

# 光滑粒子流体动力学流体仿真技术综述<sup>\*</sup>

刘树森<sup>1,3</sup>, 何小伟<sup>2</sup>, 王文成<sup>1</sup>, 吴恩华<sup>1,4</sup>



<sup>1</sup>(计算机科学国家重点实验室(中国科学院软件研究所),北京100190)

<sup>2</sup>(中国科学院软件研究所人机交互技术与智能信息处理实验室,北京100190)

<sup>3</sup>(中国科学院大学,北京100049)

<sup>4</sup>(澳门大学,澳门999078)

通信作者: 何小伟, E-mail: [xiaowei@iscas.ac.cn](mailto:xiaowei@iscas.ac.cn); 王文成, E-mail: [whn@ios.ac.cn](mailto:whn@ios.ac.cn)

**摘要:** 光滑粒子流体动力学 (smoothed particle hydrodynamics, SPH) 是实现流体仿真的主要技术之一。随着生产实践中流体仿真应用需求的增加, 近些年涌现了许多相关研究成果, 改善了流体不可压缩性、粘性、表面张力等物理特性模拟的视觉真实性、效率与稳定性。同时, 一些工作探讨了复杂场景的高质量模拟, 以及多场景、多材料的统一仿真框架, 增强了 SPH 流体仿真技术的应用效能。从以上几个方面对 SPH 流体仿真技术进行归纳、总结和讨论, 并对其未来发展进行了展望。

**关键词:** 计算机图形学; 计算物理; 光滑粒子流体动力学

**中图法分类号:** TP391

中文引用格式: 刘树森, 何小伟, 王文成, 吴恩华. 光滑粒子流体动力学流体仿真技术综述. 软件学报, 2024, 35(1): 481–512. <http://www.jos.org.cn/1000-9825/6777.htm>

英文引用格式: Liu SS, He XW, Wang WC, Wu EH. Survey on Fluid Simulation Using Smoothed Particle Hydrodynamics. Ruan Jian Xue Bao/Journal of Software, 2024, 35(1): 481–512 (in Chinese). <http://www.jos.org.cn/1000-9825/6777.htm>

## Survey on Fluid Simulation Using Smoothed Particle Hydrodynamics

LIU Shu-Sen<sup>1,3</sup>, HE Xiao-Wei<sup>2</sup>, WANG Wen-Cheng<sup>1</sup>, WU En-Hua<sup>1,4</sup>

<sup>1</sup>(State Key Laboratory of Computer Science (Institute of Software, Chinese Academy of Sciences), Beijing 100190, China)

<sup>2</sup>(Lab of Human-computer Interaction, Institute of Software, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

<sup>3</sup>(University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

<sup>4</sup>(University of Macau, Macao 999078, China)

**Abstract:** Smoothed particle hydrodynamics (SPH) is one key technology for fluid simulation. With the growing demand for applications of SPH fluid simulation technology in production practices, many relevant studies have emerged in recent years, which improve the visual authenticity, efficiency, and stability simulated by physical properties including fluid incompressibility, viscosity, and surface tension. Additionally, some researchers focus on high-quality simulation in complex scenarios and a unified simulation framework with multiple scenarios and materials, thereby enhancing the application efficiency of SPH fluid simulation technology. This study discusses and summarizes related research on SPH fluid simulation technology from the above aspects, and proposes a prospect for the technology.

**Key words:** computer graphics; computational physics; smoothed particle hydrodynamics (SPH)

流体是现实世界中很常见的一类物质。如何在计算机上快速、逼真地模拟流体的运动, 也一直是计算物理和计算机图形学 (computer graphic, CG) 的重点研究内容之一。随着虚拟现实、数字孪生、元宇宙等在实践应用中的

\* 基金项目: 国家重点研发计划青年科学家项目(2021YFB1715800); 国家自然科学基金(61872345, 62072446); 中国科学院青年创新促进会(19080102)

收稿时间: 2022-05-04; 修改时间: 2022-06-20; 采用时间: 2022-08-01; jos 在线出版时间: 2022-12-30

CNKI 网络首发时间: 2023-04-21

发展,流体的数值仿真技术日益得到重视。目前有多种流体数值仿真方法,比如欧拉网格法<sup>[1-3]</sup>、拉格朗日粒子法<sup>[4-7]</sup>、粒子网格混合法<sup>[8-10]</sup>等。光滑粒子流体动力学法(smoothed particle hydrodynamics, SPH)属于一种拉格朗日粒子法,最早由 Lucy<sup>[11]</sup>, Gingold 等人<sup>[12]</sup>提出以用于模拟星际物质的运动等天文现象,后逐渐被拓展到计算流体力学领域中用于解决复杂的工程问题<sup>[13-17]</sup>。1996 年,Desbrun 等人将其引入到了 CG 领域<sup>[18]</sup>,用于生成游戏、影视动画、虚拟现实中的流体特效<sup>[19-28]</sup>。自此,SPH 法成为了 CG 领域的研究热点之一<sup>[29-31]</sup>。SPH 法相比于其他方法所具有的优势如下。

- 相比于欧拉网格法,SPH 很容易实现材料边界的准确划分。这不仅可以生动模拟流体复杂多变的运动细节<sup>[32]</sup>,也使得 SPH 法非常适于模拟不同材料之间的耦合<sup>[33-35]</sup>。
- 相比于欧拉网格法与粒子网格混合法,SPH 法的理论推演与编程实现较为简单直观,因此便于推广和使用<sup>[36,37]</sup>,也易于与其他方法结合作为改善其他模拟方法的技术手段<sup>[4,38-45]</sup>。
- SPH 法作为无网格拉格朗日方法,能够有效地保证材料的质量守恒特性,理论上不会发生类似于欧拉网格法中的质量丢失问题<sup>[36]</sup>,而且基于 SPH 法的流体的对流计算过程也不会引入类似于欧拉网格法与粒子网格混合法中的数值粘性<sup>[46]</sup>。
- 相比于其他方法,SPH 法是一种适用性很广的方法。它不仅可以模拟流体,也能够模拟弹塑性固体、沙子、雪、海绵、磁流体等材料<sup>[47-55]</sup>,以及模拟不同材料之间的耦合、热传导、相变、溶解扩散等过程<sup>[55-62]</sup>,因此使用 SPH 法易于构建多材料、多过程的统一物理仿真引擎。

尽管 SPH 法有以上优点,但它也存在着一些不足,妨碍了其应用推广。首先,SPH 法的效率仍然不够高,其计算所需时间和空间开销都比较大。其次,SPH 法存在多种类型的数值计算不稳定问题,比如:SPH 流体很难稳定地处于拉伸状态,即拉伸不稳定问题;因压强、速度等物理场及其微分的采样点重叠而导致的零能问题;SPH 的边界不具有克罗内克函数属性(Kronecker Delta property)等。这些问题都会引入误差和视觉伪影,降低了仿真的视觉真实性<sup>[37,63-69]</sup>。为此,图形学领域的学者开展了相关研究,取得了诸多成果。

为满足影视特效、数字孪生技术、虚拟现实、元宇宙等的应用需求,SPH 流体仿真技术正朝着“更快、更稳、更好看、更好用”的方向不断发展,近些年涌现了大量的研究成果。为此,本文调研了 217 篇相关文献报道(其中近 3 年发表的有 84 篇),从流体主要物理特性的仿真、数值稳定性、仿真效率、复杂场景模拟等几方面进行相关工作进行梳理、归纳和总结(如图 1 所示),指出其可能存在的问题,并展望了其发展愿景。本文的内容结构图如后文图 1 所示。

## 1 SPH 流体仿真的基本实现方法与讨论

在讨论 SPH 流体仿真技术研究之前,本节将对 SPH 流体的基础理论、基本实现方法、关键参数与条件、不同领域的研究特点等方面进行简要介绍。

### 1.1 基础理论

大多数流体的运动都可以通过 NS (navier stokes) 方程与不可压缩性条件来描述,其具体形式为:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla \cdot \nabla u + f \quad (1)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\rho \nabla \cdot u = 0 \quad (2)$$

其中,  $\rho$ 、 $u$ 、 $p$ 、 $\mu$ 、 $f$  分别为流体的密度场、速度场、压强场、粘性系数以及流体所受到的体积力<sup>[70]</sup>,本文符号含义见表 1。NS 方程(公式(1))本质为的动量守恒定律,其等式右端各项的物理含义分别为流体不可压缩性引起的压强作用、流体的粘性引起的剪切力作用,以及流体所受到的重力、离心力等体积力的作用。不可压缩性条件(公式(2))也被称为无散度条件,只要流体的速度场任意位置的速度散为零,流体密度就会保持恒定。

理论上只要求解出 NS 方程与无散度条件(公式(1)与公式(2)),就可以实现基本的流体数值模拟。然而,直接求解上述连续形式的微分方程是十分困难的,需要将上述方程中的物理场及其微分场离散化,使连续的微分方程

转化为代数方程组后才可以求解。SPH 法包含了一套简单、直观且有效的物理场离散化方法,使得其非常适于离散上述微分方程<sup>[71]</sup>: SPH 法将流体视为由大量离散、可自由运动的质点——SPH 粒子构成的系统(如后文图 2(a)所示),然后基于 SPH 核函数  $W(r, h)$  的插值计算方法可建立离散粒子与连续的物理场的对应关系(如后文图 2(b)所示),进而完成流体相关物理场的离散化。其中图 2(b)中的离散化公式中的核函数  $W(r, h)$  一般为高斯函数或具有类似特性的样条函数。

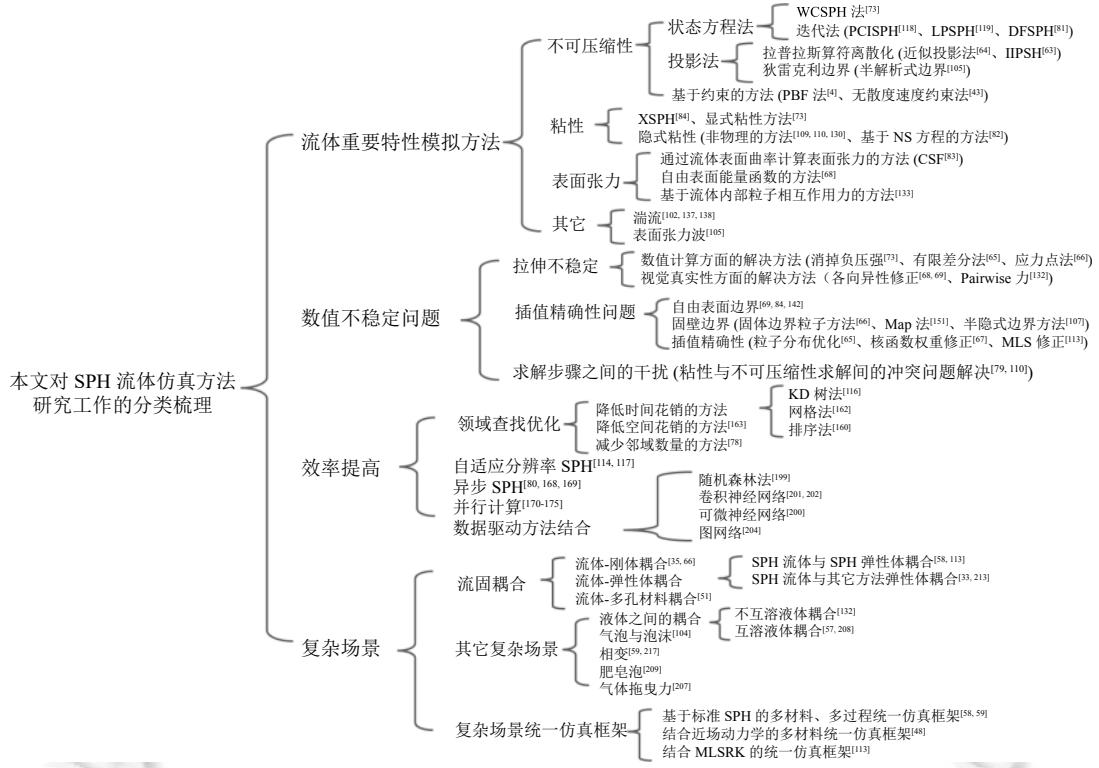


图 1 本文对 SPH 流体仿真方法研究工作的分类梳理

表 1 本文所用符号的含义

符号	含义	符号	含义	符号	含义
$i, j$	粒子编号	$p_i$	粒子 $i$ 的压强	$W$	SPH 核函数
$\mathbf{u}$	流体速度场	$\rho$	流体密度场	$F$	求解压强的函数
$\mathbf{u}_i^*, \mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_i^{n+0.5}$	粒子 $i$ 的临时速度	$\rho_i$	粒子 $i$ 的密度	$m_i$	粒子 $i$ 的质量
$\mathbf{u}_i^{n+1}$	粒子 $i$ 的最终速度	$\mathbf{x}_i^*$	粒子 $i$ 的临时位置	$\nabla$	梯度算子
$\mathbf{f}_i$	粒子所受的质量力	$\mathbf{x}_i^{n+1}$	粒子 $i$ 的最终位置	$\nabla \cdot$	散度算子
$\mathbf{f}$	质量力场	$A_i$	粒子 $i$ 位置的物理场取值	$\nabla \cdot \nabla$	拉普拉斯计算算子
$\Delta t$	时间步长	$h$	支持域/邻域半径		
$p$	流体压强场	$r_{ij}$	粒子 $i$ 与 $j$ 的距离		

## 1.2 基本流程

虽然 SPH 法可以实现 NS 方程(公式(1))与无散度条件约束(公式(2))的离散化,但离散化后的两方程依然很难求解,因此在 SPH 法的实现过程中会基于算子分裂法将 NS 方程(公式(1))拆分为若干个独立的求解步骤以简化求解过程,即:体积力求解、粘性求解、不可压缩性求解 3 步骤<sup>[72]</sup>,并以此为基础来构建流体仿真方法。本节

将以文献 [73] 为例, 简要介绍 SPH 流体仿真的基本实现流程。

在进行流体仿真时, 仿真任务一般会在时间上被划分为多个“切片”, 形成一组依据时间排布的帧序列。在每一帧计算中, SPH 算法都会以上一帧的计算结果作为输入, 并基于算子分裂法完整地求解一次 NS 方程(公式(1))中的速度并更新流体粒子的位置。一帧的计算完成后, 可根据需求将该帧的计算结果进行实时的渲染, 或存储下来待仿真任务完成后进行分析、处理或离线渲染。因此仿真任务中每一帧的计算流程都是基本相同的, 其计算流程一般为如下几个步骤(图 3)。

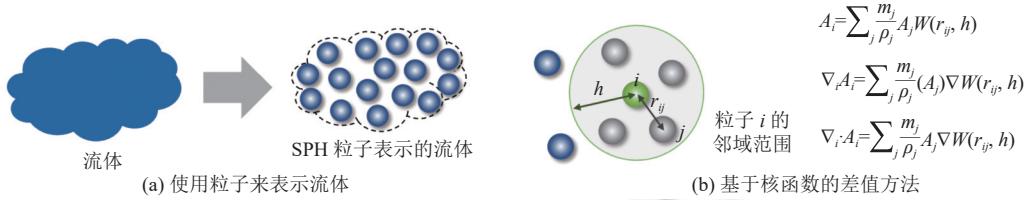


图 2 基于 SPH 核函数的物理场离散化方法

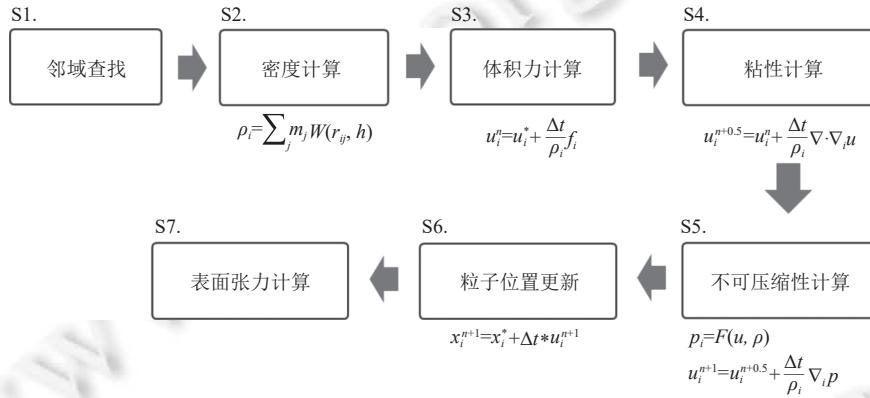


图 3 SPH 法实现流体模拟的基本流程

S1. 粒子邻域查找。由于粘性、不可压缩性等求解步骤需要使用每个粒子的邻域, 因此每一帧计算的第一步即是查找、存储每个粒子的邻域粒子以用于后续步骤的计算。邻域查找过程具有较高的时间和空间复杂度, 因此需要进行优化以保证仿真计算的效率(这一方面的研究讨论可参考第 4.1 节)。

S2. 粒子的质量密度计算。由于 SPH 法中的插值计算过程需要估计每个粒子所占据的体积(图 3.S2 下的公式), 因此在开始求解流体的 NS 方程(公式(1))之前, 要预先计算每个粒子的质量密度, 而质量密度可以通过粒子的邻域及粒子的质量计算获得。

S3. 体积力计算。体积力一般指重力、惯性力、电磁力等非接触力。这类力场与粒子的邻域无关, 因此可根据算子分裂后的 NS 方程(图 3.S3 下的公式)直接计算获得体积力作用下的粒子加速度。

S4. 粘性计算。NS 方程(公式(1))中的等式右端第 2 项:  $\mu \nabla \cdot \nabla u$ , 是流体的粘滞力项。使用算子分裂法后可单独计算粘性力作用下的粒子速度变化(图 3.S4 下的公式)。粘滞力项中包含有速度场的高阶微分, 其不同计算方法的性质也有较大差别, 有关这一方面的研究与讨论可参考本文第 2.2 节。

S5. 不可压缩性计算。NS 方程(公式(1))中的等式右端第 1 项( $-\nabla p$ )是流体的压强项, 使用算子分裂法后可单独计算该项作用下的粒子速度变化(图 3.S5 下的公式)以保证流体的不可压缩性。SPH 法中的压强计算方法较为多样, 有关这一部分的研究与讨论可参考本文第 2.1 节。

S6. 粒子位置更新。在获得了体积力、粘性、不可压缩性作用下的粒子速度之后, 需要根据粒子速度更新其位置(图 3.S6 下的公式)。

S7. 表面张力计算. NS 方程(公式(1))中并不包含流体的表面张力作用,但在某些场景中,该作用会对流体的形态和运动产生较大影响. 表面张力的研究与讨论可参考本文第 2.4 节.

SPH 法流体仿真的代码实现可参考公开的代码库,比如:

- PeriDyno<sup>[74]</sup>: 基于 GPU 编程、为智能 Agents 提供实时物理仿真训练环境的系统. 其中包含了较为完整的 SPH 流体仿真相关源码,刚体、颗粒流、弹塑性材料和不同材料耦合模拟的源码,以及实时渲染、前处理和后处理相关工具的源码等.
  - PhysIKA<sup>[75]</sup>: 基于 GPU 编程的多材料实时仿真的物理引擎. 其中包含了较为完整的 SPH 流体仿真相关源码.
  - SPlisHSPlasH<sup>[76]</sup>: 基于 CPU 的 SPH 流体算法代码库. 其中包含了大量重要的 SPH 流体仿真研究工作的源代码.
  - Cpp-fluid-particles<sup>[77]</sup>: 一个较为精简的、包含有 WCSPH、DFSPH、PBD 算法的代码库.
- 有关 SPH 法流体模拟方法的基础理论内容可参考文献 [36].

### 1.3 重要的参数与条件

SPH 法流体仿真过程需要使用到多种参数与条件,除与流体物理特性直接相关的参数之外(比如粘性系数、表面张力系数等),部分参数、条件对于 SPH 流体的仿真稳定性、效率等方面都会有较大的影响. 以下是此部分参数、条件的简要讨论.

- 支持域半径与粒子采样间距. 粒子的支持域半径  $h$  也是粒子的邻域空间半径,因此支持域半径与粒子采样间距的比值直接决定了大部分粒子的邻域粒子数量. 如果这一比值的取值过小,会使每个粒子的邻域粒子数量过少,进而导致在 SPH 插值计算过程引入严重的误差,致使仿真崩溃或计算不收敛<sup>[78]</sup>. 为保证仿真的稳定性,这一比值一般不能小于 2.5<sup>[79]</sup>.
- 核函数. SPH 法中理想的核函数应为高斯函数,但高斯函数作为核函数会引入过多的计算量;而形式过于简单的核函数,如帐篷函数 (triangular function) 等,也常会因为不够平滑而导致仿真崩溃<sup>[13]</sup>. 为了在保证仿真稳定性的同时尽可能降低时间开销,研究者通常选用 3 次样条函数作为 SPH 的核函数,即:

$$W(r, h) = \sigma \begin{cases} 6\left\{\left(\frac{r}{h}\right)^3 - \left(\frac{r}{h}\right)^2\right\} + 1, & \text{if } 0 < \frac{r}{h} \leq 0.5 \\ 2\left\{1 - \left(\frac{r}{h}\right)^3\right\}, & \text{if } 0.5 < \frac{r}{h} \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

其中,  $\sigma$  在二维空间中取值为  $40/(7\pi h^2)$ ; 三维空间中取值为  $8/(\pi h^3)$ . 这种 3 次样条函数形式的核函数较为平滑,已能够满足绝大多数仿真场景的需求<sup>[30]</sup>.

• 时间步长. 为了提高仿真的效率,时间步长应该在保证稳定性的前提下取较大值,以减少仿真任务中需要计算的帧数. 但时间步长的合适取值常会受多方面因素的影响,比如粒子的运动速度、粘性系数、重力加速度、粒子采样间距等<sup>[72,80]</sup>. 除此之外,不同的不可压缩性与粘性算法能够使用的时间步长上限也常有数量级上的差别,也因此时间步长取值范围是评价流体粘性、不可压缩性等算法优劣的重要参考<sup>[81,82]</sup>. 本文第 2.1 节,第 2.2 节,4.3 节中对于仿真的时间步长方面有更详细的讨论.

• 负压强. 如果能够精确求解流体 NS 方程与无散度条件,当流体处于拉伸状态,相应的粒子压强是有可能取负值的. 但由于 SPH 法存在严重的拉伸不稳定问题(本文第 3.1 节),负压强的存在会导致流体运动和形态出现严重的错误<sup>[65]</sup>. 因此在大多数基于 SPH 法的流体不可压缩性求解器中,需要将负压强置零或将粒子压强整体抬高等方法以避免负压强的出现<sup>[30,73,81]</sup>.

• 人工粘性. 由于 SPH 中存在拉伸不稳定问题,而且粒子的运动较为杂乱,为了使位置相近的粒子运动保持相对一致,在模拟低粘性流体时,SPH 法需要使用人工粘性(非物理的粘性)来提高仿真的稳定性<sup>[83,84]</sup>. 有关这一方面的研究工作与进一步讨论可参考本文第 2.2 节.

• 自由表面边界. 自由表面附近的流体粒子存在邻域缺失的问题,因此自由表面条件的缺失会使流体表面附

近位置粒子的密度估计不准确进而影响粒子的分布<sup>[84]</sup>, 同时可能会导致基于投影法的不可压缩性求解器(本文第2.2.2节)迭代不收敛<sup>[65]</sup>. 自由表面条件的施加方法较为多样, 具体可参考本文第2.1.2节.

- 固壁边界条件. 固壁边界条件是指流体与固体的边界. 为了避免流体粒子穿入到固体中, 最直接的方法是修正固体附近流体粒子的速度和位置, 但这种较为简化的方法会在固壁边界附近引入严重的粒子分布不均匀问题, 甚至会导致仿真崩溃. 目前有多种可避免这一问题的固壁边界条件的施加方式, 具体可参考本文第3.2.2节的内容.

#### 1.4 面向不同应用的 SPH 流体仿真方法

SPH 流体仿真技术在工程领域和 CG 领域中都有广泛的应用. 尽管在这两个领域的研究中 SPH 法的基础理论和方法都是相同的, 但需求的差异使得各自领域的研究出现了诸多差别. 本节将分别对工程领域与 CG 领域中 SPH 流体仿真方法研究的特点进行简要的讨论.

在船舶与海洋工程<sup>[85,86]</sup>、土木工程<sup>[87,88]</sup>、机械工程<sup>[89,90]</sup>、化学工程<sup>[91,92]</sup>、生物医学<sup>[93,94]</sup>等工程领域对于 SPH 流体仿真方法的模拟精度有较高的需求, 因此相关的研究主要集中在如何提高仿真的算法的精确性方面. 在这些领域中, 评价算法优劣的方式多是将具有解析解或明确结果的二维简单场景作为 benchmark (如静水、泊肃叶流动、库埃特流动、二维溃坝、旋转的流体方块等) 并与之对比<sup>[95–98]</sup>, 或直接与真实物理实验的影像作对比来验证算法的有效性<sup>[99–101]</sup>.

CG 领域中 SPH 流体仿真方法的具体应用场景包括影视特效、游戏、虚拟现实、数字孪生、元宇宙等, 这些场景对于 SPH 算法的稳定性、视觉真实性、计算效率、复杂现象和场景的应对能力方面更为关注<sup>[29,30]</sup>. 其中视觉真实性 (visual accuracy)<sup>[32]</sup> 可被视为流体仿真的视觉质量 (visual quality)<sup>[29,30]</sup>, 具体是指仿真结果不会被观察到明显违反常识的错误 (即视觉伪影), 或视觉上较为丰富、明显的流体运动细节或现象<sup>[102–106]</sup>. 其中 CG 领域中的稳定性主要指应对极端、苛刻的参数和条件的能力, 例如极大的时间步长<sup>[81]</sup>、极大或极小的粘性系数<sup>[82]</sup>、不均匀的粒子分布<sup>[68]</sup>、极其尖锐的流固边界<sup>[107]</sup>、过大的形变速率<sup>[65]</sup>等. 优秀的算法应该在设置了极端的参数或苛刻的条件时也能够稳定仿真且不会产生明显的视觉伪影<sup>[4,35]</sup>.

在 CG 领域的研究中, 对于能够提高精确性但在改善视觉真实性方面作用不大的技术是不被关注的<sup>[32,108]</sup>. 如果某种算法能够在保证一定视觉真实性的同时显著提高算法的效率和稳定性, 甚至算法本身都可以不具有物理意义<sup>[4,43,109,110]</sup>. 正是由于 CG 领域的 SPH 法研究中更多地考虑了算法整体的稳定性、效率、通用性等方面, 对于算法的精确性没有过于苛刻的要求, 这也就导致了 CG 领域中的方法模拟的结果常会与真实物理模型或实验结果有一定差别. 虽然也有研究者提供了用于测试不可压缩流体的 benchmark<sup>[111]</sup>, 但由于 CG 领域相关研究不追求绝对的计算精确性, 因此很少与这类 benchmark 作对比, 而更多对比测试都集中在计算效率, 以及复杂现象与效应、复杂场景、苛刻条件的应对能力等方面<sup>[112]</sup>. 其测试场景的空间维度不仅大都为三维, 且粒子规模常有数百万甚至数千万, 测试场景本身也较为复杂、极端<sup>[35,107,113,114]</sup>.

## 2 流体重要特性的模拟方法

由公式(1)与公式(2)可知, 流体的不可压缩性与粘性作用是流体的运动速度改变的直接原因; 在某些场景中, 表面张力作用也会对流体的运动产生较大影响<sup>[72]</sup>. 因此, 本节将对 SPH 流体模中对流体的运动影响最大的3种特性——不可压缩性、粘性、表面张力相关求解方法的研究进行讨论.

### 2.1 不可压缩性

参照上文中 NS 方程(公式(1))与不可压缩性条件(公式(2))的讨论, 不可压缩性作用会对流体的运动产生非常严重地影响<sup>[70,72]</sup>. 因此, 实现流体不可压缩性准确、稳定、快速地求解是实现 SPH 流体高质量仿真的前提. 由公式(2)可知, 流体不可压缩性是指流体密度不发生变化或流体速度场散度为零的特性. 当流体某位置上的密度偏离其静止密度或速度散度不为零时, 意味着流体的不可压缩性被破坏了. 为了保证流体的不可压缩性, 该位置上会产生一定的压强来抵抗不可压缩性的破坏, 并改变流体的速度以使流体保持不可压缩性(公式(1))<sup>[70]</sup>. 因此, 基于流体密度误差或散度误差求解流体压强, 是不可压缩性求解的核心步骤. 如何更快、更准确地求解压强, 是不可

压缩性研究中要解决的主要问题.

根据压强计算方法的不同, 可以将 SPH 法中的不可压缩性求解方法划分为两大类, 即: 状态方程法和投影法; 此外, 也有不计算压强、对粒子位置与速度直接施加约束来保证流体不可压缩性条件的非物理方法. 以下是这 3 种方法相关研究的讨论.

### 2.1.1 状态方程法

状态方程法是建立粒子局域密度、散度与其压强的对应函数关系, 即状态方程, 并使用状态方程计算压强的方法. 最简单的状态方程方法是假设流体可以被轻微的压缩, 并根据流体压缩量来计算压强的方法, 这一方法被称为 WCSPH (weakly compressible SPH)<sup>[73]</sup>. 由于该方法简单, 且计算的时间花销较小, 因此 2003 年 Müller 等人将 WCSPH 法引入到图形领域实现了流体的快速仿真<sup>[83]</sup>, 并被广泛使用<sup>[57-59,73,115-117]</sup>. 然而, WCSPH 法不能及时地消除密度误差, 稍大的时间步长就会导致仿真崩溃, 为了提高其稳定性, Solenthaler 等人则提出了预测-修正的迭代策略, 以迭代的方式逐次消除因压缩而产生的密度误差, 即 PCISPH (predictive-corrective incompressible SPH)<sup>[118]</sup>. PCISPH 法单帧的计算量更大, 但显著提高了不可压缩性求解的稳定性, 可以使用更大的时间步长用于仿真. 为了提高该算法的计算速度, He 等人改进了 PCISPH 法<sup>[119]</sup>, 使用积分形式的压强泊松方程作为求解压强的状态方程, 提高了迭代的收敛速度. 上述方法虽然能够有效地削弱流体的密度误差, 但都不能削弱流体速度的散度误差, 因此, Bao 等人在 WCSPH 法中引入了削弱速度散度误差的压强修正机制<sup>[120]</sup>, 显著提高了原 WCSPH 法的稳定性; Bender 等人基于预测-修正迭代策略, 提出了包含有两个独立迭代求解过程的 DFSPH (divergence-free SPH) 法<sup>[81]</sup>, 在削弱密度误差的同时保证速度无散度约束, 进而获得更均匀的粒子分布, 更优的迭代收敛性和稳定性. 之后, Wu 等人进一步提出了调整 DFSPH 求解顺序、引入超松弛迭代的策略, 提高了 DFSPH 法的求解速度<sup>[121]</sup>.

### 2.1.2 投影法

SPH 投影法是通过求解全域内粒子压强的泊松方程实现流体不可压缩性的一类方法. 这一类方法也常被称为 ISPH (incompressible SPH) 法. ISPH 法需要使用仿真域内全部流体粒子来构建压强泊松方程来求解压强, 该方程的基本形式为:

$$\nabla \cdot \frac{\Delta t}{\rho} \nabla p = \nabla \cdot u \quad (4)$$

其中的拉普拉斯算符离散后, 该方程可转化为一线性方程组, 设置好边界条件后即可进行压强求解.

SPH 法中关于压强的泊松方程拉普拉斯算符离散化较为多样. 其中使用得较为广泛的方法是具有优异稳定性的近似投影法<sup>[64]</sup>, 该方法借用 MAC 网格法<sup>[122]</sup>的微分离散化策略来实现拉普拉斯项的离散, 因此可有效削弱 SPH 法零能问题的影响进而显著提高稳定性; 为了获得更快的收敛速度, Ihmsen 等人也提出了使用二阶邻域粒子 (邻域粒子的邻域粒子) 的拉普拉斯算符精确离散化方法<sup>[63]</sup>, 即 IISPH 法 (implicit ISPH), 由于其求解过程中设置了流体的背景压强, 因此 IISPH 法具有比早期 ISPH 法<sup>[64]</sup>更好的收敛性和稳定性.

在投影法中, 边界条件对于泊松方程的求解会产生严重影响. 其中流体自由表面上的狄雷克利边界条件如果不能被正确施加, 会导致压强泊松方程的系数矩阵奇异, 使仿真崩溃. 为了保证压强泊松方程的可解性, 早期 SPH 投影法中往往会在流体自由表面附近布设气态虚粒子 (ghost-air particle)<sup>[85]</sup>; He 等人<sup>[68]</sup>与 Yang 等人<sup>[105]</sup>则首次在 CG 领域中引入并改进了 Nair 等人的半解析式 (semi-analytic) 表面边界处理方法<sup>[123]</sup>, 无需显式地构建气态虚粒子, 只需要修正压强泊松矩阵的对角元素与压强梯度算子, 即可获得较为精确的结果, 并显著提高了近似投影法<sup>[64]</sup>求解的收敛速度. Takahashi 等人改进了边界条件施加方法<sup>[124]</sup>, 使得固壁边界上的诺依曼 (Neumann) 边界条件也能够保证泊松方程的可解性.

### 2.1.3 基于约束的方法

除上述方法外, 也有不计算压强而直接修正粒子速度和位置来实现不可压缩性的方法. 为了提高计算速度, Macklin 等人将 SPH 法与模拟弹性体的 PBD (position based dynamic) 法结合, 提出了 PBF (position based fluid) 法<sup>[4]</sup>. 该方法将流体的密度不变视为约束项, 不计算压强场, 而是通过牛顿迭代法直接优化粒子位置以消除流体的密度误差. 该方法不是严格遵循物理原理的方法, 但稳定性很好, 而且其计算速度也优于经典标准的 SPH 法. 为了进一

步提高了 PBF 法的稳定性, Kang 等人将速度无散度条件也视为约束项, 采用与 PBF 法类似的策略直接削弱流体的散度误差<sup>[43]</sup>. Wang 等人也提出了将密度约束和无散度约束结合为一个约束条件来求解的方法<sup>[125]</sup>, 以保证仿真稳定性并提高计算效率.

#### 2.1.4 总结与讨论

SPH 法的不可压缩性求解算法种类繁多, 几种代表性的方法实现效果如图 4 所示, 实现方式和特点如图 5 和表 2 所示. 其中基于流体弱可压假设的 WCSPH 法<sup>[73]</sup>原理和实现非常简单, 但稳定性很差, 稍大的时间步长就会导致仿真崩溃, 因此仿真效率很低; 基于迭代策略的状态方程法<sup>[81,118,119]</sup>的稳定性要好很多, 而且收敛速度较快, 但计算精确性不够高; 相较之下, 投影法<sup>[63,65,124]</sup>更容易获得较高的精确性, 设置了合适的狄雷克利边界条件后也能够使用较大的时间步长用于仿真, 但仿真的效率一般不如基于迭代策略的状态方程法<sup>[63,118,124]</sup>; 而基于约束的方法, 例如 PBF 法<sup>[4]</sup>, 则具有极高的稳定性和仿真效率, 但由于其本质上是非物理的方法, 因此其视觉真实性不如其他方法.

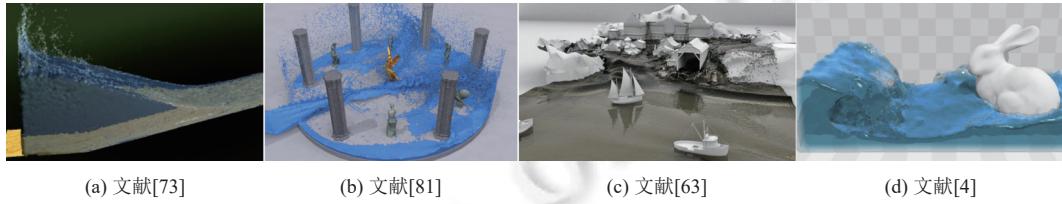


图 4 不可压缩性流体模拟

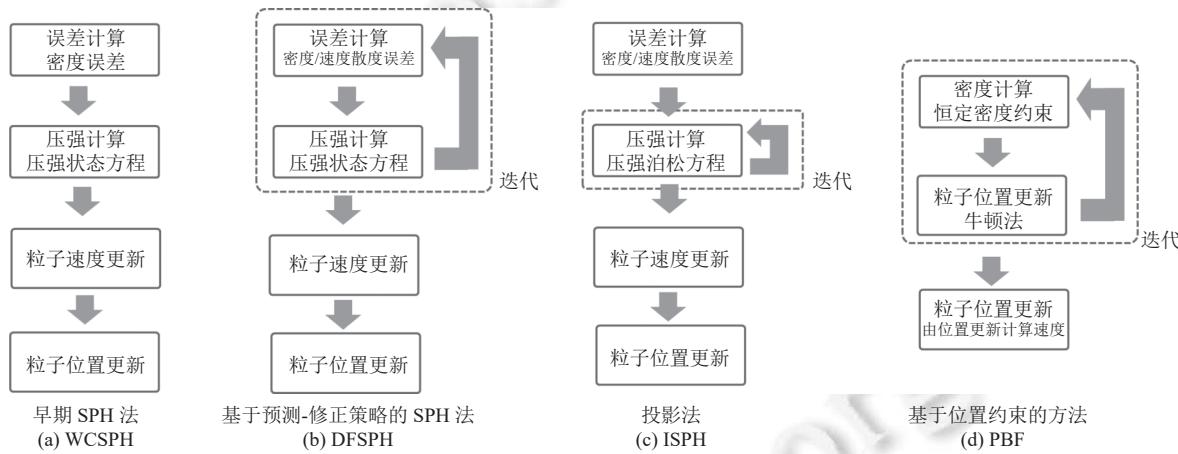


图 5 SPH 不可压缩性求解实现流程对比

表 2 SPH 不可压缩性算法的比较

方法	WCSPH <sup>[73]</sup>	基于迭代的状态方程法 <sup>[81]</sup>	投影法 <sup>[65]</sup>	基于约束的方法 <sup>[4]</sup>
稳定性	*	***	***	*****
视觉真实性(精确性)	***	****	*****	*
迭代收敛速度	—	***	***	*****
仿真效率	*	***	***	*****
必备条件	消去负压强	消去负压强	狄雷克利边界条件共轭梯度法等数值求解算法	消去粒子的吸附作用或引入人工斥力 <sup>[126]</sup>

注: \*越多越优

#### 2.2 粘性

参照前文中有关 NS 方程 (公式 (1)) 的讨论可知, 流体粘性也会对流体运动产生明显影响, 因此粘性求解方法

也是 SPH 流体仿真技术中的重要研究内容<sup>[70,72]</sup>。粘性是流体抵抗自身剪切形变的一种特性。当流体受到剪切力作用时会发生形变, 即  $(\nabla u + \nabla u^T)$ 。与此同时, 流体会产生抵抗自身持续形变的应力, 即剪切应力  $\tau = \mu(\nabla u + \nabla u^T)$ , 这一剪切应力即为流体粘性产生的原因<sup>[70]</sup>。忽略掉 NS 方程(公式(1))中压强项与体积力项, 并带入不可压缩性条件后, 流体粘性约束方程即为:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \nabla \cdot \tau = \mu \nabla \cdot \nabla u \quad (5)$$

求解出该方程中的速度场即可获得流体的粘性作用。

在使用 SPH 法模拟水等低粘性流体时, 粘性计算通常会被作为提高流体仿真稳定性的一种手段。SPH 法粒子相互碰撞很容易导致粒子震荡, 进而严重影响模拟的稳定性, 因此在 SPH 法刚被提出时, 就包含了一种非物理的粘性计算, 即: XSPH 法(图 6(a))<sup>[13,84]</sup>。XSPH 法可以局部平滑粒子速度进而有效地削弱粒子的震荡, 其实现方式简单且具有很好的稳定性, 因此 Schechter 等人<sup>[84]</sup>将 XSPH 方法<sup>[13]</sup>作为粘性求解器引入到图形学领域中并被广泛使用<sup>[4,117]</sup>。但 XSPH 方法不是基于物理的方法, 不能真实地模拟大粘性流体运动。CG 领域中基于物理的 SPH 粘性求解方法最早由 Becker 等人引入(图 6(b))<sup>[73]</sup>。这一类方法依然更多地作为提高 SPH 流体模拟稳定性的机制, 很少用来模拟大粘性流体材料。此类基于显式微分方程的粘性求解方法虽然能够较为真实地模拟大粘性流体, 但其稳定性较差。当时时间步长与粘性系数同时取较大值时, 这种求解方法会引起粒子的震荡导致仿真崩溃, 因此在使用中要尽可能缩短时间步长来保证稳定性<sup>[127,128]</sup>。

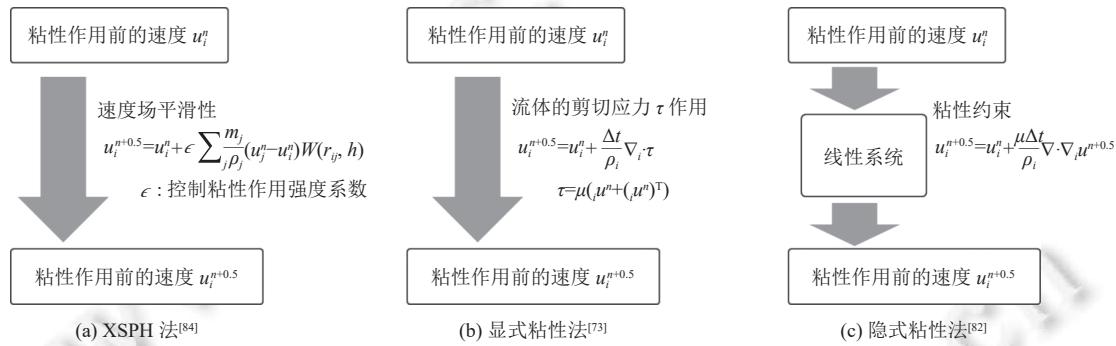


图 6 大粘性流体卷绳效应的模拟

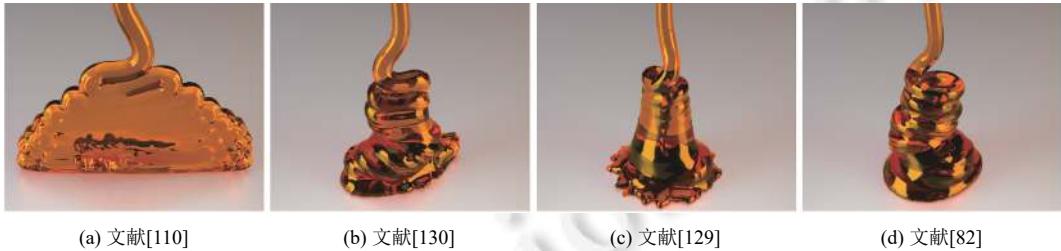


图 7 粘性的实现方法对比

提高大粘性流体模拟的稳定性, 一种可行的方法基于隐式微分方程构建粘性求解器, 通过求解线性系统的方式获取粘性作用下的粒子速度(图 6(c))。这一方法最早由 Takahashi 等人提出<sup>[129]</sup>, 该方法即使在粘性系数与时间步长同时取较大值时依然稳定。然而该方法在微分算子离散过程中使用了粒子二环邻域粒子, 导致仿真过程中很容易受到粒子邻域缺失问题的影响。隐式粘性方法可以显著加大粘性流体的仿真时间步长, 但这也会导致流体与不可压缩性之间的干扰问题变得更为严重, 因此 Peer 等人提出了一种直接削弱形变速率重建流体速度场的隐式粘性方法, 该方法在施加粘性作用的同时也能够削弱流体的速度散度误差, 提高不可压缩性求解的仿真质量<sup>[109,110]</sup>。但该方法在重建速度场的过程中会产生严重的数值耗散, 而且求解过程不具有物理意义。为了能够更好地保持流

体角动量进而提高仿真质量, Bender 等人提出了一种通过动态地调整“粘性系数”来获取预期的流体剪切速率, 进而实现粘性作用的方法<sup>[130]</sup>, 然而该方法同样不具有物理意义, 且计算较为耗时。各类隐式粘性求解方法都存在各自的问题, 因此 Weiler 等人提出了更先进的隐式粘性求积分方法<sup>[82]</sup>, 该方法使用了近似投影法<sup>[64]</sup>中拉普拉斯项的离散化方案, 并建立了粘性的隐式化方程。相比于其他隐式粘性方法, Weiler 等人的方法更简单, 能更好地保证角动量守恒特性, 且能够更真实地模拟大粘性流体的卷绳效应等现象(图 7)。此外, 该方法基于 NS 方程推导而来, 可通过粘性系数直接控制流体粘性作用强度。

总结, 现阶段 SPH 法是无法稳定模拟无粘流体的, 一般需要使用粘性计算来削弱流体高频运动来保证模拟的稳定性。由于 XSPH 法<sup>[84]</sup>引入的计算量很小, 因此很适于这种情况下的使用。而在模拟大粘性流体时, 目前 Weiler 等人的方法<sup>[82]</sup>明显优于其他方法, 已能够满足多数大粘性流体仿真的需求。表 3 是 SPH 粘性的 4 类代表性方法的比较。

表 3 SPH 粘性算法的比较

方法	XSPH <sup>[84]</sup>	显式粘性 <sup>[73]</sup>	非物理的隐式粘性 <sup>[109,110]</sup>	基于物理的隐式粘性 <sup>[82]</sup>
稳定性	***	*	*****	*****
视觉真实性(精确性)	*	***	***	*****
迭代收敛速度	—	—	*****	*****
仿真效率	****	**	***	***
其他缺点	无法模拟大粘性流体	不适宜模拟大粘性流体	粘性系数无物理意义	—

注: \*越多越优

### 2.3 表面张力

在人们的工作生活中, 流体的表面张力作用随处可见, 比如叶子上的露珠、滴落的水滴、高出水杯杯壁的液面等。在模拟小尺度的流体时, 表面张力的作用会对流体运动形态有非常大的影响, 此时就要对流体施加表面张力作用(图 8)。流体表面张力产生的原因是由于构成流体的分子间存在吸引力。处于流体内部的分子由于会受到来自各个方向的分子的吸引力, 因此处于受力平衡的状态; 而在流体表面附近的分子, 只能受到来自流体内部方向的分子吸引力, 导致流体表面附近分子会受到一个总是指向流体内部的合力, 即表面张力, 并迫使流体表面积趋于最小化。使用 SPH 法模拟流体表面张力作用方法可以划分为 3 类: 第 1 类是通过流体表面曲率计算表面张力的方法<sup>[131]</sup>, 第 2 类是计算自由表面能量函数的方法, 第 3 类是基于流体内部粒子相互作用力的方法。以下是两种方法研究工作的叙述与讨论, 3 类方法的对比见表 4。

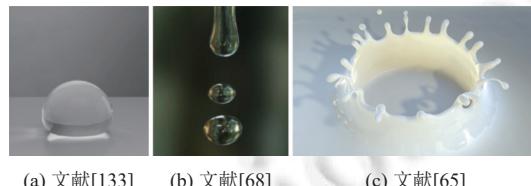


图 8 表面张力作用下的流体

表 4 SPH 表面张力算法的比较

方法	通过流体表面曲率计算表面张力的方法 <sup>[83]</sup>	计算自由表面能量函数的方法 <sup>[65]</sup>	基于流体内部粒子相互作用力 <sup>[132]</sup>
仿真效率	****	****	***
稳定性	**	*****	***
能够模拟的其他作用	无	无	非互溶液体混相、固体与液体间吸附作用等

注: \*越多越优

● 通过流体表面曲率计算表面张力的方法。流体的表面张力作用会使流体表面曲率趋向于最小，因此可以流体表面的曲率信息求出流体的表面张力作用<sup>[131]</sup>。这一类方法较为简单的实现方式是 CSF (continuum surface force) 法<sup>[83]</sup>，该方法通过计算流体自由表面的法向量来获取流体表面的曲率，进而求出表面张力作用。为了进一步提高表面张力作用的视觉真实性，Yang 等人提出了重构流体表面网格后，在表面网格上计算表面张力的方法<sup>[133,134]</sup>。

● 计算自由表面能量函数的方法。由于 CSF 法<sup>[83]</sup>求解过程中使用到了二阶邻域，这一方法在粒子邻域不充足时会非常不稳定，因此 He 等人引入了自由表面能量函数 (Helmholtz free energy functional)<sup>[65,68]</sup>来计算流体表面张力。该方法具有非常好的鲁棒性，能够有效应对粒子邻域缺失问题。

● 基于流体内部粒子相互作用力 (inter-particle interaction force) 的方法。该方法中，流体自由表面附近的粒子会受到流体内部粒子 Pairwise 力的牵拉，使流体整体表现出表面张力的作用。虽然该方法要使用更大的支持域半径，会引入更多的计算量，但其不仅可以实现流体表面张力的特性，并能够实现流体与其他材料间吸附作用的模拟。这类方法最早由 Becker 等人提出<sup>[73]</sup>，之后 Akinci 对这一方法进行了改进<sup>[135]</sup>，改进后的方法引入了新的函数作为粒子间 Pairwise 力计算的权重函数（图 9），当粒子的间距较近时，其间的 Pairwise 力表现为排斥力，可在一定程度上削弱粒子拉伸不稳定问题。Tao 等人<sup>[132]</sup>在 Akinci 等人工作<sup>[135]</sup>的基础上，进一步提出计算粒子分布的各项异来修正吸附力的计算方法提高了流体表面张力现象的仿真质量。

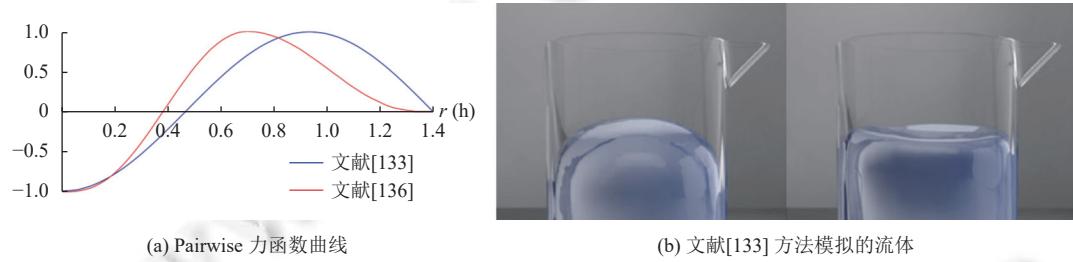


图 9 基于流体内部粒子相互作用力的表面张力

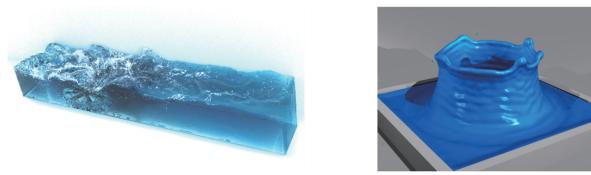
上述两类表面张力的计算方法相比较，通过流体表面曲率计算表面张力的方法<sup>[65,68]</sup>具有更高的计算效率；而基于流体内部粒子相互作用力的方法<sup>[132]</sup>能够模拟的现象和过程更加丰富，比如不互溶液体的混相、流体与固体之间的吸附作用等。表 4 是两种表面张力方法特点的比较。

## 2.4 其他

受限于 SPH 不可压缩性、表面张力等计算步骤的精确性问题，在某些特殊场景中，为了保证视觉真实性，有时需要增加额外的计算来生成更多的流体运动细节。比如：流体的湍流，水面的涟漪等，以下是这两方面研究的讨论。

● 湍流。在消除掉流体的速度散度误差后，理论上流体依然会保留有角动量<sup>[136]</sup>。但受限于 SPH 法计算精确性不够高的问题，流体的角动量并不能稳定地保持，造成流体湍流等运动细节丢失。为了使大场景快速运动的流体能够产生更丰富、生动的运动细节，Bender 等人提出了一种基于“微极流体模型”(micropolar fluid model)的方法<sup>[102]</sup>，该方法可将流体的部分线动量转化为角动量进而产生湍流（图 10）。在此项研究之后，Wang 等人发现“微极流体模型”方法会引起动能的正反馈，导致流体在运动过程产生过多不稳定的噪声，而更合理的方法应该是恢复流体原本就存在但被耗散掉的角动量。Wang 等人基于该策略，稳定地增加了流体运动细节<sup>[137,138]</sup>。

● 表面张力波。表面张力波是流体的一种常见现象，比如：石头落入水中时，水的表面产生的涟漪等。表面张力波这种高频运动很难使用 SPH 不可压缩性求解或表面张力求解获得，因此 Yang 等人提出了一种将高频密度变化转化为流体表面张力能量变化的方法，可逼真地生成流体表面张力波（图 10）<sup>[105]</sup>。



(a) 文献[102]方法得到的湍流      (b) 文献[105]模拟的表面张力波  
图 10 文献 [102] 方法得到的湍流与文献 [105] 模拟的表面张力波

### 3 数值不稳定问题的改善方法

SPH 法流体模拟方法中存在着较多的数值不稳定问题<sup>[85]</sup>, 其中部分数值不稳定问题会导致流体仿真过程出现严重的视觉伪影, 影响仿真的视觉真实性。这类不稳定问题具体包括: (1) 导致流体粒子发生团聚等严重视觉伪影的拉伸不稳定问题; (2) SPH 法的插值计算不易实现一阶精度的问题; (3) 不同求解步骤之间会发生相互干扰的问题。以下是这些不稳定问题应对方法的讨论。

#### 3.1 拉伸不稳定问题

拉伸不稳定问题是拉格朗日粒子法中普遍存在且难以处理的一类数值不稳定问题。当流体处于拉伸状态下, 这一问题会使粒子错误地团聚, 引入非常严重的视觉伪影(图 11(a)), 严重影响流体模拟的视觉真实性。而且 SPH 法中物理量及其微分量的计算都基于相同的粒子上进行, 而这会引入零能问题(图 11(b)), 使拉伸不稳定问题的影响进一步加剧<sup>[105]</sup>。

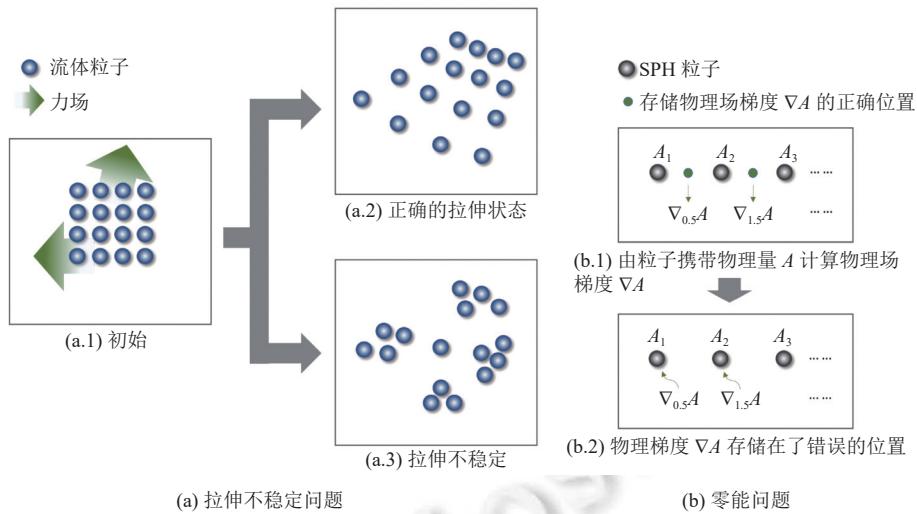


图 11 SPH 的拉伸不稳定问题与零能问题

拉伸不稳定问题产生的原因, 是由于在处于拉伸状态下的粒子其吸引力会随着距离的减小而错误地增大。目前在工程领域的研究中, 已有能够削弱 SPH 拉伸不稳定问题的方法, 比如采用物质坐标来进行各项插值计算的方法<sup>[85]</sup>。但这类方法耗时、不稳定, 无法在三维空间快速高效地模拟大形变材料, 因此并未引入到 CG 领域的研究中。

目前拉伸不稳定问题依然是 CG 领域 SPH 法的难点, 尚没有真正有效的解决措施。CG 领域中应对此类问题最常用的方法是将负压强截断或将压强取值整体抬高, 避免流场中出现压强取值为负的情况, 由于粒子间不存在吸引力, 也自然不会有拉伸不稳定问题。然而, 这类方法也同时破坏了流体很多运动细节特征, 导致 SPH 法流体无法稳定维持薄层、细丝等形态<sup>[73,85,139]</sup>, 造成 SPH 法在模拟低粘性流体时, 其液滴的溅射过于夸张、不真实。除此

之外,也有研究者借鉴了欧拉法中的有限差分法来离散化压强梯度算子<sup>[65]</sup>,或借鉴工程领域中的应力点(stress point)方法<sup>[66]</sup>引入错列粒子<sup>[140]</sup>来克服零能问题<sup>[122]</sup>,但这一类方法对于抑制拉伸不稳定问题的作用较为有限,正如Belytschko等人指出的:只要在拉格朗日粒子上使用欧拉视角的核函数,拉伸不稳定问题就不可能真正地解决<sup>[141]</sup>.

也有研究者尝试从提高仿真的视觉真实性方面而非数值计算层面去减小拉伸不稳定问题的影响,即:增强流体的薄层、细丝状态下模拟的稳定性. He等人提出基于粒子位置分布的各项异性计算实现流体薄层、细丝状态的检测,并在这些位置上使用较小的支持域进行计算,以使压强更多作用在薄层所在的平面上<sup>[66]</sup>; Yang等人提出基于Pairwise力及其粒子位置各向异性修正矩阵来增强薄层形态的稳定性<sup>[132]</sup>; Si等人则提出优化粒子分布、提高表面附近密度计算准确性以及修正背景压强的方式维持流体薄层和细流形态<sup>[69]</sup>.这些方法都只能在特定情况下恢复部分拉伸状态下流体运动细节,并不能够彻底弥补负压强缺失或拉伸不稳定问题带来的影响.

尽管现阶段已经有了多种应对拉伸不稳定的问题的方法<sup>[63,68,69,73,81,122,132]</sup>,但这些方法都只是规避了这一不稳定问题的影响,并未从根本上解决这一问题.因此这些方法都只能避免粒子发生错误的团聚这类严重的视觉伪影,但在模拟流体的拉伸、溅射、薄层形态时与真实的流体还有非常大的差别.

### 3.2 插值精确性问题

标准SPH法的插值计算精度较低,一般难以实现一阶精度,这对于流体模拟的视觉质量会有较大影响.这一问题的根本原因是SPH核函数的归一化条件(图12(a))很容易被破坏:当流体的粒子分布不均匀时,SPH核函数归一化条件不能够被满足(图12(c));另外由于SPH法在边界附近的物理场不具有克罗内克函数(Kronecker Delta)属性<sup>[37]</sup>,边界附近的粒子邻域缺失问题也会破坏这一条件(图12(b)).图形学领域中,针对这一类数值不稳定问题也有较多的研究,具体可划分为流体自由表面边界处理、固壁边界处理以及提高流体整体插值精性方法3方面.

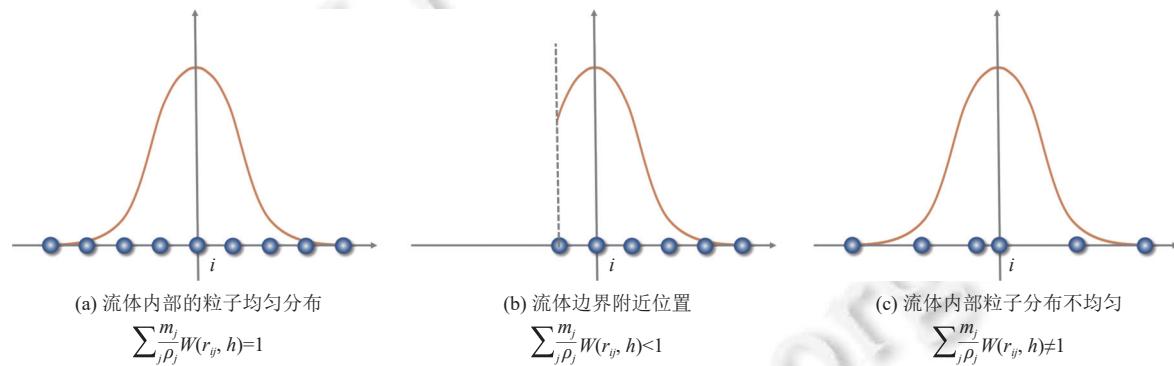


图12 SPH核函数归一化条件及其被破坏的两种情况

#### 3.2.1 自由表面处理方法

由于粒子邻域的缺失问题,会导致自由表面附近粒子密度计算不准确,进而影响仿真的视觉真实性.针对这一问题,Schechter提出了在流体表面附近均匀地布设气体虚粒子的方法来提高仿真质量<sup>[84]</sup>,Si等人提出根据流体表面粒子的邻域平均数量和内部粒子邻域平均数量之比修正流体密度计算<sup>[69]</sup>,以及使用水平集(level set)函数修正表面附近的粒子密度<sup>[142]</sup>.这些方法都能够在一定程度上削弱自由表面附近粒子邻域缺失问题对视觉质量造成的影响.

#### 3.2.2 固壁边界处理方法

固壁边界的处理方法相比自由表面边界更为复杂.固壁边界实为流体与固体的边界,在这一边界上不仅要解决域缺失的问题,而且还要在不引入严重计算误差的前提下避免流体穿入到固体中.目前固壁边界有3种实现方法(图13),以下是3种方法的讨论.

固壁边界的常规处理方法是边界粒子法.这一方法在固体域内均匀排布带有质量固体粒子<sup>[66,82,143-146]</sup>,可以有

效地避免邻域缺失问题, 提高插值计算精确性, 而且可以在一定条件下避免流体粒子穿入固体中。在投影法中, 固体边界粒子不仅要避免粒子邻域缺失问题, 还要用来施加泊松方程的诺依曼边界条件, 即认为固体边界粒子的压强与其相邻的流体粒子压强相同, 并在此条件下求解流体粒子的压强<sup>[112,124,147,148]</sup>。投影法中这一边界条件若设置的不合适则会引起粒子震荡严重影响仿真质量。

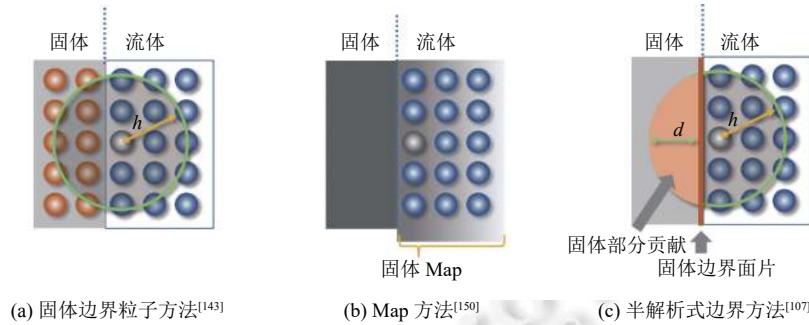


图 13 SPH 法中 3 种固壁边界的对比

离散的边界粒子在使用中会存在效率与精度之间取舍的问题, 更理想的固体边界应为连续形式。在边界粒子法中, 若边界粒子分辨率过低会影响计算精确性, 而分辨率过高也会导致过多的计算量和资源浪费。针对这一问题, 文献 [149–151] 提出了不使用边界粒子的固液边界方法, 通过预处理的方式将固体边界对于流体粒子的贡献值存储在一个空间图表中 (map)。在进行模拟时, 边界附近流体粒子会根据其与边界的相对位置来查找 map 中对应位置的修正值, 并通过插值计算方式修正对应物理量的计算, 在保证计算的精确性的同时, 也提高了固壁边界附近粒子计算的速度。

除上述两类方法外, 也有直接采用平面边界作为固壁边界的方法, 即半解析式固壁边界法。为了能够直接使用三角面片格式的物体模型作为流体仿真中的固壁边界, Fujisawa 等人提出了直接使用三角面片作为固体边界的方法<sup>[152]</sup>。该方法根据粒子邻域中固体三角面片的面积来修正 SPH 核计算; 为了使该方法能够应对复杂形态的固体边界, Chang 等人进一步改进了该方法 (图 14)<sup>[107]</sup>; Winchenbach 等人提出了直接使用有向距离场作为固体边界的方法<sup>[5]</sup>, 使其能够与自适应分辨率 SPH 法结合使用<sup>[114]</sup>。相比其他方法, 半解析式边界无需<sup>[5,107,152]</sup>进行预处理, 可使用常见面片形式的几何文件直接作为固体边界来进行模拟计算, 非常易于使用。而且这类方法在复杂、锋利形状的固体边界附近也能保证计算的精确性。

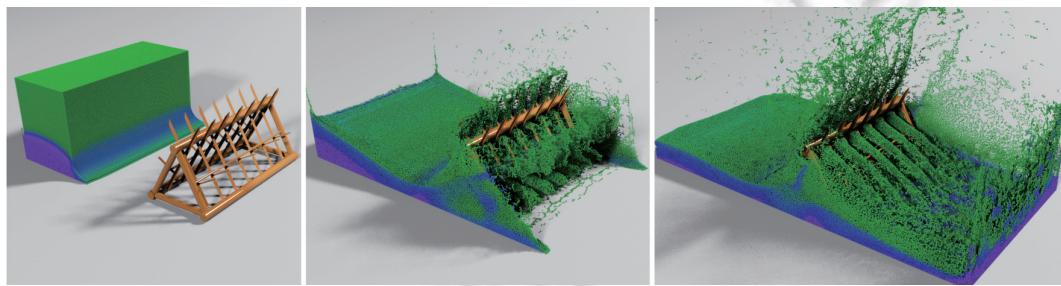


图 14 文献 [107] 中使用三角面片作为流固边界得到的模拟结果

总结。使用边界粒子的固壁边界方法<sup>[66,82,143–146]</sup>其原理和实现方法都较为简单, 但该方法的计算效率和易用性较差。而基于 Map 的方法<sup>[150,151]</sup>虽然计算效率更高, 且结果更精确, 不会在固壁边界附近产生严重的视觉伪影, 但该方法需要在仿真初始化阶段花费大量的时间用于计算 Map, 很不便于使用。相较之下, 半解析式固壁边界法<sup>[5,107,152]</sup>则不存在这些问题, 无需进行预算也能获得较高的计算效率和精确性, 但这类方法的编程实现过程较为繁琐。后文表 5 是 4 种固壁边界实现方法特点的比较。

表 5 SPH 流体固壁边界施加方法的比较

方法	边界粒子法 <sup>[66,82,143,144~146]</sup>	固体Map方法 <sup>[150,151]</sup>	半解析式固壁边界法 <sup>[5,107,152]</sup>
精确性(能否处理尖锐的固体边界)	***	*****	*****
内存开销	*	***	*****
预处理	***	*	*****
仿真效率	*	***	*****
程序实现难易度	*****	***	*

注: \*越多越优

### 3.2.3 提高流体整体插值精确性的方法

保证流体整体 SPH 核函数归一化条件方法目前主要有两种,一类是小幅度修正粒子位置,迫使粒子分布均匀的方法<sup>[65,153]</sup>;另一类是引入更先进的插值计算策略的方法,比如:通过构建隐式方程的方式来修正 SPH 核函数的权重,保证 SPH 核函数的归一化<sup>[67]</sup>,引入移动最小二乘法保证插值的精确性<sup>[113]</sup>等,两种策略都能够显著提高插值精确性,进而提高流体模拟的视觉质量。

### 3.3 求解步骤间的干扰

出于提高效率的考虑,SPH 流体模拟方法普遍基于算子分裂法来构建,即:将 NS 方程(公式(1))拆分成不可压缩性作用(压强作用)、粘性作用和质量力作用的 3 个独立微分方程,分阶段地求解、更新流体速度场。然而这一策略会使不可压缩性和粘性不能同时作用于流体,引起不可压缩性与粘性之间的相互干扰,在模拟大粘性流体时会引入严重的错误。粘性系数与时间步长的取值越大,这一数值问题会越严重。

为了提高大粘性流体仿真的视觉真实性,有研究者针对不可压缩性与粘性求解之间的干扰问题展开了研究。Peer 等人提出了通过重建速度场的方式,直接削弱剪切形变速率,进而实现流体粘性的求解<sup>[109,110]</sup>。由于该方法在重建速度场的过程中也同时削弱了速度散度误差,因此在施加粘性作用的同时也保证了不可压缩性。这一方法虽然能够有效避免粘性、不可压缩性间的冲突,但在重建速度场的过程中引入了严重的数值耗散,整体上反而降低了粘性流体的仿真质量。针对这一问题,Liu 等人则借鉴欧拉网格法中的 SIMPLE 算法<sup>[154]</sup>,首次在 SPH 法中实现了可收敛的粘性-不可压缩性迭代算法<sup>[79]</sup>。该方法严格基于 NS 方程(公式(1))和无散度条件(公式(2))推导得到压强求解器和粘性求解器,通过对两种求解器进行若干次整体迭代的方式(图 15),快速削弱粘性与不可压缩性间的干扰,进而提高粘性流体模拟的稳定性。如图 16 所示,该方法模拟的粘性流体具有更锋利、更丰富的表面细节以及更稳定的形态。上述两类方法特点的对比如表 6 所示。

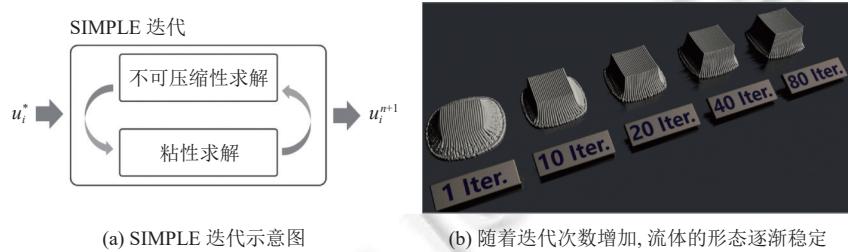
图 15 基于 SPH 的 SIMPLE 迭代算法图示<sup>[79]</sup>

图 16 文献 [79] 的部分结果

表 6 SPH 粘性-不可压缩性间冲突的解决方法

方法	重建速度场的方法 <sup>[109,110]</sup>	基于SPH的SIMPLE迭代算法 <sup>[79]</sup>
计算效率	*****	***
视觉真实性	***	*****
方法是否具有物理意义	否	是

注: \*越多越优

求解步骤之间的相互干扰问题在流体仿真中很常见。它既存在于同一种材料的不同求解步骤之间,也存在于不同材料之间的耦合模拟之间,比如:粘弹性流体中的粘性、弹性不可压缩性间的冲突,流固耦合场景中流体不可压缩性与固体的运动间的冲突等。这类问题在欧拉网格法中已有较多的研究成果<sup>[155-158]</sup>。从数值计算的角度考虑,解决这类问题的理想策略是建立包含多个过程的统一的方程组,但受限于 SPH 法粒子间邻域关系的不确定性,这类方案在 SPH 法中常难以实现。因此 SPH 法解决这类方法更推荐使用对不同求步骤进行整体迭代的策略<sup>[35,79]</sup>。

#### 4 仿真效率提高方法

某些应用场景,如游戏、虚拟现实、元宇宙等,需要流体模拟能够实现实时。因此如何提高 SPH 法流体模拟的效率,降低其计算时间和计算空间,也是 SPH 法研究的重点之一。虽然现阶段模拟大场景流体时 SPH 法尚不能达到实时,但相比于传统的 SPH 法,目前已有较多提高算法效率的技术手段,比如:更快、更省空间的邻域查找方法,自适应分辨率 SPH 法、异步 SPH 法、使用并行加速策略的方法以及与数据驱动方法融合的策略等。本节将对这方面方法和相关研究进行归纳和讨论。

##### 4.1 邻域查找算法的优化

由于 SPH 法中的各项插值计算步骤均会使用到各粒子的邻域粒子,因此每一个仿真步中均需要进行邻域粒子查找以用于后续的计算。但邻域粒子查找计算的时间和空间开销较高,使得这一计算过程成为了制约 SPH 法效率提高的瓶颈之一。因此提高邻域查找算法的效率是 SPH 算法优化方面的重要研究内容,这一方面的研究内容如下,相关方法的比较见表 7。

表 7 SPH 邻域查找计算的优化方法

方法	KD树法 <sup>[116]</sup>	均匀网格法 <sup>[159]</sup>	多层次数据结构 <sup>[160,161]</sup>	粒子索引排序 <sup>[162]</sup>	粒子索引压缩存储 <sup>[163]</sup>	动态邻域半径 <sup>[78]</sup>
邻域查找速度	***	****	****	*****	—	***
内存消耗	***	****	****	***	*****	****
能否与可变分辨率SPH法适配	是	否	—	—	—	—
能否使用GPU加速	否	是	—	—	是	—
整体仿真效率	***	****	****	*****	****	****

注: \*越多越优

- 降低邻域查找时间开销的方法。实现邻域粒子查找最直接的方法,是遍历所有问题域内粒子的空间位置来查找粒子的邻域,但这种策略的复杂度很高。为了加快邻居查找的速度,一种有效的方法是将粒子按照空间位置进行分组,由此进行邻域查找时无需遍历全部粒子,只需查找若干分组中的粒子即可。目前常用的粒子分组策略有两类,即 K-D 树法和均匀网格法。其中 K-D 树法主要应用在可变分辨率 SPH 法中,但该方法较难使用 GPU 并行加速<sup>[116]</sup>。均匀网格法是在仿真域内划分出均匀的网格,并根据粒子所在位置将其划分到对应网格中。这种分组策略易于实现,适于进行 GPU 多线程加速<sup>[159]</sup>。此外,如果能够根据空间位置对粒子在内存中的存储位置进行排序,邻域查找的计算速度可以进一步提高。其原因是这种存储方法可显著提高邻域计算的缓存命中率<sup>[162]</sup>。

- 降低邻域查找空间开销的方法。均匀网格法中大部分的网格仅包含有少量粒子或不包含粒子,这些网格会造成存储空间的浪费,目前这一问题的应对方法是建立包含有哈希表和网格的二级或多级数据结构<sup>[160,161,164]</sup>来取

代原均匀网格, 以降低算法的空间开销。此外, 为了减小粒子邻域列表的内存消耗, 可以使用偏移量代替粒子索引的方式对邻域列表进行压缩存储<sup>[163]</sup>。

- 减少邻域粒子数量的方法。为了避免邻域粒子数量不足引入的错误, 常规的方法是增大粒子邻域半径确保每个粒子的邻域粒子数量足够多, 但这也会导致流体内部的粒子邻域数量过多引入多余的计算。针对这一问题, Winchenbach 等人提出了一种动态调整粒子邻域半径范围来获得固定数量的邻域粒子的方法<sup>[78]</sup>, 该方法可以在保证模拟稳定性的同时, 尽可能减少总体的邻域粒子数量, 进而提高计算效率。

## 4.2 自适应分辨率 SPH 法

自适应分辨率 SPH 法是在流体不同区域内使用不同尺寸粒子的方法。较高的粒子分辨率可以改善流体模拟的视觉质量, 但也会显著增加计算量。如果能够在流体表面附近位置使用高分辨率的粒子来保证流体模拟的视觉质量, 而在其他位置使用低分辨率粒子来减轻计算的负担, 则理论上可以在保证一定视觉真实性的同时显著降低仿真场景中的粒子数量, 进而提高模拟计算的效率。这种自适应分辨率方法最早由 Adams 等人提出<sup>[116]</sup>, 然而该方法中的粒子分裂、聚合很容易引起严重的错误导致仿真崩溃, 针对这一问题, Solenthaler 等人提出了一种双分辨率 SPH 方法。该方法根据流体各位置与其表面边界的距离, 将流体划分为高分辨率区域和低分辨率区域, 并使用了两种分辨率的粒子进行模拟<sup>[165]</sup>。该方法的粒子分裂、聚合方式相对简单, 且高、低分辨率交界区域的物理量计算方法引入的错误更小。然而该方法中的粒子只有两种相差不能过大的尺寸, 因此对于流体计算效率的提升的幅度较为有限。为了进一步提高效率, Orthmann 等人提出了多分辨率自适应 SPH 方案, 同时引入了不同尺寸粒子物理量插值计算的平滑化方法, 有效提高了该方法的稳定性和适用性<sup>[166]</sup>。Winchenbach 等人改进了自适应分辨率的方法, 使粒子尺寸可以连续的变化, 更大的粒子尺寸范围以及更精细的粒子尺寸划分使得仿真效率得到进一步的提高<sup>[117]</sup>。为了有效削弱因粒子分裂过程引入的错误, Winchenbach 等人进一步提出了带约束的密度误差优化模型, 通过牛顿法迭代修正分裂后粒子的质量、位置, 有效提高了自适应分辨率 SPH 法的稳定性(图 17)<sup>[114]</sup>。

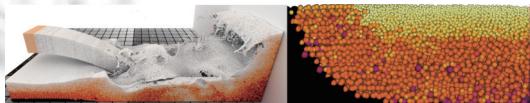


图 17 自适应分辨率 SPH 法<sup>[114]</sup>

总结。尽管自适应分辨率 SPH 法能够大幅度降低流体模拟的时间和空间开销, 但这一方法很难在 GPU 上使用, 而且粒子分裂、聚合过程中不可避免地会引入误差, 突然增、删的粒子会对模拟的稳定性造成严重影响, 因此该方法有待于进一步的完善。

## 4.3 异步 SPH 法

异步 SPH 法是在同一个场景中同时使用多个不同时间步长进行仿真的方法。模拟流体运动时, 使用大的时间步长可以减小计算量, 进而提高模拟计算的效率。但受制于 CFL (Courant-Friedrichs-Lowy) 条件<sup>[18]</sup>, 仿真计算的时间步长不能取过大值, 否则会导致仿真崩溃。由于每个 SPH 粒子的运动速度、受力情况都不相同, 因此各粒子可使用的时间步长上限也并不相同。为了保证稳定性, 模拟计算一般会取 CFL 条件所允许的各粒子时间步长中的最小值作为仿真整体的时间步长, 并依该时间步长进行各项物理量计算和渲染输出, 因此流体的仿真效率常会被个别粒子拖累。针对这一问题, Goswami 等人提出了一种多层次的时间积分策略<sup>[167]</sup>, 该策略将流体划分为多个区域, 每个区域都使用不同的时间步长, 不同区域的粒子之间通过插值的方式实现同一时间标定下的相互作用。由于每个粒子的时间步长上限只能在局部产生作用, 因此可提高整体的模拟效率。在此之后, Reinhardt 等人进一步提出了一种完全异步的 SPH 仿真策略<sup>[80]</sup>, 这一策略中的每个粒子都可使用自己的时间步长进行各项计算。如图 18 所示, 该方法通过线性插值的方式在时间上回溯过去或预测未来各粒子的位置、速度, 进而进行实现各粒子的非同步计算。由于计算不再被个别粒子拖累, 因此该方法可进一步降低仿真任务的整体计算量。在上述异步 SPH 法的实现中, 流体的不可压缩性求解均基于 WCSPH 法实现, 为了进一步提高仿真时间步长上限, Goswami 等人<sup>[168]</sup>提出了将异步 SPH 法与 Solenthaler 等人的 PCISPH<sup>[118]</sup>结合的策略。为了能够增强高速运动流体的仿真质量, 同时不

引入过多的计算量, Gao 等人则提出引入 K-means 聚类的方法将具有高频运动特征的流体粒子识别出来<sup>[169]</sup>, 然后再结合异步 SPH 仿真策略来实现流体的快速仿真.

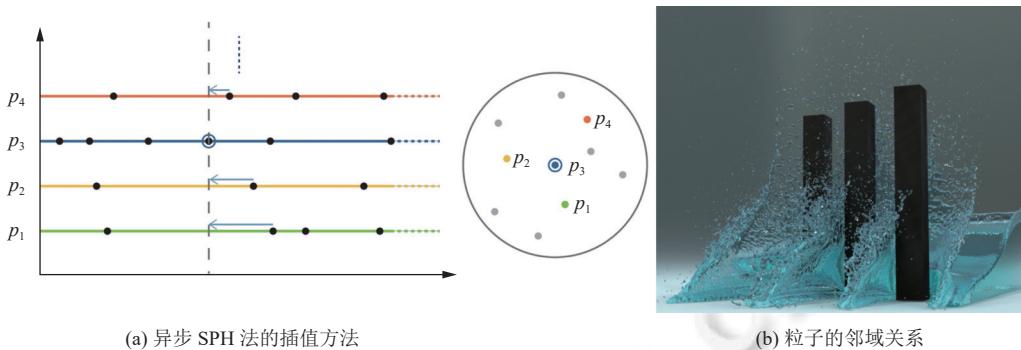


图 18 异步 SPH 法<sup>[80]</sup>

总结. 目前, 异步 SPH 法在使用中还存在着诸多局限性: 首先, 该方法在回溯或的预测粒子位置和速度时, 会不可避免会引入误差和数值耗散; 此外, 该方法也难以使用 GPU 进行加速.

#### 4.4 并行计算

SPH 流体模拟过程若能够使用并行计算策略, 则可以显著降低模拟的时间开销. 目前 SPH 流体模拟的并行计算方法主要有两类, 一类是使用分布式计算的方法<sup>[170]</sup>, 另一类是基于 GPU 的方法. 相比之下, 使用 GPU 并行加速策略可以在 PC 上甚至移动端设备上大幅度降低流体模拟的时间开销, 而且随着 GPU 硬件的逐渐普及与其配套开发套件的日趋完善, 并行化 SPH 算法的开发与推广的难度也相应地降低. 如何利用 GPU 优势来优化 SPH 流体模拟技术实现方式, 也自然成为了 CG 界的潮流之一<sup>[159,161,162,166,171–175]</sup>. 然而受限于 GPU 硬件特性, 基于 GPU 并行化的 SPH 流体算法开发也存在着一些问题: 首先, GPU 的内存(显存)一般较小且很难进行扩展, 这会对模拟场景中的粒子数量规模有一定限制; 其次, 频繁的 GPU 内存重分配以及与 CPU 之间的数据传输会显著地增加计算时间; 此外, 很多方法很难在 GPU 上使用, 比如自适应分辨率 SPH 法、异步 SPH 法等.

#### 4.5 与数据驱动方法的结合

数据驱动方法特别是深度学习方法近些年迅猛发展的同时, 也在广泛、深入地影响着物理仿真领域的发展. 目前已经有相当多的研究使用了机器学习算法来协助物理建模<sup>[176]</sup>, 快速求解微分方程<sup>[177–181]</sup>, 改善刚体、流体、弹性材料及其耦合模拟计算效率或视觉质量<sup>[182–189]</sup>. 流体仿真计算的本质是求解一系列偏微分方程或施加约束的过程, 这些计算过程较为繁琐、耗时. 如果能够使用数据驱动算法替代部分流体仿真计算, 则理论上可以显著提高流体仿真的计算效率<sup>[184]</sup>. 因此, 有较多的研究工作集中在这一方向上.

欧拉网格法与数据驱动结合的策略当前有较多研究报道<sup>[180,185,190–198]</sup>. 但由于 SPH 法的拉格朗日视角、简单高效的仿真策略以及其类似于卷积的插值计算方法等特点, 使得 SPH 法与数据驱动方法的结合方式与欧拉法有非常大的区别, 以下是相关研究的讨论.

- 随机森林: Ladický 等人发现 SPH 法中粒子运动可被视为回归问题, 因此他们提出了使用随机森林来预测 SPH 流体粒子运动的方法(图 19(e)). 该方法中包含了一个表示 SPH 流体粒子所受到的压强、粘性力、表面张力以及不可压缩性约束特征向量, 基于此向量可学习、预测粒子的速度和位置变化, 进而在大时间步长下模拟流体粒子的运动, 相比经典的 SPH 法其计算效率显著提高<sup>[199]</sup>.

- 可微神经网络: Schenck 等人发现 SPH 法流体仿真过程可以实现与深度神经网络直接对应, 其网络参数甚至可直接对应于 SPH 流体粒子的粘性、吸附力等参数, 因此可以构建出完全可微的用于模拟流体的深度神经网络模型(图 19(a))<sup>[200]</sup>. 该方法不仅能够用于模拟与 PBF 法类似的流体运动和流体-刚体的耦合, 而且可以从数据中直接识别出流体的物理参数.

- 卷积神经网络: 与使用固定空间网格的欧拉法不同, SPH 法中的粒子是拉格朗日视角下可自由运动的粒子,

因此不适于直接套用卷积神经网络方法。但 SPH 法中的插值计算与卷积计算十分相似, 因此 Ummenhofer 等人则提出将 SPH 法与卷积神经网络相结合, 构建了一种新的基于卷积神经网络的可为流体模拟器 (图 19(b))<sup>[201]</sup>。相比之前的方法, Ummenhofer 等人的方法不仅具有更快的计算速度, 而且精度也明显提高。而 Tumanov 等人提出将粒子预先插值到空间网格上, 再使用卷积神经网络预测流体运动的方法 (图 19(c))<sup>[202]</sup>。这一方法使用了原本用于处理图像超分辨率问题的亚像素卷积技术<sup>[203]</sup>, 因此不仅能够从网格中恢复出粒子的运动, 而且易于在仿真质量与计算效率之间进行取舍。实验证明该方法模拟与 PBF 法<sup>[4]</sup>类似流体运动时, 可以获得比 GPU 加速的 PBF 流体算法快 200 倍的计算速度。

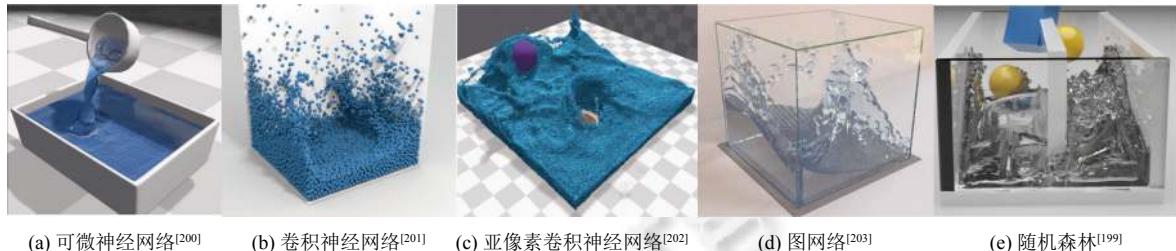


图 19 数据驱动方法与粒子法流体仿真技术的结合

- 图网络: SPH 法也可以与图网络方法结合<sup>[182,183]</sup>, 比如 Sanchez-Gonzalez 就提出将粒子流体模拟视为图网络中的信息传递 (message-passing) 过程 (图 19(c))。该网络中的节点可被视为粒子, 而节点之间边则对应于粒子间的相互作用。这种基于图网络流体模拟器的计算速度可能不如上述几种方法, 但它能够模拟相对较为复杂的场景, 比如流体与刚体、形变体之间的耦合等<sup>[204]</sup>。

除上述使用数据驱动算法替代 SPH 法中流体计算过程的研究外, 也有研究者尝试从应用的角度借助数据驱动算法来优化流体仿真技术。比如, 为了实现游戏玩家与可移动平台上的 SPH 流体实时交互, Stanton 等人提出了通过获取玩家的游戏数据建立流体运动状态图的方法<sup>[21]</sup>。该方法通过访问状态图来预判玩家最可能遇到流体状态, 然后使用 SPH 流体预算算这些流体状态, 进而显著提高玩家的游戏体验。此外, 也有研究者提出了直接从流体特效动画中的流体表面识别粒子并预测流体运动的方法<sup>[205,206]</sup>。该技术可简化基于数据驱动的流体模拟器的训练过程, 使其更易于使用。

讨论。尽管目前已有较多的 SPH 法与数据驱动方法结合的研究, 而且这些方法都表现出较高的仿真计算效率, 但这些方法也存在着非常严重的问题。首先, 在这些方法不适于模拟较复杂或较极端的场景, 其相关研究报道中的测试场景也都过于简单, 且规模很小。一旦仿真场景中出现了训练数据未涵盖的情况, 仿真就很容易产生严重的视觉伪影, 甚至导致仿真崩溃。其次这些方法中的参数调整较为繁琐, 调整流体的性质、参数或场景后常需要对模型进行重新的训练, 这一问题也会严重限制其应用。此外, 这些方法模拟流体的精度较低, 在生成流体仿真数据过程中易产生视觉伪影或不稳定的问题。综上所述, 虽然基于数据驱动的流体仿真方法发展迅速且具有优异的计算效率, 但目前还难以应用, 尚需要进一步完善。

## 5 复杂场景的模拟方法

工作实践中, 流体与其他材料之间的耦合过程是十分普遍且常见的, 比如水面上行驶的船、雨水冲刷下的砂砾、汤面中的汤与面条、空气中飘浮的肥皂泡等。因此, 只能够生成流体特效的物理引擎功能过于单一, 难以适用应用需求。为此, 需要构建流体与不同材料的耦合以及常见的物理现象的模拟方法, 使 SPH 流体模拟方法能够实现复杂场景的模拟。以下是这方面研究的讨论。

### 5.1 流体与固体的耦合

流体与固体的耦合模拟可以分为两种, 一种是只考虑固体对流体单相作用的耦合, 这类方法被称为弱耦合, 而另一种是要考虑流体与固体之间相互作用的耦合, 这类方法也被称为强耦合。弱耦合问题相对简单, 只需要正确施

加固壁边界条件即可。相较之下，流体与固体的强耦合问题的应对方法则比较复杂，以下是流体-固体强耦合算法相关研究成果的讨论。相关代表性方法见表 8<sup>[35,51,57-59,66,104,113,132,207-210]</sup>。

表 8 SPH 复杂场景的代表性仿真方法

场景	流体-刚体耦合	流体-弹性体耦合	流体-多孔材料耦合	互溶流体耦合	不互溶流体耦合	气泡与泡沫	相变	肥皂泡	空气对液体的拖曳力
仿真方法	[35, 66]	[58, 113]	[51]	[57, 208]	[132]	[104]	[59, 210]	[209]	[207]

- 流体与刚体的耦合。刚体的运动只有平移和旋转，因此流体-刚体耦合的研究更多地集中在边界力的计算方法上<sup>[143,211]</sup>。具体的研究内容有：Becker 等人提出了基于预测-矫正策略的流体-刚体耦合模拟方法<sup>[211]</sup>；Akinci 等人提出了在刚体表面上使用边界粒子采样，通过计算流体粒子与边界粒子之间上的压强和摩擦力来实现流体与刚体之间强耦合的方法<sup>[143]</sup>；He 等人在 SPH 法中引入了用于存储应力的交错粒子，便于准确地施加流体与刚体的各项边界条件，同时也简化了流体与固体间碰撞处理<sup>[66]</sup>；Gissler 等人提出了通过对流体、刚体各项计算进行整体迭代等方式实现流体-刚体耦合模拟的策略<sup>[35]</sup>，这种迭代策略可以显著提高流体-刚体耦合的稳定性（图 20）。

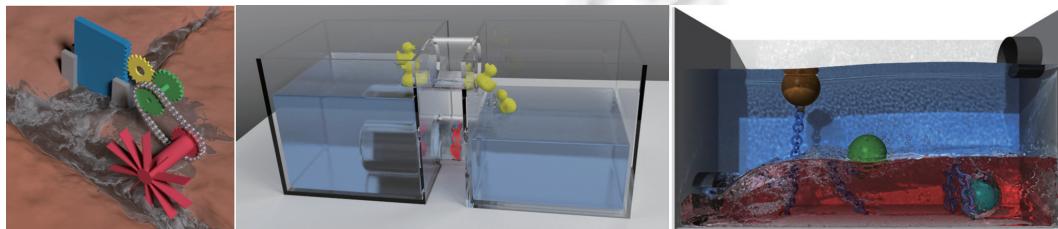


图 20 文献 [35] 得到的部分结果

- 流体与弹性材料的耦合。SPH 法不仅可以模拟流体，也可以模拟弹性固体材料，因此基于 SPH 法的流体-弹性材料间的耦合模拟也有许多研究<sup>[47,48,53]</sup>。近些年，Yan 等人引入了基于形变速率而非形变梯度的固体本构模型，并基于此模型构建了 SPH 法下流体与弹塑性材料之间的耦合方法<sup>[58]</sup>；Chen 等人将 Yan 等人的工作进一步引入到了 MLSRK 框架下，通过使用移动最小二乘法进一步提高了计算的精确性<sup>[113]</sup>。除上述完全基于 SPH 法的流固耦合策略外，也有研究者提出了使用 SPH 流体与其他方法模拟的弹性材料进行耦合的方法，比如：Müller 等人提出的使用 SPH 流体与有限元法模拟的固体之间的耦合方法<sup>[33]</sup>；Shao 等人提出的使用 PCISPH 法与 LSM 法的流固耦合方法<sup>[212]</sup>；Abu Rumman 等人提出的使用 SPH 流体与 PBD 弹性固体实现耦合的方法<sup>[213]</sup>等。

- 流体与多孔材料耦合。海绵等多孔材料不仅具有弹性，而且能够吸收水分。因此，多孔材料与水的耦合模拟需要针对性的研究。由于 SPH 的传统方法在模拟多孔材料吸水、渗水过程中需要频繁删除、新增流体粒子以保证质量守恒<sup>[214,215]</sup>，实现过程较为繁琐。Ren 等对此进行了改进<sup>[51]</sup>。在他们提出的方法中，流体粒子使用虚相比例分数来表征其是否处于多孔材料之内或在其边界附近，不仅无需增删流体粒子，且能够实现多种不同流体与多孔材料之间的耦合。

## 5.2 其他复杂场景的模拟方法

除流体与固体耦合模拟研究之外，CG 领域中还有许多其他复杂场景模拟方法的研究（表 8），如下所述。

- 不同流体之间的耦合。不同液体之间的耦合场景可以进一步划分为不互溶流体的耦合与互溶流体耦合两类。不互溶流体间会存在明确的自由表面边界，若两种材料的密度相差过大，自由表面附近的相关计算会产生错误。为此，Solenthaler 等人提出使用粒子数量密度计算来代替原 SPH 法中质量密度以进行有效应对<sup>[216]</sup>。考虑到流体的吸附力作用会对不互溶流体之间的运动产生影响，Yang 等人提出 Pairwise 力方法来进行相关模拟<sup>[132]</sup>。图形学领域互溶流体耦合方面的研究最早由 Ren 等人提出<sup>[56]</sup>。该研究提出给每个粒子赋予一组相体积分数，表示该粒子含有不同液相的比例，该方法不仅可以模拟互溶流体的混合、扩散过程，还能够模拟化学反应生成新液相的过程。之后，Yang 等人引入了液相亥姆霍茨自由表面能量（Helmholtz free energy），并结合 Cahn-Hilliard 方程，即可实现

包括萃取、部分溶解 (partial dissolution) 等复杂场景的模拟<sup>[57]</sup>. 近些年, Jiang 等人又进一步在 Yang 等人的方法中实现了流体速度场的无散度条件约束, 提高了模拟稳定性<sup>[208]</sup>.

- 流体内的气泡与泡沫. 流体内部的气泡和表面的泡沫对于流体模拟的视觉真实性有较大的影响. 针对这一问题, Cleary 等人提出了快速模拟啤酒等液体中泡沫的生成、碰撞、拖拽、合并等过程的方法<sup>[217]</sup>; Ihmsen 等人提出了在大场景流体的浪尖、动能最大点等合适位置上生成气泡、泡沫的方法, 可在不引入过多计算的前提下大幅度提高视觉真实性<sup>[104]</sup>.

- 相变. 相变是指同一种材料从一种相转变为另一种相的过程. Yang 等人提出了液相与固相转变过程的模拟方法<sup>[59]</sup>; Hochstetter 等人提出了水蒸发、冷凝过程的模拟方法<sup>[210]</sup>.

- 肥皂泡. 受限于数值不稳定问题, SPH 法很难稳定地模拟肥皂泡. 为了规避难以处理的肥皂泡液体薄膜, Yang 等人提出将肥皂泡视为内部填充气相粒子的实体, 同时在肥皂泡表面位置包覆气液混相粒子<sup>[132]</sup>; Wang 等人<sup>[209]</sup>提出使用浅水方程法<sup>[42]</sup>来描述肥皂泡厚度, 并基于包含有表面张力作用的 NS 方程以及 WCSPH 法构建了肥皂泡等薄层形态流体的仿真方法. 该方法能够保证肥皂泡薄膜的稳定性, 并生动地模拟肥皂泡的形变、分裂与合并、表面张力波、破裂以及一些其他肥皂泡特有的现象(图 21).

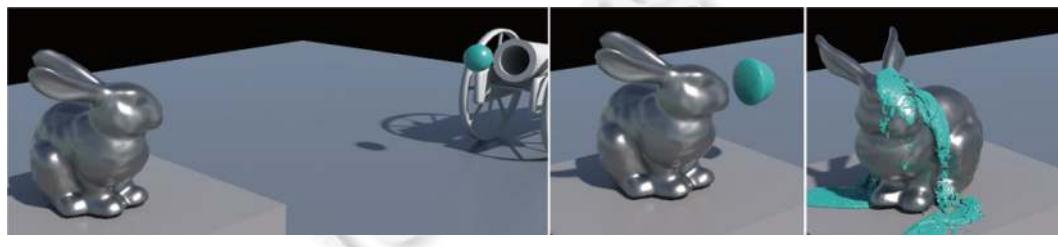
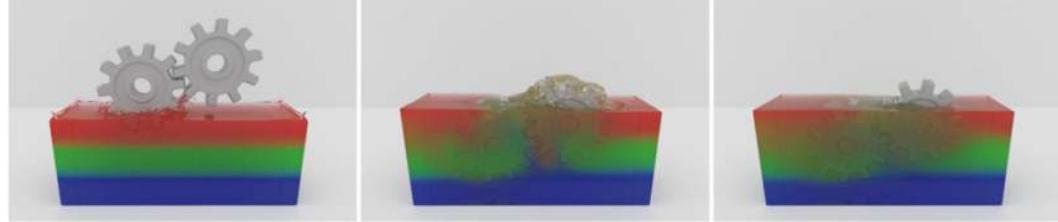
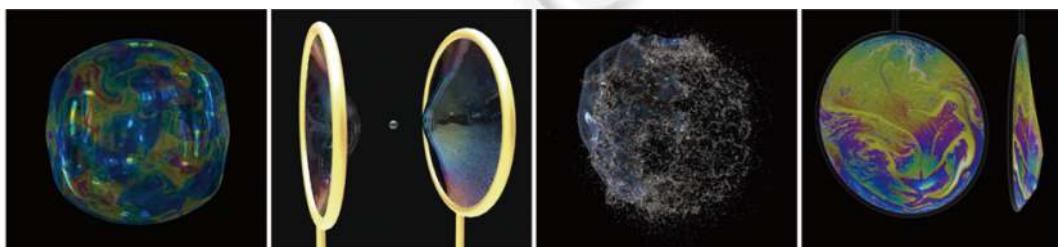
(a) 气体对液体的拖曳力模拟<sup>[207]</sup>(b) 液体与液体的耦合模拟<sup>[208]</sup>(c) 液体相变的模拟<sup>[209]</sup>(d) 肥皂泡的模拟<sup>[215]</sup>

图 21 复杂场景模拟

- 空气对液体的拖曳力. Gissler 等人<sup>[207]</sup>提出了无需对液体快速施加空气拖曳力的方法, 不需要使用气体粒子, 而是根据液体的速度及其形变速率直接计算液体表面粒子受到的空气拖曳力, 能模拟出空气中快速运动流体的形态变化(图 21).

### 5.3 复杂场景的统一仿真框架

SPH 方法不仅能够模拟流体, 也能够模拟弹塑性材料、颗粒流等材料, 以及不同材料之间的耦合过程, 因此可以构建完全基于 SPH 法的统一仿真框架. 基于 SPH 法的统一仿真框架需要包含尽可能多的材料、现象、过程的仿真方法, 同时也要具有较好的稳定性, 近些年此方面研究也有较多的成果: Yan 等人提出了包括流体、弹塑性材料、颗粒流等材料以及溶解过程的统一仿真方法<sup>[58]</sup>, Yang 等人也进一步提出了包含流体、固体及其相变过程的统一仿真框架<sup>[59]</sup>; He 等人在 SPH 法中引入了近场动力学(Peridynamics)理论, 构建了具有良好稳定性的粘弹性流体以及弹塑性固体的统一仿真框架<sup>[48]</sup>; Chen 等人在 SPH 法中引入了 MLSRK (moving least square reproducing kernel) 理论, 构建了包含固体材料浸润过程以及固体碎裂过程的统一仿真框架(图 22)<sup>[113]</sup>.

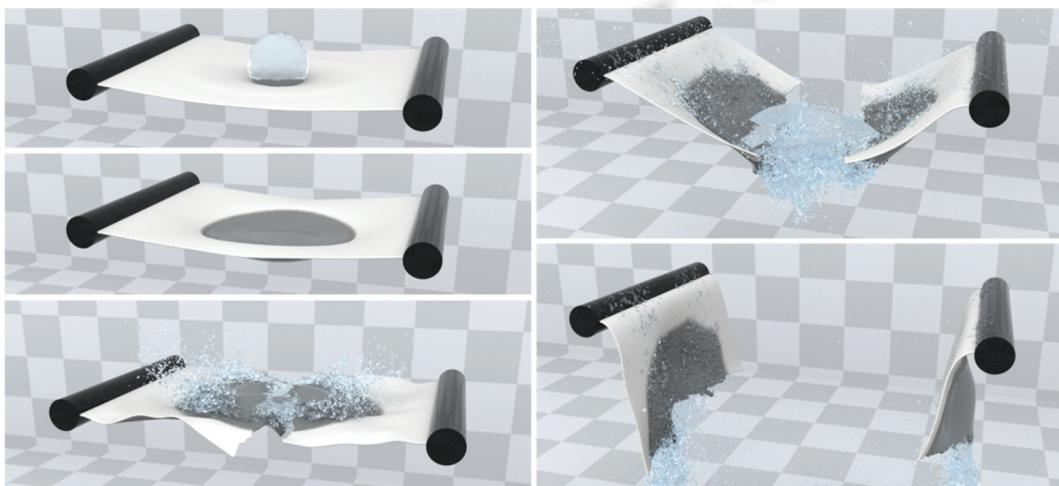


图 22 文献 [113] 的部分结果

## 6 总结与展望

为满足影视特效、数字孪生、虚拟现实、元宇宙的迫切需求, 近些年 SPH 流体仿真技术正在快速地发展, 并产生了大量的研究成果. 本文从流体基本物理特性模拟方法、稳定性、计算效率以及复杂场景模拟等几方面对近些年 SPH 法的研究成果进行了总结、讨论. 基于本文的调研和分析, 未来这一技术的发展方向依然会围绕效率、稳定性、适用性等方面继续深入. 可能的研究内容包括以下几方面.

- 效率优化: (1) GPU 能够显著降低 SPH 法模拟的计算时间, 因此 SPH 流体模拟算法需要针对 GPU 进行更深入的优化, 此外类似于自适应分辨率、异步法等加速策略需要能够运行在 GPU 上才具有应用价值, 这方面的研究也有待于进一步完善; (2) 不可压缩性求解、粘性求解等步骤需要花费较多的计算时间, 如何在保证其计算精度的同时提高其迭代收敛速度、尽可能提高可以使用的时间步长上限, 是需要进一步研究的; (3) SPH 法中的邻域查找过程是 SPH 法效率提高的瓶颈, 对于邻域查找策略及其数据结构方面的优化需要持续地研究.

- 数值不稳定的应对方法: (1) SPH 法目前依然严重受到拉伸不稳定问题困扰, 这一问题对于流体模拟的视觉真实性有较大影响, 若能够在不引入过多计算的前提下有效地解决这一不稳定问题, 将会大力推进 SPH 流体模拟技术的发展; (2) 流体相关计算中不同求解步骤之间存在相互干扰的问题, 欧拉网格法的相关研究已发现, 若能解决这类问题则可以显著提高模拟稳定性以及视觉真实性, 然而, 在 SPH 法中这方面的研究很少; (3) 目前 SPH 法的计算精度较难实现一阶, 如何能够从边界处理方法、插值计算方法上提高 SPH 法的精度而不引入过多的计算量,

是未来重要的研究内容.

- 复杂场景的模拟方法: (1) 设计更简单、更高效、更稳定、包含更多种材料和更多现象的统一仿真框架将会是 SPH 法流体模拟技术的重要研究内容. (2) 由于不同模拟方法具有不同优缺点, 因此建立 SPH 法与其他方法之间的耦合策略, 对于推动 SPH 法流体模拟技术的应用有着重要的意义.

- 与数据驱动方法的结合: 深度学习等数据驱动方法与流体仿真的融合不仅能显著提高仿真计算效率, 而且能够增强物理仿真技术的功能, 比如类似于“风格迁移”的流体仿真技术<sup>[218]</sup>、增强流体某些视觉上的细节等<sup>[196]</sup>. 随着可微物理研究的发展、可微编程技术的逐渐成熟<sup>[179,200,219-221]</sup>, 这一类融合方法的效能将会进一步增强. 但现阶段这一融合的方法还存在着很多问题, 比如计算不够精确, 容易产生视觉伪影, 功能过于单一, 难以同时应对不同规模、不同物理参数、不同条件下的场景等. 这些问题妨碍了这一融合方法的使用. 因此, 如何解决这一融合方法的通用性、易用性、精确性, 将是未来研究的重点.

- CG 领域研究对于工程领域的影响: 工程领域中关于 SPH 法的研究很深入, 因此 CG 领域中有非常多的技术直接或间接借鉴了工程领域中的研究内容, 比如压强计算方法<sup>[73]</sup>、投影法<sup>[124]</sup>、自由表面处理方法<sup>[105]</sup>等. 而 CG 领域的研究起步较晚, 且少有能够显著提高数值精确性的方法, 因此工程领域中有关 SPH 法的研究较少借鉴 CG 领域的研究. 不过近些年 CG 领域中有一些研究工作能够显著提高 SPH 流体仿真的稳定性、实时性和通用性, 比如邻域查找的优化方法<sup>[116,160,161,163,164]</sup>、并行计算<sup>[170]</sup>、与深度学习技术的融合<sup>[199,200]</sup>、复杂场景的仿真方法<sup>[48,113]</sup>等, 有可能在未来会对工程领域相关研究发展产生较大影响.

总之, SPH 法流体模拟技术研究尽管已经取得了很多进展, 但还面临着诸多挑战, 有待进一步的探索.

## References:

- [1] Xiao YW, Chan SY, Wang SQ, Zhu B, Yang XB. An adaptive staggered-tilted grid for incompressible flow simulation. ACM Trans. on Graphics, 2020, 39(6): 171. [doi: [10.1145/3414685.3417837](https://doi.org/10.1145/3414685.3417837)]
- [2] Chen YL, Meier J, Solenthaler B, Azevedo VC. An extended cut-cell method for sub-grid liquids tracking with surface tension. ACM Trans. on Graphics, 2020, 39(6): 169. [doi: [10.1145/3414685.3417859](https://doi.org/10.1145/3414685.3417859)]
- [3] Goldade R, Wang YP, Aanjaneya M, Batty C. An adaptive variational finite difference framework for efficient symmetric octree viscosity. ACM Trans. on Graphics, 2019, 38(4): 94. [doi: [10.1145/3306346.3322939](https://doi.org/10.1145/3306346.3322939)]
- [4] Macklin M, Müller M. Position based fluids. ACM Trans. on Graphics, 2013, 32(4): 104. [doi: [10.1145/2461912.2461984](https://doi.org/10.1145/2461912.2461984)]
- [5] Winchenbach R, Akhunov R, Kolb A. Semi-analytic boundary handling below particle resolution for smoothed particle hydrodynamics. ACM Trans. on Graphics, 2020, 39(6): 173. [doi: [10.1145/3414685.3417829](https://doi.org/10.1145/3414685.3417829)]
- [6] Zhai X, Hou F, Qin H, Hao AM. Fluid simulation with adaptive staggered power particles on GPUs. IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics, 2020, 26(6): 2234–2246. [doi: [10.1109/TVCG.2018.2886322](https://doi.org/10.1109/TVCG.2018.2886322)]
- [7] Chen YX, Li W, Fan R, Liu XP. GPU optimization for high-quality kinetic fluid simulation. IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics, 2022, 28(9): 3235–3251. [doi: [10.1109/TVCG.2021.3059753](https://doi.org/10.1109/TVCG.2021.3059753)]
- [8] Hu YM, Fang Y, Ge ZH, Qu ZY, Zhu YX, Pradhana A, Jiang CFF. A moving least squares material point method with displacement discontinuity and two-way rigid body coupling. ACM Trans. on Graphics, 2018, 37(4): 150. [doi: [10.1145/3197517.3201293](https://doi.org/10.1145/3197517.3201293)]
- [9] Nakanishi R, Nascimento F, Campos R, Pagliosa P, Paiva A. RBF liquids: An adaptive PIC solver using RBF-FD. ACM Trans. on Graphics, 2020, 39(6): 170. [doi: [10.1145/3414685.3417794](https://doi.org/10.1145/3414685.3417794)]
- [10] Fang Y, Qu ZY, Li MC, Zhang XX, Zhu YX, Aanjaneya M, Jiang CFF. IQ-MPM: An interface quadrature material point method for non-sticky strongly two-way coupled nonlinear solids and fluids. ACM Trans. on Graphics, 2020, 39(4): 51. [doi: [10.1145/3386569.3392438](https://doi.org/10.1145/3386569.3392438)]
- [11] Lucy LB. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. The Astronomical Journal, 1977, 82: 1013–1024. [doi: [10.1086/112164](https://doi.org/10.1086/112164)]
- [12] Gingold RA, Monaghan JJ. Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1977, 181(3): 375–389. [doi: [10.1093/mnras/181.3.375](https://doi.org/10.1093/mnras/181.3.375)]
- [13] Monaghan JJ. Smoothed particle hydrodynamics. Annual Review of Astronomy and Astrophysics, 1992, 30: 543–574. [doi: [10.1146/annurev.aa.30.090192.002551](https://doi.org/10.1146/annurev.aa.30.090192.002551)]
- [14] Su ZY, Wang GZ, Wang YK, Luo X, Zhang H. Numerical simulation of dynamic catastrophe of slope instability in Three Gorges

- reservoir area based on FEM and SPH method. *Natural Hazards*, 2022, 111(1): 709–724. [doi: [10.1007/s11069-021-05075-z](https://doi.org/10.1007/s11069-021-05075-z)]
- [15] Lyu HG, Sun PN. Further enhancement of the particle shifting technique: Towards better volume conservation and particle distribution in SPH simulations of violent free-surface flows. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, 101: 214–238. [doi: [10.1016/j.apm.2021.08.014](https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.08.014)]
- [16] Peng XY, Yu PC, Chen GQ, Xia MY, Zhang YB. Development of a coupled DD-SPH method and its application to dynamic simulation of landslides involving solid-fluid interaction. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2020, 53(1): 113–131. [doi: [10.1007/s00603-019-01900-x](https://doi.org/10.1007/s00603-019-01900-x)]
- [17] Hammani I, Marrone S, Colagrossi A, Oger G, Le Touzé D. Detailed study on the extension of the  $\delta$ -SPH model to multi-phase flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 368: 113189. [doi: [10.1016/j.cma.2020.113189](https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113189)]
- [18] Desbrun M, Gascuel MP. Smoothed particles: A new paradigm for animating highly deformable bodies. In: Proc. of the 1996 Computer Animation and Simulation. Poitiers: Springer, 1996. 61–76. [doi: [10.1007/978-3-7091-7486-9\\_5](https://doi.org/10.1007/978-3-7091-7486-9_5)]
- [19] Xu TC, Wu W, Wu EH. Real-time generation of smoothed-particle hydrodynamics-based special effects in character animation. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 2014, 25(2): 185–198. [doi: [10.1002/cav.1545](https://doi.org/10.1002/cav.1545)]
- [20] Huang C, Zhu J, Sun HQ, Wu EH. Parallel-optimizing SPH fluid simulation for realistic VR environments. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 2015, 26(1): 43–54. [doi: [10.1002/cav.1564](https://doi.org/10.1002/cav.1564)]
- [21] Stanton M, Humberston B, Kase B, O'Brien JF, Fatahalian K, Treuille A. Self-refining games using player analytics. *ACM Trans. on Graphics*, 2014, 33(4): 73. [doi: [10.1145/2601097.2601196](https://doi.org/10.1145/2601097.2601196)]
- [22] Alduán I, Tena A, Otraduy MA. DYVERSO: A versatile multi-phase position-based fluids solution for VFX. *Computer Graphics Forum*, 2016, 36(8): 32–44. [doi: [10.1111/cgf.12992](https://doi.org/10.1111/cgf.12992)]
- [23] Cavelan A, Cabezón RM, Grabarczyk M, Cioba FM. A smoothed particle hydrodynamics mini-APP for exascale. In: Proc. of the 2020 Platform for Advanced Scientific Computing Conf. Geneva: ACM, 2020. 11. [doi: [10.1145/3394277.3401855](https://doi.org/10.1145/3394277.3401855)]
- [24] Nie XY, Hu Y, Su YZ, Shen XK. Fluid reconstruction and editing from a monocular video based on the SPH model with external force guidance. *Computer Graphics Forum*, 2021, 40(6): 62–76. [doi: [10.1111/cgf.14203](https://doi.org/10.1111/cgf.14203)]
- [25] Schoentgen A, Poulin P, Darles E, Meseure P. Particle-based liquid control using animation templates. *Computer Graphics Forum*, 2020, 39(8): 79–88. [doi: [10.1111/cgf.14103](https://doi.org/10.1111/cgf.14103)]
- [26] García-Feal O, Crespo AJC, Gómez-Gesteira M. VisualSPHysics: Advanced fluid visualization for SPH models. *Computational Particle Mechanics*, 2021, 9(5): 897–910. [doi: [10.1007/s40571-020-00386-7](https://doi.org/10.1007/s40571-020-00386-7)]
- [27] Li HJ, Ren HX, Qiu SY, Wang C. Physics-based simulation of ocean scenes in marine simulator visual system. *Water*, 2020, 12(1): 215. [doi: [10.3390/w12010215](https://doi.org/10.3390/w12010215)]
- [28] Hassaballah M, Aly AM, Abdelnaim A. Interactive fluid flow simulation in computer graphics using incompressible smoothed particle hydrodynamics. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 2020, 31(2): e1916. [doi: [10.1002/cav.1916](https://doi.org/10.1002/cav.1916)]
- [29] Ihmsen M, Orthmann J, Solenthaler B, Kolb A, Teschner M. SPH fluids in computer graphics. In: Proc. of the 35th Annual Conf. of the European Association for Computer Graphics, Eurographics 2014—State of the Art Reports. Strasbourg: Eurographics Association, 2014. 21–42.
- [30] Koschier D, Bender J, Solenthaler B, Teschner M. Smoothed particle hydrodynamics techniques for the physics based simulation of fluids and solids. In: Proc. of the 40th Annual Conf. of the European Association for Computer Graphics. Genoa: Eurographics Association, 2019. 1–41.
- [31] Bo R, Yang XY, Lin MC, Thuerey N, Teschner M, Li CF. Visual simulation of multiple fluids in computer graphics: A state-of-the-art report. *Journal of Computer Science and Technology*, 2018, 33(3): 431–451. [doi: [10.1007/s11390-018-1829-0](https://doi.org/10.1007/s11390-018-1829-0)]
- [32] Um K, Hu XY, Thuerey N. Perceptual evaluation of liquid simulation methods. *ACM Trans. on Graphics*, 2017, 36(4): 143. [doi: [10.1145/3072959.3073633](https://doi.org/10.1145/3072959.3073633)]
- [33] Müller M, Schirm S, Teschner M, Heidelberger B, Gross M. Interaction of fluids with deformable solids. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 2004, 15(34): 159–171. [doi: [10.1002/cav.18](https://doi.org/10.1002/cav.18)]
- [34] Keiser R, Adams B, Gasser D, Bazzi P, Dutré P, Gross M. A unified lagrangian approach to solid-fluid animation. In: Proc. of the 2005 Eurographics/IEEE VGTC Symp. Point-based Graphics. Stony Brook: IEEE, 2005. 125–148. [doi: [10.1109/PBG.2005.194073](https://doi.org/10.1109/PBG.2005.194073)]
- [35] Gissler C, Peer A, Band S, Bender J, Teschner M. Interlinked SPH pressure solvers for strong fluid-rigid coupling. *ACM Trans. on Graphics*, 2019, 38(1): 5. [doi: [10.1145/3284980](https://doi.org/10.1145/3284980)]
- [36] Liu GR, Liu MB. Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Methods. Singapore: World Scientific, 2003.
- [37] Fries TPM, Hermann G. Classification and Overview of Meshfree Method. Braunschweig: Institut für Wissenschaftliches Rechnen, 2004.

- [38] Cornelis J, Ihmsen M, Peer A, Teschner M. IISPH-FLIP for incompressible fluids. *Computer Graphics Forum*, 2014, 33(2): 255–262. [doi: [10.1111/cgf.12324](https://doi.org/10.1111/cgf.12324)]
- [39] Hong JM, Lee HY, Yoon JC, Kim CH. Bubbles alive. *ACM Trans. on Graphics*, 2008, 27(3): 48. [doi: [10.1145/1360612.1360647](https://doi.org/10.1145/1360612.1360647)]
- [40] Thürey N, Sadlo F, Schirm S, Müller-Fischer M, Gross M. Real-time simulations of bubbles and foam within a shallow water framework. In: Proc. of the 2007 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer Animation. San Diego: Eurographics Association, 2007. 191–198.
- [41] Losasso F, Talton JO, Kwatra N, Fedkiw R. Two-way coupled SPH and particle level set fluid simulation. *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics*, 2008, 14(4): 797–804. [doi: [10.1109/TVCG.2008.37](https://doi.org/10.1109/TVCG.2008.37)]
- [42] Lee H, Han S. Solving the shallow water equations using 2D SPH particles for interactive applications. *The Visual Computer*, 2010, 26(6–8): 865–872. [doi: [10.1007/s00371-010-0439-9](https://doi.org/10.1007/s00371-010-0439-9)]
- [43] Kang N, Sagong D. Incompressible SPH using the divergence-free condition. *Computer Graphics Forum*, 2014, 33(7): 219–228. [doi: [10.1111/cgf.12490](https://doi.org/10.1111/cgf.12490)]
- [44] Shi JJ, Li C, Wang CB, Qin H, He GQ. An advanced hybrid smoothed particle hydrodynamics-fluid implicit particle method on adaptive grid for condensation simulation. *Computer Animation and Virtual Worlds*, 2020, 31(6): e1967. [doi: [10.1002/cav.1967](https://doi.org/10.1002/cav.1967)]
- [45] Shao XQ, Mei P, Chen WX. Real-time simulation of realistic fluid animation based on stable SPH-SWE numerical model. *Acta Physica Sinica*, 2021, 70(23): 234701 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.7498/aps.70.20211251](https://doi.org/10.7498/aps.70.20211251)]
- [46] Fei Y, Guo Q, Wu RD, Huang L, Gao M. Revisiting integration in the material point method: A scheme for easier separation and less dissipation. *ACM Trans. on Graphics*, 2021, 40(4): 109. [doi: [10.1145/3450626.3459678](https://doi.org/10.1145/3450626.3459678)]
- [47] Peer A, Gissler C, Band S, Teschner M. An implicit SPH formulation for incompressible linearly elastic solids. *Computer Graphics Forum*, 2018, 37(6): 135–148. [doi: [10.1111/cgf.13317](https://doi.org/10.1111/cgf.13317)]
- [48] He XW, Wang HM, Wu EH. Projective peridynamics for modeling versatile elastoplastic materials. *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics*, 2018, 24(9): 2589–2599. [doi: [10.1109/TVCG.2017.2755646](https://doi.org/10.1109/TVCG.2017.2755646)]
- [49] Alduán I, Otaduy MA. SPH granular flow with friction and cohesion. In: Proc. of the 2011 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer Animation. Vancouver: ACM, 2011. 25–32. [doi: [10.1145/2019406.2019410](https://doi.org/10.1145/2019406.2019410)]
- [50] Gissler C, Henne A, Band S, Peer A, Teschner M. An implicit compressible SPH solver for snow simulation. *ACM Trans. on Graphics*, 2020, 39(4): 36. [doi: [10.1145/3386569.3392431](https://doi.org/10.1145/3386569.3392431)]
- [51] Ren B, Xu B, Li CF. Unified particle system for multiple-fluid flow and porous material. *ACM Trans. on Graphics*, 2021, 40(4): 118. [doi: [10.1145/3450626.3459764](https://doi.org/10.1145/3450626.3459764)]
- [52] Huang L, Hädrich T, Michels DL. On the accurate large-scale simulation of ferrofluids. *ACM Trans. on Graphics*, 2019, 38(4): 93. [doi: [10.1145/3306346.3322973](https://doi.org/10.1145/3306346.3322973)]
- [53] Kugelstadt T, Bender J, Fernández-Fernández JA, Jeske SR, Löschner F, Longva A. Fast corotated elastic SPH solids with implicit zero-energy mode control. *Proc. of the ACM on Computer Graphics and Interactive Techniques*, 2021, 4(3): 33. [doi: [10.1145/3480142](https://doi.org/10.1145/3480142)]
- [54] Wang X, Fujisawa M, Mikawa M. Visual simulation of soil-structure destruction with seepage flows. *Proc. of the ACM on Computer Graphics and Interactive Techniques*, 2021, 4(3): 41. [doi: [10.1145/3480141](https://doi.org/10.1145/3480141)]
- [55] Akbay M, Nobles N, Zordan V, Shinar T. An extended partitioned method for conservative solid-fluid coupling. *ACM Trans. on Graphics*, 2018, 37(4): 86. [doi: [10.1145/3197517.3201345](https://doi.org/10.1145/3197517.3201345)]
- [56] Ren B, Li CF, Yan X, Lin MC, Bonet J, Hu SM. Multiple-fluid SPH simulation using a mixture model. *ACM Trans. on Graphics*, 2014, 33(5): 171. [doi: [10.1145/2645703](https://doi.org/10.1145/2645703)]
- [57] Yang T, Chang J, Ren B, Lin MC, Zhang JJ, Hu SM. Fast multiple-fluid simulation using Helmholtz free energy. *ACM Trans. on Graphics*, 2015, 34(6): 201. [doi: [10.1145/2816795.2818117](https://doi.org/10.1145/2816795.2818117)]
- [58] Yan X, Jiang YT, Li CF, Martin RR, Hu SM. Multiphase SPH simulation for interactive fluids and solids. *ACM Trans. on Graphics*, 2016, 35(4): 79. [doi: [10.1145/2897824.2925897](https://doi.org/10.1145/2897824.2925897)]
- [59] Yang T, Chang J, Lin MC, Martin RR, Zhang JJ, Hu SM. A unified particle system framework for multi-phase, multi-material visual simulations. *ACM Trans. on Graphics*, 2017, 36(6): 224. [doi: [10.1145/3130800.3130882](https://doi.org/10.1145/3130800.3130882)]
- [60] Chang YZ, Bao K, Liu YQ, Zhu J, Wu EH. A particle-based method for viscoelastic fluids animation. In: Proc. of the 16th ACM Symp. on Virtual Reality Software and Technology. Kyoto: ACM, 2009. 111–117. [doi: [10.1145/1643928.1643954](https://doi.org/10.1145/1643928.1643954)]
- [61] Kim JH, Lee J. Stable and anisotropic freezing framework with interaction between IISPH fluids and ice particles. *IEEE Access*, 2021, 9: 146097–146109. [doi: [10.1109/ACCESS.2021.3123435](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3123435)]
- [62] Jiang Y, Lan Y. A dynamic mixture model for non-equilibrium multiphase fluids. *Computer Graphics Forum*, 2021, 40(7): 85–95. [doi: [10.1111/cgf.14403](https://doi.org/10.1111/cgf.14403)]

- [63] Ihmsen M, Cornelis J, Solenthaler B, Horvath C, Teschner M. Implicit incompressible SPH. *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics*, 2014, 20(3): 426–435. [doi: [10.1109/TVCG.2013.105](https://doi.org/10.1109/TVCG.2013.105)]
- [64] Cummins SJ, Rudman M. An SPH projection method. *Journal of Computational Physics*, 1999, 152(2): 584–607. [doi: [10.1006/jcph.1999.6246](https://doi.org/10.1006/jcph.1999.6246)]
- [65] He XW, Wang HM, Wang GP, Wang HG, Wu EH. A variational staggered particle framework for incompressible free-surface flows. *arXiv:2001.09421*, 2020. [doi: [10.48550/arXiv.2001.09421](https://doi.org/10.48550/arXiv.2001.09421)]
- [66] He XW, Liu N, Wang GP, Zhang FJ, Li S, Shao SD, Wang HG. Staggered meshless solid-fluid coupling. *ACM Trans. on Graphics*, 2012, 31(6): 149. [doi: [10.1145/2366145.2366168](https://doi.org/10.1145/2366145.2366168)]
- [67] Reinhardt S, Krake T, Eberhardt B, Weiskopf D. Consistent shepard interpolation for SPH-based fluid animation. *ACM Trans. on Graphics*, 2019, 38(6): 189. [doi: [10.1145/3355089.3356503](https://doi.org/10.1145/3355089.3356503)]
- [68] He XW, Wang HM, Zhang F, Wang HG, Wang GP, Zhou K. Robust simulation of sparsely sampled thin features in SPH-based free surface flows. *ACM Trans. on Graphics*, 2014, 34(1): 189. [doi: [10.1145/2682630](https://doi.org/10.1145/2682630)]
- [69] Si WX, Qin J, Chen ZC, Liao XY, Wang Q, Heng PA. Thin-feature-aware transport-velocity formulation for SPH-based liquid animation. *IEEE Trans. on Multimedia*, 2018, 20(11): 3033–3044. [doi: [10.1109/TMM.2018.2825888](https://doi.org/10.1109/TMM.2018.2825888)]
- [70] Lai WM, Rubin D, Krempel E. *Introduction to Continuum Mechanics*. 4th ed., Amsterdam: Elsevier, 2009.
- [71] Monaghan JJ. Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on Progress in Physics*, 2005, 68(8): 1703–1759. [doi: [10.1088/0034-4885/68/8/R01](https://doi.org/10.1088/0034-4885/68/8/R01)]
- [72] Bridson R. *Fluid Simulation for Computer Graphics*. 2nd ed., New York: CRC Press, 2015.
- [73] Becker M, Teschner M. Weakly compressible SPH for free surface flows. In: Proc. of the 2007 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer Animation. San Diego: Eurographics Association, 2007. 209–217.
- [74] Peridyno. 2023. <https://github.com/peridyno/peridyno>
- [75] Physika. 2021. <https://github.com/PhysikaTeam/Physika>
- [76] Splishsplash. 2023. <https://github.com/InteractiveComputerGraphics/SPlisHSPlasH>
- [77] CPP-Fluid-Particles. 2019. <https://github.com/zhai-xiao/CPP-Fluid-Particles>
- [78] Winchenbach R, Hochstetter H, Kolb A. Constrained neighbor lists for SPH-based fluid simulations. In: Proc. of the 2016 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer Animation. Zurich: Eurographics Association, 2016. 49–56.
- [79] Liu SS, He XW, Wang WC, Wu EH. Adapted SIMPLE algorithm for incompressible SPH fluids with a broad range viscosity. *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics*, 2022, 28(9): 3168–3179. [doi: [10.1109/TVCG.2021.3055789](https://doi.org/10.1109/TVCG.2021.3055789)]
- [80] Reinhardt S, Huber M, Eberhardt B, Weiskopf D. Fully asynchronous SPH simulation. In: Proc. of the 2017 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer Animation. Los Angeles: ACM, 2017. 2. [doi: [10.1145/3099564.3099571](https://doi.org/10.1145/3099564.3099571)]
- [81] Bender J, Koschier D. Divergence-free smoothed particle hydrodynamics. In: Proc. of the 14th ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer Animation. Los Angeles: ACM, 2015. 147–155. [doi: [10.1145/2786784.2786796](https://doi.org/10.1145/2786784.2786796)]
- [82] Weiler M, Koschier D, Brand M, Bender J. A physically consistent implicit viscosity solver for SPH fluids. *Computer Graphics Forum*, 2018, 37(2): 145–155. [doi: [10.1111/cgf.13349](https://doi.org/10.1111/cgf.13349)]
- [83] Müller M, Charypar D, Gross M. Particle-based fluid simulation for interactive applications. In: Proc. of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer Animation. San Diego: Eurographics Association, 2003. 154–159.
- [84] Schechter H, Bridson R. Ghost SPH for animating water. *ACM Trans. on Graphics*, 2012, 31(4): 61. [doi: [10.1145/2185520.2185557](https://doi.org/10.1145/2185520.2185557)]
- [85] Gotoh H, Khayyer A. Current achievements and future perspectives for projection-based particle methods with applications in ocean engineering. *Journal of Ocean Engineering and Marine Energy*, 2016, 2(3): 251–278. [doi: [10.1007/s40722-016-0049-3](https://doi.org/10.1007/s40722-016-0049-3)]
- [86] Luo M, Khayyer A, Lin PZ. Particle methods in ocean and coastal engineering. *Applied Ocean Research*, 2021, 114: 102734. [doi: [10.1016/j.apor.2021.102734](https://doi.org/10.1016/j.apor.2021.102734)]
- [87] Yu PC, Peng XY, Hu B, Cheng X, Zhang YB, Li DJ. Extension of 3-D coupled DDA-SPH method for dynamic analysis of soil-structure interaction problems. *Applied Mathematical Modelling*, 2022, 111: 436–453. [doi: [10.1016/j.apm.2022.06.045](https://doi.org/10.1016/j.apm.2022.06.045)]
- [88] Yang Q, Jones V, Mccue L. Free-surface flow interactions with deformable structures using an SPH-FEM model. *Ocean Engineering*, 2012, 55: 136–147. [doi: [10.1016/j.oceaneng.2012.06.031](https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2012.06.031)]
- [89] Bouscasse B, Colagrossi A, Marrone S, Antuono M. Nonlinear water wave interaction with floating bodies in SPH. *Journal of Fluids and Structures*, 2013, 42: 112–129. [doi: [10.1016/j.jfluidstructs.2013.05.010](https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2013.05.010)]
- [90] Shi Y, Li SW, Chen HB, He M, Shao SD. Improved SPH simulation of spilled oil contained by flexible floating boom under wave-current coupling condition. *Journal of Fluids and Structures*, 2018, 76: 272–300. [doi: [10.1016/j.jfluidstructs.2017.09.014](https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2017.09.014)]
- [91] Dzwinel W, Yuen DA, Boryczko K. Bridging diverse physical scales with the discrete-particle paradigm in modeling colloidal dynamics

- with mesoscopic features. *Chemical Engineering Science*, 2006, 61(7): 2169–2185. [doi: [10.1016/j.ces.2004.01.075](https://doi.org/10.1016/j.ces.2004.01.075)]
- [92] Qi YT, Chen JY, Zhang GB, Xu Q, Li J. An improved multi-phase weakly-compressible SPH model for modeling various landslides. *Powder Technology*, 2022, 397: 117120. [doi: [10.1016/j.powtec.2022.117120](https://doi.org/10.1016/j.powtec.2022.117120)]
- [93] Vannozi L, Mazzocchi T, Hasebe A, Takeoka S, Fujie T, Ricotti L. A coupled FEM-SPH modeling technique to investigate the contractility of biohybrid thin films. *Advanced Biosystems*, 2020, 4(8): 1900306. [doi: [10.1002/adbi.201900306](https://doi.org/10.1002/adbi.201900306)]
- [94] Ye T, Phan-Thien N, Lim CT. Particle-based simulations of red blood cells—A review. *Journal of Biomechanics*, 2016, 49(11): 2255–2266. [doi: [10.1016/j.jbiomech.2015.11.050](https://doi.org/10.1016/j.jbiomech.2015.11.050)]
- [95] Geara S, Martín S, Adami S, Petry W, Allenou J, Stepnik B, Bonnefoy O. A new SPH density formulation for 3D free-surface flows. *Computers & Fluids*, 2022, 232: 105193. [doi: [10.1016/j.compfluid.2021.105193](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2021.105193)]
- [96] Chola K, Shintake T. Generalized entropically damped artificial compressibility for weakly compressible SPH. *Computers & Fluids*, 2021, 229: 105093. [doi: [10.1016/j.compfluid.2021.105093](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2021.105093)]
- [97] Antuono M, Sun PN, Marrone S, Colagrossi A. The  $\delta$ -ALE-SPH model: An arbitrary Lagrangian-Eulerian framework for the  $\delta$ -SPH model with particle shifting technique. *Computers & Fluids*, 2021, 216: 104806. [doi: [10.1016/j.compfluid.2020.104806](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2020.104806)]
- [98] Khayyer A, Gotoh H, Shimizu Y. Comparative study on accuracy and conservation properties of two particle regularization schemes and proposal of an optimized particle shifting scheme in ISPH context. *Journal of Computational Physics*, 2017, 332: 236–256. [doi: [10.1016/j.jcp.2016.12.005](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2016.12.005)]
- [99] Wang LZ, Khayyer A, Gotoh H, Jiang Q, Zhang CK. Enhancement of pressure calculation in projection-based particle methods by incorporation of background mesh scheme. *Applied Ocean Research*, 2019, 86: 320–339. [doi: [10.1016/j.apor.2019.01.017](https://doi.org/10.1016/j.apor.2019.01.017)]
- [100] He F, Zhang HS, Huang C, Liu MB. A stable SPH model with large CFL numbers for multi-phase flows with large density ratios. *Journal of Computational Physics*, 2022, 453: 110944. [doi: [10.1016/j.jcp.2022.110944](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2022.110944)]
- [101] You Y, Khayyer A, Zheng X, Gotoh H, Ma QW. Enhancement of  $\delta$ -SPH for ocean engineering applications through incorporation of a background mesh scheme. *Applied Ocean Research*, 2021, 110: 102508. [doi: [10.1016/j.apor.2020.102508](https://doi.org/10.1016/j.apor.2020.102508)]
- [102] Bender J, Koschier D, Kugelstadt T, Weiler M. Turbulent micropolar SPH fluids with foam. *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics*, 2019, 25(6): 2284–2295. [doi: [10.1109/TVCG.2018.2832080](https://doi.org/10.1109/TVCG.2018.2832080)]
- [103] Ihmsen M, Bader J, Akinci G, Teschner M. Animation of air bubbles with SPH. In: Proc. of the 2011 Int'l Conf. on Computer Graphics Theory and Applications. Vilamoura: SciTePress, 2011. 225–234.
- [104] Ihmsen M, Akinci N, Akinci G, Teschner M. Unified spray, foam and air bubbles for particle-based fluids. *The Visual Computer*, 2012, 28(6–8): 669–677. [doi: [10.1007/s00371-012-0697-9](https://doi.org/10.1007/s00371-012-0697-9)]
- [105] Yang S, He XW, Wang HM, Li S, Wang GP, Wu EH, Zhou K. Enriching SPH simulation by approximate capillary waves. In: Proc. of the 2016 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer Animation. Zurich: Eurographics Association, 2016. 29–36.
- [106] Huang WZ, Isenberghausen J, Kneiphof T, Qu ZY, Jiang C, Hullin MB. Chemomechanical simulation of soap film flow on spherical bubbles. *ACM Trans. on Graphics*, 2020, 39(4): 41. [doi: [10.1145/3386569.3392094](https://doi.org/10.1145/3386569.3392094)]
- [107] Chang Y, Liu SS, He XW, Li S, Wang GP. Semi-analytical solid boundary conditions for free surface flows. *Computer Graphics Forum*, 2020, 39(7): 131–141. [doi: [10.1111/cgf.14132](https://doi.org/10.1111/cgf.14132)]
- [108] Vacondio R, Altomare C, De Leffe M, Hu XY, De Louzé L, Lind S, Marongiu JC, Marrone S, Rogers BD, Souto-Iglesias A. Grand challenges for smoothed particle hydrodynamics numerical schemes. *Computational Particle Mechanics*, 2021, 8(3): 575–588. [doi: [10.1007/s40571-020-00354-1](https://doi.org/10.1007/s40571-020-00354-1)]
- [109] Peer A, Ihmsen M, Cornelis J, Teschner M. An implicit viscosity formulation for SPH fluids. *ACM Trans. on Graphics*, 2015, 34(4): 114. [doi: [10.1145/2766925](https://doi.org/10.1145/2766925)]
- [110] Peer A, Teschner M. Prescribed velocity gradients for highly viscous SPH fluids with vorticity diffusion. *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics*, 2017, 23(12): 2656–2662. [doi: [10.1109/TVCG.2016.2636144](https://doi.org/10.1109/TVCG.2016.2636144)]
- [111] Huang ZZ, Schneider T, Li MC, Jiang C, Zorin D, Panozzo D. A large-scale benchmark for the incompressible navier-stokes equations. *arXiv:2112.05309*, 2021. [doi: [10.48550/arXiv.2112.05309](https://doi.org/10.48550/arXiv.2112.05309)]
- [112] Band S, Gissler C, Ihmsen M, Cornelis J, Peer A, Teschner M. Pressure boundaries for implicit incompressible SPH. *ACM Trans. on Graphics*, 2018, 37(2): 14. [doi: [10.1145/3180486](https://doi.org/10.1145/3180486)]
- [113] Chen XS, Li CF, Cao GC, Jiang YT, Hu SM. A moving least square reproducing kernel particle method for unified multiphase continuum simulation. *ACM Trans. on Graphics*, 2020, 39(6): 176. [doi: [10.1145/3414685.3417809](https://doi.org/10.1145/3414685.3417809)]
- [114] Winchenbach R, Kolb A. Optimized refinement for spatially adaptive SPH. *ACM Trans. on Graphics*, 2021, 40(1): 8. [doi: [10.1145/3363555](https://doi.org/10.1145/3363555)]
- [115] Ando R, Thurey N, Tsuruno R. Preserving fluid sheets with adaptively sampled anisotropic particles. *IEEE Trans. on Visualization and*

- Computer Graphics, 2012, 18(8): 1202–1214. [doi: [10.1109/TVCG.2012.87](https://doi.org/10.1109/TVCG.2012.87)]
- [116] Adams B, Pauly M, Keiser R, Guibas LJ. Adaptively sampled particle fluids. ACM Trans. on Graphics, 2007, 26(99): 48–es. [doi: [10.1145/1276377.1276437](https://doi.org/10.1145/1276377.1276437)]
- [117] Winchenbach R, Hochstetter H, Kolb A. Infinite continuous adaptivity for incompressible SPH. ACM Trans. on Graphics, 2017, 36(4): 102. [doi: [10.1145/3072959.3073713](https://doi.org/10.1145/3072959.3073713)]
- [118] Solenthaler B, Pajarola R. Predictive-corrective incompressible SPH. ACM Trans. on Graphics, 2009, 28(3): 40. [doi: [10.1145/1531326.1531346](https://doi.org/10.1145/1531326.1531346)]
- [119] He XW, Liu N, Li S, Wang H, Wang GP. Local poisson SPH for viscous incompressible fluids. Computer Graphics Forum, 2012, 31(6): 1948–1958. [doi: [10.1111/j.1467-8659.2012.03074.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.2012.03074.x)]
- [120] Bao K, Zhang H, Zheng LL, Wu EH. Pressure corrected SPH for fluid animation. Computer Animation and Virtual Worlds, 2009, 20(2–3): 311–320. [doi: [10.1002/cav.299](https://doi.org/10.1002/cav.299)]
- [121] Wu ML, Liu SG, Xu Q. Improved divergence-free smoothed particle hydrodynamics via priority of divergence-free solver and SOR. Computer Animation and Virtual Worlds, 2021, 32(3–4): e2006. [doi: [10.1002/cav.2006](https://doi.org/10.1002/cav.2006)]
- [122] Batty C, Bertails F, Bridson R. A fast variational framework for accurate solid-fluid coupling. ACM Trans. on Graphics, 2007, 26(3): 100–es. [doi: [10.1145/1276377.1276502](https://doi.org/10.1145/1276377.1276502)]
- [123] Nair P, Tomar G. An improved free surface modeling for incompressible SPH. Computers & Fluids, 2014, 102: 304–314. [doi: [10.1016/j.compfluid.2014.07.006](https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2014.07.006)]
- [124] Takahashi T, Dobashi Y, Nishita T, Lin MC. An efficient hybrid incompressible SPH solver with interface handling for boundary conditions. Computer Graphics Forum, 2018, 37(1): 313–324. [doi: [10.1111/cgf.13292](https://doi.org/10.1111/cgf.13292)]
- [125] Wang F, Lin SJ, Luo XN, Wang RM. Coupling computation of density-invariant and divergence-free for improving incompressible SPH efficiency. IEEE Access, 2020, 8: 135912–135919. [doi: [10.1109/ACCESS.2018.2872420](https://doi.org/10.1109/ACCESS.2018.2872420)]
- [126] Monaghan JJ. SPH without a Tensile Instability. Journal of Computational Physics, 2000, 159(2): 290–311. [doi: [10.1006/jcph.2000.6439](https://doi.org/10.1006/jcph.2000.6439)]
- [127] Andrade L F DS, Sandim M, Petronetto F, Pagliosa P, Paiva A. SPH fluids for viscous jet buckling. In: Proc. of the 27th SIBGRAPI Conf. on Graphics, Patterns and Images. Rio de Janeiro: IEEE, 2014. 65–72. [doi: [10.1109/SIBGRAPI.2014.47](https://doi.org/10.1109/SIBGRAPI.2014.47)]
- [128] Zhang YL, Ban XJ, Wang XK, Liu X. A predictive-corrective SPH method for shear thinning non-newtonian fluid. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2017, 29(5): 906–913 (in Chinese with English abstract). [doi: [10.3969/j.issn.1003-9775.2017.05.015](https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-9775.2017.05.015)]
- [129] Takahashi T, Dobashi Y, Fujishiro I, Nishita T, Lin MC. Implicit formulation for SPH-based viscous fluids. Computer Graphics Forum, 2015, 34(2): 493–502. [doi: [10.1111/cgf.12578](https://doi.org/10.1111/cgf.12578)]
- [130] Bender J, Koschier D. Divergence-free SPH for incompressible and viscous fluids. IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics, 2017, 23(3): 1193–1206. [doi: [10.1109/TVCG.2016.2578335](https://doi.org/10.1109/TVCG.2016.2578335)]
- [131] Morris JP. Simulating surface tension with smoothed particle hydrodynamics. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2015, 33(3): 333–353. [doi: [10.1002/1097-0363\(20000615\)33:3<333::AID-FLD11>3.0.CO;2-7](https://doi.org/10.1002/1097-0363(20000615)33:3<333::AID-FLD11>3.0.CO;2-7)]
- [132] Yang T, Martin RR, Lin MC, Chang J, Hu SM. Pairwise force SPH model for real-time multi-interaction applications. IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics, 2017, 23(10): 2235–2247. [doi: [10.1109/TVCG.2017.2706289](https://doi.org/10.1109/TVCG.2017.2706289)]
- [133] Yang M, Li XS, Liu YQ, Yang G, Wu EH. A novel surface tension formulation for SPH fluid simulation. The Visual Computer, 2017, 33(5): 597–606. [doi: [10.1007/s00371-016-1274-4](https://doi.org/10.1007/s00371-016-1274-4)]
- [134] Yang M, Li XS, Yang G, Wu EH. SPH-based fluid simulation with a new surface tension formulation. In: Proc. of the 2015 Int'l Conf. on Virtual Reality and Visualization (ICVRV). Xiamen: IEEE, 2015. 295–300. [doi: [10.1109/ICVRV.2015.34](https://doi.org/10.1109/ICVRV.2015.34)]
- [135] Akinci N, Akinci G, Teschner M. Versatile surface tension and adhesion for SPH fluids. ACM Trans. on Graphics, 2013, 32(6): 182. [doi: [10.1145/2508363.2508395](https://doi.org/10.1145/2508363.2508395)]
- [136] Patané G. Meshless approximation and Helmholtz-hodge decomposition of vector fields. IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics, 2022, 28(2): 1328–1341. [doi: [10.1109/TVCG.2020.3016588](https://doi.org/10.1109/TVCG.2020.3016588)]
- [137] Wang XK, Liu SN, Ban XJ, Xu YR, Zhou J, Kosinka J. Robust turbulence simulation for particle-based fluids using the Rankine vortex model. The Visual Computer, 2020, 36(10–12): 2285–2298. [doi: [10.1007/s00371-020-01914-5](https://doi.org/10.1007/s00371-020-01914-5)]
- [138] Liu SN, Wang XK, Ban XJ, Xu YR, Zhou J, Kosinka J, Telea AC. Turbulent details simulation for SPH fluids via vorticity refinement. Computer Graphics Forum, 2021, 40(1): 54–67. [doi: [10.1111/cgf.14095](https://doi.org/10.1111/cgf.14095)]
- [139] Fries TP, Belytschko T. Convergence and stabilization of stress-point integration in mesh-free and particle methods. Int'l Journal for Numerical Methods in Engineering, 2008, 74(7): 1067–1087. [doi: [10.1002/nme.2198](https://doi.org/10.1002/nme.2198)]

- [140] Chalk CM, Pastor M, Peakall J, Borman DJ, Sleigh PA, Murphy W, Fuentes R. Stress-particle smoothed particle hydrodynamics: An application to the failure and post-failure behaviour of slopes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2020, 366: 113034. [doi: [10.1016/j.cma.2020.113034](https://doi.org/10.1016/j.cma.2020.113034)]
- [141] Belytschko T, Xiao SP. Stability analysis of particle methods with corrected derivatives. *Computers & Mathematics with Applications*, 2002, 43(3–5): 329–350. [doi: [10.1016/S0898-1221\(01\)00290-5](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(01)00290-5)]
- [142] Si WX, Liao XY, Qian YL, Wang Q, Heng PA. Versatile numerical fractures removal for SPH-based free surface liquids. *Computers & Graphics*, 2019, 81: 1–8. [doi: [10.1016/j.cag.2019.03.015](https://doi.org/10.1016/j.cag.2019.03.015)]
- [143] Akinci N, Ihmsen M, Akinci G, Solenthaler B, Teschner M. Versatile rigid-fluid coupling for incompressible SPH. *ACM Trans. on Graphics*, 2012, 31(4): 62. [doi: [10.1145/2185520.2185558](https://doi.org/10.1145/2185520.2185558)]
- [144] Harada T, Koshizuka S, Kawaguchi Y. Smoothed particle hydrodynamics in complex shapes. In: Proc. of the 23rd Spring Conf. on Computer Graphics. Budmerice: ACM, 2007. 191–197. [doi: [10.1145/2614348.2614375](https://doi.org/10.1145/2614348.2614375)]
- [145] Ihmsen M, Akinci N, Gissler M, Teschner M. Boundary handling and adaptive time-stepping for PCISPH. In: Proc. of the 17th Workshop on Virtual Reality Interactions and Physical Simulations. Copenhagen: Eurographics Association, 2010. 79–88. [doi: [10.2312/PE/vrphys/vrphys10/079-088](https://doi.org/10.2312/PE/vrphys/vrphys10/079-088)]
- [146] Band S, Gissler C, Teschner M. Moving least squares boundaries for SPH fluids. In: Proc. of the 13th Workshop on Virtual Reality Interactions and Physical Simulations. Lyon: Eurographics Association, 2017. 21–28. [doi: [10.2312/vrphys.20171080](https://doi.org/10.2312/vrphys.20171080)]
- [147] Band S, Gissler C, Peer A, Teschner M. MLS pressure boundaries for divergence-free and viscous SPH fluids. *Computers & Graphics*, 2018, 76: 37–46. [doi: [10.1016/j.cag.2018.08.001](https://doi.org/10.1016/j.cag.2018.08.001)]
- [148] Takahashi T, Lin MC. A multilevel SPH solver with unified solid boundary handling. *Computer Graphics Forum*, 2016, 35(7): 517–526. [doi: [10.1111/cgf.13048](https://doi.org/10.1111/cgf.13048)]
- [149] Bender J, Kugelstadt T, Weiler M, Koschier D. Volume maps: An implicit boundary representation for SPH. In: Proc. of the 12th ACM SIGGRAPH Conf. on Motion, Interaction and Games. Newcastle: ACM, 2019. 26. [doi: [10.1145/3359566.3360077](https://doi.org/10.1145/3359566.3360077)]
- [150] Koschier D, Bender J. Density maps for improved SPH boundary handling. In: Proc. of the 2017 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer Animation. Los Angeles: ACM, 2017. 1. [doi: [10.1145/3099564.3099565](https://doi.org/10.1145/3099564.3099565)]
- [151] Bender J, Kugelstadt T, Weiler M, Koschier D. Implicit frictional boundary handling for SPH. *IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics*, 2020, 26(10): 2982–2993. [doi: [10.1109/TVCG.2020.3004245](https://doi.org/10.1109/TVCG.2020.3004245)]
- [152] Fujisawa M, Miura KT. An efficient boundary handling with a modified density calculation for SPH. *Computer Graphics Forum*, 2015, 34(7): 155–162. [doi: [10.1111/cgf.12754](https://doi.org/10.1111/cgf.12754)]
- [153] Cornelius J, Bender J, Gissler C, Ihmsen M, Teschner M. An optimized source term formulation for incompressible SPH. *The Visual Computer*, 2019, 35(4): 579–590. [doi: [10.1007/s00371-018-1488-8](https://doi.org/10.1007/s00371-018-1488-8)]
- [154] Patankar SV. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. New York: CRC Press, 1980.
- [155] Takahashi T, Batty C. Monolith: A monolithic pressure-viscosity-contact solver for strong two-way rigid-rigid rigid-fluid coupling. *ACM Trans. on Graphics*, 2020, 39(6): 182. [doi: [10.1145/3414685.3417798](https://doi.org/10.1145/3414685.3417798)]
- [156] Takahashi T, Lin MC. A geometrically consistent viscous fluid solver with two-way fluid-solid coupling. *Computer Graphics Forum*, 2019, 38(2): 49–58. [doi: [10.1111/cgf.13618](https://doi.org/10.1111/cgf.13618)]
- [157] Takahashi T, Batty C. FrictionalMonolith: A monolithic optimization-based approach for granular flow with contact-aware rigid-body coupling. *ACM Trans. on Graphics*, 2021, 40(6): 206. [doi: [10.1145/3478513.3480539](https://doi.org/10.1145/3478513.3480539)]
- [158] Goldade R, Aanjaneya M, Batty C. Constraint bubbles and affine regions: Reduced fluid models for efficient immersed bubbles and flexible spatial coarsening. *ACM Trans. on Graphics*, 2020, 39(4): 43. [doi: [10.1145/3386569.3392455](https://doi.org/10.1145/3386569.3392455)]
- [159] Harada T, Koshizuka S, Kawaguchi Y. Smoothed particle hydrodynamics on GPUs. *Computer Graphics International*, 2007, 4(4): 671–691.
- [160] Ihmsen M, Akinci N, Becker M, Teschner M. A parallel SPH implementation on multi-core CPUs. *Computer Graphics Forum*, 2011, 30(1): 99–112. [doi: [10.1111/j.1467-8659.2010.01832.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.2010.01832.x)]
- [161] Winchenbach R, Kolb A. Multi-level memory structures for simulating and rendering smoothed particle hydrodynamics. *Computer Graphics Forum*, 2020, 39(6): 527–541. [doi: [10.1111/cgf.14090](https://doi.org/10.1111/cgf.14090)]
- [162] Goswami P, Schlegel P, Solenthaler B, Pajarola R. Interactive SPH simulation and rendering on the GPU. In: Proc. of the 2010 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer Animation. Madrid: Eurographics Association, 2010. 55–64.
- [163] Band S, Gissler C, Teschner M. Compressed neighbour lists for SPH. *Computer Graphics Forum*, 2020, 39(1): 531–542. [doi: [10.1111/cgf.13890](https://doi.org/10.1111/cgf.13890)]
- [164] Teschner M, Heidelberger B, Müller M, Pomerantes D, Gross MH. Optimized spatial hashing for collision detection of deformable

- objects. In: Proc. of the 8th Int'l Fall Workshop on Vision, Modeling, and Visualization. München: Aka GmbH, 2003. 47–54.
- [165] Solenthaler B, Gross M. Two-scale particle simulation. ACM Trans. on Graphics, 2011, 30(4): 81. [doi: [10.1145/2010324.1964976](https://doi.org/10.1145/2010324.1964976)]
- [166] Orthmann J, Kolb A. Temporal blending for adaptive SPH. Computer Graphics Forum, 2012, 31(8): 2436–2449. [doi: [10.1111/j.1467-8659.2012.03186.x](https://doi.org/10.1111/j.1467-8659.2012.03186.x)]
- [167] Goswami P, Pajarola R. Time adaptive approximate SPH. In: Proc. of the 8th Workshop on Virtual Reality Interactions and Physical Simulations. Lyon: Eurographics Association, 2011. 19–28.
- [168] Goswami P, Batty C. Asynchronous liquids: Regional time stepping for faster SPH and PCISPH. arXiv:2009.14514, 2020.
- [169] Gao Y, Zheng Z, Li J, Li S, Hao AM, Qin H. Dynamic particle partitioning SPH model for high-speed fluids simulation. Graphical Models, 2020, 109: 101061. [doi: [10.1016/j.gmod.2020.101061](https://doi.org/10.1016/j.gmod.2020.101061)]
- [170] Qu H, Mashayekhi O, Shah C, Levis P. Accelerating distributed graphical fluid simulations with micro-partitioning. Computer Graphics Forum, 2020, 39(1): 375–388. [doi: [10.1111/cgf.13809](https://doi.org/10.1111/cgf.13809)]
- [171] Nie X, Chen LT, Xiang T. Real-time incompressible fluid simulation on the GPU. Int'l Journal of Computer Games Technology, 2015, 2015: 417417. [doi: [10.1155/2015/417417](https://doi.org/10.1155/2015/417417)]
- [172] Huang C, Zhu J, Sun HQ, Wu EH. Efficient fluids simulation and rendering on GPU. In: Proc. of the 12th ACM SIGGRAPH Int'l Conf. on Virtual-reality Continuum and Its Applications in Industry. Hong Kong: ACM, 2013. 25–30. [doi: [10.1145/2534329.2534330](https://doi.org/10.1145/2534329.2534330)]
- [173] Zhang FQ, Hu L, Wu JW, Shen XK. A SPH-based method for interactive fluids simulation on the multi-GPU. In: Proc. of the 10th Int'l Conf. on Virtual Reality Continuum and Its Applications in Industry. Hong Kong: ACM, 2011. 423–426. [doi: [10.1145/2087756.2087834](https://doi.org/10.1145/2087756.2087834)]
- [174] Ramachandran P, Bhosale A, Puri K, Negi P, Muta A, Dinesh A, Menon D, Govind R, Sanka S, Sebastian AS, Sen A, Kaushik R, Kumar A, Kurapati V, Patil M, Tavker D, Pandey P, Kaushik C, Dutt A, Agarwal A. PySPH: A Python-based framework for smoothed particle hydrodynamics. ACM Trans. on Mathematical Software, 2021, 47(4): 34. [doi: [10.1145/3460773](https://doi.org/10.1145/3460773)]
- [175] Carenac S, Pronost N, Bouakaz S. Optimizations for predictive-corrective particle-based fluid simulation on GPU. The Visual Computer, 2022, 1–13. [doi: [10.1007/s00371-021-02379-w](https://doi.org/10.1007/s00371-021-02379-w)]
- [176] Callaham JL, Koch JV, Brunton BW, Kutz JN, Brunton SL. Learning dominant physical processes with data-driven balance models. Nature Communications, 2021, 12(1): 1016. [doi: [10.1038/s41467-021-21331-z](https://doi.org/10.1038/s41467-021-21331-z)]
- [177] Miyanawala TP, Jaiman RK. An efficient deep learning technique for the Navier-Stokes equations: Application to unsteady wake flow dynamics. arXiv:1710.09099v2, 2017.
- [178] Li ZY, Kovachki NB, Azizzadenesheli K, Liu B, Bhattacharya K, Stuart AM, Anandkumar A. Fourier neural operator for parametric partial differential equations. In: Proc. of the 9th Int'l Conf. on Learning Representations. OpenReview.net, 2020. 1–16.
- [179] Holl P, Thuerey N, Koltun V. Learning to control PDEs with differentiable physics. In: Proc. of the 8th Int'l Conf. on Learning Representations. Addis Ababa: OpenReview.net, 2020.
- [180] Xu RJ, Ren B. Solving the fluid pressure with an iterative multi-resolution guided network. The Visual Computer, 2022, 38(2): 433–442. [doi: [10.1007/s00371-020-02025-x](https://doi.org/10.1007/s00371-020-02025-x)]
- [181] Karniadakis GE, Kevrekidis IG, Lu L, Perdikaris P, Wang SF, Yang L. Physics-informed machine learning. Nature Reviews Physics, 2021, 3(6): 422–440. [doi: [10.1038/s42254-021-00314-5](https://doi.org/10.1038/s42254-021-00314-5)]
- [182] Mrowca D, Zhuang CX, Wang E, Haber N, Li FF, Tenenbaum JB, Yamins DLK. Flexible neural representation for physics prediction. In: Proc. of the 32nd Int'l Conf. on Neural Information Processing Systems. Montréal: Curran Associates Inc., 2018. 8813–8824.
- [183] Li YZ, Wu JJ, Tedrake R, Tenenbaum JB, Torralba A. Learning particle dynamics for manipulating rigid bodies, deformable objects, and fluids. In: Proc. of the 7th Int'l Conf. on Learning Representations. New Orleans: OpenReview.net, 2019. 1–15.
- [184] Wang R, Yu R. Physics-guided deep learning for dynamical systems: A survey. arXiv:2107.01272, 2021.
- [185] Werhahn M, Xie Y, Chu MY, Thuerey N. A multi-pass GAN for fluid flow super-resolution. Proc. of the ACM on Computer Graphics and Interactive Techniques, 2019, 2(2): 10. [doi: [10.1145/3340251](https://doi.org/10.1145/3340251)]
- [186] Chu MY, Thuerey N. Data-driven synthesis of smoke flows with CNN-based feature descriptors. ACM Trans. on Graphics, 2017, 36(4): 69. [doi: [10.1145/3072959.3073643](https://doi.org/10.1145/3072959.3073643)]
- [187] Shen SY, Yang Y, Shao TJ, Wang H, Jiang C, Lan L, Zhou K. High-order differentiable autoencoder for nonlinear model reduction. ACM Trans. on Graphics, 2021, 40(4): 68. [doi: [10.1145/3450626.3459754](https://doi.org/10.1145/3450626.3459754)]
- [188] Ma PC, Tian YS, Pan ZR, Ren B, Manocha D. Fluid directed rigid body control using deep reinforcement learning. ACM Trans. on Graphics, 2018, 37(4): 96. [doi: [10.1145/3197517.3201334](https://doi.org/10.1145/3197517.3201334)]
- [189] Xie Y, Franz E, Chu MY, Thuerey N. tempoGAN: A temporally coherent, volumetric GAN for super-resolution fluid flow. ACM Trans. on Graphics, 2018, 37(4): 95. [doi: [10.1145/3197517.3201304](https://doi.org/10.1145/3197517.3201304)]

- [190] Tompson J, Schlachter K, Sprechmann P, Perlin K. Accelerating eulerian fluid simulation with convolutional networks. In: Proc. of the 34th Int'l Conf. on Machine Learning. Sydney: JMLR.org, 2017. 3424–3433.
- [191] Kim B, Azevedo VC, Thuerey N, Kim T, Gross M, Solenthaler B. Deep Fluids: A generative network for parameterized fluid simulations. Computer Graphics Forum, 2019, 38(2): 59–70. [doi: [10.1111/cgf.13619](https://doi.org/10.1111/cgf.13619)]
- [192] Wiewel S, Becher M, Thuerey N. Latent space physics: Towards learning the temporal evolution of fluid flow. Computer Graphics Forum, 2019, 38(2): 71–82. [doi: [10.1111/cgf.13620](https://doi.org/10.1111/cgf.13620)]
- [193] Xiao XY, Zhou YQ, Wang H, Yang XB. A novel CNN-based poisson solver for fluid simulation. IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics, 2020, 26(3): 1454–1465. [doi: [10.1109/TVCG.2018.2873375](https://doi.org/10.1109/TVCG.2018.2873375)]
- [194] Yang C, Yang XB, Xiao XY. Data-driven projection method in fluid simulation. Computer Animation & Virtual Worlds, 2016, 27(3–4): 415–424. [doi: [10.1002/cav.1695](https://doi.org/10.1002/cav.1695)]
- [195] Xiao XY, Yang C, Yang XB. Adaptive learning-based projection method for smoke simulation. Computer Animation & Virtual Worlds, 2018, 29(3–4): e1837. [doi: [10.1002/cav.1837](https://doi.org/10.1002/cav.1837)]
- [196] Um K, Hu XY, Thuerey N. Liquid splash modeling with neural networks. Computer Graphics Forum, 2018, 37(8): 171–182. [doi: [10.1111/cgf.13522](https://doi.org/10.1111/cgf.13522)]
- [197] Bai K, Wang CH, Desbrun M, Liu XP. Predicting high-resolution turbulence details in space and time. ACM Trans. on Graphics, 2021, 40(6): 200. [doi: [10.1145/3478513.3480492](https://doi.org/10.1145/3478513.3480492)]
- [198] Gao Y, Zhang QC, Li S, Hao AM, Qin H. Accelerating liquid simulation with an improved data-driven method. Computer Graphics Forum, 2020, 39(6): 180–191. [doi: [10.1111/cgf.14010](https://doi.org/10.1111/cgf.14010)]
- [199] Ladický L, Jeong S, Solenthaler B, Pollefeys M, Gross M. Data-driven fluid simulations using regression forests. ACM Trans. on Graphics, 2015, 34(6): 199. [doi: [10.1145/2816795.2818129](https://doi.org/10.1145/2816795.2818129)]
- [200] Schenck C, Fox D. SPNets: Differentiable fluid dynamics for deep neural networks. In: Proc. of the 2nd Conf. on Robot Learning. Zurich: PMLR, 2018. 317–335.
- [201] Ummenhofer B, Prantl L, Thuerey N, Koltun V. Lagrangian fluid simulation with continuous convolutions. In: Proc. of the 8th Int'l Conf. on Learning Representations. Addis Ababa: OpenReview.net, 2020. 1–15.
- [202] Tumanov E, Korobchenko D, Chentanez N. Data-driven particle-based liquid simulation with deep learning utilizing sub-pixel convolution. Proc. of the ACM on Computer Graphics and Interactive Techniques, 2021, 4(1): 12. [doi: [10.1145/3451261](https://doi.org/10.1145/3451261)]
- [203] Zeiler MD, Krishnan D, Taylor GW, Fergus R. Deconvolutional networks. In: Proc. of the 2010 IEEE Computer Society Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. San Francisco: IEEE, 2010. 2528–2535. [doi: [10.1109/CVPR.2010.5539957](https://doi.org/10.1109/CVPR.2010.5539957)]
- [204] Sanchez-Gonzalez A, Godwin J, Pfaff T, Ying R, Leskovec J, Battaglia PW. Learning to simulate complex physics with graph networks. In: Proc. of the 37th Int'l Conf. on Machine Learning. JMLR.org, 2020. 8459–8468.
- [205] Guan SY, Deng HY, Wang YB, Yang XK. NeuroFluid: Fluid dynamics grounding with particle-driven neural radiance fields. In: Proc. of the 2022 Int'l Conf. on Machine Learning. Baltimore: PMLR, 2022. 7919–7929.
- [206] Li YZ, Lin TR, Yi KX, Bear DM, Yamins DLK, Wu JJ, Tenenbaum JB, Torralba A. Visual grounding of learned physical models. In: Proc. of the 37th Int'l Conf. on Machine Learning. JMLR.org, 2020. 550.
- [207] Gissler C, Band S, Peer A, Ihmsen M, Teschner M. Approximate air-fluid interactions for SPH. In: Proc. of the 13th Workshop on Virtual Reality Interactions and Physical Simulations. Lyon: Eurographics Association, 2017. 29–38. [doi: [10.2312/vrphys.20171081](https://doi.org/10.2312/vrphys.20171081)]
- [208] Jiang Y, Li C, Deng S, Hu SM. A divergence-free mixture model for multiphase fluids. Computer Graphics Forum, 2020, 39(8): 69–77. [doi: [10.1111/cgf.14102](https://doi.org/10.1111/cgf.14102)]
- [209] Wang MD, Deng YT, Kong XX, Prasad AH, Zhu B. Thin-film smoothed particle hydrodynamics fluid. ACM Trans. on Graphics, 2021, 40(4): 110. [doi: [10.1145/3450626.3459864](https://doi.org/10.1145/3450626.3459864)]
- [210] Hochstetter H, Kolb A. Evaporation and condensation of SPH-based fluids. In: Proc. of the ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer Animation. Los Angeles: ACM, 2017. 3. [doi: [10.1145/3099564.3099580](https://doi.org/10.1145/3099564.3099580)]
- [211] Becker M, Tessendorf H, Teschner M. Direct forcing for lagrangian rigid-fluid coupling. IEEE Trans. on Visualization and Computer Graphics, 2009, 15(3): 493–503. [doi: [10.1109/TVCG.2008.107](https://doi.org/10.1109/TVCG.2008.107)]
- [212] Shao X, Zhou Z, Magnenat-Thalmann N, Wu W. Stable and fast fluid-solid coupling for incompressible SPH. Computer Graphics Forum, 2015, 34(1): 191–204. [doi: [10.1111/cgf.12467](https://doi.org/10.1111/cgf.12467)]
- [213] Abu Rumman N, Nair P, Müller P, Barthe L, Vanderhaeghe D. ISPH-PBD: Coupled simulation of incompressible fluids and deformable bodies. The Visual Computer, 2020, 36(5): 893–910. [doi: [10.1007/s00371-019-01700-y](https://doi.org/10.1007/s00371-019-01700-y)]
- [214] Lenaerts T, Adams B, Dutré P. Porous flow in particle-based fluid simulations. ACM Trans. on Graphics, 2008, 27(3): 49. [doi: [10.1145/1360612.1360648](https://doi.org/10.1145/1360612.1360648)]

- [215] Lin WC. Boundary handling and porous flow for fluid-hair interactions. *Computers & Graphics*, 2015, 52: 33–42. [doi: [10.1016/j.cag.2015.06.005](https://doi.org/10.1016/j.cag.2015.06.005)]
- [216] Solenthaler B, Pajarola R. Density contrast SPH interfaces. In: Proc. of the 2008 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symp. on Computer Animation. Dublin: Eurographics Association, 2008. 211–218.
- [217] Cleary PW, Pyo SH, Prakash M, Koo BK. Bubbling and frothing liquids. *ACM Trans. on Graphics*, 2007, 26(3): 97–es. [doi: [10.1145/1276377.1276499](https://doi.org/10.1145/1276377.1276499)]
- [218] Kim B, Azevedo VC, Gross M, Solenthaler B. Lagrangian neural style transfer for fluids. *ACM Trans. on Graphics*, 2020, 39(4): 52. [doi: [10.1145/3386569.3392473](https://doi.org/10.1145/3386569.3392473)]
- [219] Hu YM, Anderson L, Li TM, Sun Q, Carr N, Ragan-Kelley J, Durand F. DiffTaichi: Differentiable programming for physical simulation. In: Proc. of the 8th Int'l Conf. on Learning Representations. Addis Ababa: OpenReview.net, 2020. 1–20.
- [220] Takahashi T, Liang JB, Qiao YL, Lin MC. Differentiable fluids with solid coupling for learning and control. In: Proc. of the 35th AAAI Conf. on Artificial Intelligence. Palo Alto: AAAI Press, 2021. 6138–6146. [doi: [10.1609/aaai.v35i7.16764](https://doi.org/10.1609/aaai.v35i7.16764)]
- [221] Hu YM, Liu JC, Spielberg A, Tenenbaum JB, Freeman WT, Wu JJ, Rus D, Matusik W. ChainQueen: A real-time differentiable physical simulator for soft robotics. In: Proc. of the 2019 Int'l Conf. on Robotics and Automation (ICRA). Montreal: IEEE, 2019. 6265–6271. [doi: [10.1109/ICRA.2019.8794333](https://doi.org/10.1109/ICRA.2019.8794333)]

#### 附中文参考文献:

- [45] 邵绪强, 梅鹏, 陈文新. 基于稳定性SPH-SWE数值模型的真实感流体动画实时模拟. *物理学报*, 2021, 70(23): 234701. [doi: [10.7498/aps.70.20211251](https://doi.org/10.7498/aps.70.20211251)]
- [128] 张雅斓, 班晓娟, 王笑琨, 刘幸. 剪切变稀型SPH非牛顿流体的预测-校正方法. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2017, 29(5): 906–913. [doi: [10.3969/j.issn.1003-9775.2017.05.015](https://doi.org/10.3969/j.issn.1003-9775.2017.05.015)]



刘树森(1988—), 男, 博士生, 主要研究领域为计算机图形学, 物理仿真.



王文成(1967—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 高级会员, 主要研究领域为可视化, 计算机图形学, 虚拟现实, 图像编辑.



何小伟(1985—), 男, 博士, 副研究员, CCF 专业会员, 主要研究领域为计算机图形学, 物理仿真.



吴恩华(1947—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, CCF 会士, 主要研究领域为虚拟现实, 真实感图形生成, 基于物理的仿真与实时计算, 基于物理的建模与绘制, 图像与视频的处理与建模, 视觉计算与机器学习.