



## FÍSICA EXPERIMENTAL I

# **Determinação do coeficiente de restituição elástica envolvido em colisões sucessivas através do som.**

Victor Lins, Raul Godoy e Davi Amaral.

Prof. Dr. José Fernando Diniz Chubaci.

25 de julho de 2021.

### **Resumo**

Este projeto tem como objetivo detalhar e atestar a validade de um método para encontrar o coeficiente de restituição elástica envolvido colisões sucessivas a partir da análise computacional das ondas sonoras produzidas pela mesma. Com efeito, destaca-se a facilidade para obter resultados de ótima qualidade utilizando como instrumentos objetos do dia a dia: celular e PC. Ademais, o método empregado pode ainda ser utilizado em situações mais complexas, para a determinação de outros parâmetros relevantes, reiterando a relevância do presente estudo.

This project aims to detail and attest the validity of a method to find the elastic restitution coefficient involved in successive collisions from the computational analysis of the sound waves produced by it. In fact, it is easy to obtain excellent quality results using everyday objects as instruments: cell phones and PCs. Furthermore, the method used can still be used in more complex situations to determine other relevant parameters, reiterating the relevance of the present study.

## Introdução

A mecânica clássica é uma área bem desenvolvida nos dias de hoje, especialmente no que se refere ao estudo das colisões, analisadas em uma base diária nos grandes aceleradores de partículas como o CERN [3]. Apesar da sua consolidação secular, o fomento da pesquisa e os avanços tecnológicos têm permitido novas abordagens experimentais que possibilitam obter resultados de ótima qualidade quando comparados com o

que é esperado pelos modelos teóricos. Em particular, no tratamento das colisões, se sabe que estas podem ser classificadas como elásticas ou inelásticas, e um dos fatores determinantes para essa classificação é o chamado *coeficiente de restituição elástica*, denotado pela letra grega  $\epsilon$ . Esse coeficiente é definido como a razão entre a velocidade relativa de afastamento e a velocidade relativa de aproximação entre os corpos que estão colidindo.

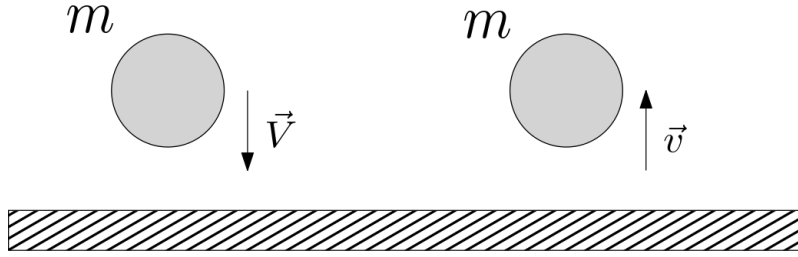


Figura 1: Exemplo de uma colisão entre um corpo de massa  $m$  e uma superfície rígida.

No caso em que um corpo de massa  $m$  e velocidade inicial  $\vec{V}$  colide com uma superfície rígida de massa  $M \gg m$  (Figura 1), pode-se considerar que a velocidade da superfície antes e depois da colisão se mantém nula, enquanto que a velocidade do corpo após a colisão passa a ser  $\vec{v}$ . Simbolicamente, tem-se que:

$$\epsilon = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{V}|} \quad (1)$$

Sendo  $0 \leq \epsilon \leq 1$ . Nos extremos, em que  $\epsilon = 0$  e  $\epsilon = 1$ , tem-se respectivamente uma colisão totalmente inelástica, onde os corpos após a colisão se unem e há uma perda parcial de energia cinética, e uma colisão totalmente elástica, onde há total conservação da energia cinética do sistema antes e após a colisão. Usualmente, esse coeficiente de restituição elástica é calculado utilizando as referidas velocidades, entretanto existem contextos em que as velocidades são desconhecidas e suas medições dificultadas, portanto é conveniente conhecer outros meios de obter o coeficiente de restituição, que é o que será tratado neste manuscrito.

É de noção comum que uma colisão produz algum tipo de perturbação no meio, podendo gerar uma onda

sonora característica capaz de ser captada por praticamente qualquer tipo de microfone moderno e processada pela placa de som imbutida nos *notebooks* dos tempos vigentes. Será demonstrado durante o desenvolvimento do manuscrito de que forma pode-se obter o coeficiente  $\epsilon$  através dos intervalos de tempo entre colisões sucessivas de um corpo com uma superfície rígida [2]. O método consiste em realizar a captação do áudio usando um *smartphone*, o processamento de áudio usando o computador e por fim a determinação do coeficiente de restituição elástica através de análise gráfica e cálculos estatísticos. Dessa forma, será possível superar quaisquer dificuldades circunstanciais que podem existir para a medição das velocidades que determinam o coeficiente  $\epsilon$  a partir do uso inteligente das tecnologias da nova geração, que possuem a capacidade de produzir medidas de qualidade cada vez maior.

## Descrição do Arranjo

### Experimental

Para a realização do nosso experimento, utilizamos esferas de diferentes materiais, colidindo com superfícies horizontais também constituídas por diferentes materiais. Isso conduziu a uma gama de resultados e de diferentes coeficientes de restituição elástica ( $\epsilon$ ) encontrados para cada caso, o que permitiu uma análise mais detalhada baseado na conservação parcial de energia maior ou menor a depender dos materiais envolvidos nas colisões. Além disso, o software utilizado para o processamento do áudio captado pelo microfone do *smartphone* e a medição dos intervalos de tempo entre as colisões sucessivas foi o *Audacity* [1]. As esferas utilizadas foram: bolinha de alumínio, bolinha de borracha e bolinha de ping-pong. Para o controle da altura de lançamento dos corpos, utilizou-se uma trena milimetrada.

Para conseguirmos sucesso no resultado final, foram tomados alguns cuidados para a realização das medições. Como por exemplo, utilizar apenas as três primeiras colisões, para evitar a consideração das velocidades horizontais adquiridas pelas esferas após colidirem; escolhemos ambientes silenciosos e sem ruído de fundo, para conseguirmos escolher corretamente os picos das ondas sonoras, que representam as colisões das esferas com as superfícies; e máxima precisão no momento de soltarmos as esferas das alturas escolhidas.

### Desenvolvimento

Em primeiro lugar, escolheram-se três alturas de referência para abandonar as esferas: 20 cm, 40 cm e 60 cm. Foram realizadas uma série medidas preliminares a fim de estabelecer um procedimento para a medição dos intervalos de tempo entre colisões sucessivas que pudesse viabilizar medidas de ótima qualidade. A par-

tir da definição do coeficiente de restituição e utilizando cinemática, conseguimos encontrar outra relação para  $\epsilon$  que envolve os intervalos de tempo entre duas colisões sucessivas: chamemos de  $V'$  a velocidade com que a esfera atinge a superfície na primeira colisão, e de  $V$  a velocidade com que a esfera abandona a superfície. Por conservação de energia após a colisão, a bolinha irá subir em um lançamento vertical a partir do solo e irá retornar para o mesmo com a mesma velocidade  $V$ , ocasionando na segunda colisão. Chamaremos, também, a velocidade da esfera logo após a segunda colisão de  $v$ . Analogamente, a esfera retorna para o solo prestes a colidir pela terceira vez com a mesma velocidade  $v$ . Nesse contexto, podemos dizer que  $V = \frac{g \cdot \Delta T}{2}$  (equação horária da velocidade, assumindo que ela foi abandonada do repouso) uma vez que, pela simetria do problema, sendo  $\Delta T$  o tempo total de voo entre a primeira e a segunda colisão, podemos dizer que o tempo de queda é exatamente  $\frac{\Delta T}{2}$  e a esfera é acelerada através da gravidade. De maneira similar,  $v = \frac{g \cdot \Delta t}{2}$ . Substituindo na equação (1), temos que o coeficiente de restituição elástica será dado por:

$$\epsilon = \frac{v}{V} = \frac{\Delta t}{\Delta T} \quad (2)$$

portanto, posto que esses intervalos de tempo são conhecidos, o valor de  $\epsilon$  é obtido através de uma simples razão.

Dessa forma, utilizou-se o microfone de diferentes *smartphones* para a captação das ondas sonoras (Figura 2) e importou-se os áudios para um computador, onde foram processados e analisados no software *Audacity*. O procedimento residiu em identificar os picos de perturbação no áudio, referentes aos momentos em que ocorreram as colisões, e medir os intervalos de tempo entre as colisões sucessivas (Figura 3).

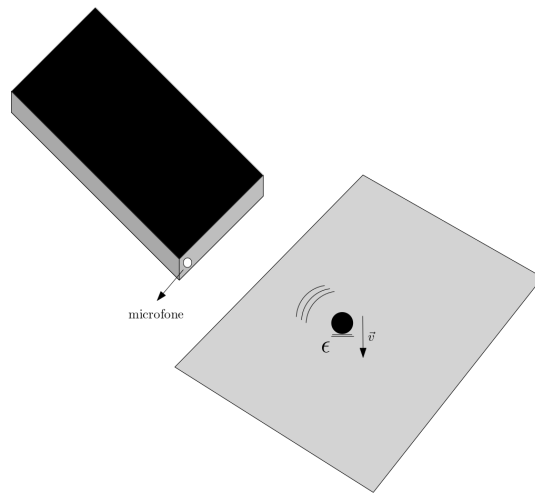


Figura 2: Esquema envolvido na captação do áudio da colisão pelo celular.

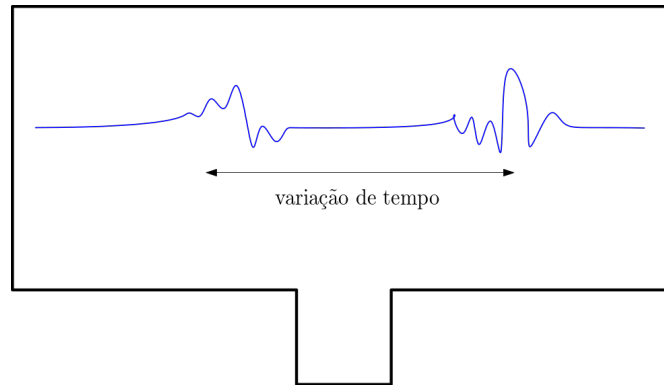


Figura 3: Esquema envolvido na medição dos intervalos de tempo entre as colisões sucessivas utilizando um software no PC.

Anotou-se todas as medições e foram plotados gráficos ajustados no modelo  $y = ax + b$  utilizando o software *ATUS* [4]. Na Tabela 1 na página seguir estão dispostos os intervalos de tempo encontrados, relativamente a cada altura em que foram deixadas cair as esferas, ao material de que são constituídas e ao material da superfície com que colidem. É possível perceber que para todas as alturas de queda e para qualquer tipo de material um fato se repete:  $\Delta T > \Delta t$ , uma vez que após a primeira colisão a altura máxima alcançada é menor do que a alcançada após a segunda colisão, reduzindo o tempo entre as colisões sucessivas. Além disso, pode-se perceber que as colisões entre a esfera de alumínio

e a superfície emborrachada em geral possuem intervalos de tempo menores em comparação com as colisões da esfera de borracha com a superfície de madeira e da esfera de plástico com a superfície de porcelanato. Isso já era previsto pela teoria, uma vez que a colisão com a superfície emborrachada viabiliza uma interação por maior quantidade de tempo com a esfera, posta a flexibilidade desse material comparado com a rigidez das outras superfícies, o que traduz-se em uma influência maior das forças resistivas, maior perda de energia, menor altura máxima alcançada após a colisão e finalmente menores intervalos de tempo [2].

Esfera	Superfície	$\Delta T$ (s)	$\Delta t$ (s)	h (cm)	Esfera	Superfície	$\Delta T$ (s)	$\Delta t$ (s)	h (cm)	Esfera	Superfície	$\Delta T$ (s)	$\Delta t$ (s)	h (cm)
Alumínio	Emborrachada	0,26	0,18	20	Borracha	Madeira	0,36	0,30	20	Plástico	Porcelanato	0,36	0,32	20
Alumínio	Emborrachada	0,26	0,17	20	Borracha	Madeira	0,36	0,31	20	Plástico	Porcelanato	0,36	0,32	20
Alumínio	Emborrachada	0,28	0,19	20	Borracha	Madeira	0,35	0,31	20	Plástico	Porcelanato	0,36	0,33	20
Alumínio	Emborrachada	0,26	0,17	20	Borracha	Madeira	0,36	0,32	20	Plástico	Porcelanato	0,36	0,33	20
Alumínio	Emborrachada	0,35	0,23	40	Borracha	Madeira	0,50	0,44	40	Plástico	Porcelanato	0,51	0,48	40
Alumínio	Emborrachada	0,35	0,22	40	Borracha	Madeira	0,49	0,43	40	Plástico	Porcelanato	0,51	0,48	40
Alumínio	Emborrachada	0,34	0,22	40	Borracha	Madeira	0,50	0,44	40	Plástico	Porcelanato	0,52	0,48	40
Alumínio	Emborrachada	0,33	0,20	40	Borracha	Madeira	0,50	0,44	40	Plástico	Porcelanato	0,52	0,48	40
Alumínio	Emborrachada	0,40	0,25	60	Borracha	Madeira	0,61	0,53	60	Plástico	Porcelanato	0,63	0,58	60
Alumínio	Emborrachada	0,41	0,26	60	Borracha	Madeira	0,62	0,54	60	Plástico	Porcelanato	0,64	0,59	60
Alumínio	Emborrachada	0,41	0,25	60	Borracha	Madeira	0,62	0,55	60	Plástico	Porcelanato	0,64	0,59	60
Alumínio	Emborrachada	0,40	0,26	60	Borracha	Madeira	0,62	0,54	60	Plástico	Porcelanato	0,64	0,59	60

Tabela 1: Totalidade das medições efetuadas para os intervalos de tempo entre duas colisões sucessivas, juntamente com as respectivas alturas de lançamento e materiais dos corpos envolvidos.

Esfera	h (cm)	$\langle T \rangle$ (s)	$\sigma \langle T \rangle$ (s)	$\langle t \rangle$ (s)	$\sigma \langle t \rangle$ (s)	Esfera	h (cm)	$\langle T \rangle$ (s)	$\sigma \langle T \rangle$ (s)	$\langle t \rangle$ (s)	$\sigma \langle t \rangle$ (s)
Alumínio	20	0,2650	0,0050	0,1785	0,0048	Borracha	20	0,3575	0,0025	0,3100	0,0041
Alumínio	40	0,3425	0,0048	0,2185	0,0063	Borracha	40	0,4975	0,0025	0,4375	0,0025
Alumínio	60	0,4050	0,0029	0,2550	0,0029	Borracha	60	0,6175	0,0025	0,5400	0,0041

Esfera	h (cm)	$\langle T \rangle$ (s)	$\sigma \langle T \rangle$ (s)	$\langle t \rangle$ (s)	$\sigma \langle t \rangle$ (s)
Plástico	20	0,3600	0,0021	0,3250	0,0029
Plástico	40	0,5150	0,0029	0,4800	0,0001
Plástico	60	0,6358	0,0001	0,5868	0,0014

Tabela 2: Exposição de algumas grandezas estatísticas relevantes para o experimento, como as médias e os respectivos desvio padrão da média, associados a cada tipo de esfera e altura de queda inicial anterior às colisões.

## Análise

Os gráficos a seguir contém a representação dos resultados obtidos nas medições, onde foram ajustadas retas cujos parâmetros são denotados por  $a$ , que representa o valor o coeficiente de restituição elástica  $\varepsilon$ , e  $b$ ,

que *teoricamente* deveria ser zero, indicando uma deviação oriunda de possíveis pequenos erros experimentais como o erro de medição humana. Além disso, os parâmetros foram explicitados em conjunto com suas respectivas incertezas, obtidas através do ajuste realizado no software ATUS [4].

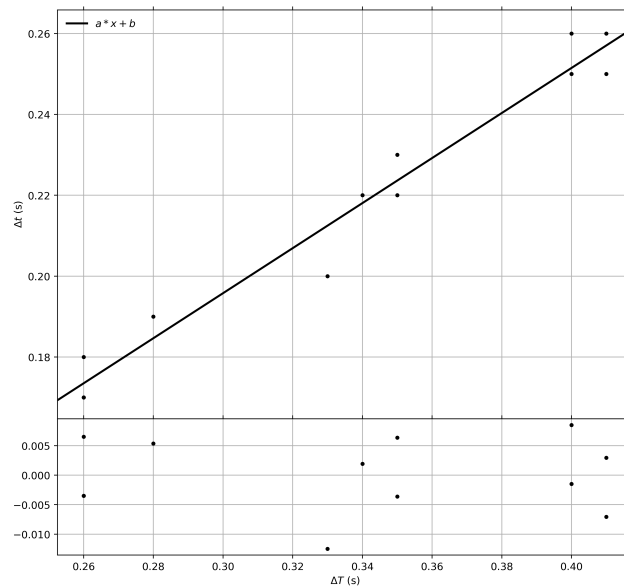
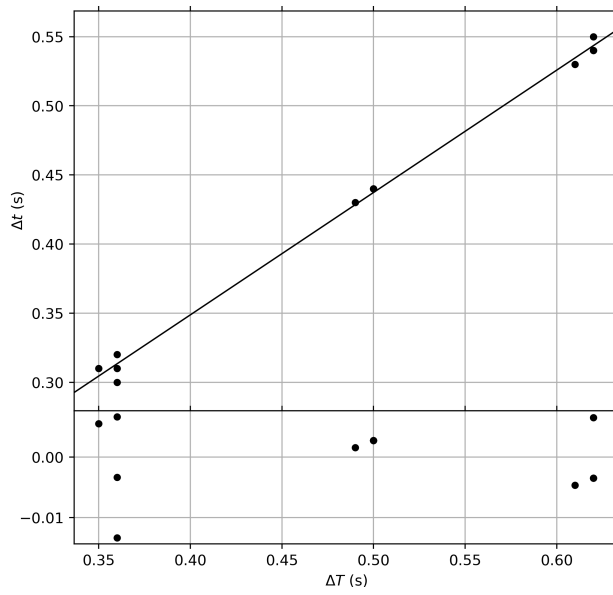


Figura 4: Gráfico relativo aos intervalos de tempo entre colisões sucessivas da esfera de alumínio com a superfície emborrachada. A reta foi obtida através do ajuste  $y = ax + b$  com  $a = 0,56 \pm 0,03$  e  $b = 0,03 \pm 0,01$ , ambos adimensionais.



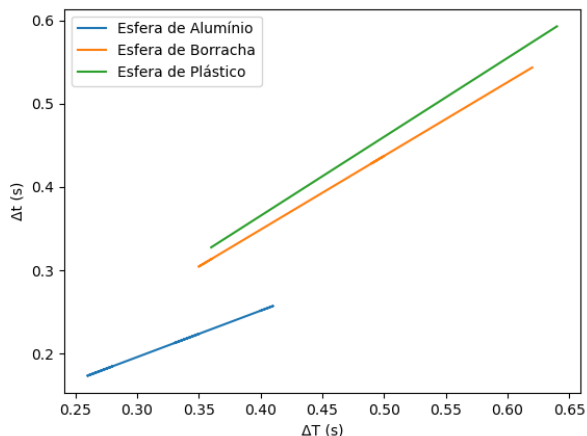


Figura 7: Para efeitos de comparação, disponibilizamos este gráfico para perceber como as colisões envolvidas entre as esferas e respectivas superfícies geraram coeficientes de restituição elástica distintos, e como eles estão associados ao coeficiente angular das retas.

Pode-se perceber que os três gráficos possuem pontos que produziram bons ajustes no modelo linear, o que é um indicativo positivo da ótima qualidade das medidas. Idealmente o termo independente do modelo  $y = ax + b$  deveria ser nulo, mas uma vez realizados os ajustes obteve-se  $b \approx 0$ , o que é aceitável posto o erro de medição humana.

Além disso, de acordo com o desenvolvimento explicitado na seção anterior, sabemos que o coeficiente angular do modelo trata-se do coeficiente de restituição elástica envolvido nas colisões, e podemos perceber que o coeficiente associado às colisões da esfera de plástico com a superfície de porcelanato foi obtido como muito mais próximo de 1 do que o coeficiente das colisões da esfera de alumínio com a superfície emborrachada. Esse fato também era esperado, posto que a superfície emborrachada possui um grau elevado de flexibilidade e interage por maior quantidade de tempo com a esfera de alumínio, conduzindo uma maior dissipação de energia.

Por outro lado, a esfera de plástico em colisão com a superfície de porcelanato não perde tanta energia num ambiente sem adversidades como vento e umidade, posto que o porcelanato é um material bem mais rígido do que a borracha.

Portanto, pode-se perceber o quanto as medições e abordagem realizada vão de acordo com a teoria e formalismo da mecânica, representando a qualidade do experimento e dos resultados obtidos.

## Conclusão

Por fim, concorda-se que é possível realizar o estudo das colisões efetivamente e de forma mais prática utilizando tecnologias cotidianas como celular e PC, reconhecendo a qualidade dos resultados que essa abordagem viabiliza, possibilitando sua utilização de forma direta ou indireta para outros propósitos acerca das colisões ou ainda de outras temáticas na física.

Foi possível perceber que apesar de adversidades esperadas como o erro de medição humana, resistência do ar e outros tipos de forças resistivas, conseguiu-se obter resultados de ótima qualidade e que estão em conformidade com a teoria das colisões. O propósito do trabalho foi cumprido com sucesso e o experimento pode ser reproduzido em qualquer outro lugar com facilidade para atestar resultados convergentes.

## Referências

- [1] Team Audacity. Audacity, 2014.
- [2] Marisa Almeida Cavalcante, Elias da Silva, Reginaldo do Prado, and Rafael Hagg. O estudo de colisões através do som. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 24:150–157, 2002.
- [3] ALICE Collaboration. Charged-particle multiplicity fluctuations in pb-pb collisions at  $\sqrt{s_{NN}} = 2.76$  tev, 2021.

[4] Leonardo Eiji Tamayose and Guilherme Ferrari Fortino. HighEloDevs/Analysis-Tool-for-Undergrad-Students: Correção de bugs da versão 3.0, July 2021.

## Apêndice

Verificamos que o coeficiente de restituição elástica associado às diferentes superfícies e materiais foram razoavelmente distintos, o que era de se esperar pela teoria. Por exemplo, o  $\varepsilon$  associado à colisão entre a esfera de alumínio e a superfície emborrachada foi  $\varepsilon = 0,56 \pm 0,03$ , enquanto que para a colisão entre a esfera de plástico com a superfície de porcelanato foi  $\varepsilon = 0,95 \pm 0,01$ . Isso pode ser justificado através do teorema do impulso:

$$\int F dt = \Delta p$$

onde percebemos que quanto maior for o tempo de interação entre a esfera e a superfície de contato, maior será a variação do momento linear e portanto as forças resistivas conseguem dissipar uma maior quantidade de energia cinética da esfera.

Assim, é de se esperar que quanto mais flexível for a superfície de contato maior seja o tempo de interação

(por conta do intervalo que se passa durante a deformação do material). Nesse contexto, comparando a superfície emborrachada com a superfície de porcelanato, é fato experimental que a última é muito mais rígida do que a primeira, então pode-se prever que o coeficiente de restituição elástica envolvido na colisão com a superfície de porcelanato seja maior do que o associado à outra superfície. Com efeito, foi precisamente esse resultado que encontramos no nosso desenvolvimento. Além disso, é importante reiterar que o material da esfera também influencia na comparação dos coeficientes, como podemos atestar analisando as colisões que envolvem a esfera de borracha com a superfície de madeira e a esfera de plástico com a superfície de porcelanato — neste último caso a esfera é muito mais flexível do que a superfície, então a mesma não deforma tanto quanto a esfera e portanto a esfera não cede tanta energia para a superfície, resultando em um coeficiente de restituição maior do que na situação da esfera de borracha com a superfície de madeira, que de fato flexibiliza mais do que a superfície de porcelanato. Toda essa análise conceitual está de acordo com os resultados obtidos para os coeficientes, o que é um indicativo da qualidade das nossas medidas e provando que os nossos resultados foram em conformidade com o que era esperado pela teoria.