21 de julho de 2021

Notas de Física I

Victor Lins

Instituto de Física - Universidade de São Paulo,
R. do Matão 1371,
Cidade Universitária, São Paulo, Brasil.

E-mail: victorlins@usp.br

Sumário

1 Sistemas não inerciais e forças fictícias

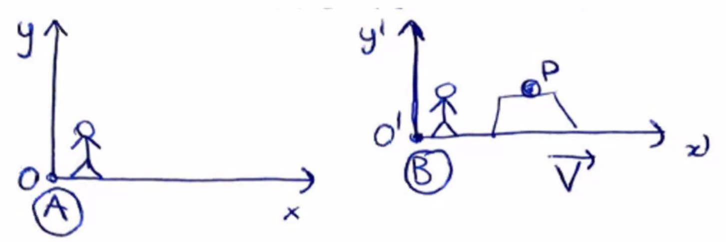
Um referencial não inercial é um referencial com aceleração vetorial não nula. Por inércia, há uma tendência natural de um corpo se manter com velocidade constante, então nos referenciais não inerciais aparecem as chamadas forças fictícias, que são contrárias ao sentido da aceleração resultante.

De forma resumida, um referencial será considerado não inercial se

$$\boxed{\vec{V} \neq \text{constante}} \tag{1}$$

onde $\vec{V}$ é a velocidade da sua origem com respeito a algum referencial inercial.

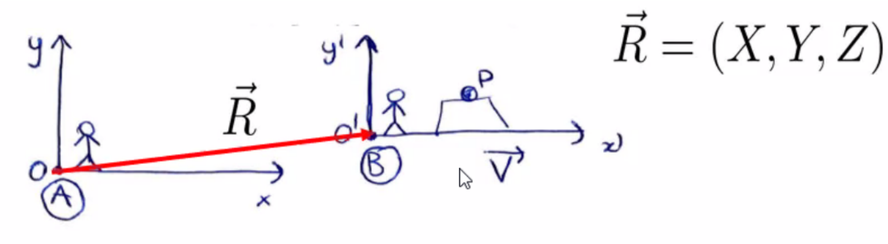
1) Sistema não inercial com movimento de translação



Se o ponto P se move sob a ação de uma força $\vec{f}$ no sistema fixo (A), podemos escrever:

$$\vec{f} = m\vec{a}$$

que, dadas as condições iniciais, dá a lei horária.



No sistema móvel (B), as coordenadas do ponto P(x′, y′, z′) podem se relacionar ao ponto P(x, y, z) no sistema (A)

$$\begin{cases} x' = x - X \\ y' = y - Y \\ z' = z - Z \end{cases}$$

onde (X,Y,Z) são as coordenadas da origem do sistema acelerado. Agora, uma vez que não se trata de uma translação de movimento retilíneo uniforme, *não* podemos escrever $X = V_{0_x}t, Y = V_{0_y}t, Z = V_{0_z}t$.

A transformação e as derivadas resultam:

$$\begin{cases} x' = x - X \\ y' = y - Y \\ z' = z - Z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v'_x = v_x - V_x \\ v'_y = v_y - V_y \\ v'_z = v_z - V_z \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a'_x = a_x - A_x \\ a'_y = a_y - A_y \\ a'_z = a_z - A_z \end{cases}$$

Vetorialmente, tem-se

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{R},\ \vec{v'} = \vec{v} - \vec{V},\ \vec{a'} = \vec{a} - \vec{A}$$

onde

$$\vec{R} = (X, Y, Z),\ \vec{V} = (V_x, V_y, V_z),\ \vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

e $\vec{R}, \vec{V}, \vec{A}$ são o vetor posição, velocidade e aceleração da origem O′ com respeito ao sistema fixo.

Segue que

$$\vec{f'} = m\vec{a'}$$

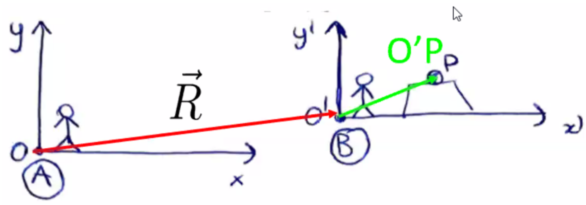
Observe que desde que $\vec{V} \neq constante$, existirá $\vec{a'} = \vec{a} - \vec{A}$.

Voltando na equação inicial

$$\vec{f} = m\vec{a} \implies \vec{f} = m[\vec{a'} + \vec{A}] \implies \vec{f} - m\vec{A} = m\vec{a'} = \vec{f'}$$

Isto é, segundo o referencial acelerado, a força aplicada no corpo em P traduz-se como $\vec{f}$ (que é a força realmente aplicada) menos um termo devido a aceleração do referencial multiplicado pela massa do mesmo corpo — essa é a chamada *força fictícia*.

2) Sistema não inercial com movimento qualquer (pode haver rotações).



Independente da natureza do movimento, vetorialmente ainda é verdade que

$$\vec{r'} = \vec{r} - \vec{R}$$

o que pode ser escrito em função de versores cartesianos como:

$$\hat{\imath'}x' + \hat{\jmath'}y' + \hat{k}z' = \hat{\imath}(x - X) + \hat{\jmath}(y - Y) + \hat{k}(z - Z)$$

Note que, dessa vez, $\vec{R} = (X, Y, Z)$ não representa em geral um movimento retilíneo, uma vez que os versores $\hat{\imath'}, \hat{\jmath'}, \hat{k'}$ não são constantes (eles tem módulo constante, mas não a direção). Então, no momento de derivar em relação ao tempo, temos que considerar como eles variam.

Como os versores possuem módulo constante, sua derivada temporal se deverá apenas à componente tangencial, que muda sua direção, isto é

$$\frac{d\hat{\imath'}}{dt} = |\hat{\imath'}|\omega\hat{v} = \vec{\omega} \times \hat{\imath'}$$

$$\frac{d\hat{\jmath'}}{dt} = |\hat{\jmath'}|\omega\hat{v} = \vec{\omega} \times \hat{\jmath'}$$

$$\frac{d\hat{k'}}{dt} = |\hat{k'}|\omega\hat{v} = \vec{\omega} \times \hat{k'}$$

onde $\vec{\omega}$ é a velocidade angular de rotação do sistema acelerado, com respeito ao referencial fixo.

Agora derivamos em relação ao tempo:

$$\frac{d\vec{r'}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} - \vec{R}\right)$$

$$\implies \frac{d}{dt}\left(\hat{\imath}'x' + \hat{\jmath}'y' + \hat{k}z'\right) = \frac{d}{dt}\left(\hat{\imath}(x-X) + \hat{\jmath}(y-Y) + \hat{k}(z-Z)\right)$$

$$\frac{d\hat{\imath}'}{dt}x' + \hat{\imath}'\frac{dx'}{dt} + \frac{d\hat{\jmath}'}{dt}y' + \hat{\jmath}'\frac{dy'}{dt} + \frac{d\hat{k}'}{dt}z' + \hat{k}'\frac{dx'}{dt} = \hat{\imath}\frac{d(x-X)}{dt} + \hat{\jmath}\frac{d(y-Y)}{dt} + \hat{k}\frac{d(z-Z)}{dt}$$

$$= \hat{\imath}'v'_x + \hat{\jmath}'v'_y + \hat{k}'v'_z + \vec{\omega} \times \left(\hat{\imath}'x' + \hat{\jmath}'y' + \hat{k}'z'\right) = \hat{\imath}(v_x - V_x) + \hat{\jmath}(v_y - V_y) + \hat{k}(v_z - V_z)$$

que, usando o formalismo compacto vetorial, dá:

$$\vec{v'} = \vec{v} - \vec{v_t} = \vec{v} - (\vec{V} + \vec{\omega} \times \mathbf{O'P})$$

onde

$$\begin{cases} \vec{v'} = v'_x\hat{\imath}' + v'_y\hat{\jmath}' + v'_z\hat{k}' \\ \vec{v} = \quad v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} + v_z\hat{k} \\ \vec{V} = \ V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath} + V_z\hat{k} \\ O'P = x'\hat{\imath}' + y'\hat{\jmath}' + z'\hat{k}' \end{cases}$$

$$\implies \vec{v_t} = \vec{V} + \vec{\omega} \times \mathbf{O'P}$$

Derivando novamente, tem-se

$$\frac{d\vec{v'}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v} - \vec{v_t}) = \frac{d}{dt}\Big(\vec{v} - (\vec{V} + \vec{\omega} \times O'P)\Big) = \frac{d\vec{v}}{dt} - \frac{d\vec{V}}{dt} - \frac{d(\vec{\omega} \times \mathbf{O'P})}{dt}$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v'}}{dt} &= \frac{dv'_x}{dt}\hat{\imath}' + v'_x\frac{d\hat{\imath}'}{dt} + \frac{dv'_y}{dt}\hat{\jmath}' + v'_y\frac{d\hat{\jmath}'}{dt} + \frac{dv'_z}{dt}\hat{k}' + v'_z\frac{d\hat{k}'}{dt} \\ &= a'_x\hat{\imath}' + v'_x(\vec{\omega} \times \hat{\imath}') + a'_y\hat{\jmath}' + v'_y(\vec{\omega} \times \hat{\jmath}') + a'_z\hat{k}' + v'_z(\vec{\omega} \times \hat{k}') \end{aligned}$$

o que agrupa para

$$\frac{d\vec{v'}}{dt} = (a'_x\hat{\imath}' + a'_y\hat{\jmath}' + a'_z\hat{k}') + \vec{\omega} \times (v'_x\hat{\imath}' + v'_y\hat{\jmath}' + v'_z\hat{k}')$$

Também, se sabe que

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

e que

$$\frac{d(\vec{\omega} \times \mathbf{O'P})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times (\mathbf{O'P}) + \vec{\omega} \times \frac{d}{dt}\left(x'\hat{\imath}' + y'\hat{\jmath}' + z'\hat{k}'\right)$$

o que simplifica para

$$\vec{\alpha} \times (\mathbf{O'P}) + \vec{\omega} \times [(v'_x \hat{\imath}' + v'_y \hat{\jmath}' + v'_z \hat{k}') + (\vec{\omega} \times (x' \hat{\imath}' + y' \hat{\jmath}' + z' \hat{k}'))]$$

onde $\vec{\alpha} \equiv \frac{d\vec{\omega}}{dt}$.

Substituindo em $\frac{d\vec{v'}}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\vec{v} - (\vec{V} + \vec{\omega} \times \mathbf{O'P})\Big)$ todas as derivadas encontradas e fatorando devidamente, resulta

$$\vec{a'} = \vec{a} - [\vec{A} + \vec{\alpha} \times \mathbf{O'P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times O'P)] - 2\vec{\omega}\vec{v'}$$

$$\vec{a'} = \vec{a} + \vec{a_t} + \vec{a_c}$$

onde $\vec{a'}$ é a aceleração do ponto P com respeito ao referencial acelerado, $\vec{a}$ é a aceleração do ponto P com respeito ao referencial fixo, $\vec{a_t}$ é a aceleração oriunda do fato do referencial móvel ser acelerado, e $\vec{a_c}$ se deve ao fato do ponto P se mover em relação ao referencial acelerado e deste rotacionar com respeito ao referencial fixo.

Para ficar claro, reitero que $\vec{A}$ é a aceleração da origem do referencial móvel, $\vec{\alpha} \times \mathbf{O'P}$ é a *aceleração tangencial* do ponto em relação à sua trajetória curva, $\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \mathbf{O'P})$ é a aceleração radial ou ainda *centrífuga*, e $2\vec{\omega}\vec{v'}$ é a *aceleração de Coriolis*.

2 Terceiro princípio da dinâmica, forças elásticas e forças de atrito

Como os outros princípios, o 3° se obtém a partir da observação experimental.

3° princípio:
"Em um sistema referencial inercial,
o momento total do sistema se conserva".

Essa formulação do 3° princípio nos dá informações de tipo cinemático. Porém, ele nos permite obter também informações sobre a dinâmica.

Definimos agora as forças internas e externas ao sistema físico que estamos considerando (sistema descrito pelo referencial inercial).

As *forças internas* são aquelas que exercem os corpos que fazem parte do sistema.

As *forças externas* que atuam sobre o sistema, são exercidas por entidades externas ao mesmo sistema.

Chamamos de:

$$\vec{f}^{(i)} = \text{forças internas}$$
$$\vec{f}^{(e)} = \text{forças externas}$$

Se o nosso sistema físico é formado por n-partículas de massa m, então

$$\vec{f}_i^{(e)} + \vec{f}_i^{(i)} = m_i a_i \text{ (onde i} = 1, 2, \ldots n)$$

onde aplicamos o segundo princípio da dinâmica, que podemos escrever também:

$$\vec{f}_i^{(e)} + \vec{f}_i^{(i)} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

Observamos a complexidade dessa equação considerando um ponto.

P_i, queremos determinar o vetor resultante das forças que atuam sobre ele. As forças eternas $\vec{f}_i^{(e)}$ dependem da posição do ponto P_i ($\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$), a resultante das forças internas dependem da posição de todas as outras partículas. Portanto, obtemos para o ponto P_i:

$$\vec{f}_i^{(e)}(\vec{r}_i) + \vec{f}_i^{(i)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n) = m\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$$

que vale para cada ponto P_i. Podemos ver que, tendo n-partículas, temos que resolver n-equações diferenciais vetoriais (3n equações escalares) com 3n incógnitas que são função do tempo.

O problema se resolve da forma simples quando as partículas são 2 já com 3 a resolução analítica é mais complexa.

Imaginamos agora de ter duas partículas, que possam ser consideradas livres no referencial inercial, ou seja, não têm forças externas atuando.

$$\cancelto{0}{\vec{f}_i^{(e)}} + \vec{f}_i^{(i)} = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$$

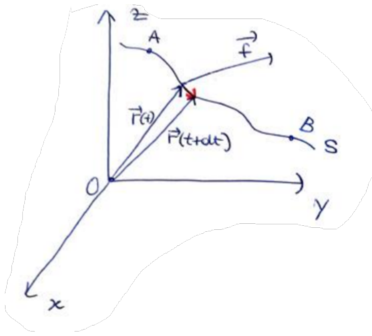
Aplicando o terceiro princípio, o vetor resultante do momento total (linear nesse caso) deve manter-se constante: $\sum \vec{p}_i = \vec{P} = \text{constante}$.

$$\begin{cases} \vec{f}_1^{(i)} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} \\ \vec{f}_2^{(i)} = \frac{d\vec{p}_2}{dt} \end{cases} \implies \vec{F}^{(i)} = \frac{d\vec{p}}{dt} \implies \vec{F}^{(i)} = 0.$$

Completar as anotações desta aula.

3 Trabalho

Considere um ponto material P, de massa m, que se move com respeito a um referencial, sob a ação de uma força $\vec{f}$.



Suponha que o ponto move-se ao longo da trajetória (s) descrita no gráfico. Cada ponto representa a posição num determinado instante, e o vetor posição $\vec{r}(t)$ representa a posição instantânea do ponto.

No instante t, o vetor posição é $\vec{r}(t)$, já no instante $(t + dt)$, o vetor posição é $\vec{r}(t + dt)$. O deslocamento infinitesimal é dado por:

$$d\vec{s} = \vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t)$$

e a força que atua sobre ele é representada na figura pelo vetor $\vec{f}$.

Assim, o *trabalho* relativo ao deslocamento infinitesimal $d\vec{s}$, é definido como:

Definição.

$$dW = \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

isto é, o produto escalar da força pelo deslocamento infinitesimal.

A unidade de trabalho é, então, dada por $[W] = [M][L^2][T^{-2}] = J$, ou seja, possui unidade de *energia*.

Agora, imagine o deslocamento do ponto P entre A e B. O trabalho pode ser calculado como a soma do trabalho infinitesimal sobre diversos trajetos infinitesimais entre A e B, ou seja:

$$W_{AB} = \sum \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

Como $d\vec{s}$ é infinitesimal, então, pela relação da integral com a soma, temos

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

ou seja, W_{AB} se obtém calculando a *integral de linha* de $(\vec{f} \cdot d\vec{s})$ entre os pontos A e B.

Diz-se que existe, naquele espaço, um *campo de forças*:

$$\vec{f} = \vec{f}(\vec{r}) \implies f_x = f_x(x, y, z), \quad f_y = f_y(x, y, z), \quad f_z = f_z(x, y, z)$$

A priori, o campo de forças poderia também depender do tempo, isto é

$$\vec{f} = \vec{f}(\vec{r}, t)$$

mas, por enquanto, vamos considerar campos que não dependem do tempo. Esse tipo de campo, $(\vec{f} = \vec{f}(\vec{r}))$, se chama *estacionário*.

Então, quando calculamos o trabalho, podemos expandir o produto escalar entre $\vec{f}$ e $d\vec{s}$ para encontrar

$$W_{AB} = \int_A^B [f_x(x, y, z)\, dx + f_y(x, y, z)\, dy + f_z(x, y, z)\, dz]$$

onde dx , dy e dz são as componentes infinitesimais do deslocamento $d\vec{s}$, isto é

$$d\vec{s} = dx\, \hat{x} + dy\, \hat{y} + dz\, \hat{z}$$

Isso tudo significa que para calcular a integral e obter W_{AB} é necessário conhecer a trajetória entre A e B. Em geral, a trajetória pode se expressar na forma

$$\begin{cases} x = x(h) \\ y = y(h) \\ z = z(h) \end{cases}$$

onde h é um parâmetro que pode assumir um significado diferente a depender de cada problema.

Uma vez conhecida a trajetória, pode-se calcular os diferenciais $(dx\, , dy\, , dz)$ para determinar a integral.

Exemplo. O ponto material P move-se numa região onde atua o campo de forças:

$$\begin{cases} fx = ax + z \\ fy = by \\ fz = cy \end{cases}$$

Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças quando o ponto material move-se da origem $O = (0, 0, 0)$ ao ponto $A = (0, 1, 1)$ ao longo da trajetória retilínea no plano Oyz.

Solução. Podemos escrever a trajetória como

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = h \\ z = h \end{cases} \implies \begin{cases} dx &= 0 \\ dy &= dh \\ dz &= dh \end{cases}$$

uma vez que o movimento começa na origem e se dá de forma retilínea apenas no plano Oyz. Segue que

$$W_{OA} = \int_O^A [f_x(x,y,z)\,dx + f_y(x,y,z)\,dy + f_z(x,y,z)\,dz] = \int_0^1 (0 + bh\,dh + ch\,dh)$$

$$\therefore W_{OA} = \frac{1}{2}(b+c)$$

Exemplo 2. Para o mesmo campo de forças, ponto inicial e ponto final do exemplo anterior, calcule o trabalho caso a trajetória fosse parabólica no plano Oyz, isto é, de equação $z = y^2$.

Solução. Nesse caso, x, y, z seriam dados pelos seguintes parâmetros:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = h \\ z = h^2 \end{cases} \implies \begin{cases} dx &= 0 \\ dy &= dh \\ dz &= 2h\,dh \end{cases}$$

Assim,

$$W_{OA} = \int_O^A [f_x(x,y,z)\,dx + f_y(x,y,z)\,dy + f_z(x,y,z)\,dz] = \int_0^1 (0 + bh\,dh + ch \cdot 2h\,dh)$$

$$= \int_O^A (bh\,dh + 2ch^2\,dh) = \left[\frac{1}{2}bh^2 + 2c\frac{h^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2}b + \frac{2}{3}c$$

$$\therefore W_{OA} = \frac{1}{2}b + \frac{2}{3}c$$

Dessa forma, concluímos que, em geral, o trabalho realizado por uma força sobre um ponto que move-se de A a B depende não só das posições inicial e final, mas também da trajetória.

4 Energia cinética e forças conservativas

Dessa vez, desejamos obter a relação do *trabalho* com as grandezas cinemáticas que definem o movimento do corpo.

Começaremos observando que podem existir diversas forças atuando sobre o ponto P. Suponha que existam $\vec{f}_i$ (i forças) — o trabalho total será a soma dos trabalhos:

$$W = \sum W_i = \sum \int_A^B \vec{f}_i \cdot d\vec{s} = \int_A^B \sum (\vec{f}_i)\, d\vec{s} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

onde $\vec{f} = \sum \vec{f}_i$ representa a resultante das forças que atuam sobre P.

Isso significa que o trabalho total das forças $\vec{f}_i$ que atuam sobre P é igual ao trabalho da força resultante $\vec{f}$ das forças $\vec{f}_i$.

Observação.

Esse resultado é uma consequência de estarmos tratando de um ponto material. Caso o corpo tivesse dimensões finitas, cada força pode, a priori, estar associada a um deslocamento diferente, fazendo o resultado perder a validez.

Pela segunda lei de Newton, temos que

$$\vec{f} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Fazendo o produto escalar com $d\vec{s}$ dos dois lados, segue

$$\vec{f} \cdot d\vec{s} = m\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{s}\right) = m\left(d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt}\right) = m\vec{v} \cdot d\vec{v}$$

Além disso, pode-se dizer que

$$\vec{v} \cdot d\vec{v} = d\left(\frac{1}{2}\vec{v} \cdot \vec{v}\right) \implies \vec{f} \cdot d\vec{s} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$$

Considerando que o trabalho é entre dois pontos A e B arbitrários, temos

$$\int_A^B \vec{f} \cdot ds = \int_A^B d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

e, portanto,

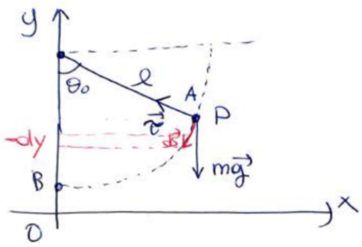
Teorema da energia cinética

$$W_{AB} = K_B - K_A$$

onde $K \equiv \frac{1}{2}mv^2$ é a energia cinética do ponto material.

Isso significa que quando um ponto material move-se ao longo de uma trajetória do ponto A ao ponto B, o trabalho realizado pela resultante das forças que atua sobre o ponto material é igual à variação da energia cinética do mesmo ponto.

Exemplo. Um pêndulo simples de comprimento l tem um ponto material P, de massa m, pendurado no extremo. Ele é posicionado ao ângulo $\theta_0 = 60°$, como representado na figura a seguir, e deixado cair do ponto A com velocidade nula. Qual a velocidade do ponto P quando passa pelo ponto B?



Solução. Como o comprimento do fio não muda, pode-se dizer que a trajetória de A até B foi circular. As únicas forças atuando no ponto P são o Peso e a Tração no fio.

Decompondo a força Peso em suas componentes radial P_r e tangencial P_θ à trajetória, temos:

$$\vec{P}_r = P\cos\theta\hat{r}, \quad \vec{P}_\theta = P\sin\theta\hat{\theta}$$

Como o trabalho total realizado pela força resultante é igual a soma dos trabalhos de cada força, e sabendo que a Tração e a componente radial da força Peso são perpendiculares à trajetória (consequentemente realizando um trabalho nulo sobre o ponto), a única força que importará para o cálculo do trabalho é a componente tangencial da força Peso.

Dessa forma, segue

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{P}_\theta \cdot d\vec{s}$$

A trajetória circular é tal que $s = l\theta \implies d\vec{s} = -l\,d\theta\,\hat{\theta}$. Logo,

$$W_{AB} = -\int_{\theta_0}^{0} P\sin\theta \cdot l\,d\theta = -mgl\int_{\theta_0}^{0}\sin\theta\,d\theta = -mgl\cdot[-\cos\theta]_{\theta_0}^{0} = mgl(1-\cos 60°)$$

$$\therefore W_{AB} = \frac{1}{2}mgl$$

Pelo teorema da energia cinética e sabendo que o ponto parte do repouso, temos

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mgl \implies v = \sqrt{gl}$$

Definição.

Quando o trabalho depende somente dos pontos extremos do percurso (ponto inicial e ponto final), dizemos que o campo de forças existente é *conservativo*.

Pode-se expressar de forma analítica a definição anterior, confira:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = f(A, B) \to \text{é uma função que depende só de } A \text{ e } B.$$

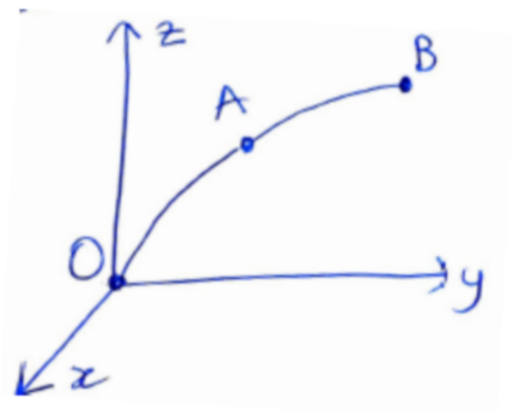
onde A indica as coordenadas (x_A, y_A, z_A) e B as coordenadas do ponto $B(x_B, y_B, z_B)$.

Em um campo de forças conservativo, o trabalho W_{AB} depende somente das coordenadas do ponto B e A, para cada par A, B dentro do campo. Isso nos permite dizer que

$$W_{AB} = f(A, B) = V(B) - V(A)$$

ou seja, pode ser descrito como diferenças de valores que uma mesma função V das coordenadas assume respectivamente nos pontos B e A. A função V é chamada de *função potencial*.

Para demonstrar esse resultado, considere um caminho, dentro de um campo conservativo, que leva de um ponto O (que pode ser a origem dos eixos) para um ponto A e, após isso, para B (ver a figura abaixo).



O trabalho para ir de O para A pode ser escrito como

$$W_{OA} = f(O, A) \to \text{pois o campo é conservativo.}$$

Da mesma forma, calculamos o trabalho para ir de O para B:

$$W_{OB} = f(O, B)$$

Da definição da integral de linha, resulta que o trabalho é uma quantidade *aditiva* com respeito aos deslocamentos infinitesimais referente ao caminho, então

$$W_{OB} = W_{OA} + W_{AB} \implies W_{OA} + W_{AB} = f(O, B)$$

Subtraindo da equação acima a equação $W_{OA} = f(O, A)$, temos

$$W_{OA} + W_{AB} - W_{OA} = f(O, B) - f(O, A) \implies W_{AB} = f(O, B) - f(O, A)$$

Denotando a função $f(O, P)$ como $V(P)$, onde P é um ponto arbitrário dentro do campo conservativo, podemos reescrever a equação anterior:

$$W_{AB} = V(B) - V(A)$$

A função $V(P) = V(x, y, z)$ é a função potencial e é definida em termos de uma constante — por isso, o que tem significado físico é a diferença entre valores da função potencial em dois pontos (a diferença não depende da constante arbitrária).

Observação.

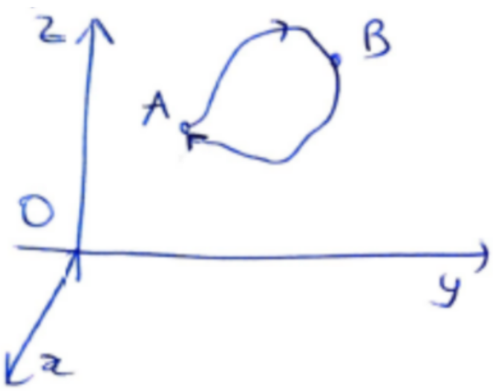
A função potencial existe *somente* se o campo é conservativo. Caso contrário, a função potencial não pode ser definida.

Pela definição de trabalho, temos

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = V(B) - V(A)$$

ao longo de qualquer caminho entre A e B.

Como corolário, se $B = A$, ou seja, o caminho *fecha* sobre o mesmo ponto (ver figura abaixo), temos que $W_{AB} = 0$.



Observação.

Em um campo conservativo, o trabalho ao longo de um caminho fechado é *nulo*.

Quando trabalhamos com campos conservativos, o cálculo do trabalho é mais facilmente realizado do que no caso geral, uma vez que é suficiente saber (ou determinar) a função potencial no campo e diretamente obter o trabalho, por diferença.

Se um campo é *estacionário*, isto é, não depende do tempo, temos que primeiramente avaliar se é conservativo. Caso for, podemos determinar a função potencial e, finalmente, podemos determinar o trabalho. Esquematicamente, temos:

O campo é estacionário? $\rightarrow$ É conservativo? $\rightarrow$ Qual é a função potencial? $\rightarrow$ Temos o trabalho.

A pergunta que segue é: *como verificamos se um campo é conservativo?* Para responder essa pergunta, vamos precisar um pouco do formalismo das *derivadas parciais*, acompanhe:

Consideramos uma função V em 3 variáveis: $V = V(x, y, z)$.

Definição.

Chamamos de *"derivada parcial"* de V com respeito à variável x a derivada da função $V(x, y, z)$ considerando as outras variáveis como constantes (nesse caso, y e z). Denotamos por

$$\frac{\partial V}{\partial x}$$

Exemplo. Calcular as derivadas parciais da função

$$V = V(x, y, z) = ax^2 + bxyz + y^2z^2$$

Solução. Confira na próxima página.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^2 + bxyz + y^2z^2\right) = \frac{\partial ax^2}{\partial x} + \frac{\partial bxyz}{\partial x} + \cancelto{0}{\frac{\partial y^2z^2}{\partial x}} = 2ax + byz$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(ax^2 + bxyz + y^2z^2\right) = \cancelto{0}{\frac{\partial ax^2}{\partial y}} + \frac{\partial bxyz}{\partial y} + \frac{\partial y^2z^2}{\partial y} = bxz + 2yz^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(ax^2 + bxyz + y^2z^2\right) = \cancelto{0}{\frac{\partial ax^2}{\partial y}} + \frac{\partial bxyz}{\partial y} + \frac{\partial y^2z^2}{\partial y} = bxy + 2y^2z$$

As derivadas parciais são ainda funções das mesmas variáveis, então podemos derivá-las novamente, obtendo as derivadas de segunda ordem. Agora, é necessário observar que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} \equiv \text{derivada parcial com respeito à } q \text{ de } \frac{\partial V}{\partial q}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q} \equiv \text{derivada parcial } \textit{cruzada} \text{ com respeito à } p \text{ de } \frac{\partial V}{\partial q}$$

onde q e p são variáveis arbitrárias.

Um importante teorema sobre as derivadas de segunda ordem (cuja demonstração foge o escopo do curso de Física I) é o *Teorema de Schwartz*:

Teorema.

As derivadas parciais cruzadas não dependem da ordem de derivação.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p \partial q} = \frac{\partial^2 V}{\partial q \partial p}, \ \forall p, q$$

Outro conceito importante é o de diferencial total:

Definição.

O diferencial total de uma função $V(x, y, z)$ é a soma das derivadas parciais multiplicadas pelos diferenciais das variáveis correspondentes, isto é

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Exemplo. Calcular o diferencial total da função $V(x, y, z) = ax^2 + bxyz + y^2z^2$.

Solução.

$$dV = (2ax + byz)dx + (bxz + 2yz^2)dy + (bxy + 2y^2z)dz$$

Leia com atenção os próximos passos, eles são cruciais para entender como identificar quando um campo é conservativo.

Sabemos que

$$dW = \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

onde $\vec{f} = f_x(x, y, z)\hat{x} + f_y(x, y, z)\hat{y} + f_z(x, y, z)\hat{z}$ e $d\vec{s} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$.

Também, é conhecido que para um campo conservativo vale

$$W = \Delta V \implies dW = dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

Comparando as duas equações apresentadas, temos

$$f_x(x, y, z)dx + f_y(x, y, z)dy + f_z(x, y, z)dz = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz$$

$$\therefore \frac{\partial V}{\partial x} = f_x(x, y, z), \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = f_y(x, y, z), \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = f_z(x, y, z)$$

se, e somente se, o campo for conservativo — observe que, em geral, dadas as 3 funções f_x, f_y e f_z, nem sempre existe uma função $V(x, y, z)$ que satisfaz a relação acima.

Para avaliarmos se essa função V existe de fato, usaremos o *teorema de Schwartz*:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} = f_x(x, y, z), \qquad \frac{\partial V}{\partial y} &= f_y(x, y, z), \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = f_z(x, y, z) \\
\iff \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x} \\
\iff \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} &= \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y} \\
\iff \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} &= \frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial z}
\end{aligned}$$

ou seja, verificar a condição de igualdade entre as derivadas cruzadas de V com respeito a x, y, z é condição *suficiente* para garantir a existência de V.

Conclusão.

Dado um campo de forças, representado pelas funções f_x, f_y e f_z, que são as componentes da força, então, é condição necessária e suficiente para que o campo seja *conservativo*:

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial z}$$

Exemplo. Dado o campo de forças:

$$\begin{cases} fx = ax + by \\ fy = cx \\ fz = dx + cz \end{cases}$$

Quais as condições devem satisfazer os coeficientes (a, b, c, d) para que se trate de um campo conservativo?

Solução.

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial z}$$

$$\implies b = c, \; d = 0.$$

Então, dados $(a, b, b, 0)$, onde $\forall a, b \in \mathbb{R}$, temos que o campo de forças disponibilizado será conservativo.

5 Energia potencial e conservação da energia mecânica.

Comumente conhecemos o campo de forças e desejamos obter a função potencial $V(x, y, z)$; a pergunta é: como fazer isso na prática? O primeiro passo será verificar se o campo de forças é conservativo, o que já aprendemos a fazer na aula anterior. Dado que o campo é conservativo, sabemos que vale

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_A^B f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz = \int_A^B \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) dz = \int_A^B dV$$
$$= V(B) - V(A)$$

Isso significa que é permitido escolher um ponto de referência A qualquer e um ponto $P(x, y, z)$ que desejamos determinar o potencial. O trabalho entre A e P é dado por:

$$\int_A^P f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz = V(x, y, z) - V(x_A, y_A, z_A)$$

$$\therefore V(x, y, z) = \int_A^P f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz + V(x_A, y_A, z_A)$$

Como o campo de forças é conservativo, qualquer caminho pode ser tomado na integral de linha, e portanto escolheremos o mais simples possível: o caminho ao longo dos três eixos. Na prática, isso significa que a variação para cada eixo é independente da variação dos outros, o que simplifica o cálculo da integral.

Outro resultado importante é derivado através do teorema da energia cinética e do fato do trabalho de uma força conservativa poder ser escrito como a diferença da função potencial associada em dois pontos. Confira:

$$W_{AB} = K_B - K_A = V(B) - V(A) \implies K_B - V(B) = K_A - V(A)$$

Definimos a função $U(x, y, z)$ como a função oposta do potencial $U = -V$ e segue que

$$K_B + U(B) = K_A + V(A)$$

Sendo A e B dois pontos quaisquer, em geral vale que

Teorema de Conservação da Energia Mecânica.

A energia mecânica total E de um ponto que se move sob a ação de forças conservativas é constante.

$$K + U = E = constante$$

Definição.

A função $U = -V$ é chamada de *energia potencial* do campo conservativo.

Uma consequência direta disso é que podemos obter o campo de forças a partir da energia potencial:

$$\begin{cases} fx = \frac{\partial V}{\partial x} \\ fy = \frac{\partial V}{\partial y} \\ fz = \frac{\partial V}{\partial z} \end{cases} \implies \begin{cases} fx = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ fy = -\frac{\partial U}{\partial y} \\ fz = -\frac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

Em geral, é comum ter casos onde forças não conservativas atuam junto com as conservativas. Chamemos de f_c as forças conservativas e de f_{nc} as forças não conservativas. Para as forças conservativas, vale

$$W_c = V(B) - V(A) = U(A) - U(B)$$

Pelo teorema da energia cinética, vale para ambas as forças:

$$K_B - K_A = W_c + W_{nc} \implies E_B - E_A = W_{nc}$$

ou seja, o que faz variar a energia mecânica do sistema é o trabalho das forças não conservativas; alternativamente, se não há forças não conservativas então a energia mecânica do sistema não se altera.

6 Operador gradiente e sistemas com um grau de liberdade

O operador gradiente, indicado pelo símbolo $\boldsymbol{\nabla}$, é definido pela relação

> **Definição.**
>
> O gradiente de V é aquele vetor que multiplicado escalarmente pelo deslocamento $d\vec{r}$, fornece o diferencial dV da função.
>
> $$\boldsymbol{\nabla} V \cdot d\vec{r} = dV$$

Em coordenadas cartesianas, o deslocamento $d\vec{r}$ tem como componentes dx , dy e dz.

No caso que V representa o potencial de um campo de forças conservativo, sendo

$$dV = dW = \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

e comparando com a definição acima de gradiente, temos que

$$\boldsymbol{\nabla} V \cdot d\vec{r} = dV \implies \vec{f} = \boldsymbol{\nabla} V$$

Além disso, podemos escrever $\boldsymbol{\nabla} V \cdot d\vec{r}$ como

$$\boldsymbol{\nabla}_x V \cdot dx + \boldsymbol{\nabla}_y V \cdot dy + \boldsymbol{\nabla}_z V \cdot dz$$

onde $\boldsymbol{\nabla}_i V$ é a componente i do gradiente.

Sabemos que o diferencial exato dV é equivalente a

$$\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

Portanto, comparando os dois últimos resultados, segue que

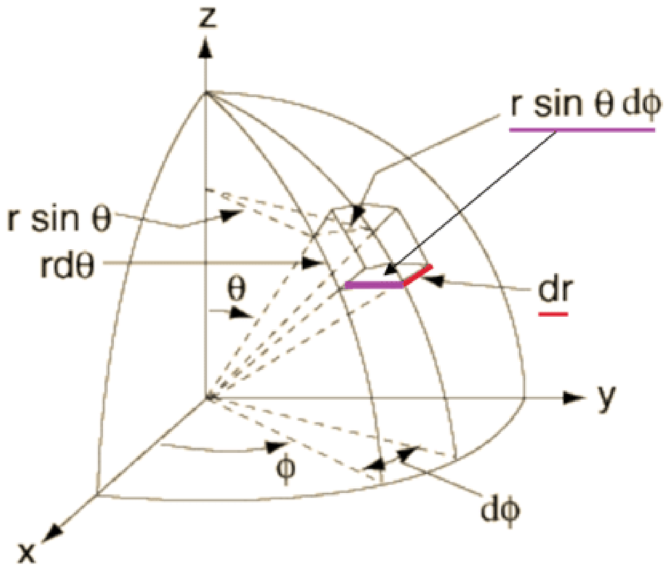
$$\boldsymbol{\nabla}_i V = \frac{\partial V}{\partial i}$$

> **Definição.**
>
> O vetor gradiente é definido por
>
> $$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\imath}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}$$

Já em coordenadas polares há uma sutileza um pouco maior, o diferencial da função potencial $V(r, \theta, \phi)$, expressa pelas coordenadas polares (r, θ, ϕ) é

$$dV = \frac{\partial V}{\partial r} dr + \frac{\partial V}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi} d\phi$$

A pergunta que fica é: como descrever $d\vec{r}$ em coordenadas polares, sabendo que os vetores unitários agora variam de direção? A resposta deriva de uma avaliação geométrica, confira:



Assim, segue

$$(d\vec{r})_{\hat{r}} = dr\,, \quad (d\vec{r})_{\hat{\theta}} = r\,d\theta\,, \quad (d\vec{r})_{\hat{\phi}} = r\sin\theta\,d\phi$$

Dessa forma, reescrevemos $\boldsymbol{\nabla}V \cdot d\vec{r} = dV$ para encontrar

$$\boldsymbol{\nabla}_r V \cdot dr + \boldsymbol{\nabla}_\theta V \cdot r\,d\theta + \boldsymbol{\nabla}_\phi V \cdot r\sin\theta\,d\phi = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial V}{\partial \phi}d\phi$$

Comparando os resultados, temos

$$\boldsymbol{\nabla}_r V = \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \boldsymbol{\nabla}_\theta V = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}, \quad \boldsymbol{\nabla}_\phi V = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

Ademais, a equação $K + U = E = constante$ para um campo de forças conservativo representa, do ponto de vista matemático, uma EDO de 1° ordem nas variáveis $x(t), y(t)$ e $z(t)$, uma vez que

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)$$

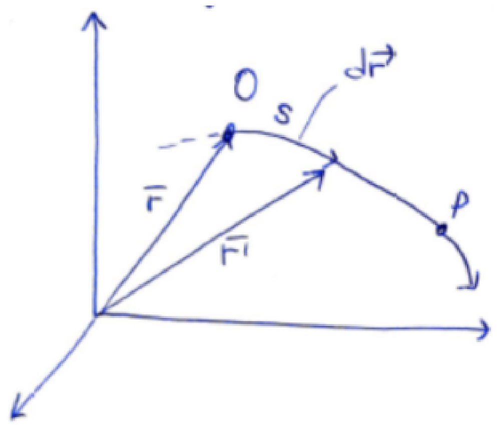
o que nos permite reescrever a equação da energia mecânica para

$$\frac{1}{2}m\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right) + U(x, y, z) = E$$

onde E é determinada a partir das condições iniciais e da constante que determina U.

Estamos tratando de uma simples EDO de 1° ordem, apesar de englobar 3 variáveis em apenas 1 equação. Se o movimento da partícula estiver vinculado à trajetória de alguma forma, então o problema está resolvido porque x, y e z ficam determinados em função de um único parâmetro.

Digamos que o parâmetro em consideração é a distância s entre um ponto P da trajetória e a sua origem O.



Dessa forma,

$$v = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right|$$

e podemos indicar $U(x, y, z)$ como $U(s)$.

Assim, a equação se torna

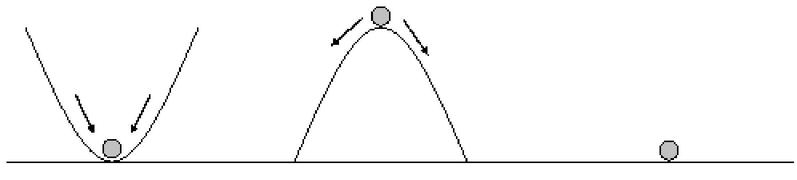
$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + U(s) = E$$

$$\implies \quad t + \text{const} = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{ds}{\sqrt{E - U(s)}}$$

Note que a equação fornece $s(t)$, o que nos permite determinar a posição da partícula a cada instante de tempo. A constante que acompanha o tempo na equação pode ser encontrada através das condições iniciais. Já sabendo o sentido de v_0, pode-se eliminar o "$\pm$" na equação por $+$ ou $-$.

7 Tipos de Equilíbrio e Potência Instantânea

A noção de equilíbrio empregada até agora é tão simples quanto um ponto que esteja em repouso devido à ausência de força resultante. Entretanto, essa não é a melhor abordagem possível para o problema, porque dependendo do contexto esse estado de equilíbrio pode ser facilmente modificado. Visando estabelecer uma descrição completa, estudaremos os três tipos de equilíbrio: estável, instável e indiferente.



a) Equilíbrio Estável

   Nesse caso qualquer perturbação na partícula fará com que haja uma tendência dela voltar ao seu ponto de equilíbrio. Uma força contrária à perturbação surge, de forma que a partícula sempre *quer* voltar ao ponto de equilíbrio, é daí que vem a *estabilidade*.

   Na prática, a partícula se desloca até o seu *ponto de retorno*, que é quando a energia cinética anula-se, toda a energia mecânica se dá como energia potencial e a partícula começa a ir em direção ao ponto de equilíbrio. O movimento resultante é de cunho oscilatório, entre dois pontos de retorno, enquanto não puder escapar desse ambiente.

b) Equilíbrio Instável

   Já nessa outra situação, qualquer perturbação atuante na partícula, por menor que seja, fará com que ela abandone seu estado de equilíbrio e não retorne mais. É a partir disso que vem a noção de *instabilidade*.

c) Equilíbrio Indiferente

   Aqui tanto faz o corpo ser submetido à uma perturbação ou não — pouco depois disso ele retorna para o estado de equilíbrio, dessa vez num ponto diferente do anterior. É daqui que vem a ideia de *indiferença*.

Para um campo de forças conservativos, os pontos de equilíbrio são tais que

$$f_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Analisando o gráfico de $U(x)$, esses pontos x são tais que a curva $U(x)$ possui reta tangente de inclinação nula, ou seja, referem-se a pontos de máximo ou mínimo da função, também chamados de *estacionários*. Para avaliar se trata-se de um ponto de máximo ou de mínimo, é necessário calcular a derivada de segunda ordem de $U(x)$, isto é

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0 \implies \text{ponto de mínimo}$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0 \implies \text{ponto de máximo}$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \implies \text{região plana}$$

O que está diretamente ligado a, respectivamente, equilíbrio estável, instável e indiferente.

Por fim, consideramos um sistema físico S que exerce uma força resultante sobre um corpo M em movimento. Suponha que a resultante das forças realize um trabalho W.

Definição.

Definimos a potência P fornecida num certo instante de tempo pelo sistema S como

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$
$$\implies [P] = \frac{J}{s} = Watt$$

No caso particular em que o corpo seja um ponto material e $d\vec{s}$ é o deslocamento realizado no tempo dt, vale

$$dW = \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

$$\implies P = \frac{dW}{dt} = \frac{d\vec{f} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{f} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

onde $\vec{v}$ é a velocidade do ponto.

8 Resolução de Questões

Nessa aula a professora resolveu algumas questões de trabalho e energia como uma forma de auxiliar no nosso aprendizado, visto que na aula 21 pretendemos iniciar sistemas de muitas partículas. A seguir eu apresento as questões que achei mais interessante e as suas soluções.

Questão 1. Uma partícula que pode-se mover livremente ao longo o eixo x tem uma energia potencial da forma $U(x) = \beta[1 - e^{-x^2}]$ onde $-\alpha \leq x \leq a$ e α e β são constantes positivas. Pode-se dizer que:

a) Nenhuma das opções é correta.

b) Existem vários pontos de equilíbrio estável.

c) Para qualquer valor finito não nulo de x, existe uma força que faz com que a partícula fique cada vez mais distante de $x = 0$.

d) Se a energia mecânica total é $\beta/2$, a energia cinética é mínima em $x = 0$.

e) $x = 0$ é um ponto de equilíbrio instável.

Solução. Como $\frac{dU}{dx} = 2\beta x e^{-x^2}$ e $-\alpha \leq x \leq \alpha$, o único ponto onde a derivada é zero é em $x = 0$. Portanto, somente $x = 0$ pode ser um ponto de equilíbrio, estável ou instável. Isso invalida a alternativa b). Além disso, avaliando a derivada de segunda ordem de U em relação a x, temos:

$$\frac{d^2U}{dx^2} = 2\beta(1 - 2x^2)e^{-x^2}$$

em $x = 0$ temos que $\frac{d^2U}{dx^2} = 2\beta$ e como β é uma constante positiva então $\frac{d^2U}{dx^2} > 0$, logo, $x = 0$ é um ponto de equilíbrio estável, o que invalida a alternativa e).

Ademais, sabemos que como U é uma função apenas da posição então a força F associada a U deve ser conservativa, então

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dx}\hat{\imath} = -2\beta x e^{-x^2}\hat{\imath}$$

Como $-\alpha \leq x \leq \alpha$ então $\vec{F}$ sempre estará direcionada de forma a partícula voltar para $x = 0$, o que elimina a alternativa c). Também, como $x = 0$ é um ponto de equilíbrio estável, trata-se de um mínimo de energia potencial, portanto um máximo de energia cinética, o que elimina a alternativa d).

Gabarito: a) Nenhuma das opções é correta.

Questão 2. Na região $-a < x < a$ uma força que atua sobre uma partícula é descrita pela função da energia potencial:

$$U = -b\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$$

onde a e b são constantes positivas.

a) Achar a força na região $-a < x < a$

b) Em qual valor de x a força é zero?

c) O ponto onde a força é zero é um ponto de equilíbrio estável ou instável?

Solução.

a) Para calcular F_x fazemos $F_x = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(-b\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)\right) = -b\left(\frac{1}{(a+x)^2} - \frac{1}{(a-x)^2}\right.$

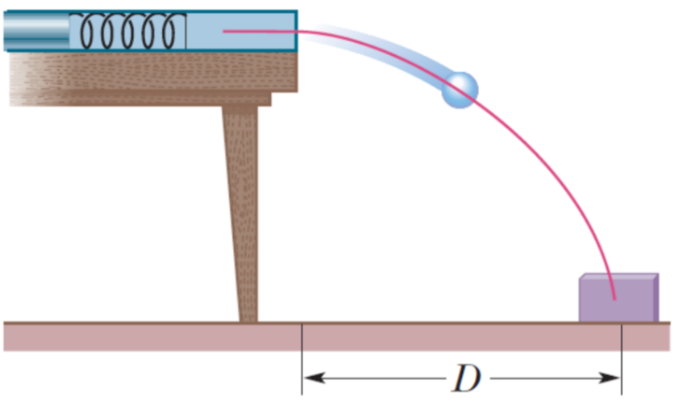
b) $F_x = 0 \iff \left(\frac{1}{(a+x)^2} - \frac{1}{(a-x)^2}\right) = 0 \iff x = 0$

c) Para tanto precisamos calcular $\frac{d^2U}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2}\left(-b\left(\frac{1}{(a+x)^2} - \frac{1}{(a-x)^2}\right)\right) = -2b\left(\frac{1}{(a+x)^3} + \frac{1}{(a-x)^3}\right)$. Assim, em $x = 0$, $\frac{d^2U}{dx^2}]_{x=0} = -\frac{4b}{a} < 0$. Logo, trata-se de um equilíbrio instável.

Questão 3. Bruno e Lucas estão disputando um jogo no qual tentam acertar uma pequena caixa no chão com uma bola de gude lançada por um canhão de mola montado em uma mesa. A caixa está a uma distância horizontal D da borda da mesa (veja a figura). Bruno comprime a mola (de massa desprezível e constante elástica k) uma quantidade l_1, mas o centro da bola de gude cai antes do centro da caixa, a uma distância horizontal D_1 da borda da mesa.

De que distância l_2 Lucas deve comprimir a mola para acertar a caixa?

Considere a bola e a caixa objetos pontuais. Suponha que o atrito da mola e da bola com o canhão é desprezível e ignore a força de arrasto do ar.



Solução. Após abandonar a mesa, o movimento da bolinha segue uma trajetória parabólica, como era de se esperar do lançamento horizontal. O movimento nos eixos x e y são da forma

$$x = v_{0_x} t$$

$$y = \frac{1}{2} g t^2 \implies t_q = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

onde t_q é o tempo de queda da bolinha e h é a altura da mesa.

A velocidade inicial v_{0_x} da bolinha pode ser encontrada através da conservação de energia mecânica do sistema, antes da bolinha abandonar a mesa. Nesse cenário, a energia potencial elástica armazenada pela mola deformada é totalmente convertida em energia cinética da bolinha. Escrevemos:

$$\frac{1}{2} k \Delta x^2 = \frac{1}{2} m v^2 \iff v = \Delta x \sqrt{\frac{k}{m}}$$

onde v é a velocidade com que a bolinha abandona a mola.

Sabemos, do enunciado, que numa primeira situação atingimos o alcance D_1 quando a mola é deformada de l_1. Nessa situação, a velocidade com que a bolinha abandona a mola é

$$v_1 = l_1 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Na outra situação, em que a mola é deformada em l_2, a velocidade com que a bolinha abandona a mola é

$$v_2 = l_2 \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Além disso, o alcance em ambas as situações é dado por

$$A = v_{0_x} \cdot t_q \iff \frac{D_1}{v_1} = \frac{D}{v_2}$$

$$\implies \frac{D_1}{l_1} = \frac{D}{l_2} \therefore l_2 = l_1 \cdot \frac{D}{D_1}$$

9 Sistemas de Partículas e Centro de Massa

Já sabemos descrever o movimento de uma partícula, esteja ela submetida a uma força resultante nula ou não. Entretanto, uma coisa que ainda não se sabe fazer é a descrição do movimento de um sistema constituído de N partículas, onde N é algum número natural arbitrário, de forma conjunta.

Para tanto, considere um sistema S formado por n-partículas p_i, que podem ser descritas como pontos materiais:

$$S \equiv \{p_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Para cada ponto material, podemos escrever a segunda lei da Dinâmica:

$$\vec{f_i} = m_i \vec{a}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

onde $\vec{f_i}$ representa a soma das forças que atuam sobre o ponto p_i. Lembremos que a força resultante (a soma de todas as forças que atuam sobre um ponto) pode ser dada por forças externas e forças internas.

As forças internas são exercidas sobre aquele ponto pelos outros pontos que fazem parte do mesmo sistema S. Já as forças externas são exercidas sobre o ponto por entidades externas ao sistema S. Chamamos $\vec{f}_i^{(i)}$ a resultante das forças internas que atuam sobre o ponto p_i e de $\vec{f}_i^{(e)}$ a resultante das forças externas que atuam sobre o ponto p_i.

Para o ponto p_i podemos escrever a segunda lei da Dinâmica da seguinte forma:

$$\vec{f}_i^{(i)} + \vec{f}_i^{(e)} = m_i \vec{a}_i, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Sabemos que $\vec{f}_i^{(i)} = \vec{f}_i^{(i)}(\vec{r}_j)$ com $(j = 1, 2, \ldots n)$, depende da posição de todos os pontos dentro do sistema S, e que $\vec{f}_i^{(e)} = \vec{f}_i^{(i)}(\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i))$, depende apenas da posição do ponto p_i, e pode depender também da velocidade $\vec{v}_i = \frac{dr_i}{dt}$ (como o atrito de um fluido).

A segunda lei então pode ser reescrita como

$$\vec{f}_i^{(e)}(\vec{r}_i) + \vec{f}_i^{(i)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n) = \frac{d\vec{p}_i}{dt}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

que é um sistema de n-equações diferenciais vetoriais ($3n$ equações escalares), cuja solução é muito complexa. Já tratamos da discussão dos princípios da dinâmica e, pelo terceiro princípio, em um sistema referencial, o momento total de um sistema isolado se conserva. O que significa que por ser um sistema isolado, não há forças externas atuando sobre ele, isto é

$$\vec{F}^{(e)} = 0 \implies \vec{F}^{(e)} + \vec{F}^{(i)} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Pelo terceiro princípio, o momento total se conserva, o que implica que $\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \therefore \vec{F}^{(i)} = 0$. Como já demonstramos anteriormente, isso implica que, por exemplo, no caso de duas partículas (P_1, P_2) que interagem entre elas,

$$\vec{F}^{(i)} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{21} = 0 \implies \vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$$

onde $\vec{f}_{12}$ é a força que p_1 exerce sobre p_2, e $\vec{f}_{21}$ é a força que p_2 exerce sobre p_1.

Voltando ao sistema S, formado por n-pontos materiais p_i, cada um com a própria massa m_i e individuais no espaço, com respeito a um referencial, pelo vetor posição $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$. Definimos o *centro de massa* aquele ponto geométrico, cuja posição é expressa por

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

onde $\sum_i m_i = M$ é a massa total do sistema S. Projetando $\vec{r}_c$ sobre os três eixos cartesianos, podemos obter as três coordenadas

$$\begin{cases} Xc = \dfrac{\sum m_i x_i}{M} \\ Yc = \dfrac{\sum m_i y_i}{M} \\ Zc = \dfrac{\sum m_i z_i}{M} \end{cases}$$

Observação

A definição de centro de massa usa a média ponderada: a soma dos termos está "pesada" com respeito à razão da massa do ponto e a massa total.

Da definição de centro de massa,

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M} \iff M\vec{r}_c = \sum m_i \vec{r}_i$$

Consideramos agora que o nosso sistema inicial S possa ser dividido em duas partes, S_1 e S_2, tal que $S = S_1 + S_2$. Calculamos os centros de massa dos dois sub-sistemas S_1 e S_2:

$$M_1 \vec{r}_{c_1} = \left(\sum_j m_j \vec{r}_j \right)_{S_1} \quad , \quad M_2 \vec{r}_{c_2} = \left(\sum_k m_k \vec{r}_k \right)_{S_2}$$

Somando as duas equações,

$$M_1 \vec{r}_{c_1} + M_2 \vec{r}_{c_2} = \left(\sum_j m_j \vec{r}_j \right)_{S_1} + \left(\sum_k m_k \vec{r}_k \right)_{S_2} = \left(\sum_i m_i \vec{r}_i \right)_{S} = M\vec{r}_c$$

Portanto, dados dois sistemas S_1 e S_2, a posição do centro de massa de $S = S_1 + S_2$ pode ser calculada considerando que nos dois centros de massa C_1 e C_2 (de S_1 e S_2 respectivamente) estejam concentradas respectivamente as massas M_1 e M_2.

Por vezes temos um corpo que não pode ser considerado como puntiforme, ou seja, a massa não pode ser considerada como concentrada em um ponto, mas distribuída no espaço. Nesse caso, consideramos o corpo como composto por muitos volumes infinitesimais, onde cada parte/volume tem massa dm_i e volume dV_i.

A posição do centro de massa é dada por

$$\vec{r}_c \approx \frac{\sum \vec{r}_i dm_i}{\sum dm_i}$$

A conta se torna exata quando o volume $dV_i \to 0$.

$$\vec{r}_c = \lim_{\Delta V_i \to 0} \frac{\sum \vec{r}_i dm_i}{\sum dm_i} = \frac{\int_V \vec{r} dm}{\int_V dm} = \frac{\int_V \vec{r} dm}{M}$$

Para realizar a integral de forma explícita, podemos expressar a massa dm como função das coordenadas x, y e z.

Definição.

Definimos uma nova grandeza, *densidade de massa* (ou simplesmente densidade) aquela função $\rho = \rho(x, y, z)$ que, multiplicada pelo elemento de volume dV, dá o elemento de massa dm.

$$dm = \rho dV = \rho(x, y, z) dx dy dz \iff \rho(x, y, z) = \frac{dm}{dV}$$

Um objeto é homogêneo quando $\rho = \dfrac{M}{V}$, ou seja, ρ depende somente da massa total e volume total, e não das coordenadas.

Voltamos agora ao centro de massa para um sistema contínuo:

$$\vec{r}_c = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

Usando que $dm = \rho(x, y, z) dx dy dz$ e projetando $\vec{r}_c$ sobre os três eixos cartesianos, temos

$$x_c = \frac{\int_V x dm}{\int_V dm} = \frac{\int x\rho(x, y, z) dx dy dz}{\int_V \rho(x, y, z) dx dy dz} = \frac{\int_V x\rho dV}{M}$$

$$y_c = \frac{\int_V y dm}{\int_V dm} = \frac{\int y\rho(x, y, z) dx dy dz}{\int_V \rho(x, y, z) dx dy dz} = \frac{\int_V y\rho dV}{M}$$

$$z_c = \frac{\int_V z dm}{\int_V dm} = \frac{\int z\rho(x,y,z)dxdydz}{\int_V \rho(x,y,z)dxdydz} = \frac{\int_V z\rho dV}{M}$$

Embora os corpos macroscópicos tenham três dimensões, acontece que um corpo possa ter uma ou duas dimensões muito menores que a última. Nesses casos, o corpo pode ter uma forma de lâmina (2D) ou de fio (1D). Então, podemos definir uma densidade superficial e uma densidade linear:

$$\sigma = \frac{dm}{dS} \iff dm = \sigma(x,y)dxdy$$

onde $dS = dxdy$ é o elemento de superfície e

$$\lambda = \frac{dm}{dl} \iff dm = \lambda x dx$$

onde $dl = dx$ é o elemento de comprimento.

No caso 2D,

$$\begin{cases} Xc = \frac{\int_S x\sigma(x,y)dxdy}{\int_S \sigma(x,y)dxdy} = \frac{\int_S x\sigma dS}{M} \\ Yc = \frac{\int_S y\sigma(x,y)dxdy}{\int_S \sigma(x,y)dxdy} = \frac{\int_S y\sigma dS}{M} \end{cases}$$

e no caso 1D,

$$\begin{cases} Xc = \frac{\int_L x\lambda(x)dx}{\int_L \lambda(x)dx} = \frac{\int_L x\lambda dx}{M} \end{cases}$$

10 Teorema do Centro de Massa e Sistemas de Massa Variável

Consideramos um sistema S, formado por n-pontos materiais. Podemos escrever, pela definição de centro de massa:

$$M\vec{r}_C = \sum m_i \vec{r}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Supondo que a massa total do sistema fique constante. Derivando a expressão, temos:

$$M\frac{d\vec{r}_c}{dt} = \sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \iff M\vec{v}_c = \sum m_i \vec{v}_i = \sum \vec{p}_i = \vec{P}$$

$$\therefore \vec{P} = M\vec{v}_c$$

O que indica que o momento linear total de um sistema de massa constante M pode ser descrito como o produto da massa total pela velocidade do centro de massa. A segunda lei da dinâmica para cada ponto material do sistema pode se escrever considerando todas

$$\vec{f}_i^{(e)} + \vec{f}_i^{(i)} = \frac{d\vec{P}_i}{dt}$$

Somando sobre todos os i (todos os componentes do sistema), temos

$$\sum \left[\vec{f}_i^{(e)} + \vec{f}_i^{(i)}\right] = \sum \frac{d\vec{p}_i}{dt} \implies \vec{F}^{(e)} + \vec{F}^{(i)} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Pelo terceiro princípio, a cada ação corresponde uma reação igual e contrária que implica que para um sistema isolado (sem forças externas):

$$\vec{F}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

que é a equação da dinâmica para o sistema considerado.

Observação.

A equação que achamos pode descrever de forma relativamente simples a dinâmica do sistema S, pois permite não considerar as forças internas. Em geral, é importante observar que a equação não permite descrever a dinâmica de cada um dos componentes do sistema.

Voltando para $\vec{P} = M\vec{v}_c$ podemos derivar de novo:

$$M\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} \implies M\vec{a}_c = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

quando M é constante e onde $\vec{a}_c$ é a aceleração do centro de massa. Lembrando que

$$\vec{F}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt} \implies \vec{F}^{(e)} = M\vec{a}_c$$

O que exprime o seguinte teorema:

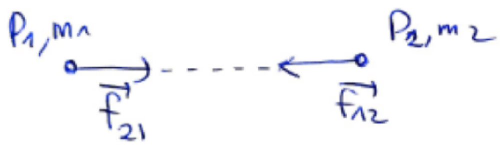
Teorema do Centro de Massa

O centro de massa de um sistema material que tem mesma massa M constante, move-se como um ponto material onde esteja concentrada toda a massa M do sistema. Uma força $\vec{F}^{(e)}$ igual à soma das forças externas que atuam sobre o sistema, atua sobre o ponto.

É importante ressaltar que não podemos obter essa conclusão quando a messa do sistema não é constante.

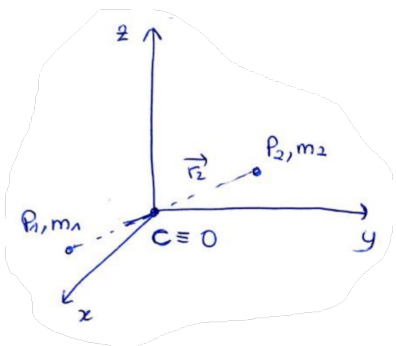
Problema de Dois Corpos.

Consideramos dois corpos (dois pontos materiais) p_1 e p_2 de massa respectivamente igual a m_1 e m_2. Supomos que p_1 e p_2 movem-se somente pela força que reciprocamente exercem um sobre o outro. Assim, o sistema p_1 e p_2 pode ser considerado um sistema isolado.



Pelo terceiro princípio, $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$. Poderia ser o caso da interação gravitacional entre a Terra e outra massa sobre a Terra, mas naquele caso $M_{\text{Terra}} \gg m_c$. Agora, consideremos que m_1 e m_2 possam ter a mesma ordem de grandeza.

Nesse caso, p_1 e p_2 não são pontos livres, mas representam um sistema. Não podemos escolher nenhum dos dois pontos como referencial porque não seria inercial. Porém, sendo nula a resultante das forças, podemos escolher o centro de massa como origem do referencial (que é inercial).



Nesse referencial, $\vec{r}_1$ é o vetor posição de p_1 e $\vec{r}_2$ é o vetor posição de p_2. A equação do movimento de p_2 é

$$\vec{f}_{12} = m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2}$$

Por construção do referencial, $\vec{f}_{12}$ é orientado na mesma direção de $\vec{r}_2$. Pode ser paralelo a $\vec{r}_2$ ou paralelo a $-\vec{r}_2$, dependendo se a força é atrativa ou repulsiva. Chamando $\hat{r}_2$ o versor ao longo de $\vec{r}_2$ e

$$\vec{f}_{12} = f\hat{r}_2$$

onde $f > 0$ se a força for repulsiva e $f < 0$ se a força for atrativa.

f é uma função da distância dos dois pontos: $f = f(r_1 + r_2)$ onde r_1 e r_2 representam as distâncias dos pontos ao centro de massa. Logo,

$$f(r_1 + r_2)\hat{r}_2 = m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}$$

Sendo r_1 e r_2 as distâncias ao centro de massa, temos que:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{m_2}{m_1} \implies (r_1 + r_2) = r_2 \cdot \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1}\right) = r_2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = Kr_2$$

onde $K = \left(1 + \dfrac{m_2}{m_1}\right)$.

Como $f = f(r_1 + r_2) = f(Kr_2)$, então

$$f(Kr_2)\hat{r}_2 = m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}$$

Observação.
Quando $m_1 \gg m_2 \implies K \to 1$ o centro de massa coincidirá com a posição da massa maior (como no caso da Terra).

A equação $f(Kr_2)\hat{r}_2 = m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}$ tem a estrutura da equação do movimento do ponto livre movendo-se sob a ação de uma força central. O problema de dois corpos reduz-se ao problema de um corpo sob a ação de uma força que aponta para um ponto fixo. Portanto, é conveniente reformular a equação com respeito ao vetor $\vec{R}$, que é a distância de p_2 com relação a p_1. Note que o versor $\hat{R}$ é igual ao versor $\hat{r}_2$, porque apontam na mesma direção e sentido, além de possuírem mesmo módulo. Também, $|R| = r_1 + r_2$ e então

$$\vec{R} = R\hat{R} = (r_1 + r_2)\hat{r}_2 = Kr_2\hat{r}_2 = K\vec{r}_2$$

Reformulando a equação $f(Kr_2)\hat{r}_2 = m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}$, temos

$$f(R)\hat{R} = m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = m_2 \cdot \frac{K}{K} \cdot \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{m_2}{K} \frac{d^2K\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{m_2}{K} \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

$$\implies f(R)\hat{R} = m_2' \cdot \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

onde $m_2' = \dfrac{m_2}{K} = \dfrac{m_2}{\left(1+\dfrac{m_2}{m_1}\right)} = \dfrac{m_2 m_1}{m_1+m_2} = \mu$ e chamamos μ de massa reduzida.

A equação

$$f(R)\hat{R} = \mu \frac{d^2\vec{R}}{dt^2}$$

significa que dados dois pontos materiais que movem-se somente sob o efeito das forças de interação entre si, o movimento de um (p_1) com respeito ao outro (p_2) pode ser tratado como se o segundo estivesse parado, associando ao primeiro uma massa reduzida $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$.

Sistemas com Massa Variável.

Quando um sistema tem massa constante, vale que $\vec{F}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_c$ então podemos determinar a aceleração do centro de massa, posto que conhecemos as forças externas. Porém, quando M não é constante temos que trabalhar com

$$\vec{F}^e = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Consideremos um foguete que tem massa $M(t)$, ou seja, a massa depende do tempo, pois o combustível queimando diminui a massa total.

11 Revisão de Momento Linear e Energia Cinética de um Sistema

Pela segunda lei, sabemos que:

$$\vec{F}^{(e)} + \vec{F}^{(i)} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Considerando um sistema de n-partículas

$$\vec{P}_{sist} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i$$

Definimos o centro de massa de um sistema de partículas:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

que, no caso do sistema ter massa constante,

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}$$

Portanto, podemos escrever (caso M constante)

$$\frac{d\vec{P}_{sist}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM}$$

Desde que $\sum \vec{F}^{(i)} = 0$, a segunda lei é da forma

$$\frac{d\vec{P}_{sist}}{dt} = \sum_i \vec{f}_i^{(e)} = \vec{F}^{(e)}$$

Conforme o terceiro princípio, se a soma das forças externas for nula, temos

$$\sum \vec{f}^{(e)} = 0 \implies \frac{d\vec{P}_{sist}}{dt} = 0 \implies \vec{P}_{sist} = M\vec{v}_{CM} = constante$$

que é o princípio da conservação do momento linear: se a soma das forças externas atuando sobre um sistema é zero, o momento linear total do sistema fica constante.

Observações.

A conservação do momento é uma das mais importantes da física e tem uma aplicabilidade mais ampla do que a conservação da energia, pois as forças internas do sistema podem não ser conservativas.

Lembramos que a conservação de energia mecânica $E = U + K = constante$ vale em presença apenas de forças conservativas. As forças internas não conservativas podem mudar o balanço de energia, mas não afetam o momento linear total do sistema.

Além disso, a conservação do momento é uma lei vetorial, então vale componente por componente. Caso a soma das forças externas seja nula em apenas uma componente, o momento linear do sistema é conservado nessa componente apesar de poder não ser nas outras. Na resolução de problemas, é fundamental verificar se a $\sum f^{ext} = 0$; somente depois podemos aplicar a conservação do momento linear.

Já sabemos que se a soma das forças externas é nula, o momento total do sistema se conserva. O que acontece no caso da energia?

Teorema da Energia Cinética de um Sistema

A energia cinética de um sistema de partículas pode ser escrita como a soma de dois termos: (1) a energia cinética associada com o movimento do centro de massa $\frac{1}{2}Mv_{CM}^2$, onde M é a massa total do sistema, e (2) a energia cinética associada com o movimento das partículas do sistema com respeito ao centro de massa $\sum_i \frac{1}{2}m_1 u_i^2$, onde $\vec{u}_i$ é a velocidade da partícula i com respeito ao CM.

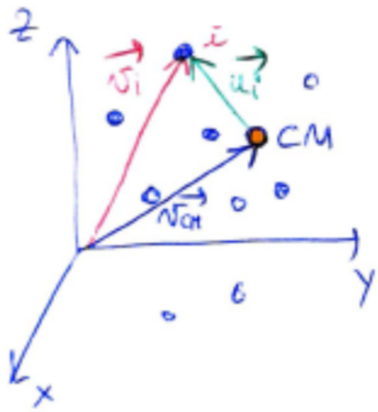
$$K = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + K_{rel}$$

Demonstração. A energia cinética do sistema K é a soma das energias cinéticas das partículas:

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2}m_i(\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i)$$

onde usamos que $v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i$, propriedade que vem do produto escalar.

A velocidade de uma partícula i pode ser descrita como a soma da velocidade do centro de massa $\vec{v}_{CM}$ e a velocidade daquela partícula com respeito ao centro de massa, que chamamos de $\vec{u}_i$; observe o diagrama abaixo.



Isto é,

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{CM} + \vec{u}_i$$

Substituindo em K:

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_1 (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_{CM} + \vec{u}_i) \cdot (\vec{v}_{CM} + \vec{u}_i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_{CM}^2 + u_i^2 + 2\vec{v}_{CM} \cdot \vec{u}_i)$$

Separando os três termos,

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i u_i^2 + \vec{v}_{CM} \cdot \sum_i m_i \vec{u}_i$$

Observe que o termo $\sum_i m_i \vec{u}_i = M\vec{u}_{CM}$ onde $\vec{u}_{CM}$ seria a velocidade do centro de massa relativa ao mesmo centro de massa, então será zero (um movimento relativo com respeito a si mesmo é nulo). Dessa forma,

$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{CM}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i u_i^2 = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + K_{rel}$$

Observação.

Se um sistema é isolado (soma das forças externas = 0) então $\vec{v}_{CM}$ fica constante e o que pode mudar é a energia cinética relativa K_{rel}.