

基于热传导模型的高温作业专用服装设计

摘要

为研究高温作业专用服装设计, 本文通过建立热传导的微分方程, 模拟热量在服装各层织物之间传递的过程, 确定不同高温环境下, 该专用服装各层织物的温度分布情况。并从降低生产成本的角度, 求解该专用服装某一层的最优厚度。

为描述高温环境下高温作业专用服装各层织物材料的温度分布情况, 本文在傅里叶热传导定律和牛顿冷却定律的基础上, 建立偏微分方程以表达热量从高温环境经各层织物材料向皮肤层传递的过程。为求解偏微分方程, 采用有限差分法, 使得原偏微分方程离散化为差分方程组, 经化简为三对角矩阵, 用数值方法中的追赶法对其求解。通过附件二平衡状态下皮肤外侧的温度值, 进行一维搜索求解出外部环境与 I 层织物材料的对流换热系数为 $116.3024W/(m^2 \cdot ^\circ C)$, 空气与皮肤表面的对流换热系数为 $8.6635W/(m^2 \cdot ^\circ C)$ 。再利用求解得到的参数带入方程组, 最终得到各层织物材料温度在时间和空间上的分布。

为求解第 II 层最优厚度, 考虑到专用服装的生产成本和人体对高温的耐受情况, 将人体对高温的耐受情况量化为具体的条件约束, 以第 II 层厚度最小为优化目标, 综合 60min 内最大温度、超过 $44^\circ C$ 时间和厚度范围等约束, 建立厚度调整**单变量优化模型**。将模型求解转换为约束条件临界值求解问题, 并用二分法对其约束条件进行搜索, 得到满足约束的 II 层织物材料最优厚度为 16.3923mm。

考虑到研发成本和人体耐热情况等因素, 以第 II 层和第 IV 层厚度最小为优化目标, 综合 30min 内最大温度、超过 $44^\circ C$ 时间和厚度限制等约束条件, 建立厚度调整**双目标优化模型**, 求 II 层织物材料和 IV 层空气层的厚度组合。先借助 matlab 进行枚举筛选出符合约束条件的厚度组合集合, 通过建立的服装成本模型得到集合中成本最小的厚度组合为 II 层材料厚度 19.3mm, IV 层介质厚度为 6.4mm。

【关键字】 热量传递模型 有限差分法 追赶法 优化模型

一、问题重述

问题背景

当今社会，在消防和金属冶炼等行业中，有很大一群人工作在高温高辐射环境下，在这种环境下工作通常比较危险，需要穿着高温作业专用服装以避免灼伤。特别是对于消防员来说，火场中的人的耐受时间非常短，一件优质的防火服可能会有助于消防员多救几个人的生命。

通常情况下，高温作业专用服装由三层织物材料构成，记为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ层，其中Ⅰ层与外界环境接触，Ⅲ层与皮肤之间还存在空隙，将此空隙记为Ⅳ层。

待解决的问题

为设计专用服装，将体内温度控制在 37°C 的假人放置在实验室的高温环境中，测量假人皮肤外侧的温度。现为了降低研发成本、缩短研发周期，利用数学模型来确定假人皮肤外侧的温度变化情况，并解决以下问题：

问题一：现有专用服装材料的一些参数值，对环境温度为 75°C 、Ⅱ层厚度为 6 mm、Ⅳ层厚度为 5 mm、工作时间为 90 分钟的情形开展实验，测量得到假人皮肤外侧的温度（见附件 2）。建立数学模型，计算温度分布，并生成温度分布的 Excel 文件（文件名为 problem1.xlsx）。

问题二：当环境温度为 65°C 、Ⅳ层的厚度为 5.5 mm 时，确定Ⅱ层的最优厚度。同时，需要确保工作 60 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟。

问题三：当环境温度为 80°C 时，确定Ⅱ层和Ⅳ层的最优厚度，确保工作 30 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟。

二、问题分析

1、问题一的分析

现有专用服装材料的一些参数值，需要描述测试过程中高温环境与各层织物材料以及假人皮肤之间的热量传递过程。考虑到高温环境和 I 层织物材料之间、IV 层织物材料和皮肤之间依靠空气流动来传递热量，本文考虑其以对流换热的方式进行热量传递；I 层与 II 层织物材料之间、II 与 III 层织物材料之间、III 与 IV 层织物材料之间均依靠物体间的直接接触来传递热量，本文考虑其以热传导的方式进行热量传递。

本文需要建立热量传递模型，为简化模型，方便运算，将三维的衣服各层织物材料简化为二维，但已知数据中缺少对流换热系数，要借助已知数据计算得到，进而建立热量传递的关于时间和空间的二元偏微分方程，选用数值方法中的有限差分法，将原偏微分方程转化为离散的差分方程组，化简为三对角线性方程组，用追赶法进行求解得到其近似解。

2、问题二的分析

要考虑到人体皮肤在高温状况下的最大耐受力和舒适度，需要确保假人皮肤外侧的温度不得超过 47°C ，且在测试的时间内，超过 44°C 的时间不得超过 5 分钟。将上述两个要求转化为条件约束，考虑降低研发成本，就是在满足约束条件下，设计出 II 层织物材料厚度最小的高温作业专用防护服。

在前文建立的模型的基础上，得到不同厚度 II 层织物材料的情况下，假人皮肤外侧温度变化情况。据已知材料中给出的 II 层织物材料的厚度范围，先找到满足一个条件约束情况下的 II 层织物材料厚度范围，再根据第二个条件约束搜索到 II 层织物材料厚度的最小值。

3、问题三的分析

考虑到一些特别严峻的情景，需要短时间内结束工作，即缩短高温工作时间的同时提高高温作业的环境温度。但是，人体皮肤在高温下的耐受力还是一样的。当环境温度为 80°C 时，确保工作 30 分钟时，假人皮肤外侧温度不超过 47°C ，且超过 44°C 的时间不超过 5 分钟。现需要满足上述两个约束时，同时考虑 II 层织物材料和 IV 层空气层的厚度，确定其最优组合的厚度。

根据题目要求，进行全局搜索，得到一系列满足约束条件的 II 层织物材料和 IV 层空气层的厚度组合。为从满足的厚度组合中选择最合适的厚度组合。本文将衣服的成本转化为对衣服用料的衡量，建立一个人体模型，用具体的函数是去计算衣服的用料，最后用该模型对满足的厚度组合进行检验，从而选择最优的厚度组合解。

三、模型假设

- (1) 假设温度的传导是一维的。
- (2) 假设忽略接触热阻，即两层织物材料接触面之间的温度连续。
- (3) 假设每一层的织物材料有各向同性。

四、符号的定义及说明

符号	符号说明	单位
l_i	到第 i 个边界的距离	mm
k	导热率	$W / (m^2 \cdot ^\circ C)$
c	织物材料的比热容	$J / (kg \cdot ^\circ C)$
ρ	织物材料的密度	$kg \cdot m^3$
q	对流换热系数	$W / (m^2 \cdot ^\circ C)$
u_e	高温环境的温度	$^\circ C$
u_s	人体皮肤的温度	$^\circ C$
$u(x, t)$	某一空间和时间条件下的温度	$^\circ C$

五、模型的建立及求解

5.1.1 问题一模型的建立

假人皮肤外侧的温度变化是源于高温工作环境, 热量经过各层织物材料的传递, 使得假人的皮肤外侧温度升高, 该过程是一个非稳态热传导过程。本文依据热传导的原理, 根据各层织物材料的性质和参数, 建立一个热传导温度分布模型, 模拟热量传递的过程。

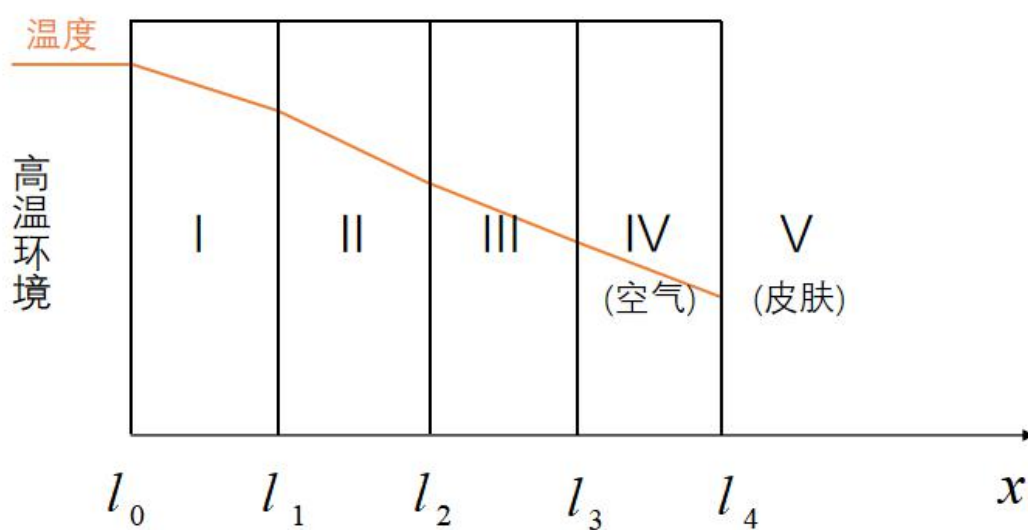


图 1

记 l_0 为高温环境和 I 层之间界面的 x 坐标, $l_j (j=1,2,3)$ 为第 j 层和第 $j+1$ 层

交界面之间的 x 坐标, l_4 为IV层与皮之间交界面的 x 坐标。

● 热量传递模型的建立

(1) 傅里叶热传导定律描述热量传递过程

用微元法^[1]建立作业专用服装各层织物之间的热量传递模型,记沿服装-皮肤的方向为 x 轴正向。记 t 时刻 x 处的温度为 $u(t, x)$, 任意选择一段时间 $(t, t + \Delta t)$, 及一个微元 $(x, x + \Delta x)$, x 处的温度从 $u(t, x)$ 变化到 $u(t + \Delta t, x)$, 所需要吸收的热量为 $c\rho(u(t + \Delta t, x) - u(t, x))$, 因此, 微元 $(x, x + \Delta x)$ 在时间段 $(t, t + \Delta t)$ 内吸收的热量为:

$$\begin{aligned} Q_2 &= \int_x^{x+\Delta x} c \cdot \rho [u(x, t + \Delta t) - u(x, t)] dx \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} c \cdot \rho \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dt dx \end{aligned} \quad (1)$$

c 、 ρ 分别为织物材料的比热容和密度。

傅里叶热传导定律表明, 在 Δt 时间内, 沿着面积微元 ΔS 法线方向 n 流过的热量为 $-k \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \Delta S \cdot \Delta t$, 其中 k 为热传导率, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 为 u 沿着 n 的方向导数, 即为 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 。

因此, 由热传导定律得: 在时间段 $(t, t + \Delta t)$ 内流入微元 $(x, x + \Delta x)$ 的热量为:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \int_t^{t+\Delta t} \left[k(x + \Delta x) \cdot \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} - k(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] dt \\ &= \int_t^{t+\Delta t} \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dt \end{aligned} \quad (2)$$

根据能量守恒:

$$Q_1 = Q_2 \quad (3)$$

由 t 、 Δt 、和 Δx 的任意性可得热传导方程如下:

$$c \cdot \rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (4)$$

c 、 ρ 分别为织物材料的比热容和密度, k 为织物材料的热传导率。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, a_i = \frac{k_i}{\rho_i c_i} \quad (5)$$

(2) 确定边界情况

$t = 0$ 时, $u(x, t) = u_0$, 为常数, 根据牛顿冷却公式, 在 l_0 界面时有:

$$-k_1 \frac{\partial u}{\partial x} \Delta t = q_1 (u_e - u_0) \Delta t \quad (6)$$

其中, q_1 表示 I 层与外界对流换热热系数, u_e 表示环境温度, 将上式简化为:

$$-k_1 \frac{\partial u}{\partial x} + q_1 u_0 = q_1 u_e \quad (7)$$

在 l_4 边界, 同理可得:

$$k_4 \frac{\partial u}{\partial x} + q_2 u_0 = q_2 u_s \quad (8)$$

其中, u_s 为人体温度, q_2 表示空气与皮肤表面的对流换热热系数。

中间边界, 本文假定温度变化连续 $u^- = u^+$, 热流密度相等:

$$\left(k_j \frac{\partial u}{\partial x} \right)^- = \left(k_{j+1} \frac{\partial u}{\partial x} \right)^+ \quad (9)$$

将上述条件总和如下:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = a_i \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u^- = u^+ \\ \left(k_j \frac{\partial u}{\partial x} \right)^- = \left(k_{j+1} \frac{\partial u}{\partial x} \right)^+ \\ -k_1 \frac{\partial u}{\partial x} + q_1 u = q_1 u_e \\ k_4 \frac{\partial u}{\partial x} + q_2 u = q_2 u_s \\ u(x, t) = u_0 \end{array} \right.$$

● 有限差分法求解

(1) 偏微分方程离散化

为对 (5) 式的偏微分方程求解, 本文参考文献选择用有限差分法^[2], 令 x 为空间步长, τ 为时间步长, 对平面进行网格剖分, 把 (l_{i-1}, l_i) 部分均分为 m_i 段, 符合一位扩散方程的差微分 CRANK-NICOLSON 隐格式:

$$\frac{U_j^{k+1} - U_j^k}{\tau} = \frac{a_i}{2} \left(\frac{U_{j+1}^{k+1} - 2U_j^{k+1} + U_{j-1}^{k+1}}{x^2} - \frac{U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k}{x^2} \right) \quad (10)$$

引入变量 r 简化计算:

$$r = \frac{a_i \tau}{2x^2} \quad (11)$$

将 (10) 转化如下:

$$-rU_{j-1}^{k+1} + (1+2r)U_j^{k+1} - rU_{j+1}^{k+1} = rU_{j-1}^k + (1-2r)U_j^k + rU_{j+1}^k \quad (12)$$

(2) 考虑差分格式中的边界问题

l_0 界面向前差商有:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l_0} = \frac{u_1^k - u_0^k}{x_1} \quad (13)$$

$$-k_1 \frac{u_1^k - u_0^k}{x_1} + q_1 u_0^k = q_1 u_e \quad (14)$$

l_4 界面向后差商:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l_4} = \frac{\frac{u_i^k}{\sum_{n=1}^{m_n}} - \frac{u_i^k}{\sum_{n=1}^{m_{n-1}}}}{x_4} \quad (15)$$

$$-u_{\sum_{n=1}^i m_{n-1}}^k + \left(1 + \frac{k_s}{k_4} x_4\right) u_{\sum_{n=1}^i m_n}^k = u_s \frac{k_s}{k_4} x_4 \quad (16)$$

对中间界面，对于式(9)，左侧为向后差商，右侧为向左差商，

$$U_j^0 = u_0 (j = 1, 2, \dots, m_1 + m_2 + m_3 + m_4)$$

$$k_i \frac{u_{\sum_{n=1}^i m_n}^k - u_{\sum_{n=1}^{i-1} m_n}^k}{x_i} = k_{i+1} \frac{u_{\sum_{n=1}^{i+1} m_{n+1}}^k - u_{\sum_{n=1}^i m_n}^k}{x_{i+1}} \quad (17)$$

(3) 追赶法求解

式 12~17 实际上构成了一组线性方程组，将其整理后可得到形如式 18 的三对角线性方程组，通过求解式 18，即可得到温度在不同时间、不同材料位置的数值。

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n \end{bmatrix} \quad (18)$$

而这一类方程组的求解可以通过经典的高斯消元法得到，但是在矩阵维数较高时，时间复杂度较高。对三对角线性方程组，可以通过追赶法^[2]，较为快速的求解出。

先将上述矩阵 A 进行 LU 分解如下：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & c_1 & & & \\ & u_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & u_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix} \quad (19)$$

其中： $\begin{cases} u_1 = b_1 \\ l_i = \frac{a_i}{u_{i-1}} \\ u_i = b_i - l_i c_{i-1} \end{cases}$ 。对于 LU 分解，存在这样的关系：

$$Ax = f \Leftrightarrow LUX = f \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = f \\ Ux = y \end{cases} \quad (20)$$

对式 20 的求解分为：

追过程： $\begin{cases} y_1 = f_1 \\ y_i = f_i - l_i y_{i-1}, i = 2, \dots, n \end{cases}$ ，赶过程： $\begin{cases} x_n = y_n / u_n \\ x_i = (y_i - c_i x_{i+1}) / u_i, i = n-1, \dots, 1 \end{cases}$

最后可通过迭代求解出 x 。

5.1.2 问题一模型的求解

● 求解未知的对流换热系数

(1) 牛顿冷却定律：一个热的物体的冷却速度与该物体和周围环境的温度差成正比。来求未知的环境与 I 层织物材料和空气与皮肤表面的对流换热系数：

$$h = q\Delta t \quad (21)$$

q 为对流换热系数。

平衡时，皮肤外侧温度趋于稳定，不随时间变化而产生大幅度变化，即 $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ ，

由此可得到上文中 q_1 和 q_2 的关系式为：

$$a_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0 \quad (22)$$

所以可以得出稳定后

$$u = b_i x + c_i \quad (23)$$

其中 b_i 和 c_i 均为常数， i 对应第 i 层区域，对中间边界而言，默认其热流密度相同，即 $u^+ = u^-$ 。

$$\begin{cases} b_i l_i + c_i = b_{i+1} l_i + c_{i+1} \\ k_i b_i = k_{i+1} b_{i+1} \end{cases} \quad (24)$$

得到：

$$c_4 = b_1 l_1 + b_2 l_2 + b_3 l_3 - b_2 l_1 - b_3 l_2 - b_4 l_3 + c_1 \quad (25)$$

联立式 (7) 和 (8)，得：

$$\begin{cases} c_1 = u_e - \left(l_0 - \frac{k_1}{q_1} \right) b_1 \\ (k_4 + q_2 l_4) b_4 + q_2 c_4 = q_2 u_s \end{cases} \quad (26)$$

再通过 b_i 和 c_i 的关系式与之联立，得：

$$b_i = \frac{\frac{1}{k_1}(u_s - u_e)}{\frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_1} + \sum_{i=1}^4 \frac{1}{k_i}(l_i - l_{i-1})} \quad (27)$$

$b_i (i=2,3,4)$ 及 $c_i (i=1,2,3,4)$ 可由 b_i 和 c_i 的关系式得出

所以， $x = l_4$ 时，皮肤外侧温度为：

$$u(l_4, t) = \frac{\frac{1}{q_2}}{\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \sum_{i=1}^4 \frac{l_i - l_{i-1}}{k_i}} u_e + \frac{\frac{1}{q_1} + \sum_{i=1}^4 \frac{l_i - l_{i-1}}{k_i}}{\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \sum_{i=1}^4 \frac{l_i - l_{i-1}}{k_i}} u_s \quad (28)$$

根据附件数据得到皮肤外侧温度趋于稳定时的数值 $u(l_4, t)$ ，进而可以得到 q_1 、 q_2 的关系式如下：

$$\frac{1}{q_2} = \frac{u(l_4, t) - u_s}{u_e - u(l_4, t)} \left(\frac{1}{q_1} + \sum_{i=1}^4 \frac{l_i - l_{i-1}}{k_i} \right) \quad (29)$$

(2) 将模型空间-时间离散化后, 可以通过边界条件和初值条件逐层求解模型。通过附件二中的已知数据和对流换热系数的关系搜索出热交换系数的最优拟合值, 进而求解温度分布情况。具体操作如下:

- 代入 q_1 的初始值, 通过非稳态传热模型离散方程逐层求解, 得到假人皮肤外侧温度计算值;
- 与附件二中皮肤外层温度数据进行比较, 并计算值与实测值的误差;
- 更新 q_1 值, 再次代入离散方程进行求解, 得到新的温度计算值;
- 重复上述步骤, 搜索到拟合程度最佳的对流换热系数, 并应用于后续的高温作业专用服装设计;
- 根据搜索得到的最佳拟合对流换热系数, 求解出作业服温度分布。

可以得到皮肤外侧温度拟合结果, 与附件二数据进行比较, 改变 q_1 最终得到较好拟合效果下的 q_1 、 q_2 。

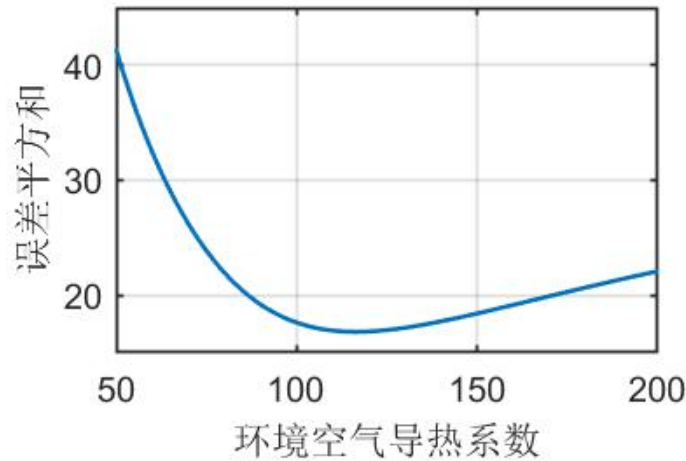


图 2

求得: $q_1 = 116.3024 W/(m^2 \cdot ^\circ C)$, $q_2 = 8.6635 W/(m^2 \cdot ^\circ C)$, 将其带入式 14、式 16, 再通过追赶法, 可求解出不同时段下, 不同位置处, 温度的分布情况如图 3 所示。

由图可知在空间分布上, 从 I 层到 IV 层织物材料温度逐渐下降; 在时间分布上, 随着时间的推移各分层的温度均在上升, 最终趋于平衡。

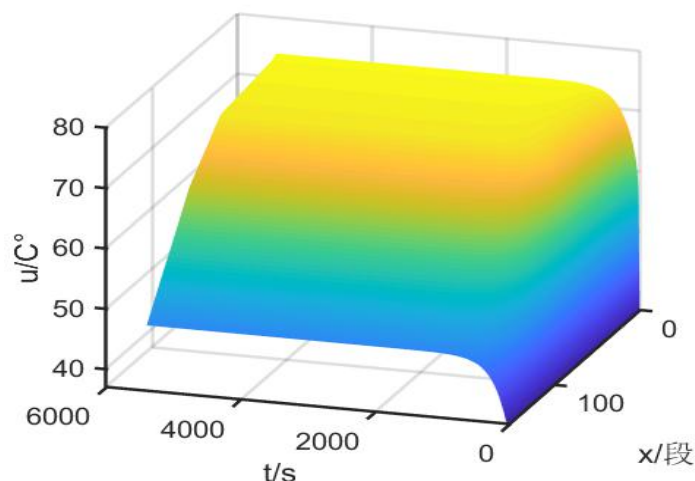


图 3

5.2.1 问题二模型的建立

在环境温度为 65°C 、IV 层的厚度为 5.5 mm 时，需要确保工作 60 分钟，防护服能满足给定的两个最外侧皮肤温度条件：

- 1、温度不超过 47°C
- 2、温度超过 45°C 的时间不超过 5 分钟

在此约束上要确定 II 层的最优厚度。基于制作防护服成本的角度考虑，在满足题设约束的情况下，II 层的厚度是越小越好的，因此所需求解的是一个单目标优化问题。

利用问题一的热传导模型，最外侧皮肤温度与受热时间呈正相关，因此只需保证在第六十分钟时，即可满足“最外侧皮肤温度小于等于 47°C ”。

在第六十分钟时，温度关于 II 层厚度的图像如图四，曲线具有单调性，也即随着 II 层厚度的增加，最终到达皮肤最外层的温度会降低。

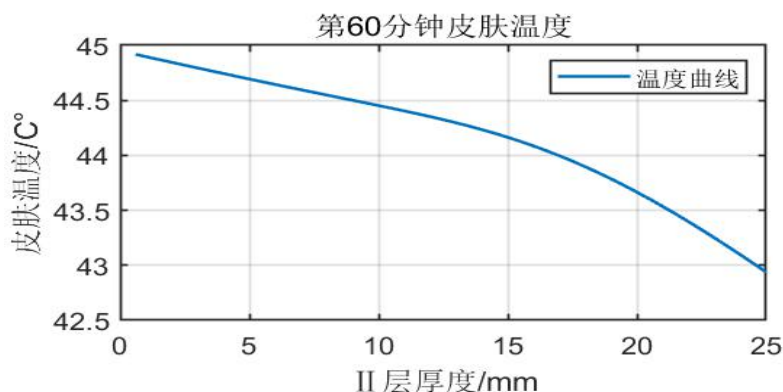


图 4

可见，II 层厚度在 0.6 mm ~ 25 mm 区间，都满足“皮肤温度不会超过 47°C ”。

再考虑第二个温度约束（温度超过 45°C 的时间不超过 5 分钟），同样也是由于皮肤温度与受热时间的正相关性，实际上只需要保证，“在第五十五分钟时，皮肤温度小于等于 45°C ”。

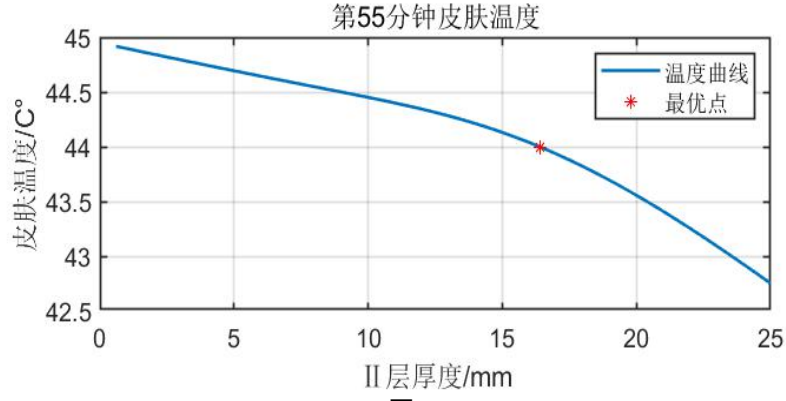


图 5

II层织物材料的厚度可以表示为 $l_2 - l_1$ ，其中 l_1 为定值，等价于求 $\min l_2$ ，限制条件为： $0.6\text{mm} \leq l_2 - l_1 \leq 25\text{mm}$

将上述要求转化为如下最优化模型：

$$\begin{aligned} \min \quad & l_2 - l_1 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} u(l_2, 3600) \leq 47^\circ\text{C} \\ u(l_2, 3300) \leq 44^\circ\text{C} \\ 0.6\text{mm} \leq l_2 - l_1 \leq 25\text{mm} \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

5.2.2 问题二模型的求解

如图 5 所示，在需要进行求解的 II 层厚度区间内，皮肤温度有单调性，在进行可行域空间搜索时，可利用二分法进行最优点的查找。其算法步骤如下：

设精度 ε ，厚度为 d

步骤 1：令 $d = d_{\min}$ ，求温度分布 $u(x, t)$ ，若满足约束条件则结束，否则转步骤 2。

步骤 2：令 $d = d_{\max}$ ，求温度分布 $u(x, t)$ ，若满足约束条件则结束，否则转步骤 3。

步骤 3：若 $d_{\max} - d_{\min} < \varepsilon$ ，则结束， $d = d_{\max}$ ，否则转步骤 4。

步骤 4： $d' = \frac{d_{\min} + d_{\max}}{2}$ ，求温度分布 $u(x, t)$ ，若满足条件约束，则 $d_{\max} = d'$ ，不满足则 $d_{\min} = d'$ ，转步骤 3。

经过迭代求解后，搜索得到满足约束的 II 层织物材料新的厚度范围为 $16.3923\text{mm} \sim 25\text{mm}$ ，所以考虑到成本因素，最终确定的 II 层织物材料的厚度为 16.3923mm 。

5.3.1 问题三模型的建立与求解

此时与问题二相比，当环境温度变为 80°C 时，工作 30 分钟，其余温度约束与问题二相同，需要对 II 层织物材料和 IV 层空气层的厚度组合，即为针对 II 层织物材料和 IV 层空气层的厚度做一个双目标优化，以求得在满足约束条件下，且考虑研发成本的最优厚度组合。

参考问题二待解决的最优模型，可得如下：

$$\begin{aligned}
& \min l_2 - l_1 \\
& \min l_5 - l_4 \\
& s.t. \begin{cases} u(l_4, 1800) \leq 47^\circ C \\ u(l_4, 1500) \leq 44^\circ C \\ 0.6mm \leq l_2 - l_1 \leq 25mm \\ 0.6mm \leq l_5 - l_4 \leq 6.4mm \end{cases}
\end{aligned} \quad (31)$$

为了求解式 30 的优化模型，常用的一种办法是，将双目标简化为单目标。考虑到优化的最终目的都是为了减少防护服制作的成本，即制作防护服所需要的材料尽可能的少，自然需要 II 层的厚度尽可能小。但是对于空气层 IV 层来说，其厚度越大，说明防护服也就越宽松，而在这个基础上会影响到防护服的大小，同样的，也希望 IV 层厚度低一些才行。

由此，考虑到防护服占用的体积，建立成本检验模型，作为最优化模型的求解目标。

成本检验模型

本文考虑衣服的成本为衣服布料的用量，将人体简化为一个圆柱模型，衣服的用量用其体积来表示，需要通过各层纺织物的厚度，以及不占用成本的人体厚度和空气层厚度，计算出这个圆环柱的体积。示意图如下：

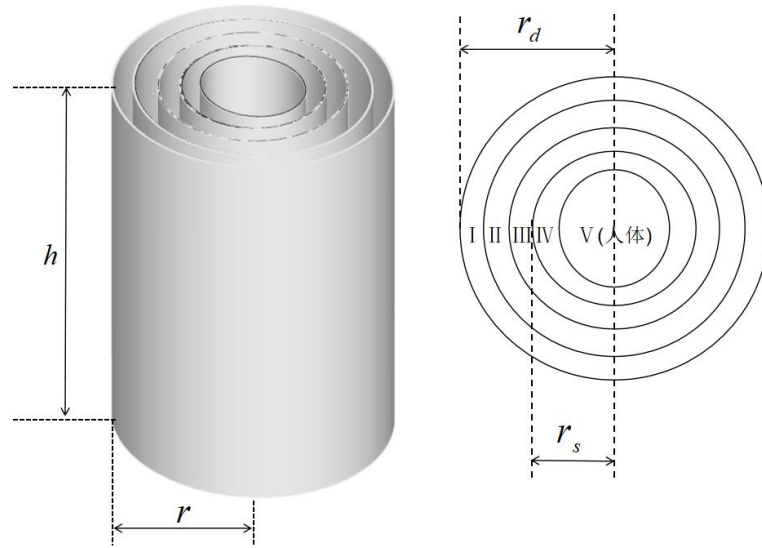


图 6

本题要求的是衣服总体积：

$$V = \pi h (r_d^2 - r_s^2) \quad (32)$$

其中 $r_s = l_5 - l_3$, $r_d = l_5$

最后待求解的最优化模型如下：

$$\min V = \pi h (r_d^2 - r_s^2)$$

$$s.t. \begin{cases} u(l_4, 1800) \leq 47^\circ C \\ u(l_4, 1500) \leq 44^\circ C \\ 0.6mm \leq l_2 - l_1 \leq 25mm \\ 0.6mm \leq l_5 - l_4 \leq 6.4mm \end{cases} \quad (33)$$

- 基于问题一的模型，对 II 层织物材料和 IV 层空气层的厚度同时为自变量做一个二维区域的全局搜索，设置步长为 0.1mm，得到第 30 分钟皮肤温度关于厚度的一个三维曲面。

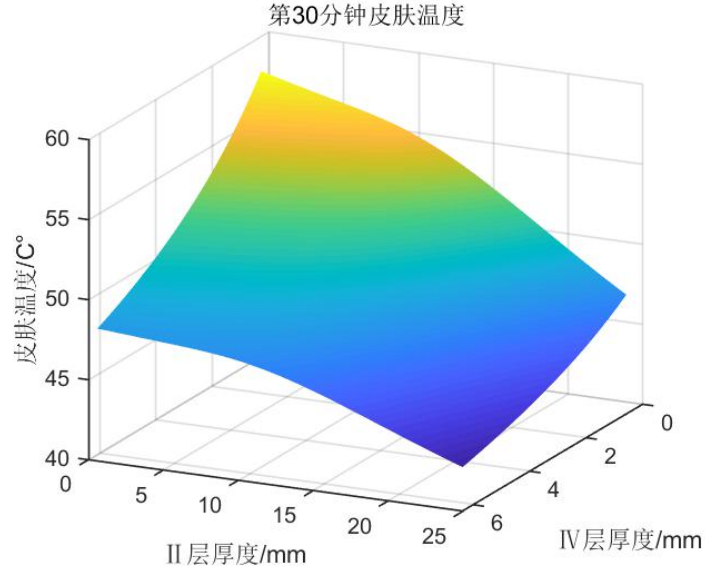


图 7

上图中，在纵坐标低于 $47^\circ C$ 的区域都是满足约束条件的，其曲面的二维平面投影如下：

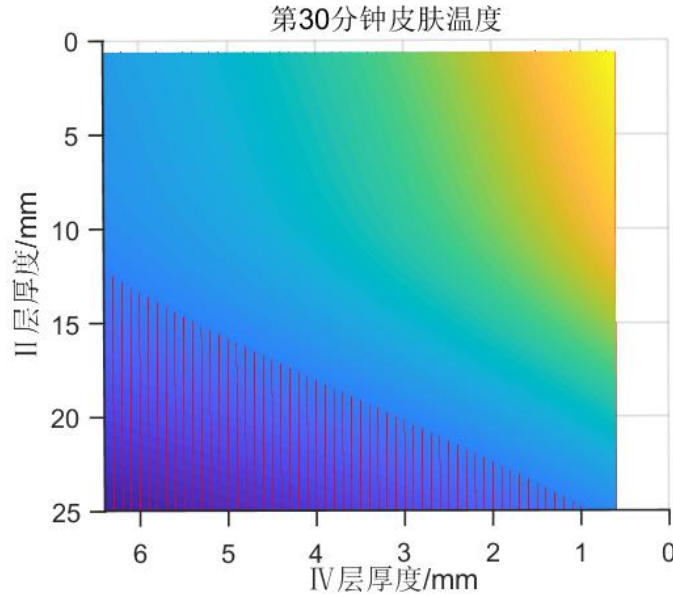


图 8

其中的阴影部分为满足约束 $u(l_4, 1800) \leq 47^\circ C$ 的厚度集合，同理可再求出约束 $u(l_4, 1500) \leq 44^\circ C$ 下的厚度集合，最后取两个集合的并集。

- 将满足条件的二维区域数据代入成本检验模型 $V = \pi h(r_d^2 - r_s^2)$ 进行成本检验，求得成本最低的组合。

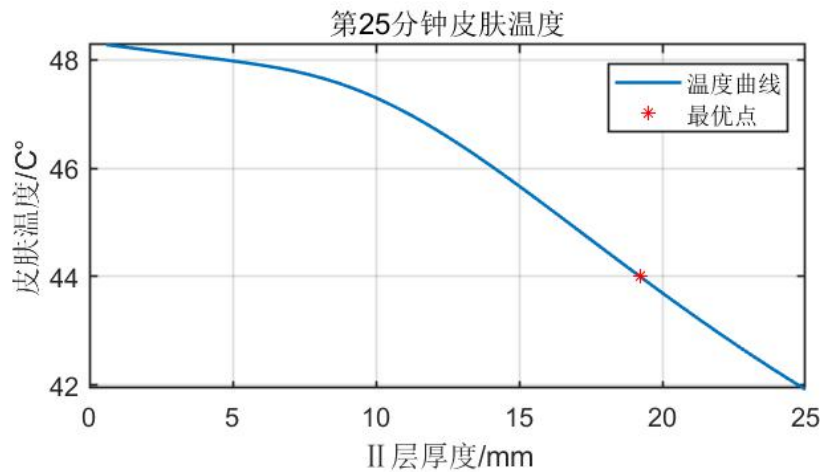


图 9

最后求得，II层织物材料的厚度为 19.3mm，IV层织物材料的厚度为 6.4mm 时，满足约束条件且成本最低。

六、模型评价和推广

模型的优点：

(1) 我们的模型在传热学理论的基础上，使用有限差分方法数值计算出温度分布及时间演化，并与附件所给出数据吻合得非常好。

(2) 对问题二，三的求解简单直观，计算效率高。

(3) 对于问题三，求出了整个符合条件的区域，可自由针对不同优化目标得到不同结果。

模型的缺点：

(1) 本文建立的模型相对条件较为理想，考虑两层织物材料之间的温度是连续的，实际上由于材料的限制和工艺的限制，是达不到这样的条件的，实际情况与本文的假设有偏差。

(2) 本文建立的模型忽略了热辐射的影响，实际上随着温度不断升高，热辐射的影响会增大误差。

(3) 数值分析中的追赶法求出的解是近似解，精确度不是很理想。

七、参考文献

- [1] 蔡志杰.高温作业专用服装设计[J].数学建模及其应用,2019,8(01):44-52+83.
- [2] 陈文斌,程晋,吴新明,等.微分方程数值解[Z]. 上海: 复旦大学出版社,2017
- [3] 卢琳珍. 多层热防护服装的热传递模型及参数最优决定[D].浙江理工大学,2018.

八、附录

1、温度模拟

```
function u =  
General_Simulation(Te,l2,l4,h_1,h_2,t,n)  
%% 初始条件  
m1=6;m2=60;m3=36;m4=50;% 分别对四种介质分割  
m=m1+m2+m3+m4;% 介质分割和  
l1=0.6/1000;l3=3.6/1000;% 四种材料厚度  
lam_1=0.082;lam_2=0.37;lam_3=0.045;lam_4=0.028;%  
四种材料的热传导率  
de_1=300;de_2=862;de_3=74.2;de_4=1.18;% 四种材料的密  
度  
c1=1377;c2=2100;c3=1726;c4=1005;% 四种材料的比热容  
%% 计算热扩散率  
a1=lam_1/(c1*de_1);% I 层材料的热扩散率  
a2=lam_2/(c2*de_2);% II 层材料的热扩散率  
a3=lam_3/(c3*de_3);% III 层材料的热扩散率  
a4=lam_4/(c4*de_4);% IV 层材料的热扩散率  
%% 材料长度分割和时间步长分割求解  
derta_x1=l1/m1;% I 层材料的分割长度  
derta_x2=l2/m2;% II 层材料的分割长度  
derta_x3=l3/m3;% III 层材料的分割长度  
derta_x4=l4/m4;% IV 层材料的分割长度  
derta_t=t/n;% 时间步长分割  
%% 计算各层介质剖分的步长比  
r1=derta_t/derta_x1^2*a1;% 第 I 层介质剖分的步长比  
r2=derta_t/derta_x2^2*a2;% 第 II 层介质剖分的步长比  
r3=derta_t/derta_x3^2*a3;% 第 III 层介质剖分的步长比  
r4=derta_t/derta_x4^2*a4;% 第 IV 层介质剖分的步长比  
u=zeros(m+1,n+1);% 定义四层耦合介质温度分布矩阵 每一列是  
一个 x 轴  
%% 初始条件和边界条件  
u(:,1)=37;%初始条件  
u(1,:)=Te;%边界条件  
%% 差分格式的系数矩阵的构造  
A=zeros(m,m); %m 为总的分割数  
A(1,1)=h_1+lam_1/derta_x1;  
A(1,2)=-lam_1/derta_x1;  
for i=2:m1-1  
    A(i,i)=1+2*r1;
```



```

        A(i,i+1)=-r1;
        A(i,i-1)=-r1;
    end
    %m1 边界值
    A(m1,m1)=(lam_1/derta_x1+lam_2/derta_x2);
    A(m1,m1-1)=-lam_1/derta_x1;
    A(m1,m1+1)=-lam_2/derta_x2;

    %第二个边界
    for i=m1+1:m1+m2-1
        A(i,i)=1+2*r2;
        A(i,i+1)=-r2;
        A(i,i-1)=-r2;
    end
    A(m1+m2,m1+m2)=(lam_2/derta_x2+lam_3/derta_x3);
    A(m1+m2,m1+m2-1)=-lam_2/derta_x2;
    A(m1+m2,m1+m2+1)=-lam_3/derta_x3;

    %第三个边界
    for i=m1+m2+1:m1+m2+m3-1
        A(i,i)=1+2*r3;
        A(i,i+1)=-r3;
        A(i,i-1)=-r3;
    end
    A(m1+m2+m3,m1+m2+m3)=(lam_3/derta_x3+lam_4/derta_x4);
    A(m1+m2+m3,m1+m2+m3-1)=-lam_3/derta_x3;
    A(m1+m2+m3,m1+m2+m3+1)=-lam_4/derta_x4;

    %第四个边界
    for i=m1+m2+m3+1:m1+m2+m3+m4-1
        A(i,i)=1+2*r4;
        A(i,i-1)=-r4;
        A(i,i+1)=-r4;
    end
    A(m,m)=h_2+lam_4/derta_x4;
    A(m,m-1)=-lam_4/derta_x4;

    %% 构造右端项
    for k=2:n+1 % 这里是在遍历时间，矩阵不同列代表 x 轴上各点
        温度，一行是一个时间
        b=zeros(m,1);
        for i=2:m-1 % 时间固定，遍历 x 轴
            b(i,1)=u(i+1,k-1);
        end
    end

```



```

b(1,1)=Te*h_1;
b(m1,1)=0;
b(m1+m2,1)=0;
b(m1+m2+m3,1)=0;
b(m,1)=37*h_2;
% 追赶法求解
bb=diag(A)';
aa=[0,diag(A,-1)'];
c=diag(A,1)';
N=length(bb);
L=zeros(N);
uu0=0;y0=0;aa(1)=0;
L(1)=bb(1)-aa(1)*uu0;
y(1)=(b(1)-y0*aa(1))/L(1);
uu(1)=c(1)/L(1);
for i=2:(N-1)
    L(i)=bb(i)-aa(i)*uu(i-1);
    y(i)=(b(i)-y(i-1)*aa(i))/L(i);
    uu(i)=c(i)/L(i);
end
L(N)=bb(N)-aa(N)*uu(N-1);
y(N)=(b(N)-y(N-1)*aa(N))/L(N);
x(N)=y(N);
for i=(N-1):-1:1
    x(i)=y(i)-uu(i)*x(i+1);
end
u(2:m+1,k)=x';
end
end

```

2、问题二求解

```

close all;
clear,clc;

%% 初始条件
Te=65;
l1=0.6/1000;l3=3.6/1000;% 四种材料厚度
l4=5.5/1000;
lam_1=0.082;lam_2=0.37;lam_3=0.045;lam_4=0.028;%
四种材料的热传导率
n=60*60;% 对时间分割
t=60*60;% 总时长
h_1 = 116.3024;
h_2 = 8.6635;
%% 二分法

```

```

left = 0.6;right = 25;
T=44;
while (left <= right)
    middle = (left+right)/2;
    u =
General_Simulation(Te,middle/1000,l4,h_1,h_2,t,n);
    temp = u(153,t-300);% 找到倒数的第 5min
    if abs(temp-T)<(0.0000001)
        break;
    end
    if temp>T
        left = middle;
    end
    if temp<T
        right = middle;
    end
end
%% 画图的程序
l2 = 0.6:0.1:25;
l2 = l2/1000;
temperature = zeros(size(0.6:0.1:25,2),2);
for i=1:size(0.6:0.1:25,2)
    u =
General_Simulation(Te,l2(i),l4,h_1,h_2,t,n);
    temperature(i,1) = u(153,t);
    temperature(i,2) = u(153,t-300);
end

%% 绘图
subplot(2,1,1)
plot(l2*1000,temperature(:,1),'LineWidth',1.5)
grid on
xlabel('II 层厚度/mm','FontSize',12)
ylabel('皮肤温度/C° ','FontSize',12)
title('第 60 分钟皮肤温度','FontSize',12);
legend('温度曲线')
set(gca, 'LineWidth',1,'FontSize',12);

subplot(2,1,2)
plot(l2*1000,temperature(:,2),'LineWidth',1.5)
grid on
xlabel('II 层厚度/mm','FontSize',12)
ylabel('皮肤温度/C° ','FontSize',12)
title('第 55 分钟皮肤温度','FontSize',12);
set(gca, 'LineWidth',1,'FontSize',12);

```

```

hold on
plot(temp_44,44,'r*','LineWidth',1.5);
legend('温度曲线','最优点')

```

3、问题三求解

```

close all;
clear,clc;

%% 初始条件
Te=80;
l1=0.6/1000;l3=3.6/1000;% 四种材料厚度
lam_1=0.082;lam_2=0.37;lam_3=0.045;lam_4=0.028;%
四种材料的热传导率
n=30*60;% 对时间分割
t=30*60;% 总时长
h_1 = 116.3024;
h_2 = 8.6635;
core = 0.6; % 人的圆柱模拟设置为 1.8m

%% 设置材料 II、IV 的搜索步长
l4 = 0.6:0.1:6.4; % 对应下面的角标 j
l4 = l4/1000;
l2 = 0.6:0.1:25; % 对应下面的角标 i
l2 = l2/1000;

%% 计算温度分布
temperature = zeros(size(l2,2),size(l4,2),2);
for i=1:size(l2,2)
    for j=1:size(l4,2)
        u =
General_Simulation(Te,l2(i),l4(j),h_1,h_2,t,n);
        temperature(i,j,1) = u(end,end);
        temperature(i,j,2) = u(end,end-5*60);
    end
end
[x,y] = meshgrid(l4*1000,l2*1000);
stand = 47*ones(size(l2,2),size(l4,2));
surf(x,y,temperature(:,:,1));
hold on
plot3(x,y,stand,'r')
shading interp

xlabel('IV层厚度/mm','FontSize',12)
ylabel('II层厚度/mm','FontSize',12)

```

```

xlabel('皮肤温度/C° ', 'FontSize', 12)
title('第 30 分钟皮肤温度', 'FontSize', 12);
set(gca, 'LineWidth', 1, 'FontSize', 12);

%% 计算可行解
% load temperature
mask = temperature(:, :, 2) <= 44;
v = zeros(sum(sum(mask)), 3);
index=0;
for i=1:size(mask, 1)
    for j=1:size(mask, 2)
        if mask(i, j) ~= 0
            index=index+1;

v(index, 1)=CalcuVolume(l1, l2(i), l3, l4(j), core);
            v(index, 2)=l2(i); v(index, 3)=l4(j);
        end
    end
end
[~, index]=min(v(:, 1)); % 得到成本最小的点

```