** (de Rolle). *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ . Suponhamos  $f(a) = f(b)$ . Então, existe um ponto  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .*

O teorema acima é um caso particular do resultado seguinte, de importância crucial em todo o curso e também em toda a análise matemática.

**Teorema 75** (do valor médio ou de Lagrange). *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $(a, b)$ . Então, existe um ponto  $c \in (a, b)$  tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Como feito em sala de aula, pode ser provado o teorema de Rolle e usá-lo depois para provar o teorema do valor médio. Nas hipóteses do teorema de Rolle,  $f$  possui máximo e mínimo absolutos. Se eles caem nos extremos, significa que  $f$  é constante. Assim a derivada é nula em todos os pontos. Se não, pelo menos um entre o máximo e mínimo absolutos cai em  $(a, b)$ , seja  $c$  este ponto. Pelo teorema de Fermat,  $f'(c) = 0$ .



**Exercício 252.** Prove nos detalhes o passo 1 acima. Nesta argumentação, tem uma observação lógica que vou aqui traduzir no exercício seguinte: escreva a negação lógica da frase seguinte: “Antônio e José são altos”.

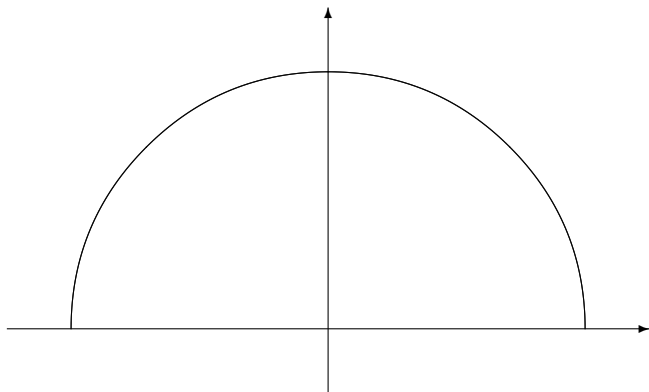
O passo 2 da prova do teorema de Lagrange é o seguinte: aplique o teorema de Rolle à função

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

$g$  é contínua em  $[a, b]$  e derivável em  $a$ , e  $g(a) = g(b) = 0$  (fácil, prove como exercício). Então, existe um ponto  $c \in (a, b)$  tal que  $g'(c) = 0$ . Mas  $g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , portanto,  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

**Exercício 253.** Verifique os detalhes.

**Observação 76.** No caso em que, voltando ao enunciado do teorema de Rolle,  $f$  seja derivável em todo  $[a, b]$  o teorema è obviamente válido. Porque não se usa diretamente tal versão simplificada? Considere  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . A versão “original” do teorema de Rolle se aplica à  $f$  aqui considerada, a versão simplificada não. Portanto ela resulta menos versátil e mais limitada. Verifique os detalhes como exercício.



**24. Sexta-feira, 18 de junho de 2021**

Seminários em sala de aula.

**25. Quarta-feira, 16 de junho de 2021 e**

**26. Segunda-feira, 21 de junho de 2021**

O teorema de Cauchy é o menos famoso dos três, mas é usado em vários problemas. Por exemplo, ele permite provar os teoremas de de l'Hôpital.

**Teorema 77** (de Cauchy). *Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  duas funções contínuas em  $[a, b]$  e deriváveis em  $(a, b)$ . Então, existe um ponto  $c \in (a, b)$  tal que*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Se  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x$ , e portanto  $g(a) \neq g(b)$  graças ao teorema de Rolle, a fórmula acima se torna

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

**Exercício 254.** Prove o teorema. Observe também que o teorema de Lagrange é um caso particular do teorema de Cauchy no caso  $g(x) = x$ .

Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável em  $\bar{x}$  interior de  $I$  (ou seja  $\bar{x}$  não é extremo de  $I$ ) e tal que  $f'(\bar{x}) = 0$ . Para ver se  $\bar{x}$  é ponto de máximo ou de mínimo relativo usamos os teoremas seguintes, estritamente ligados ao teorema de Lagrange. Ou seja: a conexão entre o teorema de Lagrange e o estudo dos pontos de máximo ou de mínimo relativo de uma função é dada pelos teoremas seguintes que relacionam a monotonia de uma função com a sua derivada.

Sabemos que a derivada de uma função constante é nula em todos os pontos. Pelo teorema de Lagrange podemos provar o vice-versa, se a função é definida em um intervalo.

**Teorema 78.** *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  (onde  $I$  é um intervalo), derivável e tal que  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in I$ . Então  $f$  é constante.*

Se o domínio não é um intervalo, o teorema é falso. A função seguinte

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in (0, 1) \\ 2 & \text{se } x \in (1, 2) \end{cases}$$

é definida em um conjunto,  $(0, 1) \cup (1, 2)$ , que não é um intervalo, é derivável com derivada nula em todos os pontos, mas não é constante.

**Exercício 255.** Dê a demonstração do teorema anterior e fique atento onde se usa o teorema de Lagrange.

O seguinte é um resultado de extrema importância no estudo dos pontos de máximo e mínimo relativo.

**Teorema 79** (relação monotonia/derivada). *Sejam  $I$  um intervalo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $I$  e derivável em todos os pontos de  $I$  com a possível exceção dos extremos. Então:*

- a)  $f$  é crescente em todo  $I$  se e somente se  $f'(x) \geq 0$  para todo  $x$  no interior de  $I$ ;
- b)  $f$  é decrescente em todo  $I$  se e somente se  $f'(x) \leq 0$  para todo  $x$  no interior de  $I$ .

**Observação 80.** Vale a pena fazer as observações seguintes (que foram feitas em sala de aula).

- (1) A implicação  $\implies$  dos itens a) e b) acima não precisa do teorema de Lagrange. A demonstração decorre da definição de derivada como limite da razão incremental e do teorema da conservação do sinal.
- (2) Sempre a respeito da implicação  $\implies$ , o domínio não precisa ser um intervalo. Se  $f$  fosse definida em (por exemplo)  $(a, b) \cup (c, d)$ , a  $\implies$  continuaria valendo.
- (3) A  $\Leftarrow$  **precisa** do teorema de Lagrange na sua demonstração. Se trata de um resultado bem mais profundo do que o  $\implies$ . E ao mesmo tempo mais útil. O sinal da derivada de  $f$  é interessante nem tanto como fato em si, mas porque diz a respeito do crescimento ou decrescimento de  $f$ .
- (4) Na validade do resultado  $\Leftarrow$ , o domínio **deve** ser um intervalo. Pense na função  $1/x$ : ela é definida em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  (que não é um intervalo!) possui derivada negativa para todo  $x \neq 0$ , mas não é decrescente (é decrescente nos dois intervalos  $(-\infty, 0)$  e  $(0, +\infty)$ , separadamente).

- (5) No teorema, eu escolhi dar uma versão com hipóteses bem parecidas com as dos teoremas de Rolle e Lagrange. Isso ajuda em casos onde a derivada pode não existir nos extremos. Considere por exemplo  $\sqrt{x}$ . Ela é estritamente crescente em  $[0, +\infty)$  e não somente em  $(0, +\infty)$ , com derivada positiva para todo  $x > 0$ .

**Exercício 256.** Verifique os detalhes das observações acima.

O teorema 79 tem uma versão que relaciona o estrito crescimento (decrecimento) com a derivada positiva (negativa)? Parcialmente sim, mas não completamente. Vale a proposição seguinte.

**Proposição 81.** *Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $I$  e derivável nos pontos internos de  $I$ .*

- a) *Se  $f'(x) > 0$  nos pontos internos de  $I$ , então  $f$  é estritamente crescente em todo  $I$ .*  
 b) *Se  $f'(x) < 0$  nos pontos internos de  $I$ , então  $f$  é estritamente decrescente em todo  $I$ .*

**Observação 82.** vice-versa não vale. Pense em funções como  $x^3$  e  $-x^3$ .

**Exercício 257.** Determine os pontos de máximo e mínimo relativo, se existem, das funções seguintes.

- |                               |                               |
|-------------------------------|-------------------------------|
| 1. $2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$    | 2. $x^3 + x^2 + x + 1$        |
| 3. $x^3 - x^4$                | $x(x-1)^2$                    |
| 4. $\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$ | 5. $\frac{x^4}{\sqrt{1-x^2}}$ |

**Exercício 258.** Determine os pontos de máximo e mínimo absoluto e relativo, se existem, das funções seguintes, nos conjuntos indicados ao lado. Determine também o máximo e o mínimo absoluto, se existem.

- |   |   |
|---|---|
| 1. $x^3 + x^2, \quad [0, +\infty)$  | 2. $ \sin x , \quad \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ |
| 3. $\frac{\log  x }{x}, \quad [-3, 0)$  | 4. $x^2, \quad (0, 1)$  |
| 5. $[x], \quad [0, 2]$  | 6. $\sin x - x \cos x, \quad \mathbb{R}$                        |
| 7. $x^2, \quad (0, 1)$  | 8. $\cos^2 x^2, \quad [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$                |
| 9. $f(x) = \begin{cases}  x-2  & x \in [0, 4] \\ \log x & x \in (4, 5] \end{cases}$ | 10. $\cos^2 x^2, \quad [-\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}]$               |

**Exercício 259.** Dê informações sobre o número e o sinal das soluções das equações seguintes:

- |   |                               |
|---|-------------------------------|
| 1. $x \log x = -\frac{1}{4}$                      | 2. $x^3 - 3x^2 + 8x = 0$      |
| 3. $-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x + 2 = 0$ | 4. $x^3 - 3x^2 + 8x = 0$      |
| 5. $-\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + x + 2 = 0$ | 6. $x^2 - \log( x  + 1) = 0$  |
| 7. $x^4 - 6x^2 + 4 = 0$                           | 8. $x^4 - 2x^3 + x^2 + 1 = 0$ |

9.  $x^3 + x^2 - k + 1 = 0$ , variando  $k$  em  $\mathbb{R}$       10.  $x^3 - 2x^2 + k - 1 = 0$ , variando  $k$  em  $\mathbb{R}$

**Exercício 260.** Determine os pontos de máximo e mínimo absoluto e relativo (se existem) de  $f(x) = \arctg x + \frac{1}{x+1}$ .

**Exercício 261.** Determine os pontos de máximo e mínimo absoluto e relativo (se existem) de  $f(x) = |x^2 - 4|^{5/3}$ .

### Test a múltipla escolha:

**Exercício 262.** Dada uma função  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , condição suficiente para que  $f$  seja inversível é que seja

- |  |  |
|--|--|
| a) contínua em todo o domínio.   | b) Derivável com derivada positiva.  |
| c) Estritamente crescente.   | d) Estritamente crescente em $(-\infty, 0)$ e em $(0, +\infty)$ , separadamente. |
| e) Estritamente crescente em $(-\infty, 0)$ e estritamente decrescente em $(0, +\infty)$ . | f) Nenhuma das respostas acima é correta.  |

**Exercício 263.** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  derivável em  $x_0 \in [a, b]$ . Se  $x_0$  é ponto de máximo relativo, então  $f'(x_0) = 0$ . Este enunciado assemelha ao teorema de Fermat, mas escrito assim é falso. Qual hipótese devemos adicionar para que seja verdadeiro?

- |  |  |
|--|--|
| a) $x_0 \in (a, b)$ .                            | b) $f$ derivável em $[a, b]$ (não só em $x_0$ ). |
| c) $f$ derivável $[a, b]$ com derivada contínua. | d) nenhuma das respostas acima é correta.        |

**Exercício 264.** Seja  $f$  definida em  $[-1, 1]$ . Diga qual das condições seguintes é suficiente para que a equação  $f(x) = 0$  tenha solução:

- |   |   |
|---|---|
| a) $f$ contínua e $f(-1) < f(1)$ .  | b) $f$ derivável e $f(-1) < f(1)$ .           |
| c) $f(-1) < 0$ e $f(1) > 0$ .   | d) $f$ contínua, crescente e $f(-1) < f(1)$ . |
| e) nenhuma das condições anteriores garante a existência da solução de $f(x) = 0$ . |   |

**Exercício 265.** Diga se as funções seguintes são inversíveis em um oportuno intervalo do tipo  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ; em caso afirmativo, determine, se existe, a derivada da função inversa

- |  |   |
|--|---|
| 1. $\begin{cases} f(x) = x^3 + \operatorname{tg} x \\ x_0 = 0 \quad y_0 = 0 \end{cases}$ | 2. $\begin{cases} f(x) = x^3 + x^5 \\ x_0 = 0 \quad y_0 = 0 \end{cases}$                        |
| 3. $\begin{cases} f(x) = 2x +  x  \\ x_0 = 0 \quad y_0 = 0 \end{cases}$                  | 4. $\begin{cases} f(x) = \operatorname{sign} x \sqrt{ x } \\ x_0 = 0 \quad y_0 = 0 \end{cases}$ |

Seminários em sala de aula.

## 28. Sexta-feira, 25 de junho de 2021

Segunda parte da aula: um seminário em sala de aula. Primeira parte dedicada ao conteúdo seguinte.

Os teoremas seguintes apresentam interessantes métodos para resolver limites que se apresentam em formas indeterminadas. Eles são conhecidos como teoremas de de l'Hôpital, do nome do marquês Guillaume de l'Hôpital que os publicou em 1696, poucos anos depois da publicação (1684) do famoso [artigo](#) na revista "Acta eruditorum" onde Leibniz apresentou pela primeira vez o conceito de derivada. Na verdade os teoremas são devidos a Johann Bernoulli. A reconstrução dos historiadores provou que de l'Hôpital pagava uma pensão a Bernoulli para não divulgar a real autoria dos resultados. Mesmo assim, continuam sendo conhecidos com a autoria errada de de l'Hôpital.

**Teorema 83** (de l'Hôpital - primeira versão). *Sejam  $f, g$  duas funções contínuas em  $[a, b]$  e deriváveis em  $(a, b)$  com a possível exceção de um ponto  $c \in [a, b]$ . Sejam  $f(c) = 0 = g(c)$  e suponhamos que  $g(x)$  e  $g'(x)$  sejam não nulas em todo  $x \neq c$ . Suponhamos que o limite*

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

onde  $l$  é real ou  $\pm\infty$ . Então,

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

**Teorema 84** (de l'Hôpital - segunda versão). *Sejam  $f, g$  duas funções deriváveis em  $(a, b)$ . Suponhamos que o limite*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{se apresente na forma indeterminada} \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Suponhamos também que o limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l,$$

onde  $l$  é real ou  $\pm\infty$ . Então,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

O segundo teorema vale (obviamente) no caso em que se considere  $x \rightarrow b$ . Inclusive, o teorema vale se for considerado um limite bilateral, ou seja,  $x \rightarrow c$ , onde  $c \in (a, b)$ .

**Exercício 266.** Duas versões dos teoremas de de l'Hôpital, análogas às duas escritas acima, valem quando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Escreva o enunciado delas.

**Exercício 267.** Estude, usando os teoremas de de l'Hôpital, os limites seguintes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctg x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x^3 - 4x + 1}{x^3 + x^2 - 5x + 3}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \arctg x - \frac{\pi}{2} \right).$$

**Exercício 268.** Estude, usando os teoremas de de l'Hôpital, os limites seguintes:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \log x, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\log x)^\alpha}{x^\beta}, \quad \alpha, \beta > 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x}, \quad \alpha > 0, a > 1.$$

Observação: se a forma indeterminada do limite  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  não é verificada, os teoremas de de l'Hôpital não podem ser usados. Por exemplo,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+1} = 0$ , mais o limite da fração das derivadas é 1. O problema é de fato que o limite inicial não se apresenta em uma forma indeterminada.

**Exercício 269.** Escreva a derivada da função  $f(x) = \cos(\log(x^2 + x))$ .

**Exercício 270.** Calcule a derivada de  $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ \sin x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

**Exercício 271.** Escreva a equação da reta tangente à função  $f(x) = \arctg x$  no ponto  $(1, f(1))$ .

**Exercício 272.** Consideramos a função  $f(x) = x^4 + \operatorname{tg} x + 1$ . Prove que existe um intervalo de tipo  $(-a, a)$  (onde  $a$  é um oportuno número positivo) tal que  $f$  é inversível em  $(-a, a)$ . Calcule, em seguida,  $D(f^{-1})(1)$ .

A ideia da resolução do exercício é a seguinte:  $f$  é derivável em todo o domínio e  $f'(x) = 4x^3 + 1 + \operatorname{tg}^2 x$ . Se  $x > 0$ ,  $f'(x)$  é obviamente positiva, mas se  $x < 0$ , não podemos dizer-lo. Por outro lado  $f'(0) = 1$ . Pelo teorema da conservação do sinal das funções contínuas e observando que  $f'(x)$  é contínua, podemos dizer que existe um intervalo  $(-a, a)$  onde  $f'(x)$  mantém o sinal positivo. Portanto, usando o segundo teorema de monotonia, podemos dizer que  $f$  é estritamente crescente em  $(-a, a)$  e portanto inversível. Observamos que  $f(0) = 1$ . Portanto, podemos dizer que  $D(f^{-1})(1) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{1} = 1$ .

**Exercício 273.** Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{x \cos x}$$

**Exercício 274.** Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

Neste exercício, que aparece também anteriormente, precisa aplicar mais vezes os teoremas de de L'Hôpital. Porém, o limite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  não pode ser abordado pelos teoremas porque o conhecimento da derivada do seno requer o conhecimento do limite. Ou seja, caímos num círculo vicioso. Por outro lado,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$  é conhecido por outras vias e o exercício pode continuar.

**Exercício 275.** Pela mesma razão, não podemos aplicar os teoremas de de L'Hôpital para calcular os limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x}.$$

Explique os detalhes.

**Exercício 276.** Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x} - 2 + x}{\sin^2(\pi x)}$$

**Exercício 277.** Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1 + e^{2x})}{x}$$

**Exercício 278.** Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2} \right)$$

**Exercício 279.** Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x$$

Este limite se apresenta em uma forma nova para o curso que estamos estudando, a forma  $0^0$ . Que é indeterminada. Por outro lado observe que valem as igualdades  $x^x = e^{\log x^x} = e^{x \log x}$ . Agora, usando o limite anterior e o limite para composição, podemos resolver o exercício.

**Exercício 280.** Calcule o limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x^2}{x^2 + 1}$$

Este limite pode ser abordado pelo teorema do confronto e vale 0. Se tentarmos aplicar os teoremas de de L'Hôpital, vemos que o limite da fração das derivadas não existe. Este fato não está em contradição com os teoremas. Uma das versões, de fato, diz que, se

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existe e vale  $l$ , onde  $l$  pode ser um número ou  $\pm\infty$ , então

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

Porém, se o limite

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

não existe, tudo pode acontecer sobre

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)},$$

porque neste caso o teorema não diz nada.

**Exercício 281.** Calcule os limites seguintes:

$$\begin{array}{cccc} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} & \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{1+x}{x} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x^2} & \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{\sin 4x} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\log(3 + \sin x)}{x} & \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{x} & \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\arccos x} \end{array}$$

**Exercício 282.** Diga para quais valores reais  $a$  temos  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x - a) = -1/2$ .

\* \* \*

**Definição 85.** Seja  $I$  intervalo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivável. Dado  $x_0 \in I$ , se  $f'$  é derivável em  $x_0$ , chamamos o valor  $Df'(x_0)$  de *segunda derivada* de  $f$  em  $x_0$ . O símbolo será  $f''(x_0)$ . Se  $f''(x)$  existe para todo  $x$  e tal função é derivável, a sua derivada será a *terceira derivada*  $f'''(x)$  de  $f$ . E podemos continuar: se  $f$  possui outras derivadas,  $f^{(4)}, f^{(5)}, \dots, f^{(n)}, \dots$

## 29. Segunda-feira, 28 de junho de 2021

A segunda derivada é útil para procurar pontos de máximo ou mínimo relativo como o teorema seguinte explica.

**Teorema 86.** *Sejam  $I$  intervalo,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivável e seja  $x_0$  ponto crítico interno. Então:*

- (1) *se  $f''(x_0)$  existe e é positiva, então,  $x_0$  é ponto de mínimo relativo;*
- (2) *se  $f''(x_0)$  existe e é negativa, então,  $x_0$  é ponto de máximo relativo.*

No teorema é dito claramente, mas vale a pena repetir, que o valor de  $f''(x_0)$  serve unicamente se  $x_0$  é ponto crítico.

**Exercício 283.** Tente demonstrar um dos dois itens do teorema.

**Exercício 284.** Estude os pontos de máximo ou mínimo relativo de  $x^2 \log x$ .

**Exercício 285.** Defina o prolongamento contínuo em zero da função acima e estude os pontos de máximo ou mínimo relativo da nova função.

**Exercício 286.** Se  $f''(x_0) = 0$ , nada podemos dizer. Veja o que acontece com as funções  $x^3, x^4, -x^4$ .

**Exercício 287.** Usando funções do tipo  $\sin(1/x)$ , oportunamente manipulada, defina uma  $f$  em um intervalo do tipo  $(-a, a)$ , que seja derivável, tal que 0 seja ponto críticos, mas que 0 não seja ponto de mínimo nem de máximo relativo e nem ponto de inflexão.

**Exercício 288. exercício importante e não fácil.** Seja  $f : I = (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função onde  $a$  é um número positivo fixado. Suponhamos que  $f$  possua derivada terceira para todo  $x \in I$  e suponhamos que  $f'''(x)$  seja contínua para todo  $x$ . Seja  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = 0$  e  $f'''(0) = 5$ . O que podemos dizer sobre  $x = 0$  em relação a  $f$ ? É ponto de mínimo relativo? de máximo? Nenhuma das duas coisas?  $f$  pode ser inversível em uma vizinhança de 0?



**Definição 87** (concavidade/convexidade).

**convexidade**

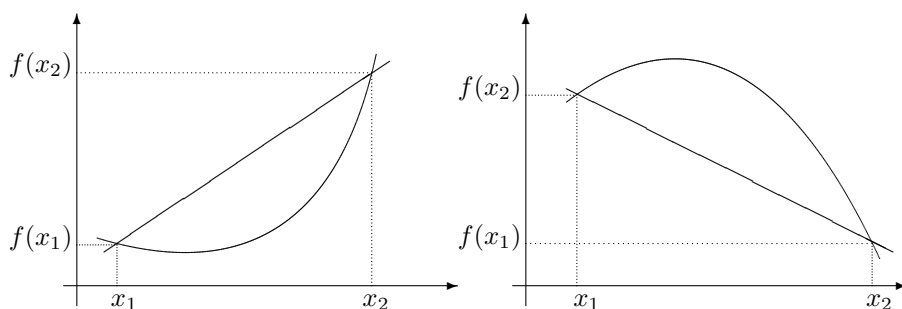
Seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada. A função é dita *convexa* se, para todos os pontos  $P = (x_1, f(x_1))$  e  $Q = (x_2, f(x_2))$  que pertencem ao gráfico de  $f$ , o gráfico de  $f$  considerado entre  $P$  e  $Q$  está abaixo do segmento que passa por  $P$  e  $Q$ . Em fórmulas:

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \forall x \in [x_1, x_2], \quad \forall x_1, x_2 \in I.$$

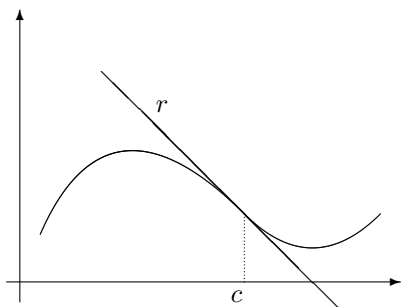
**concavidade**

$f$  é dita *côncava* se, para todos os pontos  $P = (x_1, f(x_1))$  e  $Q = (x_2, f(x_2))$  que pertencem ao gráfico de  $f$ , o gráfico de  $f$  considerado entre  $P$  e  $Q$  está acima do segmento que passa por  $P$  e  $Q$ . Em fórmulas:

$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1), \forall x \in [x_1, x_2], \quad \forall x_1, x_2 \in I.$$



função convexa a esquerda e côncava a direita



o ponto  $c$  é dito de *inflexão* e a reta  $r$  é tangente ao gráfico em  $(c, f(c))$ .

O ponto  $c$  do gráfico acima é chamado *ponto de inflexão* porque  $f$  troca de concavidade/convexidade de um intervalo de tipo  $[a, c]$  para um intervalo de tipo  $[c, d]$ . Mais precisamente: dada  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $I$  é um intervalo, um ponto  $c$  interno a  $I$  é chamado *ponto de inflexão* se existe  $\delta > 0$  tal que  $f$  é convexa (resp. côncava) em  $[c - \delta, c]$  e côncava (resp. convexa) em  $[c, c + \delta]$ .

**30. Quarta-feira, 30 de junho de 2021 e**

**31. Sexta-feira, 2 de julho de 2021**

Seminários em sala de aula.

### 32. Segunda-feira, 5 de julho de 2021

Um seminário em sala de aula e o conteúdo seguinte.

Estamos em proximidade de concluir a investigação sobre as propriedades de uma função que interessam o trabalho da nossa disciplina. Vamos ver o próximo conceito.

#### Definição 88.

- **Assíntota horizontal:** Seja  $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada. Suponhamos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}.$$

Dizemos que a reta  $y = l$  é *assíntota horizontal* de  $f$ . Analogamente, se  $f : (-\infty, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m \in \mathbb{R},$$

a reta  $y = m$  também é chamada *assíntota horizontal* de  $f$ .

- **Assíntota vertical:** Sejam  $I$  intervalo de  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada e  $x_0$  um ponto interno de  $I$  ou um extremo de  $I$ . Suponhamos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

Dizemos que a reta  $x = x_0$  é *assíntota vertical* de  $f$ .

- **Assíntota oblíqua:** Seja  $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada. Suponhamos que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0.$$

Dizemos que a reta  $y = mx + q$  é *assíntota oblíqua* de  $f$ . Podemos eventualmente acrescentar dizendo: *assíntota oblíqua para  $x \rightarrow +\infty$* . Analogamente, pode ser definida a assíntota oblíqua para  $x \rightarrow -\infty$  (se o domínio de  $f$  é do tipo  $(-\infty, b)$ ).

**Exercício 289.** Seja dada  $f(x)$  e seja  $y = mx + q$  assíntota oblíqua para  $x \rightarrow +\infty$ . Prove que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  se  $m > 0$  e  $-\infty$  se  $m < 0$ .

Seja dada  $f(x)$  e suponhamos (por exemplo) que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ . Como podemos determinar se  $f$  possui assíntota oblíqua para  $x \rightarrow +\infty$ ? E qual é tal assíntota? Primeiramente estudamos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Se tal limite existe e vale  $m \in \mathbb{R}$ , estudamos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx).$$

Se o limite acima existe e vale  $q \in \mathbb{R}$ , então  $y = mx + q$  é assíntota oblíqua de  $f$ .

**Exercício 290.** Prove a afirmação acima. Prove também que, se  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)/x)$  é  $\pm\infty$  ou não existe, então  $f$  não possui assíntota oblíqua (para  $x \rightarrow +\infty$ ).

**Exercício 291.** Calcule as assíntotas das funções seguintes:

$$\begin{aligned}
1. f(x) &= \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} & 2. f(x) &= \begin{cases} \ln x & \text{se } x > 0 \\ x & \text{se } x \leq 0 \end{cases} & 3. f(x) &= \cos x/x + \operatorname{arctg} x \\
4. f(x) &= \sqrt{x^2 - 3x + 2} \cdot e^{1/x} & 5. f(x) &= \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{2x^2 + 3x}
\end{aligned}$$

### Estudo de uma função e desenho do gráfico.

Dada uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , o estudo de  $f$  se resume na busca de uma série de informações que o trabalho feito neste curso permite obter (se as contas não são complicadas). Tais informações devem, em tese, permitir o desenho do gráfico. Geralmente as informações que devemos procurar são as seguintes:

- (1) determinar o domínio de  $f$ . Se o domínio for explicitamente dado pelo exercício, não tem nada a fazer. Se  $f(x)$  é dada na sua lei algébrica, sem o domínio, deve-se entender que o domínio é o maior conjunto possível onde a lei algébrica é admissível (no campo  $\mathbb{R}$ ).
- (2) Os limites interessantes, que dependem da lei algébrica de  $f$  e do domínio.
- (3) Determinar as assíntotas de  $f$ .
- (4) Dizer se  $f$  é contínua, se possui pontos de descontinuidade; se é derivável e em quais pontos.
- (5) Determinar os pontos de máximo e mínimo relativo e absoluto (se existem).
- (6) Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de  $f$ .
- (7) Determinar os intervalos de concavidade e convexidade de  $f$ .

Eventualmente, outras informações podem ser procuradas, por exemplo:

- Determinar os pontos de anulamento de  $f$  e as regiões do domínio onde  $f$  é positiva ou negativa.

Todos os itens acima dependem da facilidade/dificuldade de contas. Nem tudo pode sempre ser feito.

Um exercício de estudo de uma função deve terminar com o desenho do gráfico que resume as informações obtidas.

**Exercício 292.** Estude as funções seguintes e desenhe o gráfico.

$$\begin{aligned}
1. \quad & \sqrt{x^3/(x-1)} & 2. \quad & x^2 \ln x & 3. \quad & \frac{x+2}{x-2} \\
4. \quad & \frac{1}{x^2+x} & 5. \quad & e^x - x & 6. \quad & x^{2/3}(1-x) \\
7. \quad & \sin x + \cos x & 8. \quad & x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 1 & 9. \quad & \frac{x^2+3}{x-1}
\end{aligned}$$

**33. Quarta-feira, 7 de julho de 2021 e**

**34. Segunda-feira, 12 de julho de 2021**

Seminários em sala de aula.

**35. Quarta-feira, 14 de julho de 2021**

## A fórmula de Taylor

A fórmula de Taylor, ou mais em geral e corretamente poderíamos dizer “as fórmulas de Taylor”, é um conjunto de resultados sobre aproximação de funções por meio de polinômios, desenvolvida por muitos matemáticos, entre outros Newton, os Bernoulli, Euler e os britânicos B. Taylor (1685-1713) e C. Mac Laurin (1698-1746).

Sejam  $I$  um intervalo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável. Considere  $x_0 \in I$  fixado e seja  $m \neq f'(x_0)$  fixado. Considere as funções

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{e} \quad S_m(x) = f(x_0) + m(x - x_0).$$

O gráfico de  $T$  representa a reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $(x_0, f(x_0))$ .

Os gráficos das  $S_m$  representam as retas secantes o gráfico de  $f$  em  $(x_0, f(x_0))$ , com a única exceção da secante vertical que tem equação  $x = x_0$ .

É fácil ver que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - T(x)) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - S_m(x)) = 0. \quad (11)$$

**Exercício 293.** Verifique os limites acima, sabendo que  $f$  é contínua (sendo por hipótese derivável).

Dizemos que  $T(x)$  e as  $S_m(x)$  *aproximam*  $f$  em  $x_0$  por verificar os limites acima. É bom dar a definição correta de função aproximante para evitar que esta palavra assuma um significado confuso onde a intuição nem sempre ajuda.

**Definição 89.** Dadas duas funções  $f(x)$  e  $g(x)$  dizemos que  $g$  *aproxima*  $f$  em  $x_0$  (ou para  $x \rightarrow x_0$ ) se  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = 0$ .

A definição acima permite usar a palavra “aproximar” sem ambiguidade. A mesma coisa acontece com a palavra “infinitésimo” que apresentarei daqui a pouco.

Se as fórmulas (11) mostram uniformidade de comportamento de  $T(x)$  e das  $S_m(x)$ , a investigação pode ser aprofundada para ver se outras diferenças surgem. Por exemplo, se fosse  $(f(x) - T(x)) = (x - x_0)^2$  e  $(f(x) - S_m(x)) = 4m(x - x_0)$  (estou somente inventando uma situação possível), a gente poderia observar que, quando  $x$  é muito próximo de  $x_0$ ,  $(f(x) - T(x))$  é bem mais próxima de zero que as  $(f(x) - S_m(x))$ . A primeira diferença tem um decrescimento quadrático, enquanto é linear em todas as segundas.

Em geral, o exercício seguinte diz que  $T(x)$  tem uma propriedade que nenhuma das  $S_m$  têm, aquela de zerar o limite quocientado com  $x - x_0$ .

**Exercício 294.** Prove que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T(x)}{x - x_0} = 0 \quad \text{enquanto} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - S_m(x)}{x - x_0} = f'(x_0) - m \neq 0.$$

**Observação 90.** A aproximação dada por  $T$  é considerada “melhor” a respeito de todas as aproximações dadas pelas  $S_m(x)$ , porque  $f(x) - T(x)$  tende para zero “mais rapidamente” do que  $x - x_0$ , enquanto as  $f(x) - S_m(x)$  tendem para zero “com a mesma velocidade” do que  $x - x_0$ .

Se  $f$  possui derivada segunda em  $I$ , podemos usar polinômios de grau menor ou igual a 2 para obter aproximações ainda melhores, estendendo o argumento acima. Sejam  $I$  um intervalo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável duas vezes. Considere  $x_0 \in I$  fixado e considere as funções polinomiais seguintes:

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$$

e qualquer outra função do tipo

$$Q_{a,b}(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + b(x - x_0)^2, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Os gráficos de  $T_2(x)$  e de todas as  $Q_{a,b}(x)$  são parábolas que passam por  $(x_0, f(x_0))$ . Em particular,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - T_2(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - Q_{a,b}(x) = 0.$$

Veja a analogia com os limites da (11).  $T_2$  e  $Q_{a,b}$  são aproximantes de  $f$  em  $x_0$ . Dito de outra forma, as funções  $f - T_2$  e  $f - Q_{a,b}$  são infinitésimas para  $x \rightarrow x_0$ . Porém, tem uma diferença crucial entre  $T_2$  e todas as  $Q_{a,b}$ , que é análoga àquela que o exercício 294 mostra no caso de primeiro grau.  $T_2$  verifica o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0, \quad (12)$$

e é o único polinômio de grau  $\leq 2$  que verifica o limite acima. Ou seja, se  $a \neq f'(x_0)$  ou  $b \neq \frac{1}{2}f''(x_0)$  o limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - Q_{a,b}(x)}{(x - x_0)^2}$$

ou não existe, ou, se existir, não é zero.

**Exercício 295.** Prove as fórmulas acima. Aqui em baixo veja o resumo dessa prova.

Procuramos um polinômio  $T_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$  tal que, analogamente ao caso linear,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2)}{(x - x_0)^2} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0.$$

O limite acima se apresenta na forma indeterminada 0/0. Aplicando o Teorema de de L'Hôpital, podemos ver que o limite acima é verificado se e somente se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = a_2 \quad (*).$$

Sendo

$$\frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = \frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{x - x_0},$$

ou seja,

$$\frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)}{(x - x_0)^2} \cdot (x - x_0) = \frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)}{x - x_0},$$

se existe  $a_2$  tal que a igualdade (\*) é verificada, então, pelo produto dos limites, temos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - a_0 - a_1(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Do resultado visto no caso linear, temos como consequência o fato de que  $a_0 = f(x_0)$  e  $a_1 = f'(x_0)$  (os únicos dois valores que permitem o limite acima). Agora precisa descobrir  $a_2$ . O limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2)}{(x - x_0)^2}$$

se apresenta em uma forma indeterminada  $0/0$ . Vamos usar o teorema de de l'Hôpital.

$$\frac{f'(x) - f'(x_0) - 2a_2(x - x_0)}{2(x - x_0)} = \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} - a_2.$$

Portanto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} - a_2 = 0$$

se e somente se  $a_2 = \frac{1}{2}f''(x_0)$ .

Vamos resumir: se  $f$  possui segunda derivada, existe e é único um polinômio de grau  $\leq 2$ ,  $T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2$ , tal que, escrevendo

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + r(x),$$

isto é

$$f(x) = \text{função polinomial} + \text{função resto},$$

o resto tende para zero mais rapidamente do que  $(x - x_0)^2$ , ou seja

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_2(x)}{(x - x_0)^2} = 0.$$

Observe que  $T_2(x)$  pode ser de grau  $\leq 1$  (portanto igual a  $T$ ); isso acontece se  $f''(x_0) = 0$ . É interessante a comparação de  $T_2$  não somente com as  $Q_{a,b}$ , mas também com  $T$ . A aproximação dada por  $T_2$  é melhor daquela dada por  $T(x)$  (a reta tangente), por causa do fato que  $f(x) - T(x)$  tende a zero mais rapidamente de  $x - x_0$ , mas não sabemos se tende mais rapidamente a zero de  $(x - x_0)^2$ .

**Exercício 296.** Veja o que acontece (faça as contas) com as funções  $x^3 + 3x^2 + x$ ,  $e^x$ ,  $\cos x$ . Pegue, nos três casos,  $x_0 = 0$ .

**Exercício 297.** Qual é uma condição suficiente para que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0))}{(x - x_0)^2} = 0?$$

Foi mencionada, logo depois da definição 89, a palavra infinitésimo. Vamos dar a definição agora. Ela nada tem a ver com os infinitésimos de Leibniz. É somente uma palavra que resume uma propriedade, nada de particularmente profundo.

**Definição 91.** Sejam  $I$  um intervalo e  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função dada. Considere  $x_0 \in I$  fixado. Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , dizemos que  $g$  é *infinitésima para  $x \rightarrow x_0$* . Seja agora  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$  e considere o limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{(x - x_0)^n}.$$

Se o limite acima existe e vale zero, dizemos que  $g$  é infinitésima para  $x \rightarrow x_0$  *de ordem superior a  $n$* . Se o limite acima existe e igual a  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  dizemos que  $g$  é infinitésima para  $x \rightarrow x_0$  *de ordem  $n$* .

A definição acima é fortemente relacionada com a definição de “o pequeno”, que irei colocar daqui a não muito.

\* \* \*

Vamos finalmente generalizar todo o argumento precedente, apresentando assim o primeiro dos teoremas de Taylor. Começamos pela definição seguinte.

**Definição 92** (Polinômio e Resto de Taylor). Sejam  $I$  um intervalo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável até a ordem  $n$ . Seja  $x_0 \in I$  fixado. O polinômio de grau  $\leq n$

$$T_n(x, x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

se chama *polinômio de Taylor de  $f$  de ordem  $n$  e centro  $x_0$* . A função  $R_n(x, x_0)$ , definida como

$$R_n(x, x_0) = f(x) - T_n(x, x_0),$$

se chama *resto de Taylor de  $f$  de ordem  $n$  e centro  $x_0$* .

A definição acima é ... somente uma definição. O resto é simplesmente a diferença entre a função  $f$  e um conveniente polinômio escolhido. Agora, aquilo que é importante é determinar porque o polinômio de Taylor é importante e isso depende do comportamento do resto. O teorema seguinte foi dado sem a demonstração em sala de aula.

**Teorema 93** (Fórmula de Taylor com resto em forma de Peano). *Sejam  $I$  um intervalo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que possui derivadas até a ordem  $n$ . Seja  $x_0 \in I$  fixado. Denotando por  $T_n(x, x_0)$  polinômio de Taylor de  $f$  de ordem  $n$  e centro  $x_0$  e por  $R_n(x, x_0)$  o resto  $R_n(x, x_0) = f(x) - T_n(x, x_0)$ , temos*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x, x_0)}{(x - x_0)^n} = 0. \quad (\diamond)$$

Além disso, se  $Q(x)$  é um polinômio de grau  $\leq n$  tal que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - Q(x)}{(x - x_0)^n} = 0,$$

então  $Q(x) = T_n(x, x_0)$ .

A fórmula acima se chama *fórmula de Taylor de  $f$  de ordem  $n$ , centro  $x_0$  e resto em forma de Peano*.

**Observação 94.** Vale a pena repetir muitas e muitas vezes que o polinômio de Taylor (de ordem  $n$  e centro  $x_0$ ) é o **único** polinômio de grau  $\leq n$  que verifica o limite do teorema 93. Este fato é crucial em muitas aplicações.

**Exercício 298.** Determine o polinômio de Taylor  $T_4(x, 0)$ , de ordem 4 e centro 0 das funções seguintes:

$$\sin x, \quad \cos x, \quad e^x.$$

Observe que, no caso do seno, há  $T_4(x) = T_3(x)$  (aqui simplifico a notação eliminando o zero). O polinômio de ordem 4 tem grau 3. **É muito importante manter a distinção entre a ordem  $n$  do polinômio e seu grau, que pode ser  $n$ , mas pode ser menor.** Observe que na definição 92 e no teorema 93 se fala explicitamente de ordem do polinômio, não de grau.

Com uma expressão muito comum na teoria de Taylor, dizemos que  $R_n(x, x_0)$  é um *o pequeno* de  $(x - x_0)^n$  para  $x \rightarrow x_0$ . Nessa expressão, “o” é a letra do alfabeto, não é 0 de zero. Vamos dar a definição de o pequeno. O leitor pode ver que está relacionada com a noção de ordem de um infinitésimo.

**Definição 95.** Dados um intervalo  $I$ , um ponto  $x_0 \in I$  e duas funções  $g, h : I \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , dizemos que  $g$  é um *o pequeno* de  $h$ , para  $x$  que tende a  $x_0$ , se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 0.$$

O símbolo é  $g(x) = o(h(x))$  per  $x \rightarrow x_0$ .

A notação acima não é das melhores. Uma função  $o(x)$  para  $x \rightarrow 0$  não é univocamente determinada pelo símbolo  $o(x)$ . É imediato provar que  $x^3, x^4, \sin^3 x$ , e infinitas outras, são  $o(x)$  para  $x \rightarrow 0$ . Hoje é normal escrever  $x^3 = o(x)$  assim como  $x^{18} = o(x)$ . Segue que, neste caso,  $o(x) - o(x)$  não é zero para todo  $x$ , coisa bastante estranha, tendo a diferença de dois símbolos iguais. Uma outra possibilidade teria sido escrever  $x^3 \in o(x)$ ,  $x^4 \in o(x)$ ,  $\sin^3 x \in o(x)$ , e seria uma notação mais correta, denotando  $o(x)$  o *conjunto* de todas as funções  $g$  que verificam o limite do teorema com  $x$  no lugar de  $h(x)$  (continua aqui subentendido que  $x \rightarrow 0$ ). Infelizmente, essa notação não foi adotada ao longo dos séculos passados.

Com a introdução do *o pequeno*, podemos escrever a fórmula de Taylor de uma função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  de ordem  $n$  e centro  $x_0$ , como

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n).$$

É a fórmula com resto em forma de Peano.

**Exercício 6.** Prove as fórmulas seguintes (onde temos  $x \rightarrow 0$ ):

$$o(x^m) + o(x^m) = o(x^m), \quad o(x^m) - o(x^m) = o(x^m), \quad o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$$

$$o(x^m) + o(x^n) = o(x^s), \quad \text{onde } s = \min\{m, n\}, \quad x^n o(x^m) = o(x^{m+n}).$$

Prove também as seguintes:

7.  $o(x^2) + o(x) = o(x)$

8.  $o(x^3) + o(x^2 + x^4) = o(x^2)$

9.  $o(x^2) \sin x = o(x^3)$

10.  $o(x^4) o(x) = o(x^5)$

11.  $(o(x^2))^3 = o(x^6)$

12.  $o(x) o(\sin x) = o(x^2)$

13.  $o(x^2) \cos x = o(x^2)$

14.  $o(\sin^2 x) = o(x^2)$

15.  $o(x + o(x)) = o(x)$

16.  $o\left(\left(x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2\right) = o(x^2)$

17.  $o((x + o(x^2))^3) = o(x^3)$

18.  $(1 - x + o(x^2))^3 = 1 - 3x + 3x^2 + o(x^2)$

**Exercício 299.** Determine a fórmula de Taylor de ordem 3 (ou 2, se as contas forem complicadas) e centro em zero das funções seguintes. Determine, a partir das fórmulas, a primeira, a segunda e eventualmente a terceira derivada em zero.



- |                          |                     |
|--------------------------|---------------------|
| 1. $x^2 e^x$             | 2. $e^{\sin x}$     |
| 3. $x^3 - 3x^2 + 2x + 1$ | 4. $e^{x^2}$        |
| 5. $\sin x^2 \sqrt{1+x}$ | 6. $(\log(1+x))^2$  |
| 7. $\cos x \arctg x$     | 8. $e^{(\sin x)^2}$ |

*Sugestão: use a técnica vista em sala de aula.*

**36. Sexta-feira, 16 de julho de 2021 e**

**37. Sábado-feira, 17 de julho de 2021**

Um seminário em sala de aula no dia 16.

\* \* \*

As seguintes são algumas fórmulas de Taylor centradas em zero.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x, 0),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x, 0),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x, 0),$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n(x, 0),$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + R_n(x, 0),$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + R_n(x, 0),$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + R_n(x, 0).$$

Voltando ao exercício 299, a técnica a ser usada é aquela sugerida em sala de aula, que não consiste em calcular a derivadas da função em questão. A respeito do primeiro item, se trata de observar o seguinte: a fórmula  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x, 0)$  é uma igualdade que vale para todo  $x$  real. Portanto, temos

$$x^2 e^x = x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \dots + \frac{x^{n+2}}{n!} + x^2 R_n(x, 0),$$

simplesmente multiplicando os dois membros por  $x^2$ .

Essa é a fórmula de Taylor de  $x^2 e^x$ ? Em princípio poderia ser porque é a soma de um polinômio + um resto. Só que não temos certeza porque não foi feita nenhuma derivada de  $x^2 e^x$  e portanto não sabemos se  $x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2!} + \dots + \frac{x^{n+2}}{n!}$  é o polinômio de Taylor de uma certa ordem, nem fica claro de qual ordem.

Se eu consigo provar que  $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 R_n(x, 0) / x^{n+2}) = 0$ , Então este é um resto de ordem  $n+2$ . Agora, se torna crucial o fato de que *somente o polinômio de Taylor de ordem  $n+2$  permite que o resto verifique o*

*limite acima.* Ou seja, se o limite é correto, o polinômio é *necessariamente* o polinômio de Taylor de ordem  $n + 2$ . Assim, é correto o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 R_n(x, 0)}{x^{n+2}} = 0?$$

Temos

$$\frac{x^2 R_n(x, 0)}{x^{n+2}} = \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{R_n(x, 0)}{x^n}.$$

Sabendo, graças à fórmula de Taylor de  $e^x$ , que

$$\frac{R_n(x, 0)}{x^2} = 0,$$

segue imediatamente que

$$\text{o limite } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 R_n(x, 0)}{x^{n+2}} = 0 \text{ é correto.}$$

**Exercício 300.** Um dos itens do exercício 299 trata de  $e^{\sin x}$ . Recupere a lousa da aula ou a gravação e reconstrua o processo para obter a fórmula dessa função.

A fórmula de Taylor pode ajudar no cálculo dos limites.

**Exercício 301.** Calcule os seguintes limites usando a fórmula de Taylor.

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2}$                    | 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^3}$   |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\sin^2 x}$         | 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{2x^2}$  |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sin x} - 1}{x^2}$              | 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x^4)}{x^2 \log(1+x^2)}$  |
| 7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\log(x+1)} - 1}{(\log(1+x))^2}$ | 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{arctg} x}{1 - \cos(\sin x)}$  |
| 9. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{ \cos x  - 1}{x \sin^2 x}$         | 10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \left( \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x \right)}{\left( 1 - \sin \frac{\pi x}{2} \right) x^2}$ |
| 11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x^2 - 1}{x \sin^2 x}$          | 12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^2}$  |
| 13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 1)(e^{1/x^2} - 1)$           | 14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{1+2x}$   |

Qual é a ideia para abordá-los? Pegamos por exemplo um limite do tipo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin x^2}$$

Usando a fórmula de Taylor de seno e cosseno, temos

$$\frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \sin x^2} = \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + R_3(x, 0)\right)^2}{x^2 (x^2 + S_2(x^2, 0))} = \frac{\frac{x^4}{2} + R_6(x, 0)}{x^4 + S_6(x, 0)}$$

onde os últimos dois restos acima são de ordem 6 ou seja verificam:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_6(x, 0)}{x^6} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{S_6(x, 0)}{x^6} = 0 \quad (*)$$

(verifique como exercício as propriedades de convergência a zero dos restos acima). Temos

$$\frac{\frac{x^4}{2} + R_6(x, 0)}{x^4 + S_6(x, 0)} = \frac{x^4 \frac{1}{2} + \frac{S_6(x, 0)}{x^4}}{1 + \frac{S_6(x, 0)}{x^4}}.$$

Obviamente vale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R_6(x, 0)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{S_6(x, 0)}{x^4} = 0$$

devido aos limites (\*) acima, e portanto o limite inicial vale  $1/2$ .

O teorema seguinte é um outro resultado muito importante. Também neste caso, como no caso do teorema 93, a demonstração não é fácil.

**Teorema 96** (fórmula de Taylor com resto em forma de Lagrange). *Sejam  $I$  um intervalo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivadas até a ordem  $n + 1$ . Seja  $x_0 \in I$  fixado. Então, para cada  $x \in I$  existe  $c$  entre  $x_0$  e  $x$  tal que*

$$f(x) = T_n(x, x_0) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) (x - x_0)^{n+1}.$$

A fórmula acima se chama fórmula de Taylor de  $f$  de ordem  $n$ , centro  $x_0$  e resto em forma de Lagrange.

**Observação 97.** Duas coisas:

- o teorema acima é uma generalização do teorema do valor médio de Lagrange. De fato, se vocês escolhem  $n = 0$ , o enunciado é exatamente o do teorema da Lagrange, lembrando que  $T_0(x, x_0) = f(x_0)$ .
- O teorema 96 precisa de uma hipótese um pouco mais forte do teorema 93, ou seja, a derivabilidade de  $f$  de ordem  $n + 1$ .

A forma de Lagrange no desenvolvimento de Taylor de uma função tem várias aplicações. Aqui mostramos duas sobre o número  $e$ .

**Exemplo 98. Aproximação de  $e$ .** A função  $e^x$  possui derivadas de qualquer ordem. Para cada  $n \in \mathbb{N}$  a derivada  $n$ -ésima é  $D^n(e^x) = e^x$ . Que em  $x = 0$  vale 1. Portanto, dado  $n \in \mathbb{N}$  qualquer, o polinômio de Taylor de  $e^x$  de ordem  $n$  e centro 0 é

$$T_n(x, 0) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

A fórmula de Taylor de  $e^x$  de ordem  $n$  e centro 0 com resto em forma de Lagrange é

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

onde  $c$  é um oportuno valor entre 0 e  $x$ . Sendo  $e^x$  uma função crescente e lembrando que  $e < 3$  (como foi dito e não provado em sala de aula), se fixamos  $x = 1$ , temos

$$\left| e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \right| = \frac{e^d}{(n+1)!} < \frac{4}{(n+1)!}.$$

onde  $d$  é oportuno entre zero e 1. De fato, na fórmula acima o valor absoluto não é necessário, porque  $e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  é positivo. Isso porque  $\frac{e^c}{(n+1)!} > 0$  qualquer seja  $c$ .

Se, por exemplo,  $n = 7$  (ou  $n \geq 7$ ), temos  $8! = 40320$  e portanto  $R_7(1, 0) < 10^{-4}$ . Assim,

$$a = \sum_{k=0}^7 \frac{1}{k!}$$

aproxima  $e$  com um erro menor de  $10^{-4}$ . O valor  $a$  acima, que é um número decimal (*provavelmente ilimitado periódico*, precisaria fazer as contas, mas a presença de  $1/6$  na soma deixa prever isso), tem os primeiros 4 dígitos decimais depois da virgola iguais àqueles de  $e$ .

**Exercício 302.** Faça nos detalhes as contas do exemplo acima e calcule  $a$ .

**Exemplo 99. Irracionalidade de  $e$ .** Provamos, por contradição que  $e$  é irracional. Suponhamos que  $e$  seja irracional, igual a  $p/q$ , onde  $p, q$  são inteiros, positivos e primos entre si. Seja  $n$  suficientemente grande para que  $n/q$  seja inteiro e  $3/(n+1) < 1$ . Da fórmula de Taylor de  $e^x$ , de ordem  $n$  e centro em zero, com resto em forma de Lagrange, posto  $x = 1$

$$e - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{e^d}{(n+1)!}$$

(onde  $d$  é oportuno entre zero e 1), temos

$$n!e - n! \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < \frac{3}{n+1}.$$

Suponha agora  $e$  racional igual a  $p/q$ , onde  $p$  e  $q$  são inteiros. Escolhendo  $n$  grande e múltiplo de  $q$ , observe que o membro esquerdo da fórmula acima é inteiro, que se torna menor de  $3/(n+1) < 1$ . Absurdo. Portanto, chegamos à conclusão de que  $e$  deve ser necessariamente irracional.

### 38. Segunda-feira, 19 de julho de 2021

#### Equações diferenciais ordinárias e primitivas de uma função.

Trate-se de equações onde as incógnitas são funções (e não números como estamos mais acostumados nas equações algébricas) e onde aparecem também as derivadas das funções incógnitas até uma certa ordem.

Por exemplo, o que significa o problema

$$\cos(u'(t) + u(t)) = t? \quad (13)$$

Significa procurar uma função  $u(t)$ , definida em um intervalo  $I$  (a ser determinado) que verifique a igualdade

$$\cos(u'(t) + u(t)) = t \quad \text{para todo } t \in I.$$

A equação (13) poderia ser chamada “equação funcional” porque a incógnita é uma função. Se usa o termo equação diferencial para destacar o fato de que estão presentes as derivadas. Determinar uma solução de (13) acima é praticamente impossível, porque as dificuldades de cálculo são extremas. Pensem alguns segundos: uma função tal que ela somada à sua derivada e aplicado o cosseno deveria ser igual à função  $f(t)=t$ . Como podemos sonhar de determiná-la explicitamente? Poderia nem existir. Na verdade, alguns teoremas bastante refinados garantem a existência da solução, pelo menos em intervalos  $I$  específicos. Os mesmos teoremas não ajudam em nada na busca da forma explícita da solução (ou das soluções).

Isso acontece com a grande maioria das equações diferenciais. Somente grupos extremamente particulares de equações permitem encontrar soluções explícitas.

A equação

$$y' = y \tag{14}$$

é bem mais simples. Possui infinitas soluções, isto é, as funções do tipo  $y(t) = ae^t$ , definidas em  $\mathbb{R}$ , para cada valor do parâmetro  $a$  real. Estamos usando a palavra “solução”. Que significa solução? Uma função é chamada *solução* se verifica a igualdade acima para cada  $t$  no seu domínio.

A equação acima é dita de *primeira ordem* porque a primeira derivada é a derivada de ordem máxima que aparece na equação.

O mais simples exemplo de uma equação diferencial (daqui para frente não irei mais usar a palavra “ordinária”) é do tipo

$$u'(t) = f(t),$$

onde  $f$  é uma função conhecida e definida em um intervalo  $I$ . Em alguns casos podemos não considerar o domínio como um intervalo, por exemplo se  $f(t) = 1/t$ . Mas restringir o estudo aos intervalos dá não poucas vantagens. No caso de  $f(t) = 1/t$ , seria melhor escolher  $(0, +\infty)$  ou  $(-\infty, 0)$ .

**Definição 100.** Dada  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  intervalo, uma função  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  é dita *primitiva* de  $f$  se

$$G'(x) = f(x), \quad \forall x \in I.$$

Se uma função  $f$  admite uma primitiva  $G$ , então admite infinitas, sendo uma primitiva de  $f$  cada função do tipo  $H(x) = G(x) + k$ , onde  $k$  é uma constante. Temos outras primitivas? não, se o domínio é um intervalo como o seguinte teorema apresenta. A demonstração é fácil e é uma consequência direta do teorema do valor médio (de Lagrange).

**Teorema 101.** Se  $G(x)$  e  $L(x)$  são duas primitivas de  $f$ , então,  $G - L$  é constante.

**Exercício 303.** Dê a demonstração do teorema acima.

O símbolo

$$\int f(x) dx$$

denota o conjunto de todas as primitivas de  $f$  (como na maioria dos livros), ou, um pouco mais simplesmente, uma qualquer primitiva de  $f$ . Este símbolo é chamado também *integral indefinida* de  $f$ .

O conceito de primitiva, às vezes, pode ser considerado para funções não definidas em intervalos. Por exemplo,  $\log |x|$  é uma primitiva de  $1/x$  (também no intervalo  $(-\infty, 0)$ ). Verifique como exercício. Podemos portanto escrever

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x|.$$

Podemos também escrever

$$\int \frac{1}{x} dx = \log |x| + c.$$

determinando assim infinitas primitivas de  $1/x$ , *mas não todas*.

**Exercício 304.** Porque não são todas? Prove isso observando que o domínio de  $1/x$  não é um intervalo.

Voltando atrás para a tabela de algumas derivadas, colocada entre os exercícios 187 e 188, podemos escrever uma tabella de primitivas de algumas funções elementares. Infelizmente, a correspondência entre derivadas e primitivas tem um pequeno problema, do ponto de vista prático. Dada uma qualquer função elementar, por exemplo

$$f(x) = \frac{\cos(x^2 + 2x)}{\sqrt{1 + x^4}},$$

temos regras para obter  $f'(x)$ . Basta um pouco de paciência. Do contrário, a primitiva de uma função elementar pode ser bem complicada. De uma função como por exemplo

$$g(x) = \arctg(\log(x^2 + 4)),$$

pessoalmente, não tenho menor ideia de qual possa ser a primitiva. Desconfio que possa ser facilmente calculada. Existe um teorema, que vocês encontrarão em Cálculo 2, que diz que cada função contínua possui primitiva. Portanto uma primitiva de  $g(x)$  existe. No caso por exemplo de  $g(x) = e^{x^2}$ , a primitiva existe, sendo  $g$  contínua. Mas existe um teorema que prova que ela não pode ser escrita em termos de funções elementares. Vejam [na página wikipédia](#) algumas integrais não elementares.

### 39. Quarta-feira, 21 de julho de 2021

Dois seminários em sala de aula.

### 40. Sexta-feira, 23 de julho de 2021,

### 41. Segunda-feira, 26 de julho de 2021 e

### 42. Quarta-feira, 28 de julho de 2021

Uma classe de equações diferenciais que podemos “integrar” são chamadas *equações diferenciais de variáveis separáveis* e são da forma

$$u'(t) = f(u(t))a(t), \tag{15}$$

onde  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  e  $a : I \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas e definidas em intervalos não necessariamente iguais, como no exemplo seguinte

$$u'(t) = \frac{1}{u(t)} t^2$$

No exemplo acima, se queremos uma solução definida em  $\mathbb{R}$ , ela terá o sinal constante e não poderá ser nula em nenhum ponto.

**Exercício 305.** Explique porque.

Observe que uma equação do tipo

$$u'(t) = (u(t) + t)^2$$

não é – nem pode ser reconduzida a uma – de variáveis separáveis.

Observe que, se  $c \in J$  é um ponto onde  $f(c) = 0$ , então a função constante  $u(t) = c$  para todo  $t \in I$  é uma solução. Em geral, os pontos de anulamento de  $f$  correspondem às soluções constantes de (15).

Têm soluções não constantes? Se  $u(t)$  for uma solução não constante, ela poderia, em princípio, atingir pontos de anulamento de  $f$ . Se  $f$  tiver uma certa regularidade, isso não pode acontecer. Se  $f$  for derivável com derivada contínua, e duas soluções coincidem em um ponto  $c$ , elas coincidem em todo  $I$ . Assim não podemos ter uma solução que se anula somente em alguns pontos. Se trata de um teorema difícil chamado *Teorema de Cauchy, de existência e unicidade da solução*.

Em geral, a  $f$  acima pode ser somente contínua. Assim, suponhamos que  $u(t)$  seja uma solução tal que  $f(u(t))$  nunca se anula em  $I$ . Dividindo a igualdade

$$u'(t) = f(u(t))a(t)$$

por  $f(u(t))$ , há, para todo  $t \in I$ ,

$$\frac{u'(t)}{f(u(t))} = a(t).$$

Se duas funções são iguais, certamente são iguais também as famílias das primitivas, ou seja:

$$\int \frac{u'(t)}{f(u(t))} dt = \int a(t) dt.$$

Das duas primitivas acima o grau de dificuldade da segunda depende de  $a(t)$ . Sobre a primeira, podemos dizer um pouco mais. Vamos estudar um problema auxiliar:

$$\int \frac{1}{f(x)} dx$$

e suponhamos que conseguimos determinar uma primitiva  $G(x)$  de  $1/f(x)$ . Caso simples poderiam ser

$$f(x) = 1 + x^2, \quad \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctg x, \quad f(x) = x, \quad \int \frac{1}{x} dx = \log |x|, \quad f(x) = \frac{1}{\cos x}, \quad \int \cos x dx = -\sin x.$$

Neste caso uma primitiva de  $u'(t)/f(u(t))$  é a composição  $G(u(t))$ . De fato, fazendo a derivada, temos

$$(G \circ u)'(t) = G'(u(t))u'(t) = \frac{u'(t)}{f(u(t))}.$$

Portanto a solução  $u(t)$  verifica a igualdade

$$G(u(t)) = \int a(t) dt + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Observe que  $G$  é inversível, porque estamos integrando  $1/f(x)$  em um intervalo do domínio dela onde tem sinal constante, como dito acima. Denotando por  $A(t)$  uma primitiva de  $a(t)$ , então, a solução  $u(t)$  verifica:

$$u(t) = G^{-1}(A(t) + c), \quad \forall t \in I.$$

Vamos agora verificar se a função  $u$  acima é realmente solução da equação 15. Temos

$$u'(t) = D(G^{-1}(A(t) + c)) = DG^{-1}(A(t) + c)a(t) = \frac{1}{G'(u(t))}a(t) = \frac{1}{f(u(t))}a(t).$$

Observe, acima, o uso da regra de derivação da função inversa.

**Observação fundamental:** qualquer solução  $u(t)$  de qualquer equação diferencial deve ser submetida ao teste acima. Em qualquer exercício o prova. Somente isso garante que a solução é realmente correta.

**Exemplo 102.**

$$u' = u^2.$$

Ela é de variáveis separáveis, sendo  $f(x) = x^2$ . Obviamente a equação admite a solução identicamente nula, que é a única solução constante. Seja  $u(t)$  uma solução não constante. Pela observação feita acima, ela nunca se anula. Assim, dividindo os membros da igualdade acima por  $u^2$  e integrando, obtemos

$$\int \frac{u'(t)}{u^2(t)} dt = \int dt,$$

ou seja

$$-\frac{1}{u(t)} = t + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Consequentemente, soluções não constantes são dadas da fórmula

$$u(t) = -\frac{1}{t + c},$$

e o maior intervalo de definição é  $(-\infty, -c)$  se  $u(t) > 0$  e  $(-c, +\infty)$  se  $u(t) < 0$ . Observe que cada solução é definida em um domínio diferente. Fato curioso, mas não errado.

Podemos abordar um novo problema: *entre todas as soluções acima, procure aquela que verifica  $u(0) = 1$ .* Tal solução é obtida para  $c = -1$  e é

$$u(t) = \frac{1}{1 - t}$$

no intervalo  $(-\infty, 1)$ . Observe que a solução com o dado  $u(2) = -1$  também é obtida para  $c = -1$ , mas não coincide com a precedente solução porque, neste caso, o intervalo de definição é  $(1, +\infty)$ .

... continuo e finalizo amanhã, dia 29