



# Métodos da Física Teórica

---

**Victor Hugo dos Santos Lins**

*Instituto de Física - Universidade de São Paulo,  
R. do Matão 1371,  
Cidade Universitária, São Paulo, Brasil.*

*E-mail:* [victorlins@usp.br](mailto:victorlins@usp.br)

---

## Sumário

<b>1</b>	<b>Cálculo Vetorial</b>	<b>1</b>
1.1	Aula 11 (14/10/2021)	1
1.1.1	Caminhos em $\mathbb{R}^2$ em coordenadas cartesianas	1
1.1.2	Exemplos de caminhos em $\mathbb{R}^2$	2
1.1.3	Comprimento de um caminho	3
1.1.4	Coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$	4
1.1.5	Caminhos em $\mathbb{R}^2$ em coordenadas polares	5
1.1.6	Generalização ao $\mathbb{R}^3$	6
1.2	Aula 12 (19/10/2021)	9
1.2.1	Campos escalares	9
1.2.2	Derivadas parciais	10
1.2.3	Integrais multidimensionais	11
<b>2</b>	<b>Resolução da P1 de 2018</b>	<b>16</b>
<b>3</b>	<b>Resolução da Lista 1 de 2021</b>	<b>20</b>
<b>4</b>	<b>Resolução da Lista 2 de 2021</b>	<b>22</b>
<b>5</b>	<b>Resolução da Lista 3 de 2021</b>	<b>30</b>

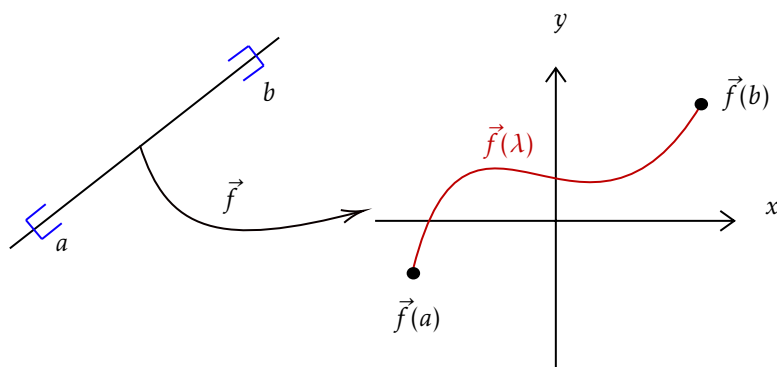
---

## 1 Cálculo Vetorial

### 1.1 Aula 11 (14/10/2021)

#### 1.1.1 Caminhos em $\mathbb{R}^2$ em coordenadas cartesianas

Seja  $\vec{f} : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função que leve um parâmetro  $\lambda \rightarrow \vec{f}(\lambda)$ . Quando representamos os pontos no plano  $Oxy$ , uma curva é revelada. Fisicamente já fazemos isso desde o estudo da cinemática de forma intuitiva, quando levamos  $t \rightarrow \vec{r}(t)$ , isto é, usamos o tempo como parâmetro para encontrar a trajetória de uma partícula através da função  $\vec{r}$ .



Definição: vetor tangente

$$[\vec{f}(t)]' = \frac{d\vec{f}}{dt} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)}{h} \quad (1)$$

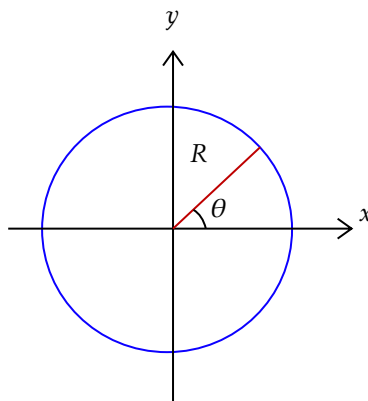
Na física, quando  $\vec{f}(t) = \vec{r}(t)$ , o vetor tangente é interpretado como a velocidade.

Definição: diferencial

$$d\vec{f}(t) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} (\vec{f}(t+h) - \vec{f}(t)) = \frac{d\vec{f}}{dt} dt \quad (2)$$

### 1.1.2 Exemplos de caminhos em $\mathbb{R}^2$

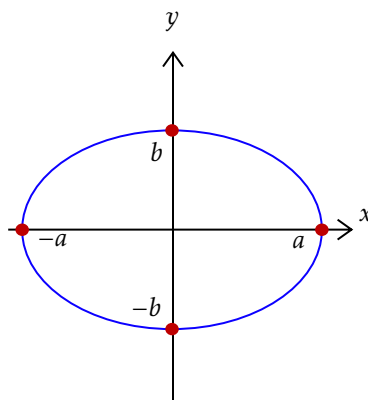
- Círculo



Nesse caso, o parâmetro a ser utilizado é  $\theta$ , de forma que

$$\theta \longrightarrow \vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ R \sin \theta \end{pmatrix} = (R \cos \theta) \hat{e}_x + (R \sin \theta) \hat{e}_y \quad (3)$$

- Elipse



Novamente, o parâmetro a ser utilizado é  $\theta$ , de forma que

$$\theta \longrightarrow (a \cos \theta) \hat{e}_x + (b \sin \theta) \hat{e}_y \quad (4)$$

onde pode-se verificar uma compatibilidade na parametrização quando testamos alguns pontos notáveis  $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ .

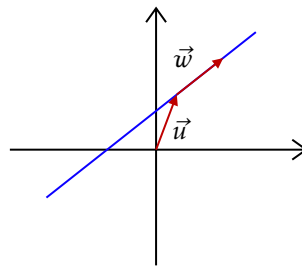
- O plano de Argand-Gauss  $\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$

Tomando  $\hat{e}_x \rightarrow 1$  e  $\hat{e}_y \rightarrow i$ , onde  $i$  é a unidade imaginária, o círculo se torna

$$\theta \longrightarrow R(\cos \theta + i \sin \theta) = Re^{i\theta} \quad (5)$$

onde no último passo foi utilizado a fórmula de Euler, revelando uma exponencial complexa para parametrizar esse caminho. Essa manipulação é muito útil porque facilita diversos cálculos na física.

- Reta



Dessa vez, suponha um parâmetro  $t$  e perceba que

$$t \longrightarrow \vec{u} + t\vec{w} \quad (6)$$

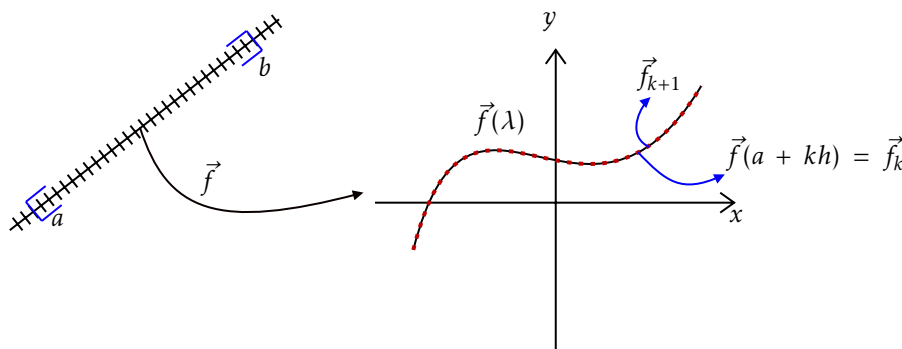
representa todos os pontos da reta, quando fazemos  $t$  percorrer  $\mathbb{R}$ .

### 1.1.3 Comprimento de um caminho

Vamos considerar uma partição regular  $\mathbb{P}$  intervalo real  $I = [a, b]$  definida por

$$\mathbb{P} = \{a = t_0, t_1 = a + h, t_2 = a + 2h, \dots, b = t_n\} \quad (7)$$

com distância  $h$  entre dois pontos consecutivos. Esquematicamente, considerando que  $k \in \mathbb{Z}$ , o que acontece é o seguinte:



Note que a distância entre dois pontos consecutivos no caminho é dada por

$$\|\vec{f}_{k+1} - \vec{f}_k\| \quad (8)$$

o que implica que o comprimento do caminho pode ser aproximado pelo somatório a seguir:

$$L \approx \sum_{k=0}^{N-1} \|\vec{f}_{k+1} - \vec{f}_k\| \quad (9)$$

Para calcular o comprimento exato, precisamos tomar o limite em que  $N \rightarrow \infty$ , isto é

$$L = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} \|\vec{f}_{k+1} - \vec{f}_k\| \quad (10)$$

o que equivale a fazer  $h \rightarrow 0$ . Portanto, através da definição de diferencial em (2), temos

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \|d\vec{f}\| = \int_a^b \|\vec{f}'(t)\| dt \quad (11)$$

portanto, dado  $\vec{f}(t)$  podemos encontrar o comprimento do caminho descrito quando  $t$  percorre um dado intervalo  $[a, b]$  através da integral acima.

- Exemplo: comprimento do círculo

Consideremos a seguinte parametrização de um círculo com  $\theta \in [0, 2\pi]$ :

$$\theta \longrightarrow R \cos \theta \hat{e}_x + R \sin \theta \hat{e}_y \quad (12)$$

Vamos calcular  $[\vec{f}'(\theta)]'$  a seguir

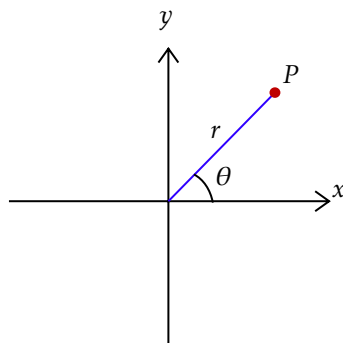
$$[\vec{f}'(\theta)]' = -R \sin \theta \hat{e}_x + R \cos \theta \hat{e}_y \implies \|[\vec{f}'(\theta)]'\| = R \quad (13)$$

Portanto, o comprimento do círculo será determinado pela eq. (11):

$$\int_0^{2\pi} R d\theta = 2\pi R \quad (14)$$

#### 1.1.4 Coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$

Desejamos obter uma forma de relacionar o sistema de coordenadas cartesianas com o de coordenadas polares; confira o esquema a seguir:



Utilizando trigonometria, observe que podemos dizer que

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (15)$$

portanto qualquer ponto do plano pode ser dado por  $\vec{r}(\theta)$  através de

$$\vec{r}(\theta) = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (16)$$

uma vez escolhidos  $r$  e  $\theta$  apropriadamente. Dadas as coordenadas  $(x, y)$  de um ponto no plano, podemos representar o mesmo ponto através de coordenadas polares verificando através das relações encontradas que

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (17)$$

Além disso, precisamos encontrar quem são os versores para o sistema de coordenadas polares. Para tanto, primeiro traçaremos um análogo com o que acontece no sistema de coordenadas cartesiano, e a partir daí obteremos uma prescrição para obter versores em todos os outros sistemas de coordenadas.

Em primeiro lugar, lembremos que no sistema de coordenadas cartesianas vale

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y \quad (18)$$

de forma que podemos obter os versores através de

$$\hat{e}_x = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}, \quad \hat{e}_y = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \quad (19)$$

e reconhecemos que estes já estão *normalizados*, então não há mais nada para fazer. Note que tudo que precisou ser feito foi calcular a derivada parcial de  $\vec{r}$  com respeito a variável associada ao versor desejado. A justificativa para isso dar certo tem a ver com a interpretação geométrica da derivada (obtenção do vetor tangente). Portanto, de forma análoga, reconhecemos que em coordenadas polares vale

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} \quad (20)$$

o que implica que

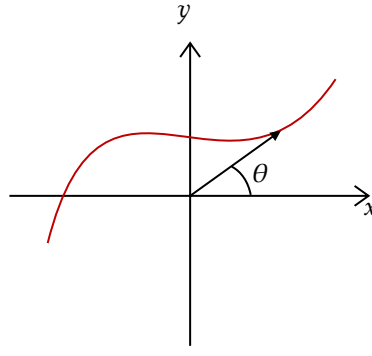
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y \equiv \hat{e}_r \quad (21)$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = -r \sin \theta \hat{e}_x + r \cos \theta \hat{e}_y \implies \hat{e}_\theta \equiv -\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \quad (22)$$

Neste último passo, dividimos por  $r$  para poder normalizar e encontrar o versor.

### 1.1.5 Caminhos em $\mathbb{R}^2$ em coordenadas polares

Considere o caminho esquematizado a seguir:



Aprendemos que a equivalência entre as coordenadas cartesianas e as polares é de tal forma que podemos dizer que

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} r(t) \cos(\theta(t)) \\ r(t) \sin(\theta(t)) \end{pmatrix} = r(t) \cos(\theta(t)) \hat{e}_x + r(t) \sin(\theta(t)) \hat{e}_y = r(t) \hat{e}_r \quad (23)$$

Então a trajetória da partícula sempre será ditada em coordenadas polares via  $\vec{r}(t) = r(t) \hat{e}_r$ . Agora precisamos encontrar as outras grandezas relevantes, como velocidade e aceleração.

$$\vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\hat{e}}_r \quad (24)$$

mas lembramos que  $\hat{e}_r = \cos \theta \hat{e}_x + \sin \theta \hat{e}_y$ , então

$$\dot{\hat{e}}_r = (-\sin \theta \hat{e}_x + \cos \theta \hat{e}_y) \dot{\theta} = \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (25)$$

portanto,  $\vec{v}(t)$  simplifica para

$$\vec{v}(t) = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta \quad (26)$$

Derivando mais uma vez em relação ao tempo para encontrar a aceleração, temos

$$\dot{\vec{v}}(t) = \vec{a}(t) = \ddot{r} \hat{e}_r + \dot{r} \dot{\hat{e}}_r + (\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \hat{e}_r = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \hat{e}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \hat{e}_\theta \quad (27)$$

Portanto sabemos estudar a cinemática de uma partícula que percorre um caminho no  $\mathbb{R}^2$  utilizando coordenadas polares, através das relações desenvolvidas acima.

#### 1.1.6 Generalização ao $\mathbb{R}^3$

As ideias são extremamente análogas ao que foi feito em  $\mathbb{R}^2$ , embora seja necessário tomar um pouco mais de cuidado com os cálculos porque agora possuímos uma dimensão extra. Escrevemos as parametrizações da seguinte forma:

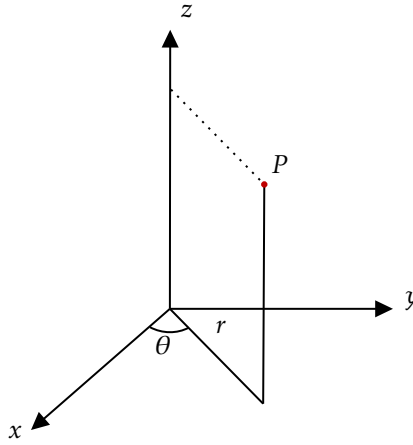
$$t \longrightarrow \vec{r}(t) \in \mathbb{R}^3 \quad (28)$$

Exemplo da espiral:  $t \longrightarrow R \cos \theta \hat{e}_x + R \sin \theta \hat{e}_y + z(t) \hat{e}_z$ .

No que se refere a sistemas de coordenadas, estudaremos a seguir as coordenadas cilíndricas e as coordenadas esféricas.

- Coordenadas Cilíndricas

Nos basearemos na geometria do seguinte esquema:



De modo que podemos afirmar:

$$x = r \cos(\theta(t)), \quad y = r \sin(\theta(t)), \quad z = z(t) \quad (29)$$

Como de costume, podemos ainda definir

$$\hat{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta, 0) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \quad (30)$$

$$\hat{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta, 0) = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \quad (31)$$

$$\hat{e}_z = (0, 0, 1) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} \quad (32)$$

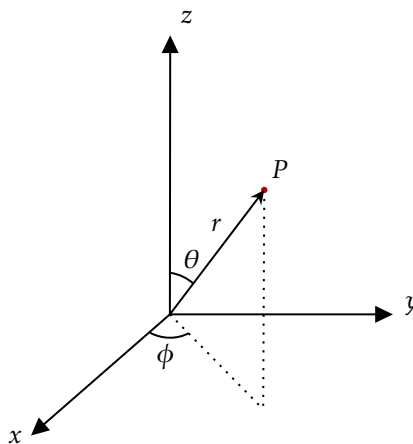
Portanto, conseguimos expressar a trajetória da partícula através de

$$\vec{r}(t) = (r(t) \cos(\theta(t)), r(t) \sin(\theta(t)), z(t)) \quad (33)$$

e reconhecemos que sua velocidade e aceleração podem sempre ser encontradas através da derivação em relação ao tempo de  $\vec{r}(t)$ .

- Coordenadas Esféricas

Dessa vez o esquema geométrico será este:





Cujas implicações geométricas são:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (34)$$

O que nos permite calcular os versores:

$$\hat{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (35)$$

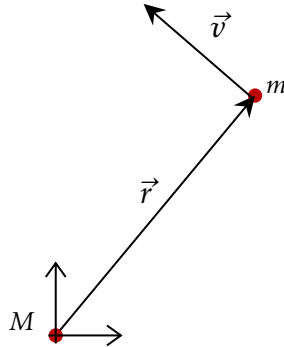
$$\hat{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, -\sin \theta) \quad (36)$$

$$\hat{e}_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = (-\sin \phi, \cos \phi, 0) \quad (37)$$

mais uma vez, por derivação de  $\vec{r}(t)$  encontramos velocidade e aceleração, e pode-se deixar em função dos versores em coordenadas esféricas, analogamente ao que foi feito quando estava sendo analisado o sistema de coordenadas polares ( $\mathbb{R}^2$ ).

**Exemplo:** [Corpo massivo num campo gravitacional] Considere um sistema binário composto por um corpo de massa  $m$  e um corpo de massa  $M \gg m$  (de forma que podemos assumir  $M$  um ponto fixo). Utilize o sistema de coordenadas mais apropriado para essa situação, mostre que o momento angular do sistema se conserva e esboce o diagrama de fase para o corpo  $m$ .

**Solução:** Observe a ilustração do sistema abaixo:



Por definição, o momento angular é dado por  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{\dot{r}})$ , o que implica que a sua derivada é calculada por

$$\dot{\vec{L}} = \dot{\vec{r}} \times (m\vec{\dot{r}}) + \vec{r} \times (m\ddot{\vec{r}}) = \vec{r} \times \left( -\frac{GMm\vec{r}}{r^3} \right) = 0 \quad (38)$$

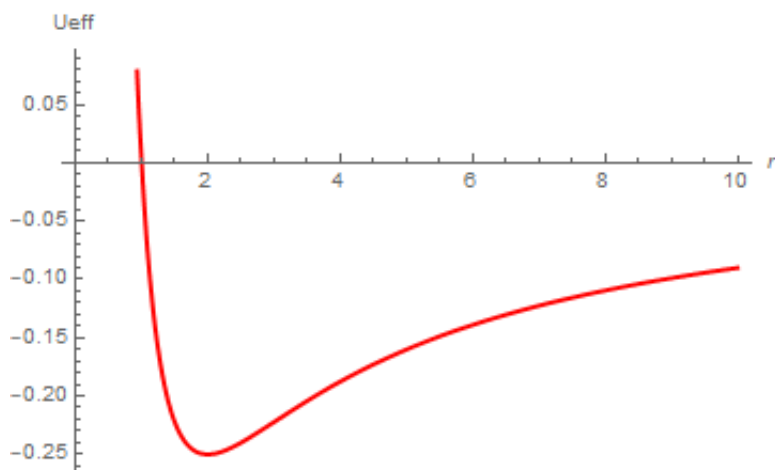
Portanto o momento angular é conservado. A priori poderíamos estar tentados a descrever o movimento conseguinte do corpo através de coordenadas esféricas, mas como o momento angular é conservado o movimento do corpo acontecerá num plano, e será mais simples descrevê-lo através de coordenadas polares. Dessa forma, o momento angular é

$$\vec{L} = m(r\hat{e}_r) \times (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta) = mr^2\dot{\theta}\hat{e}_z \implies \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \quad (39)$$

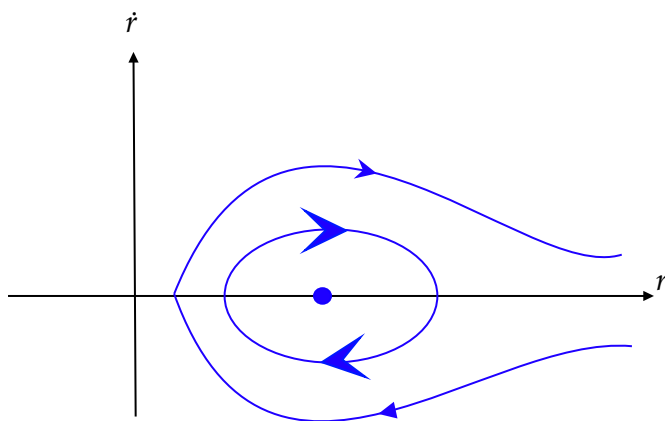
Com essa informação, calculamos agora a energia mecânica do sistema:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{GMm}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\left[ \frac{L^2}{2m^2r^2} - \frac{GMm}{r} \right]}_{U_{eff}} \quad (40)$$

Para encontrar o diagrama de fase, é conveniente analisar o gráfico de  $(U_{eff} \times r)$ , que será plotado a seguir:



e por conseguinte o seu diagrama de fase é esboçado adiante através do gráfico da energia potencial:



## 1.2 Aula 12 (19/10/2021)

### 1.2.1 Campos escalares

Um campo escalar é uma função

$$\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (41)$$

Começaremos analisando o caso onde  $n = 2$  para ganharmos intuição e depois generalizaremos.

**Exemplo:**  $\phi(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ . O domínio desse campo escalar é tal que

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad (42)$$

(por conta da raiz quadrada que define  $\phi$ ). Isto é, os valores de  $x$  e  $y$  são restritos aos pontos que vivem no interior (e no contorno) de uma circunferência de raio 3 e centrada na origem. Outro conceito importante é o de curva de nível: uma projeção de  $\phi(x, y) = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ , no plano.

### 1.2.2 Derivadas parciais

Definimos uma derivada parcial da seguinte forma:

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x + h, y) - \phi(x, y)}{h} \quad (43)$$

$$\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x, y + h) - \phi(x, y)}{h} \quad (44)$$

Isto é, derivamos com respeito da uma variável enquanto consideramos as outras variáveis da função como constantes. Vamos a um exemplo: seja  $\phi(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$ , calcular  $\frac{\partial \phi}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ .

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^3, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4y \quad (45)$$

A mesma ideia vale para as derivadas parciais de ordem maior, como:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \quad (46)$$

#### Teorema de Clairant

Dado que  $\phi(x, y)$  é contínua no intervalo de interesse, vale

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \quad (47)$$

Além disso, as derivadas parciais contemplam as regras usuais de derivação total (incluindo a regra da cadeia).

Já aprendemos a definir o diferencial para caminhos  $\vec{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  como  $d\vec{f}(t) = \frac{d\vec{f}}{dt} dt$ , agora precisamos definir o diferencial para campos escalares:

#### Definição do diferencial de um campo escalar

$$d\phi(x, y) \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy \quad (48)$$

Se  $d\phi$  existe em um certo ponto, dizemos que  $\phi$  é *diferenciável* naquele ponto. Além disso, também podemos definir a derivada direcional de um campo escalar:

#### Derivada direcional de um campo escalar

Trata-se da derivada na direção de um certo vetor  $\vec{u}$ :

$$D_{\vec{u}}\phi(\vec{x}_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(\vec{x}_0 + h\vec{u}) - \phi(\vec{x}_0)}{h} \quad (49)$$

Alguns casos particulares são

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = D_{\hat{e}_x} \phi; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = D_{\hat{e}_y} \phi \quad (50)$$

Resultado importante:

$$D_{\vec{u}}\phi(\vec{x}) = \nabla\phi(\vec{x}) \cdot \vec{u} \quad (51)$$

*Demonstração.* Seja  $g(h) = \phi(x + ha, y + hb)$ . Podemos definir  $\vec{r} = (x, y)$  e também  $\vec{u} = (a, b)$  de forma que  $g(h) = \phi(\vec{r} + h\vec{u})$ . Vamos avaliar quanto vale a seguinte derivada em  $h = 0$ :

$$\left. \frac{dg}{dh} \right|_{h=0} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{g(h + \xi) - g(h)}{\xi} \Big|_{h=0} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\phi(\vec{r} + \xi\vec{u}) - \phi(\vec{r})}{\xi} = D_{\vec{u}}\phi(\vec{r}) \quad (52)$$

Por outro lado, usando a regra da cadeia,

$$\left. \frac{dg}{dh} \right|_{h=0} = \left( \frac{\partial\phi}{\partial(x+ha)} \frac{\partial(x+ha)}{\partial h} + \frac{\partial\phi}{\partial(y+hb)} \frac{\partial(y+hb)}{\partial h} \right)_{h=0} = a \frac{\partial\phi}{\partial x} + b \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (53)$$

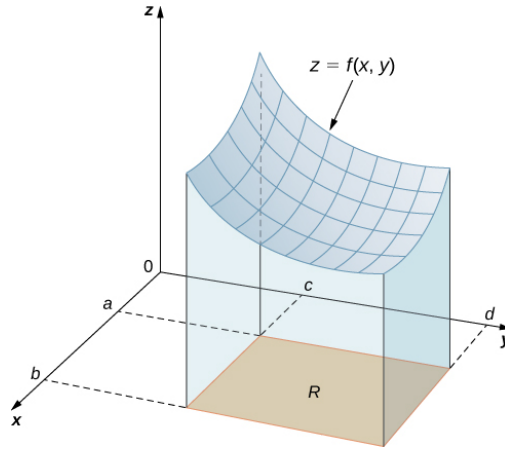
$$\therefore D_{\vec{u}}\phi(\vec{r}) = \nabla\phi \cdot \vec{u} \quad (54)$$

### 1.2.3 Integrais multidimensionais

Para funções  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  podemos definir a integral de Riemann

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} f(\xi_k) \frac{b-a}{N} \quad (55)$$

A extensão aos campos escalares é imediata:



- (1) Dividimos  $[a, b]$  em  $N$  partes iguais;
- (2) Dividimos  $[c, d]$  em  $M$  partes iguais;
- (3) para cada retângulo  $R_{ij}$ , onde  $i = \{0, \dots, N-1\}$  e  $j = \{0, \dots, M-1\}$ , escolhemos um ponto  $(x_{ij}^*, y_{ij}^*)$  dentro do retângulo

A integral (geometricamente é o volume) é

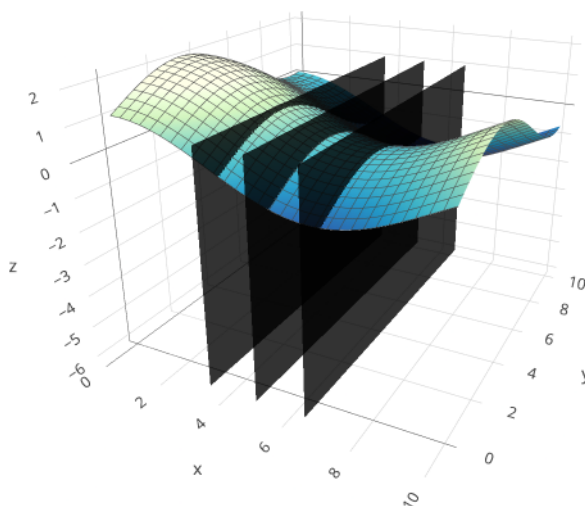
$$\lim_{N, M \rightarrow \infty} \sum_{(i,j)=(0,0)}^{(N-1, M-1)} \phi(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta x \Delta y = \int_R \phi(x, y) dx dy \quad (56)$$

onde  $R$  diz respeito a região  $[a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ . Na prática, para calcular a seguinte ideia é útil:

$$\int_c^d \phi(x, y) dy = f(x) \quad (57)$$

é função obtida integrando sobre  $y$  para  $x$  fixo. No caso antecedente,  $\int_R \phi(x, y) dx dy$ , temos 2 possibilidades:

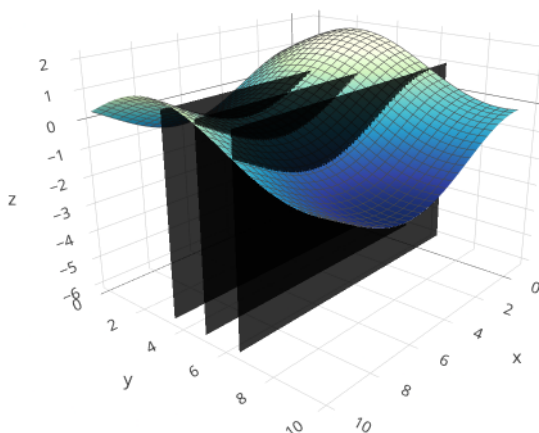
- Fixo em  $x$  e integro em  $y$



As áreas abaixo das interseções entre os planos em preto (incluindo os outros não-ilustrados) e  $\phi(x, y)$  é justamente a integral em  $y$  para um  $x$  fixado. Observe que a ideia é somar continuamente a contribuição dessas áreas para preencher todo o volume abaixo de  $\phi(x, y)$ . Analiticamente, temos:

$$\int_a^b dx \int_c^d \phi(x, y) dy \quad (58)$$

- Fixo em  $y$  e integro em  $x$



As áreas abaixo das interseções entre os planos em preto (incluindo os outros não-ilustrados) e  $\phi(x, y)$  é justamente a integral em  $x$  para um  $y$  fixado. Observe que a

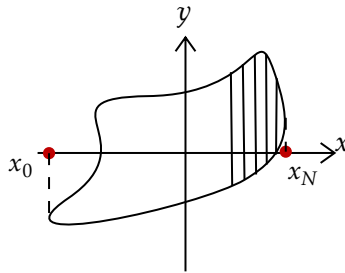
ideia é somar continuamente a contribuição dessas áreas para preencher todo o volume abaixo de  $\phi(x, y)$ . Analiticamente, temos:

$$\int_c^d dy \int_a^b \phi(x, y) dx \quad (59)$$

Com efeito,

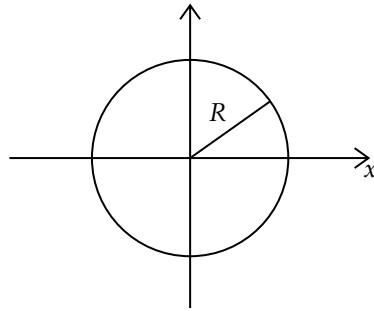
$$\int_a^b dx \int_c^d \phi(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b \phi(x, y) dx \quad (60)$$

se, e somente se,  $\phi(x, y)$  for uma função contínua nos intervalos de interesse (*Teorema de Fubini*). Uma pergunta natural é como fazer para generalizar o processo de integração para regiões arbitrárias (diferentes de retângulos). Fatiando a região, podemos escrever  $y(x)$  e a integral será



$$\int_D \phi(x, y) dx dy = \int_{x_0}^{x_N} dx \int_{y(x_0)}^{y(x_N)} \phi(x, y) dy \quad (61)$$

**Exemplo.** Seja  $D$  = área do círculo de raio  $R$  e  $\phi(x, y) = 1$ . Como obter a área do círculo?



$$x^2 + y^2 = R^2 \implies y = \pm \sqrt{R^2 - x^2} = y(x) \quad (62)$$

Para um  $x$  fixo, temos

$$-\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \quad (63)$$

Logo, a integral resulta

$$\int_D \phi(x, y) dx dy \equiv \int_D \phi(x, y) d^2x \quad (64)$$

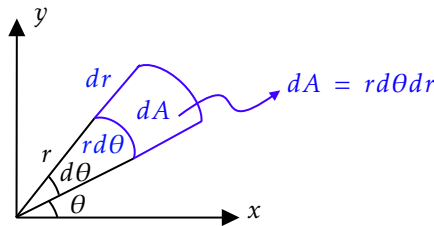
$$= \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \quad (65)$$

$$= 2 \left[ \frac{x}{2} \sqrt{R^2 - x^2} + \frac{R^2}{2} \arctan \left( \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \right) \right]_{-R}^R = \pi R^2 \quad (66)$$

Esse procedimento não foi trivial, pelo contrário, as integrais resolvidas dão bastante trabalho na prática. Por essa razão, em algumas situações será melhor usar coordenadas polares para aproveitar as simetrias do problema. A pergunta que segue é: como expressar o elemento infinitesimal de área

$$dA = d^2x = dx dy \quad (67)$$

em coordenadas polares?



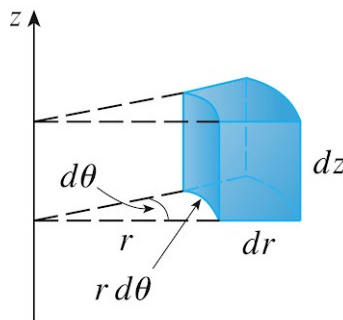
A integral do exemplo antecedente vira

$$\int_D d^2x = \int_D r dr d\theta = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \pi R^2 \quad (68)$$

O que claramente é muito mais elementar de ser feito do que o resolvido em coordenadas cartesianas. *Observação:* as mesmas técnicas podem ser usadas para campos escalares  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Em particular, passando para a dimensão três, podemos nos interessar em calcular o elemento de volume em coordenadas cilíndricas e esféricas.

$$\int_D \phi(x, y, z) dx dy dz = \int_D \phi(\vec{r}) d^3x \quad (69)$$

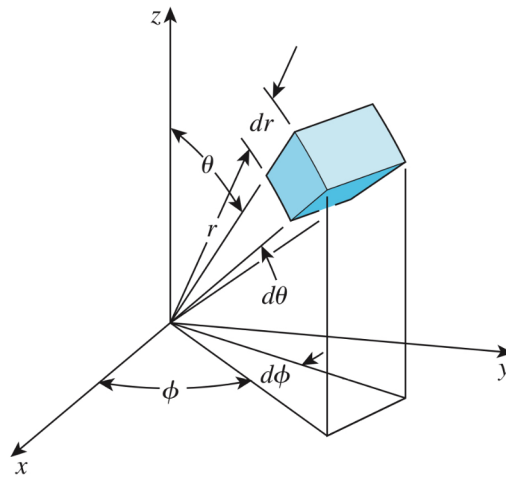
onde  $dV = dx dy dz$  é o elemento de volume em coordenadas cartesianas e  $d^3x$  é o elemento de volume genérico (em coordenadas que estamos interessados).



ou seja, da geometria segue que

$$d^3x = r d\theta dr dz \quad (70)$$

Para as coordenadas esféricas, precisamos primeiro do elemento de superfície esférica:



o que implica que

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi \quad (71)$$

Para obter o elemento de volume, é suficiente multiplicar o comprimento infinitesimal na direção ortogonal à superfície ( $dr$ ). Logo,

$$d^3x = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr \quad (72)$$



## 2 Resolução da P1 de 2018

**Questão 1.** A dinâmica de um sistema quântico é descrita na Mecânica Quântica usando a equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle$$

onde  $|\psi\rangle$  é um vetor que descreve o estado do sistema e  $H$  é a matriz que representa a energia do sistema, dada por

$$H = \begin{pmatrix} E_0 & \alpha \\ \alpha & E_0 \end{pmatrix}$$

com  $E_0$  e  $\alpha$  dois números reais.

- A matriz  $H$  é hermitiana? É unitária? Justifique.
- Calcule os autovalores de  $H$ ;
- Calcule os autovetores de  $H$ ;
- Se for possível, escreva a decomposição espectral da matriz  $H$ ;
- Calcule explicitamente a solução da equação diferencial de Schrödinger para um vetor inicial arbitrário  $|\psi(0)\rangle = |\psi_0\rangle$ ;
- Considere agora o estado  $|\psi_0\rangle = (0, 1)^T$ . Calcule depois de quanto tempo é verdade que

$$|\langle \psi_1 | \psi(t) \rangle|^2 = 1$$

**Solução.**

- Observe que

$$H^\dagger = \begin{pmatrix} E_0 & \alpha \\ \alpha & E_0 \end{pmatrix} = H \quad (73)$$

onde foi tirado o conjugado complexo (das constantes que são reais) e a transposta de  $H$ . Portanto, é verdade que  $H$  é hermitiana. Por outro lado, calculando  $HH^\dagger$ , temos

$$HH^\dagger = \begin{pmatrix} E_0 & \alpha \\ \alpha & E_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_0 & \alpha \\ \alpha & E_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0^2 + \alpha^2 & 2E_0\alpha \\ 2E_0\alpha & E_0^2 + \alpha^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (74)$$

Portanto,  $H$  não é unitária.

- Para encontrar os autovalores, resolvemos a equação secular:

$$\det(H - \lambda \mathbb{1}) = 0 \implies (E_0 - \lambda)^2 - \alpha^2 = 0 \therefore \Lambda = \{E_0 - \alpha, E_0 + \alpha\} \quad (75)$$

onde  $\Lambda$  é o conjunto dos autovalores de  $H$ .

- c) Para encontrar os autovetores, substituímos os autovalores encontrados em b) na seguinte equação:

$$H|v\rangle = \lambda|v\rangle \quad (76)$$

Utilizando a notação onde o autovetor associado ao autovalor  $k$  é  $|k\rangle$ , temos:

$$H|E_0 - \alpha\rangle = (E_0 - \alpha)|E_0 - \alpha\rangle \implies |E_0 - \alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (77)$$

$$H|E_0 + \alpha\rangle = (E_0 + \alpha)|E_0 + \alpha\rangle \implies |E_0 + \alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (78)$$

- d) Como  $H$  é hermitiana então ela admite decomposição espectral, e esta, por sua vez, é dada a seguir:

$$(E_0 - \alpha)|E_0 - \alpha\rangle\langle E_0 - \alpha| + (E_0 + \alpha)|E_0 + \alpha\rangle\langle E_0 + \alpha| = \begin{pmatrix} E_0 & \alpha \\ \alpha & E_0 \end{pmatrix} = H \quad (79)$$

- e) Considerando que a equação de Schrödinger é dada por

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle \quad (80)$$

é possível reescrevê-la como

$$\frac{d|\psi\rangle}{dt} + \frac{iH}{\hbar}|\psi\rangle = 0 \quad (81)$$

Que é uma EDO homogênea de 1º ordem em  $|\psi\rangle$ . Portanto, sua solução geral é dada por

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{-iHt}{\hbar}} |\xi\rangle = e^{\frac{-iHt}{\hbar}} |\psi_0\rangle \quad (82)$$

Agora, calcularemos a exponencial de matriz

$$e^{\frac{-iHt}{\hbar}} = U e^J U^{-1} \quad (83)$$

onde podemos definir  $U$  como sendo a matriz dos autokets de  $H$ , isto é

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \implies U^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (84)$$

e reconhecemos também que  $e^J$  é a exponencial da matriz  $\frac{-iHt}{\hbar}$  na forma de Jordan. Para encontrar  $e^J$ , podemos lembrar que se a matriz  $H$  possui forma diagonal

$$H = \begin{pmatrix} E_0 - \alpha & 0 \\ 0 & E_0 + \alpha \end{pmatrix} \quad (85)$$

então vale que  $e^J$  é dado por

$$e^J = \begin{pmatrix} e^{\frac{-i(E_0-\alpha)t}{\hbar}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-i(E_0+\alpha)t}{\hbar}} \end{pmatrix} \quad (86)$$

Dessa forma, temos

$$e^{\frac{-iHt}{\hbar}} = U e^J U^{-1} = e^{\frac{-iE_0t}{\hbar}} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha t}{\hbar}) & -i \sin(\frac{\alpha t}{\hbar}) \\ -i \sin(\frac{\alpha t}{\hbar}) & \cos(\frac{\alpha t}{\hbar}) \end{pmatrix} \quad (87)$$

Finalmente, concluimos que

$$|\psi(t)\rangle = e^{\frac{-iE_0t}{\hbar}} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha t}{\hbar}) & -i \sin(\frac{\alpha t}{\hbar}) \\ -i \sin(\frac{\alpha t}{\hbar}) & \cos(\frac{\alpha t}{\hbar}) \end{pmatrix} |\psi_0\rangle \quad (88)$$

f) Sabendo que  $|\psi_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  podemos calcular:

$$|\langle\psi_0|\psi(t)\rangle|^2 = \langle\psi_0|\psi(t)\rangle \langle\psi(t)|\psi_0\rangle \quad (89)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha t}{\hbar}) & -i \sin(\frac{\alpha t}{\hbar}) \\ -i \sin(\frac{\alpha t}{\hbar}) & \cos(\frac{\alpha t}{\hbar}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\alpha t}{\hbar}) & i \sin(\frac{\alpha t}{\hbar}) \\ i \sin(\frac{\alpha t}{\hbar}) & \cos(\frac{\alpha t}{\hbar}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (90)$$

Cujo produto resulta em

$$\cos^2\left(\frac{\alpha t}{\hbar}\right) = 1 \quad (91)$$

E então segue que

$$\therefore t = \frac{\hbar}{\alpha} (k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (92)$$

**Questão 3. (P1 - 2018)** Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (93)$$

- a) Calcule a forma diagonal da matriz ou, se não for possível, a forma de Jordan;
- b) Calcule  $e^A$ .

**Solução.**

- a) Em primeiro lugar, calculamos os autovalores de  $A$  através da equação secular:

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2 - \lambda) + 1 = 0 \implies \Lambda = \{1\} \quad (94)$$

Para encontrar os autovetores, escrevemos:

$$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle = |\psi\rangle \quad (95)$$

Onde pode-se definir

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (96)$$

O que resulta em  $|\psi\rangle$  da forma

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (97)$$

Como o autovalor  $\lambda = 1$  só rendeu um autovetor, para gerarmos uma base do espaço precisamos de um autovetor generalizado, que chamarei de  $|\xi\rangle$ . Para encontrá-lo, escrevemos:

$$A|\xi\rangle = |\xi\rangle + |\psi\rangle, \quad |\xi\rangle = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \quad (98)$$

O que resulta em

$$|\xi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (99)$$

Com isso podemos construir as matrizes dos autokets de  $A$  para passar para a forma de Jordan:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (100)$$

E assim, sabendo que, por definição,

$$A = UJU^{-1} \quad (101)$$

onde  $J$  é a forma de Jordan, temos

$$J = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_N \quad (102)$$

b) Note que  $N$  é nilpotente (já que  $N^2 = 0$ ). Como  $[\mathbb{1}, N] = 0$  pois a identidade comuta com qualquer matriz, então

$$e^J = e^{\mathbb{1}+N} = e^{\mathbb{1}} \cdot e^N \quad (103)$$

E, por definição,

$$e^N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n}{n!} \quad (104)$$

Mas como para  $n \geq 2$  temos  $N = \hat{0}$ , então

$$e^N = \mathbb{1} + N \quad (105)$$

e, portanto,

$$e^J = e^{\mathbb{1}} (\mathbb{1} + N) = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix} \quad (106)$$

Além disso, lembremos que

$$e^A = U e^J U^{-1} \quad (107)$$

então, concluimos que

$$\therefore \boxed{e^A = e \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = eA} \quad (108)$$

### 3 Resolução da Lista 1 de 2021

**Questão 20.** Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\gamma \end{pmatrix} \quad (109)$$

que aparece na resolução das equações de movimento do oscilador harmônico amortecido. No caso  $\gamma = 2\omega_0$  calcule

- a) os autovalores;
- b) os autovetores;
- c)  $e^A$

**Solução.**

- a) No caso  $\gamma = 2\omega_0$ , a matriz  $A$  simplifica para

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\omega_0 \end{pmatrix} \quad (110)$$

Para encontrar seus autovalores, resolvemos a equação secular:

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\omega_0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(2\omega_0 + \lambda) + \omega_0^2 = 0 \quad (111)$$

$$\therefore \lambda = -\omega_0 \quad (112)$$

é a única raiz dessa equação e portanto o único autovalor de  $A$ .

b) Para encontrar os autovetores, substituímos o autovalor calculado na equação a seguir:

$$A|v\rangle = -\omega_0|v\rangle \quad (113)$$

onde definimos

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad (114)$$

Dessa forma, resolvendo a equação,

$$|v\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -\omega_0 \end{pmatrix} \quad (115)$$

c) Precisamos agora de um autovetor generalizado para completar a base do espaço vetorial. Seja esse autovetor  $|k\rangle$ , podemos escrever

$$A|k\rangle = -\omega_0|k\rangle + |v\rangle \quad (116)$$

Onde podemos definir

$$|k\rangle = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} \quad (117)$$

E então, resolvendo a equação,

$$|k\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (118)$$

Agora podemos construir a matriz  $U$  que nos levará a calcular a forma de Jordan de  $A$  (e posteriormente  $e^A$ ). Por definição,  $U$  é a matriz dos autokets (e os generalizados) de  $A$ , isto é

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega_0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega_0 & 1 \end{pmatrix} \quad (119)$$

Por definição, a forma de Jordan de  $A$  é dada por

$$J = U^{-1}AU = \begin{pmatrix} -\omega_0 & 1 \\ 0 & -\omega_0 \end{pmatrix} = -\omega_0 \mathbb{1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_N \quad (120)$$

Note que  $N$  é nilpotente (pois  $N^2 = \hat{0}$ ). Dessa forma, para obter  $e^A$  lembremos que

$$e^A = Ue^J U^{-1} \quad (121)$$

e observe que

$$e^J = e^{-\omega_0 \mathbb{1} + N} \quad (122)$$

mas como  $[-\omega_0 \mathbb{1}, N] = 0$  então vale

$$e^J = e^{-\omega_0 \mathbb{1}} \cdot e^N \quad (123)$$

Como  $N$  é nilpotente, o resultado simplifica para

$$e^J = \begin{pmatrix} e^{-\omega_0} & 0 \\ 0 & e^{-\omega_0} \end{pmatrix} \cdot (\mathbb{1} + N) = e^{-\omega_0} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (124)$$

Com isso, obtemos  $e^A$  pela definição,

$$e^A = U e^J U^{-1} = e^{-\omega_0} \begin{pmatrix} \omega_0 + 1 & 1 \\ -\omega_0^2 & -\omega_0 + 1 \end{pmatrix} \quad (125)$$

#### 4 Resolução da Lista 2 de 2021

**Questão 1.** Usando as técnicas desenvolvidas nas aulas, resolva a equação do movimento do oscilador harmônico simples.

**Solução.** A equação do oscilador harmônico simples 1D em seu estado natural (sem amortecimento nem forças externas) é:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (126)$$

Que é uma EDO homogênea de 2º ordem. Portanto, para achar a sua solução geral, podemos primeiro procurar por  $x = e^{\lambda t}$ , resultando em

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \implies \lambda = \pm i\omega_0 \quad (127)$$

Então, a solução geral é dada por

$$x(t) = a e^{i\omega_0 t} + b e^{-i\omega_0 t} \quad (128)$$

O que, utilizando a fórmula de Euler  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ , rende

$$(a + b) \cos \omega_0 t + i(a - b) \sin \omega_0 t \quad (129)$$

Definindo  $A = (a + b)$  e  $B = i(a - b)$ , temos

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \quad (130)$$

**Questão 2.** A equação diferencial para a carga no capacitor de um circuito RLC em corrente alternada é

$$\ddot{Q}(t) + \gamma \dot{Q}(t) + \omega_0^2 Q(t) = \epsilon \cos \omega t \quad (131)$$

Calcule a solução em função das condições iniciais  $Q(0) = Q_0$ ,  $\dot{Q}(0) = I_0$ .

**Solução.** Para encontrar a solução dessa EDO de 2º ordem, utilizaremos a propriedade de que a solução geral dessa EDO é dada pela soma da solução da EDO homogênea associada e de uma solução particular dessa EDO. Para calcular a solução da homogênea associada, escrevemos:

$$\ddot{Q}(t) + \gamma \dot{Q}(t) + \omega_0^2 Q(t) = 0 \quad (132)$$

E procuramos por soluções do tipo  $Q(t) = e^{\lambda t}$ :

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \gamma \lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0 \implies \lambda^2 + \gamma \lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (133)$$

Que é uma equação do segundo grau em  $\lambda$ , sendo resolvida pela fórmula de Bhaskara:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4\omega_0^2}}{2} = \frac{-\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \quad (134)$$

Portanto a solução da homogênea associada é dada por

$$Q_H(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} [ae^{\omega t} + be^{-\omega t}], \quad \omega \equiv \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} \quad (135)$$

Agora, a fim de encontrar a solução particular da EDO, complexificamos a mesma para obter

$$\ddot{\hat{Q}}(t) + \gamma \dot{\hat{Q}}(t) + \omega_0^2 \hat{Q}(t) = \epsilon e^{i\omega t} \quad (136)$$

onde  $\hat{Q}(t)$  é a função complexa associada a  $Q(t)$ . Procuramos por soluções complexas do tipo  $\hat{Q}(t) = \rho e^{i\omega t}$ :

$$-\rho \omega^2 e^{i\omega t} + i\gamma \omega \rho e^{i\omega t} + \omega_0^2 \rho e^{i\omega t} = \epsilon e^{i\omega t} \quad (137)$$

$$\implies \rho = \frac{\epsilon}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega} \quad (138)$$

Portanto,  $\hat{Q}(t) = \frac{\epsilon e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$  e segue que  $Q(t) = \text{Re}\{\hat{Q}(t)\}$ :

$$\text{Re}\left\{\frac{\epsilon e^{i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}\right\} = \text{Re}\left\{\frac{\epsilon (\cos \omega t + i \sin \omega t) (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}\right\} \quad (139)$$

$$\therefore Q_P(t) = \frac{\epsilon((\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + \gamma\omega \sin \omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (140)$$

Dessa forma, a solução total é dada pela soma da solução da homogênea associada com a solução particular:

$$Q(t) = Q_H(t) + Q_P(t) = e^{-\frac{\gamma}{2}t} [ae^{\omega t} + be^{-\omega t}] + \frac{\epsilon((\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + \gamma\omega \sin \omega t)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (141)$$

Precisamos agora aplicar as condições de contorno:  $Q(0) = Q_0$  e  $\dot{Q}(0) = I_0$ , então

$$Q_0 = [a + b] + \frac{\epsilon(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (142)$$

$$I_0 = -\frac{\gamma\omega}{2} [a - b] + \frac{\epsilon\gamma\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (143)$$

Escrito de outra forma,



$$\frac{-2I_0}{\gamma\omega} = [a - b] - \frac{2\epsilon\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (144)$$

Somando as eqs. (142) e (144), temos:

$$2a + \frac{\epsilon((\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 2\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} = Q_0 - \frac{2I_0}{\gamma\omega} \quad (145)$$

Isolando o termo  $a$ , ficamos com:

$$\therefore a = \frac{Q_0}{2} - \frac{I_0}{\gamma\omega} - \frac{\epsilon((\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 2\omega)}{2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (146)$$

Substituindo essa informação na eq. (142) para obter o coeficiente  $b$ , encontramos:

$$Q_0 = b + \frac{Q_0}{2} - \frac{I_0}{\gamma\omega} - \frac{\epsilon((\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 2\omega)}{2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} + \frac{\epsilon(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (147)$$

$$\therefore b = \frac{Q_0}{2} + \frac{I_0}{\gamma\omega} + \frac{\epsilon}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \left[ \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - 2\omega}{2} - (\omega_0^2 - \omega^2)^2 \right] \quad (148)$$

$$\therefore b = \frac{Q_0}{2} + \frac{I_0}{\gamma\omega} - \frac{\epsilon((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 2\omega)}{2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2} \quad (149)$$

Substituindo  $a$  e  $b$  na eq. (38), temos a solução completa da EDO em (29).

**Questão 3.** A força de Lorentz pode ser escrita em forma vetorial como

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (150)$$

onde  $q$  é a carga elétrica da partícula,  $\mathbf{E}$  o campo elétrico e  $\mathbf{B}$  o campo magnético, ambos constantes.

- Escreva a força de Lorentz em componentes usando a forma com índices e com coordenadas  $(x, y, z)$  explicitamente;
- Resolva a equação do movimento para condições iniciais genéricas;
- Qual a solução que satisfaz  $\mathbf{x}(0) = 0$  e  $\mathbf{v}(0) = v_0 \hat{e}_x$ ?

**Solução.** Em primeiro lugar, reconhecemos que é possível realizar uma mudança no nosso sistema de coordenadas de forma que o vetor do campo magnético coincida com o eixo  $z$ , anulando as componentes nas outras direções, enquanto ainda podemos manter  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{v}$  arbitrários. Dessa forma, prosseguimos com os itens:

- Vamos dar as denominações para cada um dos vetores relevantes para o problema:

$$|F\rangle = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}, \quad |E\rangle = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \quad |v\rangle = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}, \quad |B\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} \quad (151)$$

O que nos permite escrever a equação para a força de Lorentz em componentes:

$$F_x = qE_x + qv_y B_z, \quad F_y = qE_y - qv_x B_z, \quad F_z = qE_z \quad (152)$$

b) Podemos escrever esse sistema de equações lineares em forma matricial:

$$m|\ddot{r}\rangle + q\hat{B}|\dot{r}\rangle = q|E\rangle \quad (153)$$

onde reconhecemos que  $|F\rangle = m|\ddot{r}\rangle$  vem da segunda lei de Newton, e a matriz  $\hat{B}$  é dada por

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & -B_z & 0 \\ B_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (154)$$

Portanto, podemos reescrever a EDO reconhecendo que  $|\ddot{r}\rangle = |\dot{v}\rangle$ :

$$|\dot{v}\rangle + \frac{q\hat{B}}{m}|v\rangle = \frac{q}{m}|E\rangle \quad (155)$$

Que é uma EDO de 1º ordem em  $|v\rangle$ . Sua solução completa é dada pela soma da solução geral da homogênea associada com uma solução particular da não-homogênea, isto é:

$$|v(t)\rangle = |v_H(t)\rangle + |v_P\rangle \quad (156)$$

A fim de encontrar  $|v_H(t)\rangle$ , escrevemos

$$|\dot{v}_H\rangle + \frac{q\hat{B}}{m}|v_H\rangle = 0, \quad \alpha \equiv \frac{q\hat{B}}{m} \quad (157)$$

O que por separação de variáveis nos rende a solução

$$v_H(t) = e^{-\alpha t}|\xi\rangle \quad (158)$$

onde  $|\xi\rangle$  é um vetor arbitrário a ser fixado pelas condições iniciais a posteriori. Observe que  $e^{-\alpha t}$  é uma exponencial de matriz porque o coeficiente  $\alpha$  contém uma matriz. Para determinar esse termo, precisamos empregar a relação

$$e^A = Ue^J U^{-1} \quad (159)$$

Onde  $e^A$  é a exponencial de alguma matriz  $A$ ,  $U$  é a matriz dos seus autovalores e  $e^J$  é a exponencial da matriz  $A$  na forma de Jordan. Essa relação é derivada a partir da definição de exponencial de matriz a partir da expansão da mesma utilizando a série de Taylor e das propriedades da forma de Jordan.

Olhando para o termo  $\frac{q}{m}\hat{B}$ , percebe-se que podemos fatorar o  $\frac{q}{m}$  por enquanto e focar em resolver a equação dos autovalores para  $\hat{B}$ , isto é, encontrar os números  $\lambda$  que satisfazem

$$\hat{B}|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle \quad (160)$$

Para tanto, podemos reescrever a eq. (160) e concluir que o  $\det(\hat{B} - \lambda\mathbb{1}) = 0$  para existirem soluções com vetores  $|\psi\rangle$  não-nulos. Dessa forma,

$$\det(\hat{B} - \lambda \mathbb{1}) = 0 \implies \Lambda = \{0, iB_z, -iB_z\} \quad (161)$$

onde  $\Lambda$  é o conjunto dos autovalores de  $\hat{B}$ . Substituindo esses autovalores na eq. (160) encontramos os seguintes autovetores:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |iB_z\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-iB_z\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (162)$$

O que nos permite construir a matriz  $U$ :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -i & i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \implies U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & i/2 & 0 \\ 1/2 & -i/2 & 0 \end{pmatrix} \quad (163)$$

Como a matriz  $\hat{B}$  possui 3 autovetores linearmente independentes, então ela é diagonalizável e sua forma diagonal é

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & iB_z & 0 \\ 0 & 0 & -iB_z \end{pmatrix} \quad (164)$$

Lembrando que o que nós queremos calcular é  $e^{-\frac{q\hat{B}}{m}t}$ , então reconhecemos que

$$e^J = \exp \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\frac{qB_z t}{m} & 0 \\ 0 & 0 & i\frac{qB_z t}{m} \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{qB_z t}{m}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{qB_z t}{m}} \end{pmatrix} \quad (165)$$

onde podemos definir  $\frac{qB_z t}{m} = \beta$  e a matriz simplifica para

$$e^J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\beta} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix} \quad (166)$$

Utilizando  $U$  e  $U^{-1}$  calculadas anteriormente, podemos finalmente dizer que

$$e^{-\frac{q\hat{B}}{m}t} = U e^J U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv R \quad (167)$$

**Questão 4.** Um projétil é disparado com um ângulo  $\theta$  respeito à direção horizontal e com uma velocidade  $v_0$ . Considerando a força de resistência do ar,

$$\vec{F}_{res} = -\alpha \vec{v} \quad (168)$$

sendo  $\vec{v}$  a velocidade, determine a trajetória de movimento do projétil.

**Solução.** Dividindo o movimento em dois eixos (x e y), podemos escrever as seguintes EDOs:

$$m\ddot{y} + \alpha\dot{y} = -mg \implies \ddot{y} + \gamma\dot{y} = -g, \quad \gamma \equiv \frac{\alpha}{m} \quad (169)$$

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} = 0 \implies \ddot{x} + \gamma\dot{x} = 0 \quad (170)$$

Para resolver a eq. (48), vamos reescrever a EDO adotando  $\dot{y} = k \implies \ddot{y} = \dot{k}$ :

$$\dot{k} + \gamma k = -g \quad (171)$$

Cuja solução é dada pela solução da EDO homogênea associada com uma solução particular (que nesse caso é constante porque a função que está tornando a EDO inhomogênea é uma constante). Dessa forma,

$$k_H(t) = \xi e^{-\gamma t} \quad (172)$$

$$k_P = -\frac{g}{\gamma} \quad (173)$$

$$\therefore k(t) = \xi e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \quad (174)$$

Mas note que  $k(t) = \dot{y}(t)$  e como condição inicial temos que  $\dot{y}(0) = v_0 \sin \theta$ , então

$$\xi = v_0 \sin \theta + \frac{g}{\gamma} \quad (175)$$

O que implica em

$$k(t) = \dot{y}(t) = \left[ v_0 \sin \theta + \frac{g}{\gamma} \right] e^{-\gamma t} - \frac{g}{\gamma} \quad (176)$$

Integrando uma vez para encontrar  $y(t)$ , temos

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{\gamma} \left[ v_0 \sin \theta + \frac{g}{\gamma} \right] e^{-\gamma t} - \frac{gt}{\gamma} + y_0} \quad (177)$$

Agora que conhecemos a solução para  $y(t)$ , relembremos a EDO para o eixo x:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} = 0 \implies \ddot{x} + \gamma\dot{x} = 0 \quad (178)$$

Que é um EDO homogênea de 2º ordem, então, sua solução pode ser encontrada procurando por  $x(t) = e^{\lambda t}$ :

$$\lambda^2 + \lambda\gamma = \lambda(\lambda + \gamma) = 0 \therefore \Lambda = \{0, -\gamma\} \quad (179)$$

Portanto sua solução geral é dada por

$$x(t) = x_0 + Be^{-\gamma t} \quad (180)$$

Para aplicar a condição inicial, calculamos primeiro  $\dot{x}$ :

$$\dot{x}(t) = -\gamma Be^{-\gamma t} \quad (181)$$

Lembrando que  $\dot{x}(0) = v_0 \cos \theta$ , então

$$-\gamma B = v_0 \cos \theta \implies B = -\frac{1}{\gamma} v_0 \cos \theta \quad (182)$$

O que implica em

$$x(t) = x_0 - \frac{e^{-\gamma t}}{\gamma} v_0 \cos \theta \quad (183)$$

**Questão 5.** Considere o plano inclinado da Figura 1, com atrito estático normal. O ângulo do plano muda de acordo com  $\theta(t) = \alpha t$ , onde  $\alpha$  é constante. Encontre a solução das equações de movimento.

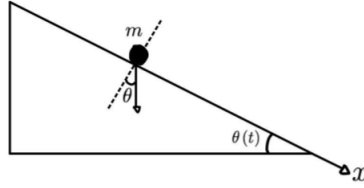


Figura 1: Plano inclinado com ângulo variável.

**Solução.** Tomando como a origem do sistema de coordenadas polares o extremo direito do plano inclinado, lembremos que a aceleração do corpo é dada por

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)e_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})e_\theta \quad (184)$$

Realização a decomposição vetorial das forças que atuam na massa  $m$ , podemos escrever as equações do movimento via segunda lei de Newton:

$$ma_r = mg \sin \theta - \mu N \quad (185)$$

$$ma_\theta = N - mg \cos \theta \quad (186)$$

Utilizando as expressões para  $a_r$  e  $a_\theta$  em destaque na eq. (184), temos

$$m(-\ddot{r} + r\alpha^2) = mg \sin \theta - \mu N \quad (187)$$

$$2m\alpha\dot{r} + mg \cos \theta = N \implies m\ddot{r} - mr\alpha^2 = \mu(2m\alpha\dot{r} + mg \cos \theta) - mg \sin \theta \quad (188)$$

$$\therefore \ddot{r} - 2\mu\alpha\dot{r} - \alpha^2 r = g\mu \cos \theta - g \sin \theta \quad (189)$$

Que é uma EDO não-homogênea de 2º ordem na variável  $r$ . Para resolvê-la, lembremos que a solução geral dessa EDO é dada pela soma da solução geral da homogênea associada com uma solução particular da não-homogênea. Dessa forma,

$$r(t) = r_H(t) + r_P(t) \quad (190)$$

Para encontrar  $r_H(t)$ , escrevemos

$$\ddot{r}_H - 2\mu\alpha\dot{r}_H - \alpha^2 r_H = 0 \quad (191)$$

E procuramos por soluções do tipo  $r_H = e^{\lambda t}$ , de forma que

$$\lambda^2 - 2\mu\alpha\lambda - \alpha^2 = 0 \quad (192)$$

Isto é,

$$\lambda = \mu\alpha \pm \alpha\sqrt{\mu^2 + 1} \quad (193)$$

Portanto, a solução geral da homogênea associada é dada por

$$r_H(t) = e^{\mu\alpha t} \left[ ae^{\alpha t\sqrt{\mu^2+1}} + be^{-\alpha t\sqrt{\mu^2+1}} \right] \quad (194)$$

Para encontrar a solução particular, como há uma combinação linear de senos e cossenos no termo que torna a EDO não-homogênea, vou procurar por uma solução particular do tipo:

$$r_P = A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t) \quad (195)$$

Então calculamos as derivadas de  $r_P$  para substituir na EDO:

$$\dot{r}_P = -\alpha A \sin(\alpha t) + \alpha B \cos(\alpha t) \quad (196)$$

$$\ddot{r}_P = -\alpha^2 A \cos(\alpha t) - \alpha^2 B \sin(\alpha t) \quad (197)$$

O que na equação diferencial rende

$$-\alpha^2 A \cos(\alpha t) - \alpha^2 B \sin(\alpha t) + 2\mu\alpha^2 A \sin(\alpha t) - 2\mu\alpha^2 B \cos(\alpha t) \quad (198)$$

$$-\alpha^2 A \cos(\alpha t) - \alpha^2 B \sin(\alpha t) = g\mu \cos(\alpha t) - g \sin(\alpha t) \quad (199)$$

$$\Rightarrow A + \mu B = -\frac{\mu g}{2\alpha^2}, \quad B - \mu A = \frac{g}{2\alpha^2} \quad (200)$$

$$\therefore A = -\frac{\mu}{(\mu^2 + 1)} \cdot \frac{g}{\alpha^2}, \quad B = \frac{(1 - \mu^2)}{(1 + \mu^2)} \cdot \frac{g}{2\alpha^2} \quad (201)$$

$$\Rightarrow r_P(t) = \left[ -\frac{\mu}{(\mu^2 + 1)} \cdot \frac{g}{\alpha^2} \right] \cos(\alpha t) + \left[ \frac{(1 - \mu^2)}{(1 + \mu^2)} \cdot \frac{g}{2\alpha^2} \right] \sin(\alpha t) \quad (202)$$

Portanto a solução completa da EDO é dada por

$$\boxed{r(t) = e^{-\mu\alpha t} \left[ ae^{\alpha t\sqrt{\mu^2+1}} + be^{-\alpha t\sqrt{\mu^2+1}} \right] - \frac{g}{\alpha^2(\mu^2 + 1)} \left( \mu \cos(\alpha t) + \frac{(\mu^2 - 1)}{2} \sin(\alpha t) \right)} \quad (203)$$

**Questão 6.** Uma partícula em uma dimensão está sujeita a um potencial gravitacional,

$$V(x) = -\frac{k}{x^2} \quad (204)$$

sendo  $k$  uma constante com unidades apropriadas. Determine a equação de movimento para a partícula e ache a solução. (Dica: pode ser conveniente usar a conservação da energia).

**Solução.** A energia mecânica total do sistema é dada por

$$E = T(\dot{x}) + V(x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{k}{x^2} \quad (205)$$

O que nos permite escrever a equação em função de  $\dot{x}^2$ , isto é

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m} \left[ E + \frac{k}{x^2} \right]^{1/2}} \iff \int \frac{dx}{\left( E + \frac{k}{x^2} \right)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{m}} \int dt \quad (206)$$

A integral da direita é trivial, enquanto que a integral da esquerda vale a pena ser tratada em detalhes, acompanhe:

$$\int \frac{x dx}{(Ex^2 + k)^{1/2}}, \quad u = Ex^2 + k \iff \frac{du}{2E} = x dx \quad (207)$$

$$\implies \frac{1}{2E} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{E} \sqrt{Ex^2 + k} + C \quad (208)$$

Continuando o desenvolvimento,

$$\frac{1}{E} \sqrt{Ex^2 + k} + C = \sqrt{\frac{2}{m}} t \quad (209)$$

O que sucede é uma manipulação da equação para isolar a variável  $x$ . Dessa forma,

$$\sqrt{Ex^2 + k} = \sqrt{\frac{2}{m}} Et - EC \implies Ex^2 + k = \frac{2E^2 t^2}{m} - 2E^2 C t \sqrt{\frac{2}{m}} + E^2 C^2 \quad (210)$$

$$\boxed{x(t) = \sqrt{\frac{2Et^2}{m} - 2ECt\sqrt{\frac{2}{m}} + EC^2 - \frac{k}{E}}} \quad (211)$$

Onde as duas constantes para serem ajustadas pelas condições iniciais são  $E$  e  $C$ .

**Questão 7.** Resolva a equação de Airy

$$y''(z) - zy(z) = 0 \quad (212)$$

a qual aparece na resolução do problema de autovalores de uma partícula num potencial linear na Mecânica Quântica. Para quais valores de  $z$  ela converge?

## 5 Resolução da Lista 3 de 2021

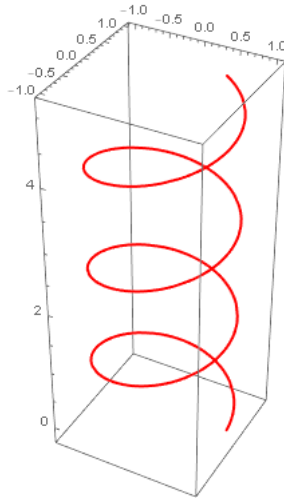
**Questão 1.** Considere o caminho

$$t \rightarrow R \cos \omega t \hat{e}_x + R \sin \omega t \hat{e}_y + \omega t \hat{e}_z \quad (213)$$

- Desenhe a forma geométrica do caminho;
- Quanto vale o vetor velocidade? E o vetor aceleração?;
- Quais as coordenadas melhores para respeitar a simetria do sistema? Escreva os vetores posição, velocidade e aceleração nessas coordenadas e usando os versores oportunos.

**Solução.**

- O caminho é representado na figura a seguir:



b) O vetor posição é dado por

$$\vec{r} = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, \omega t) \quad (214)$$

O que implica que o vetor velocidade e o vetor aceleração (em coordenadas cartesianas) são encontrados através das derivadas com respeito ao tempo do vetor posição.

$$\vec{v} = (-\omega R \sin \omega t, \omega R \cos \omega t, \omega) \quad (215)$$

$$\vec{a} = (-\omega^2 R \cos \omega t, -\omega^2 R \sin \omega t, 0) \quad (216)$$

c) O melhor sistema de coordenadas é o cilindro, posto que a espiral funciona como se uma partícula estivesse percorrendo a superfície de um cilindro (há uma simetria geométrica evidente). Nesse sistema de coordenadas, lembremos que vale

$$\hat{e}_r = \cos \omega t \hat{e}_x + \sin \omega t \hat{e}_y \quad (217)$$

$$\hat{e}_\theta = -\sin \omega t \hat{e}_x + \cos \omega t \hat{e}_y \quad (218)$$

Portanto, o vetor posição em coordenadas cilíndricas é dado por

$$\vec{r} = R \hat{e}_r + \omega t \hat{e}_z \quad (219)$$

Para encontrar o vetor velocidade e aceleração, derivamos  $\vec{r}$  com relação ao tempo mais uma vez:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (R \hat{e}_r + \omega t \hat{e}_z) = R \frac{d\hat{e}_r}{dt} + \omega \hat{e}_z = \omega R \hat{e}_\theta + \omega \hat{e}_z \quad (220)$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (\omega R \hat{e}_\theta + \omega \hat{e}_z) = -\omega^2 R \hat{e}_r \quad (221)$$