基于微分方程模型的热水器预设温度问题研究

摘要

储水式电热水器的温度设定和能耗控制，是用户体验和节能减排的重要依据。本文针对加热等待时间和耗电量的权衡考虑，通过建立微分方程模型，实现了对于热水器预设温度最优质的求解。

针对问题一，考虑到热水器本身的加热以及与外界的温度交换作用，建立热水器与外界的换热微分模型，采用有限差分法中的改进欧拉法对其进行求解，最终得到从 20℃加热到 60℃的所需时间为 113.44 分钟。

针对问题二，对于夏天和冬天，要分别考虑热水器在“电源一直开启”和“洗澡前开启”两种模式下的耗电情况分析。没有洗澡时，建立一个热水器自然降温模型，在洗澡时，就要考虑水箱内不断补充水，导致水箱内温度下降，建立水箱内温度分层模型，进而对耗电量进行求解，我们计算出不同室温下的两种模式的耗电量，结果是电源一直开启时的耗电量要始终低于洗澡前开启的耗电量，具体数据详见表 3 和表 6。

针对问题三，要求设定夏季和冬季的最佳洗澡温度。在不洗澡时，影响温度降低的主要因素为热水器壁体向外散热，所以设定温度越低，散热能力越弱，保温效果越好。根据前两问的热水器内温度变化方程，建立在不同室温下，洗澡后水温降低到出水温度时所需设定温度的微分方程模型，寻找最优设定温度。通过有限差分的改进欧拉法对其进行求解得到最终结果为：夏季预设温度为 42℃、冬季预设温度为 66.89℃。

针对问题四，该问题为多目标优化问题，要同时考虑耗电量与等待时间两个优化目标。通过微分方程，耗电量目标可以使用加热时间目标替换，等待时间即考虑两次洗澡之间的间隔时间，再将等待时间与加热时间相乘，将双目标优化问题转换成单目标优化问题。通过物理关系构建不同室温、不同热水器温度下，加热时间随初始终止温度变化的偏微分方程并继续运用第二问与第三问中的偏微分方程，寻求最优设定温度。利用欧拉数值方法求解偏微分方程，最后用定步长搜索法找到最优温度。得到最有温度为 70℃。

本文的特色在于将储水式电热水器温度设定的机理分析与微分方程相结合，并灵活采用有限差分进行求解。此外，对于多目标的最优化模型，设计了定步长搜索算法，在保证了求解精度的同时，有效降低了运算的时间复杂程度，为热水器温度的合理设定提供了参考依据。

关键词：温度设定；微分方程；改进欧拉法；多目标优化；定步长搜索法。

一、问题重述

1.1 问题背景

电热水器是指以电作为能源进行加热的热水器。是与燃气热水器、太阳能热水器相并列的三大热水器之一。电热水器按加热功率大小可分为储水式（又称容积式或储热式）、即热式、速热式（又称半储水式）三种。

普通速热式电热水器与双模电热水器虽然体积差不多，但内部结构却大相径庭，速热式电热水器与储水式电热水器比仅仅是体积较小，功率更大，所以在加热速度上确实比储水式电热水器更快.

储水式电热水器按照安装方式可分为壁挂（横式）式电热水器和落地式（竖式）热水器，壁挂式电热水器容积通常为40L-100L，落地式热水器容积通常为100L以上。家用储水式电热水器具有安装方便，出水量大，水温稳定等特点，但传统的储水式电热水器加热速度慢，等待时间较长

1.2 要解决的问题

热水器工作过程如下：开启电源开关，并设定温度进行加热，直至水温达到设定温度后停止加热，而当水温降至所设定温度以下 5 度时，热水器将重新开始加热，如此往复，实现恒定提供热水的作用。

现杭州市有一用户家庭，安装了某一品牌 60L 储水式电热水器，其电热水器额定功率 1500（W），电压 220（V），频率 5（0HZ）,设定温度范围 30-75（ ℃），机器尺寸 842 * 400 *400；一级能效等级，其热水器外表散热面积 1.08（2），热水器壁体平均传热系数0.879（W/ ℃· 2）。假设电热水器在用水时段采取恒流恒温方式，在混水管上装有恒温阀，用混水管提供热水，即用水期间因恒温阀有恒温功能，在保持出水流量不变的同时， 也保持出水温度不变；出水流量为 8，出水温度夏天为 37（ ℃）、冬天为 42（ ℃），每人洗澡时间为 900（s）；水的最大密度为103(kg/3)，水在常温时比热约为 4.2 × 103(J/kg · 0)。

请你们团队根据热水器工作过程，通过合理假设，建立数学模型，解决储水式电热水器的温度设定以下相关问题。

（1）给出将初始水温 20（ ℃）（此时，假设室内温度与初始水温相同）加热到设定温度 60（ ℃）所需化时间。

（2）考虑杭州市用户冬、夏两季的洗澡需求（夏季电热水器设定温度 45 ℃，冬季

电热水器设定温度 60 ℃），请查阅相关资料、数据，建立数学模型，分析对比“电源一直开启”和“洗澡前开启”两种模式下，电热水器的电量消耗情况。

（3）“电源一直开启”模式能够随时满足用户的热水需求。然而，在“电源一直开启”模式下温度设定越高，热水器反复加热越频繁，导致电量的浪费。因此，就根据附表 1、2 分别为杭州市此用户家庭夏季、冬季代表性一天的室内温度变化，请你们在“ 电源一直开启”的模式下找到一个最佳的设定温度（日常恒定温度），既能满足一个人随时洗澡，又能使电量消耗最小。

（4）在问题 3 基础上，若能满足两个人洗澡，但用户可以等待，即在洗澡前将温度调高至所需温度继续加热，就根据附表 2 杭州市此用户家庭冬季代表性一天室内气温数据，设计一个合适的设定温度，实现电量消耗较少与用户等待时间较小之间的平衡方 案，从而满足用户对于电量消耗和等待时间的要求。

二、问题分析

2.1 问题一分析

针对问题 1，热水器中水温要从 20℃升高到 60℃，在这个过程中，要考虑到热水器在以恒定功率加热，同时以热传导的形式散热。所以要建立热水器升温模型，得到热水器内水温和时间的微分方程，然后根据已知条件进行定积分求解。

2.2 问题二分析

针对问题 2，对于夏天和冬天，要分别考虑热水器在“电源一直开启”和“洗澡前开启“两种模式下的耗电情况分析。对于非洗澡时，要考虑加热升温和非加热降温两种情况，即要再建立一个热水器降温模型；对于洗澡情况，就要考虑水箱内不断补充水，导致水箱内温度下降，需要建立水箱内热传递模型，进而对耗电量进行求解。

2.3 问题三分析

针对问题三，问题三要求电源一直开启，此时会面临温度降低导致的加热频繁问题，每次加热都需要消耗电量，如何寻找一个合适的设定温度，使得加热次数减少，成为关键问题，分析温度降低的因素可以知道，在不洗澡时，影响温度降低的因素主要来自于热水器壁体向外散热，而该散热量与内外温差成正比，所以设定温度越低，散热能力越弱，保温效果越好，进而间隔两次加热的时间也能加长，一天内加热所消耗的电量越少，但同时要保证一个人可以随时洗澡，就要保证设定温度低于五度时洗澡，也能洗 15 分钟，最终热水器中温度降低到夏天 37℃，冬天 42℃这两个临界条件。综上所述，只需要求得的设定温度低于 5 摄氏度时开始洗澡，洗澡后温度降到临界条件时的设定温度即为最

优的设定温度（日常恒定温度）。

2.4 问题四分析

针对问题四，该问题在问题三的基础上，变为了两个人，此时需要考虑不单单是第一个人洗澡情况，同时要考虑第二个人洗澡，水需要再次加热才能洗澡，对于加热消耗的电量与人的等待时间之间建立一个规划模型，选定出合适的预定温度，来平衡二者的关系。

三、模型假设

1. 忽略储水箱内部的结构设计，将其等价为圆柱体,具体参数见上述规格表1数据。
2. 进水管与出水管等高，进水管与出水管直径相等;且进出水过程是连续变化的，即进水与出水均是同时发生和停止。
3. 储水箱内的水的密度均匀，各向具有同一性，水的密度不因温度改变而改变。
4. 进水管进水流量一定，流速均匀。
5. 忽略内部压强对进出水的影响以及对水温的影响。
6. 出水流量指代的是洗浴莲蓬头单位时间水的流出量。
7. 忽略保温层与外保护层、外保护层与烤漆层之间的接触热阻
8. 假设洗澡时室温不变
9. 假设洗澡时混水管一直出水。
10. 假设水温变化时，水的密度不变。
11. 假设洗澡时间固定，只能是900秒。

四、符号说明

符号	说明
M	热水器水的质量
v_1	热水器出水速度
v	混水管出水速度
T_0	室温温度
dm	单位时间进水质量
T_1	出水层温度
M_1	出水层质量
C	水的比热
V	热水器的容积

五、模型的建立与求解

5.1 问题一模型的建立与求解

5.1.1 模型的建立

在问题一中，热水器中水温要从 20℃升高到 60℃，在这个过程中，要考虑到热水器在以恒定功率加热，同时以热传导的形式散热。

电热水器的能耗是通过对热水能耗和热水器的散热能耗计算确定的。所谓热水能耗是洗浴时热水所具有的能量,而散热能耗主要针对于电热水器连续运行时由于散热而引起的能量损失。热水器热水能耗可以由能量平衡直接得到(输人电量与热水能量增量的平衡)。

散热过程是一个非稳态的传热过程,因此计算过程需要运用总传热系数法进行运算"。同时对电热水器建立等温容器的换热模型并对其进行散热分析。

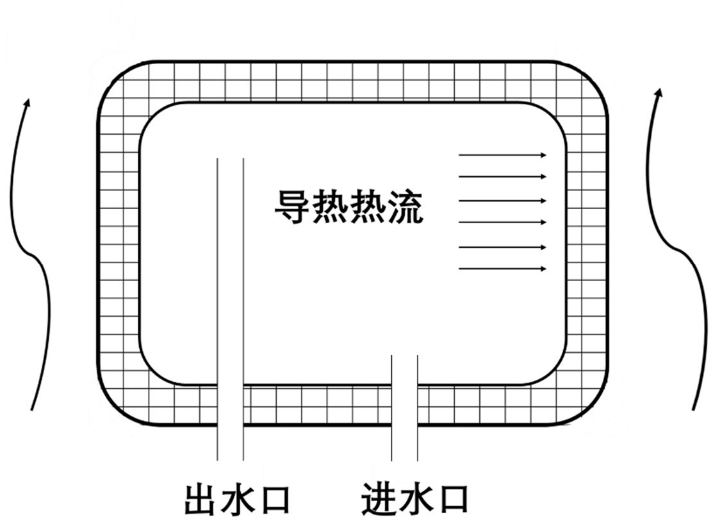

图 1：统计图或绘图

因此要考虑热水器做功的功率以及热传递散热两方面的热量，电热水器可以抽象成一个圆柱体，放通过电热热水器的会与外界环境进行热传递，从而导致一部分热量的散失，而根据热动力学原理，这部分散失热量的值和内部温度、外部温低，接触面积等因素有关，因此，对于电热水器的散热功率，有如下公式

$$P_1 = \alpha S(T - T_0) \tag{1}$$

根据题意，电热水器的热水功率

$$P_2 = 1500 \tag{2}$$

由题意，要建立热水器升温模型，得到热水器内水温和时间的微分方程，然后根据已知条件进行定积分求解。

$$dt = CMdt \tag{3}$$

对其两边进行积分，变换等，得到

$$\int_0^t dt = \int_{T_a}^{T_b} \frac{1}{\alpha S} CMd(\ln\ P_2 t\alpha S T_0) \tag{4}$$

整理得到关于加热时间 t 的数学模型为：

$$t = \frac{\sigma M}{\sigma S} \ln \frac{P_2 t\alpha S T_0 - \alpha S T_A}{P_2 t\alpha S T_0 - \alpha S T_B} \tag{5}$$

5.1.2 模型的求解

根据建立的微分方程模型，带入数值进行求解。

首先初始水温为 20℃，目标温度为 60℃，即

Ta=20℃ ，Tb=60℃

此外，其余参与可由题目中所给的热水器参数获得，带入求解得，从 20℃加热到目标温度 60℃所需要的时间为 6806.52241s，即 113.44 分钟。

以此可得，热水器内的水温随着时间的变化图像如下：

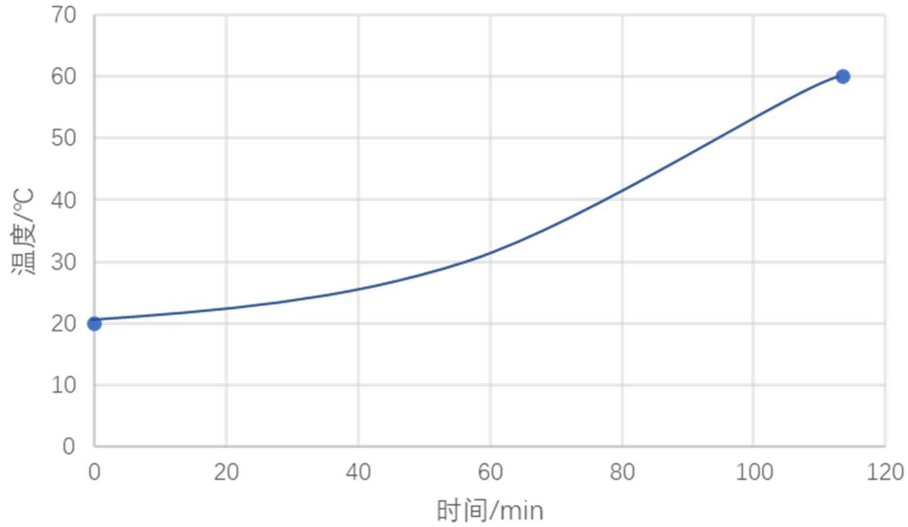

图 2：热水器温度随时间变化

5.2 问题二模型的建立与求解

5.2.1 模型的建立

对两种模式的理解：

电源一直开启是指电热水器只要温度与设定温度相差大于 5℃，就开始加热，无论是否要洗澡，同时每天 24h 都可能加热，记为模式 1。

洗澡前开启是指电热水器只在洗澡前打开，等到水温上升到设定温度，再去洗澡，最后在洗澡结束后关闭热水器，记为模式 2。

非洗澡降温模型：

在不洗澡也不加热的情况下，热水器中的水会通过热传导降温，温度随时间的变化公式为：

$$-P_1 \cdot dt = C \cdot M \cdot dT \tag{6}$$

其中，P_1为热传导降温功率，单位为 w，C 为水的比热，单位为$J/(kg \cdot ℃)$，M 为热水器中水的质量，单位为 Kg。

假设当温度从T_b下降到T_a时，所用时间为 t，得到如下公式：

$$\int_0^t dt = \int_{T_a}^{T_b} -\frac{CM}{\alpha S} * \frac{1}{T_0 - T} \, d(T_0 - T) \tag{7}$$

其中，T_0为室温，单位为℃。

化简得降温时间到：

$$t = \frac{CM}{\alpha S} * \ln \frac{T_0 - T_b}{T_0 - T_a} \tag{8}$$

洗澡水箱内热传递模型

由于热水器是从下端进水，上端出水，进入的凉水会造成下端温度降低，并逐步影响上层温度，所以会造成热水器内部水的温度分布不均，并以垂直分布，上端温度高，下端温度低，我们将其简化为三层模型，分别为记为出水层、进水层、过渡层，每一层体积、质量相同，分别为M_1、M_2、M_3，则有：

$$M_1 = M_2 = M_3 = \frac{M}{3}$$

如图：

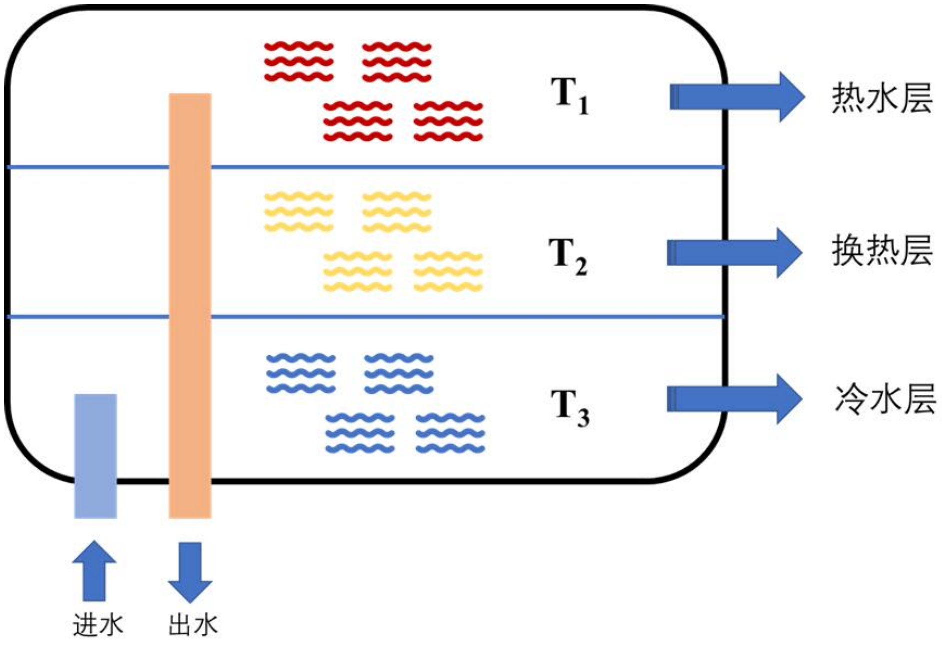

图 3： 水箱温度分层图

记热水器出水速度为 $v_1\ m/s$，热水器出水温度为T ℃，混水管出水速度为 $v\ m/s$，混水管出水温度为T_e ℃，室温温度为T_0 ℃，则有：

$$T \cdot v_1 + T_0(v - v_1) = T_e \cdot v \tag{9}$$

记热水器单位时间进水质量为 dm，则有：

$$dm = v_1 \cdot dt$$

进水层温度与时间的微分方程为：

$$T_3' \cdot M_3 = T_0 \cdot dm + T_3 \cdot (M_3 - dm) \tag{10}$$

其中，T_3为进水层温度，单位为℃，T_3'为下一时刻进水层温度，单位为℃，dm为单位时间进水量，单位为kg/s，T_0为洗澡时室温，单位为℃。

过渡层温度与时间的微分方程为：

$$T_2' \cdot M_2 = T_3 \cdot dm + T_2 \cdot (M_2 - dm) \tag{11}$$

其中，T_2为过渡层温度单位为℃，T_2'为下一时刻过渡层温度，单位为℃。

出水层温度与时间的微分方程为：

$$T_1' \cdot M_1 = T_2 \cdot dm + T_1 \cdot (M_1 - dm) \tag{12}$$

其中，T_1为出水层温度单位为℃，T_1'为下一时刻出水层温度，单位为℃。

对于整个水箱有：

$$P_1 \cdot dt - K \cdot S(T - T_0)dt - C \cdot dm(T_1 - T_2) = C \cdot dm \cdot dT \tag{13}$$

5.2.2 模型的求解

一天内的耗电量，分为洗澡时间的耗电量和非洗澡时间的耗电量， 对于非洗澡时间的耗电量，只需要计算一天内需要加热几次，每次的加热时间即可，对于洗澡时间的耗电量，模式 1 洗完澡后必须加热到设定温度，而模式 2 洗澡一直加热，洗完澡就不需要再对其加热。

a. 对于夏天，电源一直开启模式

夏天的设定温度为 45℃，对于电源一直开启的模式下，热水器的温度一定是维持在 40~45℃之间，利用上文非洗澡时间升温和降温模型，计算得到不同室温下，温度上升 5℃的时间已经温度下降温度 5℃的时间，如下表所示：

表 1：夏天模式 1 升降温时间

室温/℃	26	27	28	29	30	31	32
降温 5℃时间/h	22.51792	23.99567	25.68309	27.62877	29.89778	32.57942	35.79989
升温 5℃时间/h	0.235796	0.235645	0.235495	0.235344	0.235194	0.235044	0.234894
加热次数	1.065818	1.000181	0.934467	0.86866	0.802735	0.736661	0.670393
加热总时间	0.251315	0.235688	0.220062	0.204434	0.188799	0.173148	0.157472

由表格可以知道，降温时间远大于加热时间，故可以将加热时间忽略，然后求得一天内加热次数，乘上加热时间，就可以计算得出一天内总的耗电量，结果如下：

表 2：夏天模式 1 耗电量

室温/℃	26	27	28	29	30	31	32
不洗澡耗电量/kw·h	0.376973	0.353531	0.330093	0.306651	0.283198	0.259722	0.236207

洗澡耗电量/kw·h	0.621925	0.565242	0.508588	0.451963	0.395367	0.338799	0.282261
总耗电量/kw·h	0.998898	0.918774	0.838681	0.758614	0.678565	0.598521	0.518468

b.对于夏天，电源洗澡前开启模式

对于洗澡前开启模式，一天只需要加热一次，但是要从室温加热到预定温度，利用上文建立的非洗澡加热模型，可以求出加热时间，从而求出耗电量

表 3：夏天模式 2 耗电量

室温/℃	26	27	28	29	30	31	32
从室温加热到 45 时间/h	0.892041	0.844821	0.797632	0.750473	0.703344	0.656245	0.609176
不洗澡耗电量耗电量/kw·h	1.338061	1.267232	1.196448	1.125709	1.055016	0.984367	0.913764
洗澡耗电量/kw·h	0.316	0.295	0.274	0.253	0.232	0.211	0.19
总耗电量/kw·h	1.654061	1.562232	1.470448	1.378709	1.287016	1.195367	1.103764

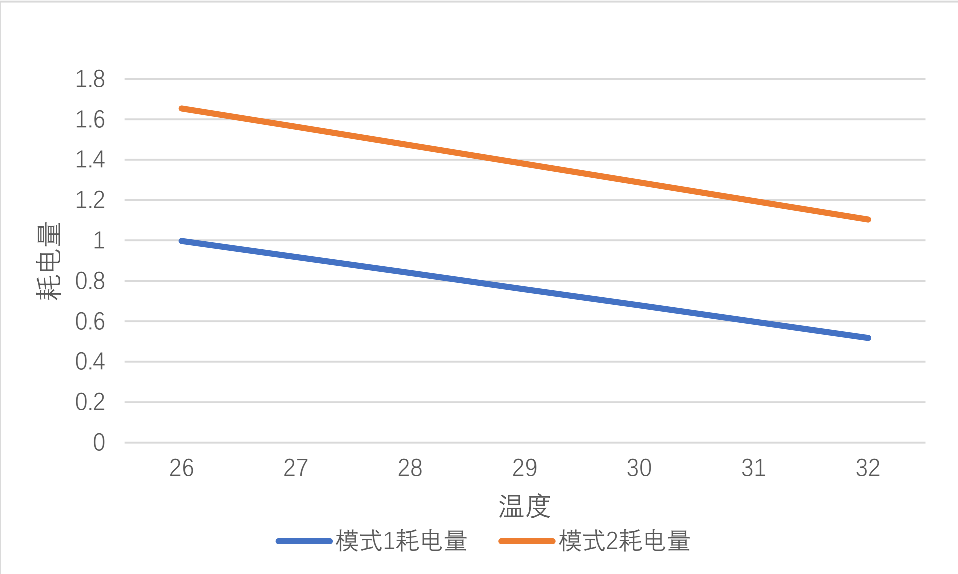

图 1：夏天耗电量与温度关系图

c.对于冬天，电源一直开启模式

冬天的设定温度为 60℃，对于电源一直开启的模式下，热水器的温度一定是维持在 60~55℃之间，利用上文非洗澡时间升温和降温模型，计算得到不同室温下，温度上升 5℃的时间已经温度下降温度 5℃的时间，如下表所示：

表 4：冬天模式 1 升降温时间

室温/℃	5	6	7	8	9	10	11
降温 5℃时间/h	7.027886	7.164562	7.306665	7.454523	7.608495	7.768967	7.936361
升温 5℃时间/h	0.241353	0.241195	0.241037	0.24088	0.240722	0.240565	0.240409
加热 5 加热次数	3.414967	3.349821	3.284672	3.219522	3.154369	3.089214	3.024056
加热 5 总时间	0.824212	0.80796	0.791728	0.775517	0.759327	0.743158	0.727009

由表格可以知道，降温时间远大于加热时间，故可以将加热时间忽略，然后求得一天内加热次数，乘上加热时间，就可以计算得出一天内总的耗电量，结果如下：

表 5: 夏天模式 1 耗电量

室温/℃	5	6	7	8	9	10	11
不洗澡耗电量/kw·h	1.236318	1.211939	1.187592	1.163276	1.138991	1.114737	1.090513
洗澡耗电量/kw·h	2.119609	2.061783	2.003987	1.946222	1.888487	1.830783	1.773108
总耗电量/kw·h	3.355926	3.273722	3.191579	3.109498	3.027478	2.945519	2.863622

d.对于冬天，电源洗澡前开启模式

对于洗澡前开启模式，一天只需要加热一次，但是要从室温加热到预定温度，利用上文建立的非洗澡加热模型，可以求出加热时间，从而求出耗电量

表 6: 夏天模式 2 耗电量

室温/℃	5	6	7	8	9	10	11
从室温加热到 60 时间/h	2.612402	2.564068	2.515766	2.467495	2.419257	2.371049	2.322873
不洗澡耗电量耗电量/kw·h	3.918603	3.846102	3.773649	3.701243	3.628885	3.556574	3.48431
洗澡耗电量/kw·h	0.329	0.336	0.343	0.35	0.357	0.364	0.371
总耗电量/kw·h	4.247603	4.182102	4.116649	4.051243	3.985885	3.920574	3.85531

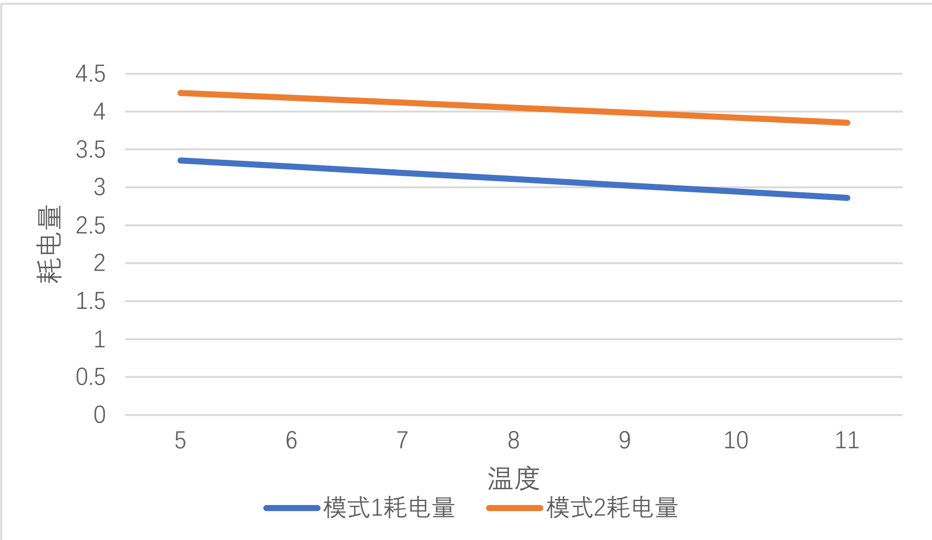

图 2：冬天耗电量与温度关系图

（2）洗澡时间耗电量

两种模式洗澡耗电量相近，我们假设他们相同，洗澡都是从设定温度开始洗。

5.3 问题三模型的建立与求解

5.3.1 模型的建立

洗澡过程热水器温度变化与耗电量

由第二问所得“电源一直开启”模式下水温变化方程

$$
\begin{cases}
M_1 = M_2 = M_3 = \dfrac{M}{3} \\
T \cdot v_1 + T_0(v - v_1) = T_e \cdot v \\
dm = v_1 \cdot dt \\
T_3' \cdot M_3 = T_0 \cdot dm + T_3 \cdot (M_3 - dm) \\
T_2' \cdot M_2 = T_3 \cdot dm + T_2 \cdot (M_2 - dm) \\
T_1' \cdot M_1 = T_2 \cdot dm + T_1 \cdot (M_1 - dm) \\
P_1 \cdot dt - K \cdot S(T - T_0)dt - C \cdot dm(T_1 - T_2) = C \cdot dm \cdot dT
\end{cases}
$$

此方程描述了水温变化与室温、加热时间之间的关系。求解在不同室温 Te 的情况下，水温由预设温度低 5 摄氏度时开始洗澡，保证出水时间在 15 分钟的情况下，在洗澡结束后温度正好降为 37 摄氏度时的设定温度，即为最优的预设温度。

日常恒定过程热水器温度变化与耗电量

由第一问可得，耗电加热时间随水温变化方程为：

$$\frac{\mathrm{T} - \mathrm{Ts} - \dfrac{\mathrm{h}}{\mathrm{KA}}}{T0 - Ts - \dfrac{h}{KA}} = e^{-\frac{KAt}{cm}} \tag{14}$$

由第二问可得，降温时间随水温变化的方程：

$$t = \frac{CM}{\alpha S} * \ln\frac{T_s - T}{T_s - T_0} \tag{15}$$

通过计算在不同室温 Ts 情况下，由预设温度降低 5 摄氏度所需要的时间，即可求得每天所需的加热次数，进而得到每天加热所需的耗电量。

5.3.2 模型的求解

采用向后差分的方法来求解该微分方程，求得结果如下：

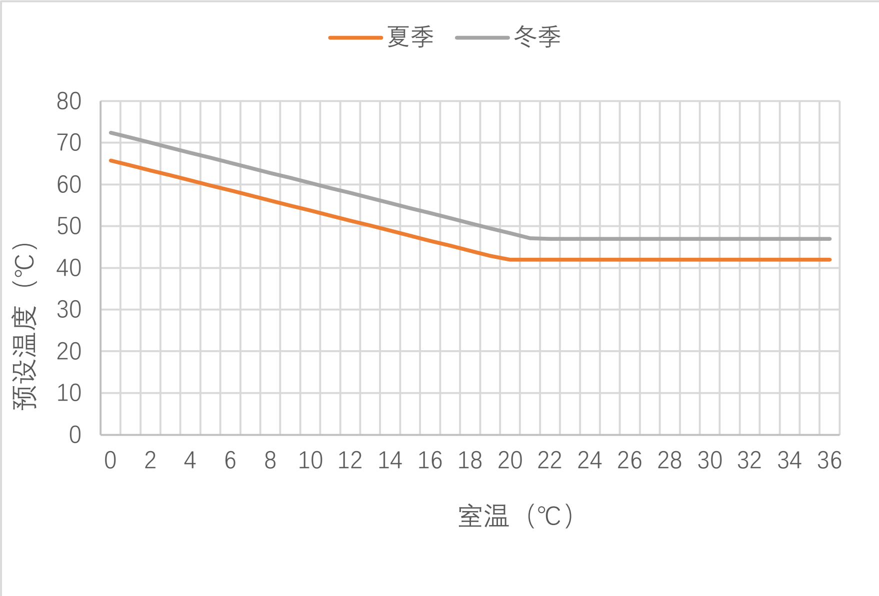

图 3：预设温度随室温变化关系

从图中可以看出，不同的室温下，最低可以洗澡的预设温度有变化且随着室温的逐渐升高而降低，最终降到洗澡水温加五摄氏度。

一天之内的室温变化如下图：

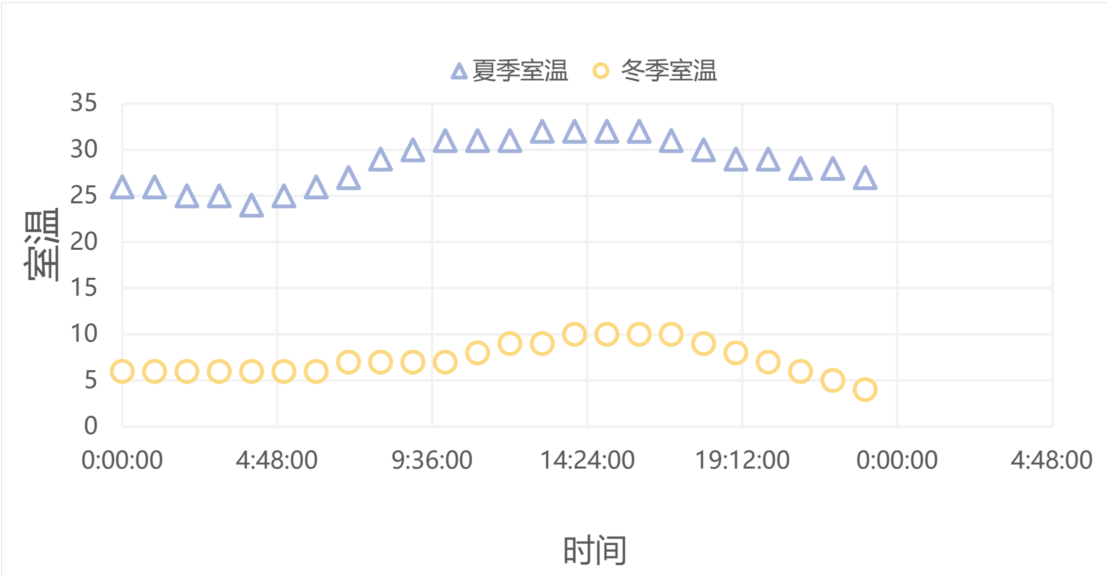

图 4：一天内室温变化

由于需要保证一天之内随时可以洗澡，则说明需要在最低室温的情况下，也能完成洗澡，即一天之内的预设温度需要在最低室温的情况下，求解预设温度。

结合上面两个图表数据可得，在夏季时，一天内最低温度为 26℃，对应的最低预设温度为 42℃，冬天的最低温度为 4℃，对应的最低预设温度为 67.59℃。

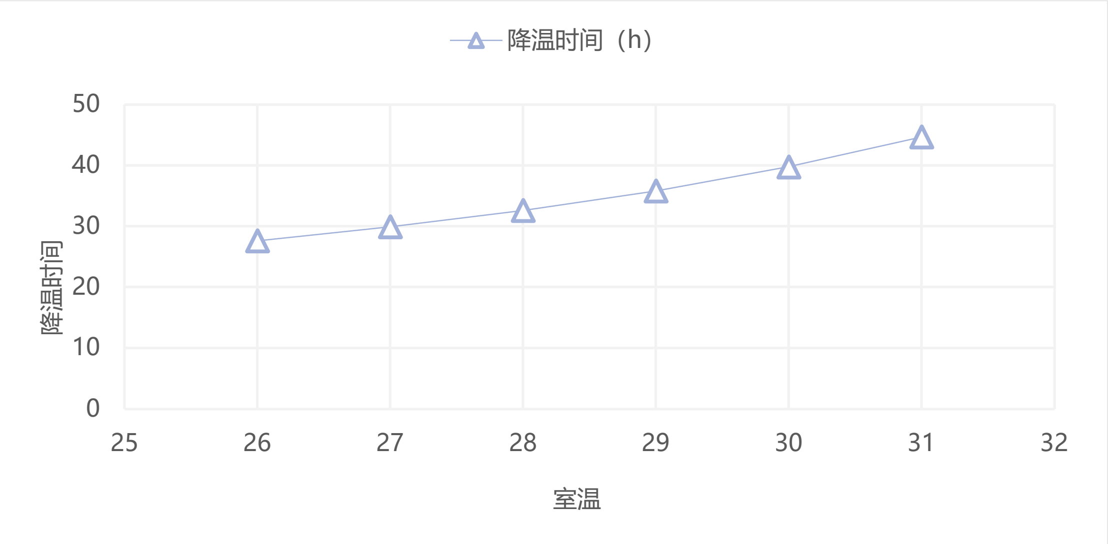

图 5：夏季降温时间随室温的变化

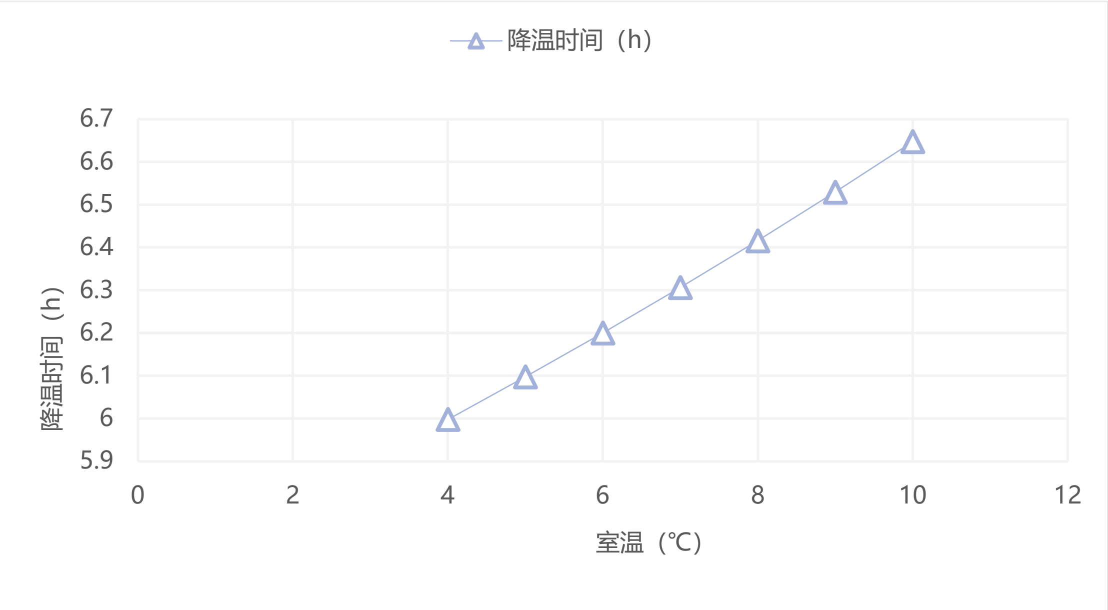

图 6：冬季降温时间随室温变化

上面两图为冬夏两季，在分别满足各自最低预设温度的情况下，一天之内降温时间随温度变化的曲线，由图中数据可得，在夏季最低预设温度（42℃）的情况下，降温时间都超过了一天，所以在夏天时，只需要每天洗澡时加热一次即可满足一天 24 小时都在保温温度范围内。但在冬天时，在预设温度为最低预设温度（67.59℃）的情况下，一天之内降温时间在 6h 到 7h 之间，这就意味着一天至少需要加热四次。

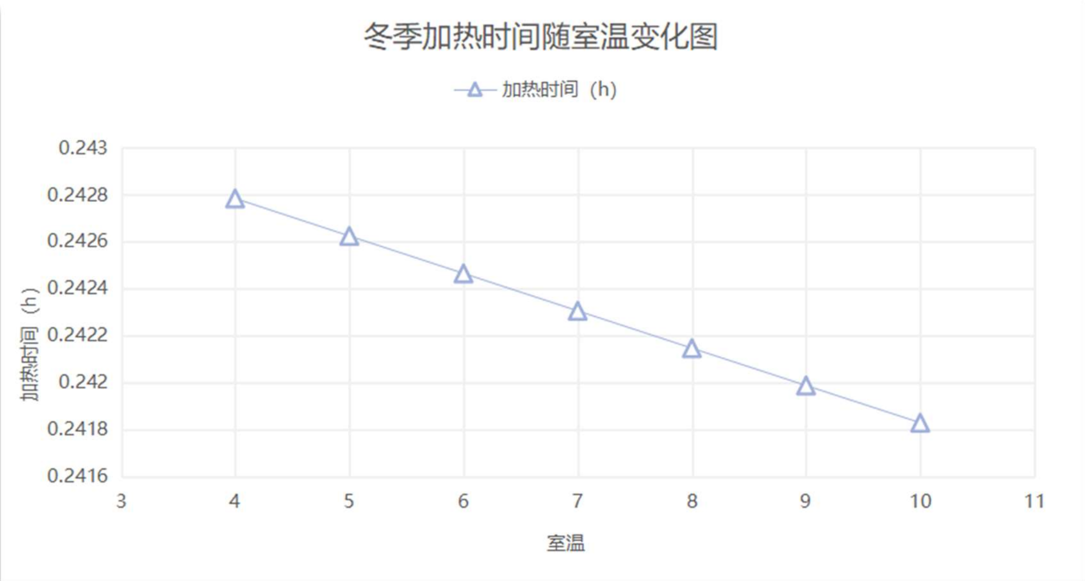

图 7：冬天加热时间随室温变化图

从上图可以看出，冬季加热时间随室温变化差别不大，基本维持在 0.24h。一天保温所耗费的电量大约为 1.5KW*4*0.25h=1.44KW*h。

5.4 问题四模型的建立与求解

5.4.1 模型的建立

对于等待时间，将时间分为 4 部分。第一部分为设定好温度到第一个人洗澡的时间，第二部分为第一个人洗澡的时间，第三部分为第二个人开始洗澡到第一个人洗完澡的时间，第四部分为第二个人洗澡的时间。分别用 T1,T2,T3,T4 表示。那么等待时间为

$$T0 = T1 + T3$$

对于电量，由于加热时加热功率相等，所以可以用加热时间来表示加热所消耗的电量。Ta 为总的加热时间。

将双目标规划转换单目标规划

$$Min\ y = Ta * Tb$$

同时应用模型二中的方程作为约束条件

5.4.2 模型的求解

（1）追赶法求解

构成一组线性方程组，将其整理后可得到的三对角线性方程组，通过求解，即可得到温度在不同时间、不同材料位置的 数值。

$$
\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix}
$$

而这一类方程组的求解可以通过经典的高斯消元法得到，但是在矩阵维数较高时，时间复杂度较高。对三对角线性方程组，可以通过追赶法，较为快速的求解出。

先将上述矩阵 A 进行 LU 分解如下：

$$
A = \begin{bmatrix} l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & l_n & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & c_1 & & & \\ & u_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix} \quad （19）
$$

对式 20 的求解分为：

牛顿冷却定律：一个热的物体的冷劫速度与该物体和周围环境的温度 差成正比。来求末知的环境与 I 层织物材料和空气与皮肤表面的对流换热热系数：

$$
h = q\Delta t \tag{16}
$$

其中，q 为对流换热热系数。

平衡时，皮肤外侧温度趋于稳定，不随时间变化而产生大唑度变化，即 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$，由此可得到上文中 q_1 和 q_2 的关系式为：

$$
a_i \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 \tag{17}
$$

所以可以得出稳定后

$$
u = b_i x + c_i \tag{18}
$$

其中 b_i 和 c_i 均为常数，i 对应第 i 层区域，对中间边界而言，默认其热流密度相同，即 $u^+ = u^-$。

$$
\begin{cases} b_i l_i + c_i & = b_{i+1} l_i + c_{i+1} \\ \quad k_i b_i & = k_{i+1} b_{i+1} \end{cases} \tag{19}
$$

得到：

$$
c_4 = b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 - b_2 l_1 - b_3 l_2 - b_4 l_3 + c_1
$$

联立式（7）和（8），得：

$$\begin{cases} c_1 = u_e - \left(l_0 - \dfrac{k_1}{q_1}\right) b_1 \\ (k_4 + q_2 l_4) b_4 + q_2 b_4 = q_2 u_x \end{cases} \tag{20}$$

（2）利用定步长搜索法，通过迭代得到最佳温度，算法大致流程如下。

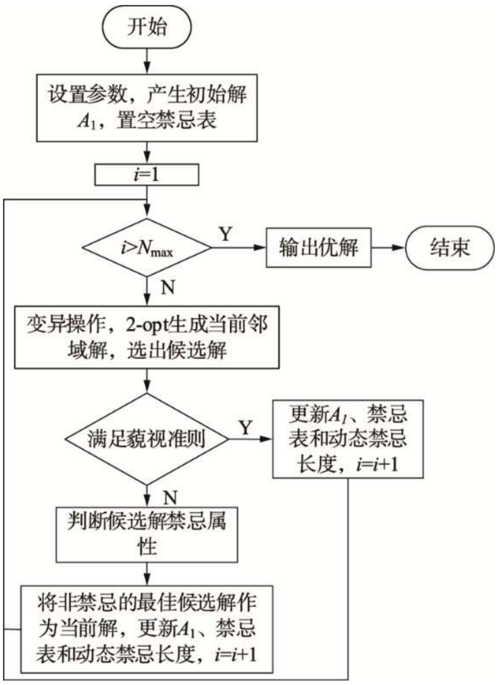

图 8：流程图

（3）最终得到如下结果

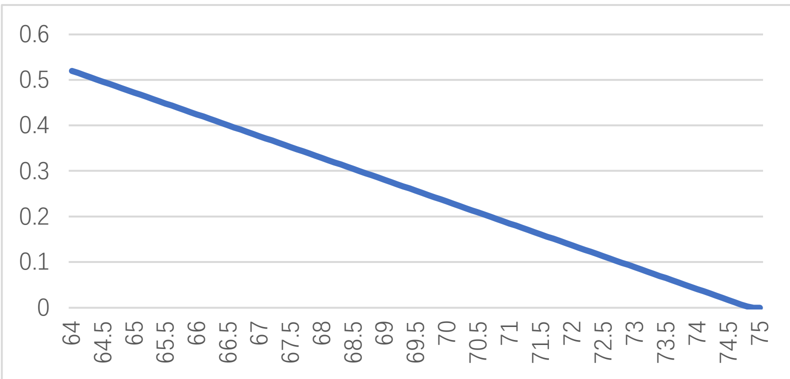

图 9：设置不同温度下的等待时间

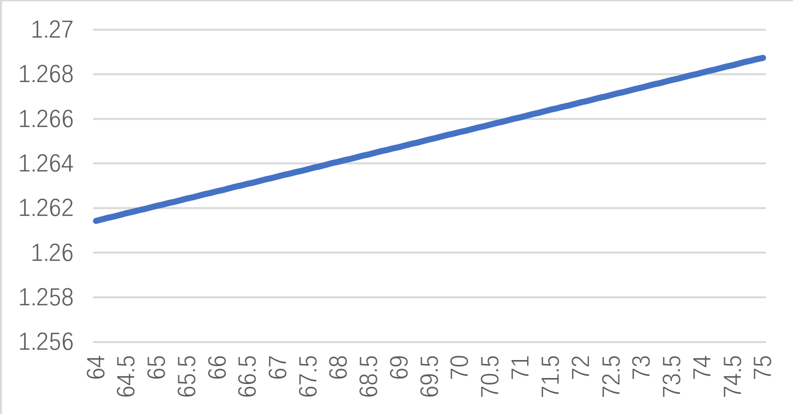

图 10：设置不同温度下的加热时间

当时间为设置温度为 70 时，总加热时间为 1.27，总等待时间为 0.23。此时效果最优。

六、模型的评价与改进

6.1 模型优点

（1）我们的模型在传热学理论的基础上，使用有限差分方法数值计算出温度分布及时间演化，并与附件所给出数据吻合得非常好。

（2）对问题二，三的求解简单直观，计算效率高。

（3）对于问题四，求出了整个符合条件的区域,可自由针对不同优化目标得到不同结果。

6.2 模型缺点

（1）本文建立的模型相对条件较为理想，现实中是达不到这样的条件的，实际情况与本文的假设有偏差。

（2）本文建立的模型忽略了热辐射的影响，实际上随着温度不断升高，热辐射的影响会增大误差。

（3）数值分析中的追赶法求出的解是近似解，精确度不是很理想。

七、参考文献

[1] 冉茂宇. 非出水时段电热水器加热时间与能耗的预测模型[J]. 华侨大学学报: 自然科学版, 2016, 37(2): 247-251.

[2] 牛纪德,周遵凯,杨先亮.电热水器运行方式与能耗的理论分析[J].山西建

筑,2012,38(26):213-214
[3] 邹光中.一种测定非稳态传热总传热系数的简易方法[J].黄石高等专科学校学报,1999,15(1):10-13.
[4] GB/T20289-2006.储水式电热水器[S].
[5] Ji P, Rhoads W J, Edwards M A, et al. Impact of water heater temperature setting and water use frequency on the building plumbing microbiome[J]. The ISME Journal, 2017, 11(6): 1318-1330.

八附录

```
%问题求解代码

import math


c = 4200

m = 60

a = 0.879

s = 1.08

p2 = 1500

v = 0.08


T1 = 37

T2 = 25

Ta = 46

Tb = 37


def get_t1(T1,T0,Ta,Tb):
```

```
    temp1 = p2 - v * c * (T1 - T0) + a * s * (T0 - Ta)

    temp2 = p2 - v * c * (T1 - T0) + a * s * (T0 - Tb)

    t = c * m /(a * s) * math.log(temp1/temp2)

    return t



def get_Ta(T1,T0,t,Tb):

    temp1 = a * s /( c * m) * t

    temp2 = p2 - v * c * (T1 - T0) + a * s * (T0 - Tb)

    temp3 = p2 - v * c * (T1 - T0) + a * s * T0

    Ta = (temp3 - math.exp(temp1) * temp2)/(a * s)

    if Ta < Tb:

        Ta = Tb

    return Ta + 5


def get_low(T0,Ta,Tb):

    temp1 = c * m / (a * s)

    temp2 = (T0 - Tb) / (T0 - Ta)

    t = temp1 * math.log(temp2)

    return t / 3600

# for i in range(37):

#     print(get_Ta(37,i,900,37))
```

```
def get_up(T0,Ta,Tb):
    temp1 = p2 + a * s * (T0 - Ta)
    temp2 = p2 + a * s * (T0 - Tb)
    t = c * m / (a * s) * math.log(temp1 / temp2)
    return t / 3600

# for i in range(5,12):i
#     print(i,get_low(i,55,60))

# for i in range(4,11):
#     print(get_up(i,42,60))



def get_Tb(T1,T0,t,Ta):
    temp1 = a * s /( c * m) * t
    temp2 = p2 -   v * c * (T1 - T0) + a * s * (T0 - Ta)
    temp3 = p2 -   v * c * (T1 - T0) + a * s * T0
    Tb = (temp3 - temp2/math.exp(temp1) )/(a * s)
    return Tb
# print(get_Tb(42,7,900,60))
# i = 64
```

```
# while i <= 75:
#     temp1 = get_Tb(42,7,900,i)
#     temp2 = get_up(7,temp1,59)
#     temp3 = get_up(7,59,i)
#     temp4 = temp2 + 0.5 + temp3
#     # print(temp4)
#     print(temp4*(temp2))
#     i += 0.1
# print(get_up(7,64,76))
# print(get_up(7,temp1,59))
for i in range(5,12):
    temp1 = get_Tb(42,i,900,60)
    temp2 = get_up(i,temp1,60)
    print(0.25+temp2)


import numpy as np


print(np.log(np.exp(1)))


T = 68
T0 = 63
```

```
Ts = list(range(4,11))

h = 1500


c = 4200

m = 60

K = 0.879

A = 1.08


t=[]


for i in range(len(Ts)):

    s = -((c*m)/(K*A))*np.log((T-Ts[i]-(h/(K*A)))/(T0-Ts[i]-(h/(K*A))))

    t.append(s/60   )


print(t)
```