

2022 数模集训之短学期集训模型 1（内部使用）：

游泳池水中余氯浓度分析和控制策略研究

夏季一到，杭州各处游泳馆相继开放迎客，泳池内已出现人头攒动的热闹景象。特别是杭州电子科技大学新建游泳馆也正式大气登场（如图 1），积攒了大量杭电新粉。



图 1 杭州电子科技大学游泳馆白天、夜间实景图

为了确保游泳者的身体健康，泳池除了设施完整、配备齐全之外，水质安全格外重要，因此务必对池水定期消毒。当前最常用的是氯消毒方法，使用一种以三氯异氰尿酸（化学式 $C_3N_3O_3Cl_3$ ，俗称强氯精，简称 TCCA）为主要成分的消毒剂，专用加药设备（如图 2）在需要时通过多个加药泵同时注入泳池，由于药水浓度较大但体积小，故不需要将泳池的水排出即可完成加药消毒工作。



图 2 加药设备间实景图

根据最新《建筑给水排水与节水通用规范》（见附件 1，2022 年 4 月 1 日起生效）中第 6 章人工游泳池水质国家标准，其中最重要指标之一是第 7 条：游离性余氯 $0.3\sim 1.0\text{mg/L}$ 。结合相关卫生健康要求，国家规定游泳池中标准余氯量为 $0.4\sim 0.6\text{mg/L}$ ，略高出 0.6mg/L 虽不致伤及身体但会因刺鼻气味影响游泳体验，低于 0.4mg/L 会降低甚至失去消毒效果。因此，游泳池通过合适方法控制好池中余氯浓度始终保持在 $0.4\sim 0.6\text{mg/L}$ 至关重要。

游泳池水中的余氯浓度的影响因素主要包含气温、消毒剂、游泳者以及泳池容积、营业时间等。主要因素如气温则考虑日最低、最高气温，以及一天内的气温变化造成余氯浓度随之变化的影响；消毒剂则包括溶解度、加药泵流速和加药时长等影响余氯浓度增量；游泳者主要是指游泳人数和时长对余氯量下降的影响。

下面要求你们团队借助文献资料和计算机软件，通过机理分析，根据实际情境和实验数据分析，建立恰当数学模型完成以下几个问题：

（1）通常泳池有顶棚设计但会多开设窗户（如图 1），保持室内舒适但又与室外气温相差不大。请根据气象数据获得杭州 2022 年 6 月 27 日最高气温和最低气温，建立数学模型描述白天（假设平均日长为 14 小时）的气温和晚上（平均夜长为 10 小时）气温随时间的变化规律，并依据附件 2 及网址 <http://lishi.tianqi.com/hangzhou> 上气温数据，建模预测 2022 年 7 月 29 日和 7 月 30 日杭州电子科技大学游泳馆内两天各自 24 小时的气温变化曲线。

(2) 在无游泳者情况下, 池中氯的反应速率 v (mg/(L·h))跟游离态余氯浓度 y (mg/L)成正比, 且受到气温 $T(^{\circ}\text{C})$ 影响。当气温控制在常温 (25°C) 情况下, 余氯从起始浓度 0.6mg/L 反应降到 0.05mg/L 时, 统计得平均反应速率 $\bar{v} = 0.025\text{mg}/(\text{L} \cdot \text{h})$, 请你们建立合适模型, 获得反应速率与余氯浓度的关系, 求解余氯浓度达到 0.05mg/L 的时长, 并描绘出余氯量随时间的变化曲线。

考虑到气温因素, 余氯反应速率跟气温和浓度有如下经验关系式 $v \propto 10^{\frac{T-25}{5}} \cdot y$, 余氯的反应速率 v 跟气温 T 成指数增长关系。请你们进一步建立数学模型进行下面预测: 根据第一问得到的气温曲线, 获得杭电游泳馆 2022 年 7 月 29 日 (周五不开放, 检修一天) 池中余氯量降低至 0.4mg/L 的时刻 (已知早上 9 点整初始池水余氯浓度为 0.6mg/L), 并请完整描绘出 7 月 29 日一整天池中余氯浓度随时间变化曲线图。

(3) 在有游泳者情况下, 当池水余氯浓度小于 0.4mg/L 时必须立即开启加药泵, 使得余氯量快速增至 0.6mg/L 时关闭。因为游泳者在水中搅动, 加上汗液和身体细菌以及小孩尿液等, 对池中余氯浓度影响明显 (附件 3 数据给出了游泳人数和 1 小时后余氯浓度下降统计), 请同学们建模分析余氯浓度下降规律, 并确定第一次加药时间。

假设杭电游泳馆在 2022 年 7 月 30 日早上 9 点 (余氯浓度 0.6mg/L) 开放后, 上午场 (9:00-11:00) 每小时在场人数分别为 80 人, 190 人; 下午第 1 场 (12:00-14:00) 每小时在场人数分别为 220 人, 340 人, 下午第 2 场 (15:00-17:00) 每小时在场人数分别为 280 人, 380 人; 晚上场 (18:00-21:00) 每小时在场人数分别为 200 人, 360 人, 480 人, 520 人。根据余氯降低至下限 (0.4mg/L) 时需要加药使得两个泳池余氯浓度增加至 0.6mg/L , 如果不考虑加药时间 (忽略不计), 请你们建模给出一天内加药的时间点, 并完整描绘出余氯浓度值与时间的变化曲线图。

(4) 因气温升高和游泳人数增加, 余氯浓度下降快, 如果考虑加药需要时间 (附件 4 数据给出余氯浓度增量与加药时长关系实验结果), 可能会出现余氯持续偏低而在频繁加药, 从而会造成被迫限制游泳进场人数, 不利于游泳馆营业营收。通过加药时间点以及加药时长的控制策略的分析调整, 请你们结合进场人数控制等因素, 构建合适的优化模型使杭电游泳馆在固定开放场次的前提下, 获得尽可能高的营业收入。最后结合模型综合分析讨论, 给首次经营游泳馆的管理者们提出一些有益建议。

附注:

1. 泳池初加水为自来水, 已知自来水的余氯浓度为 0.05mg/L 。
2. 气温和水温在夏天一般相差 $1.5\sim 2.5^{\circ}\text{C}$, 高温时 (35°C 及以上) 相差 $3.5\sim 4^{\circ}\text{C}$ 。
3. 杭电游泳馆配备双池: 标准池 50×25 米, 共 8 泳道, 其中 4 道 2.2 米 (均深) 另 4 道 1.1 米 (均深); 训练池 25×23 米, 共 8 泳道, 1.0-1.2 米 (渐深)。
4. 杭电游泳馆的开放时段 (6 月 1 日起)
上午: 9:00-11:00; 下午: 12:00-14:00; 15:00-17:00; 晚上: 18:00-21:00。
5. 根据规定游泳池要保证人均 3.5 平方米, 故杭电游泳馆的池面饱和人数约 521 人。